

Granice „splątanych” ciągów rekurencyjnych

*kontakt: gornicki59@gmail.com

Ciąg Fibonacciego określony jest przez rekurencję $F_0 = 0, F_1 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n > 1$. Pisaliśmy o nim np. w $\Delta_{79}^1, \Delta_{20}^6, \Delta_{22}^4$.

Przy okazji przedstawienia różnych średnich zapytajmy, jaka jest średnia prędkość podróży samochodem, który pierwszą połowę drogi pokonuje z prędkością v_1 , a drugą z prędkością v_2 . Odpowiedzią jest właśnie $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Dla przykładu, w przypadku (a) nierówność (2) przybiera postać

$$a_n < \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} < \frac{a_n+b_n}{2} < b_n,$$

co wynika z (1). Skrajne nierówności można łatwo uzasadnić:

$$a_n = \frac{2a_nb_n}{b_n+b_n} < \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},$$
$$\frac{1}{2}(a_n + b_n) < \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n.$$

Kontynuując przykład, w przypadku (a) liczby $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ oraz $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ mieszczą się w przedziale $(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$.

Twierdzenie (G. Cantor, 1880). *Jeżeli $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots$ jest ciągiem niepustych domkniętych przedziałów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$, których długości dążą do zera, to przecięcie $[a, b] \cap [a_1, b_1] \cap \dots$ zawiera dokładnie jeden punkt.*

Jarosław GÓRNICKI*

Procedurę, która wymaga wywołania samej siebie, nazywamy *rekurencją*. Tego typu sytuacje występują w informatyce i matematyce dość często, klasycznym przykładem jest rekurencyjna definicja ciągu Fibonacciego. W tym artykule przyglądamy się zbieżności kilku ciągów rekurencyjnych generowanych przez klasyczne średnie dwóch liczb dodatnich. Będziemy się przyglądać temu zagadnieniu od strony czysto analitycznej, warto jednak zaznaczyć, że poruszone tu kwestie mają pewne odzwierciedlenie w metodach numerycznych.

Ustalmy $0 < a < b$. Jak wiadomo, zachodzą wówczas nierówności

$$(1) \quad a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

(przypadku $a = b$ nie będziemy dyskutować, bo wtedy wszystkie te wielkości są równe). Niech $a_0 = a, b_0 = b$. Ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ określamy wzorami ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$(a) \quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$
$$(b) \quad a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$
$$(c) \quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n},$$
$$(d) \quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{\frac{a_n+b_n}{2} \cdot b_n}.$$

Problem. *Czy ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, a jeśli tak, to jakie są ich granice?*

Najpierw pokażemy, że w każdym z tych przypadków ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne oraz $\lim a_n = \lim b_n$. Zrobimy to niejako „za jednym zamachem”, mając na uwadze nierówności (1). W jasny sposób wynika z nich, że w każdym z przypadków (a)–(d) dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$(2) \quad a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n,$$

Udowodnimy, że w każdym z przypadków (a)–(d) zachodzi ponadto

$$(3) \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| < \frac{1}{2}|a_n - b_n|.$$

Istotnie, w przypadkach (a)–(c) liczby a_{n+1} i b_{n+1} leżą w przedziale $(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ o długości $\frac{1}{2}|a_n - b_n|$. W przypadku (d) liczby te leżą w przedziale $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n)$ o tej samej długości.

Oczywiście warunek (2) gwarantuje zbieżność występujących tam ciągów, ale nas interesuje wynikająca z niego zależność $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Z warunku (3) wynika, że długości tych przedziałów dążą do zera. Zatem w każdym przypadku twierdzenie Cantora zapewnia, że przecięcie $[a, b] \cap [a_1, b_1] \cap \dots$ zawiera dokładnie jeden punkt, który jest wspólną granicą ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$.

Pozostał problem wyznaczenia tych granic, jeśli jest to możliwe.

W sytuacji (a) mamy $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \dots = a_1b_1 = ab$. Zatem jeśli $\alpha = \lim a_n = \lim b_n$, to

$$\alpha^2 = \lim a_n \cdot \lim b_n = \lim(a_nb_n) = ab$$

i $\alpha = \sqrt{ab}$. Niestety pozostałe przypadki są bardziej wymagające.

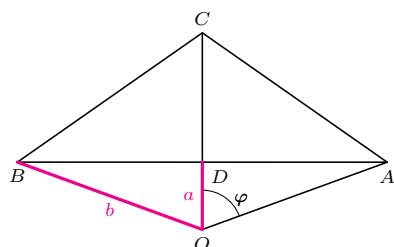
W przypadku (b) wspólną granicę ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ oznaczamy symbolem $M(a, b)$, a w przypadku (c) symbolem $N(a, b)$. Ponieważ w przypadku (c)

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right), \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{b_n}},$$

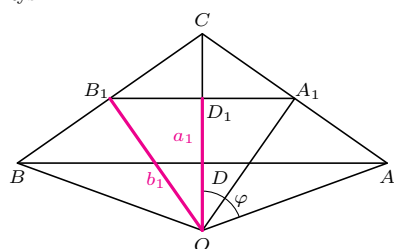
wiec granice $M(\cdot, \cdot)$ i $N(\cdot, \cdot)$ wiąże zależność $M(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = \frac{1}{N(a, b)}$. Niestety dokładnej wartości tych granic nie potrafimy wyznaczyć! W 1800 roku Carl Gauss zauważył, że ciągi opisane wzorami (b) są bardzo szybko zbieżne, i pokazał,

O odkryciu Gaussa można przeczytać w artykule Jarosława Górnickiego w Δ_{22}^6 .

Na temat zbieżności ciągów postaci (d) Gauss prowadził korespondencję z Johannem Pfaffem.



Rys. 1



Rys. 2.

W ten sposób liczby a_1 i b_1 otrzymujemy z liczb a i b przy pomocy prostej konstrukcji geometrycznej (rys. 2). Jednocześnie w tej konstrukcji przeszliśmy od trójkąta OAB (gdzie $|OA| = |OB| = b$, $|OD| = a$) do trójkąta OA_1B_1 (gdzie $|OA_1| = |OB_1| = b_1$, $|OD_1| = a_1$), w którym

$$\sphericalangle A_1OB_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \varphi \text{ i } |A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Powtarzając tę konstrukcję n razy, otrzymamy „wąski” trójkąt OA_nB_n , w którym

$$|OA_n| = |OB_n| = b_n, \quad |OD_n| = a_n,$$

$$(4) \quad \sphericalangle A_nOB_n = \frac{1}{2^n} \sphericalangle AOB, \quad |A_nB_n| = \frac{1}{2^n}|AB|.$$

Kreślimy teraz łuk okręgu o promieniu b_n , o środku w punkcie O i kącie środkowym $\sphericalangle A_nOB_n = 2\varphi$. Dzieląc ten łuk na 2^n przystających łuków, łącząc kolejno punkty podziału cięciwami, otrzymamy „wachlarz” złożony z 2^n przystających kopii trójkąta A_nOB_n .

Dostajemy w ten sposób „wycinek wielokąta foremnego” mający 2^n boków (o kącie środkowym $\sphericalangle A_nOB_n$), których łączna długość jest równa $|AB|$. Okręgi, o środku w punkcie O , opisane na tym wielokącie i wpisane w ten wielokąt mają promienie b_n i a_n , odpowiednio. Ponieważ długość łamanej (równa $|AB|$) zawiera się między długościami łuków okręgów wpisanego i opisanego, więc

$$2\varphi \cdot a_n < |AB| < 2\varphi \cdot b_n.$$

jak można je wykorzystać do obliczania przybliżonej wartości pewnych całek eliptycznych, których dokładnej wartości (na ogół) nie znamy. Gauss, mając 23 lata, wykazał równość

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \frac{1}{M(a, b)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

W latach 1799–1800 Gauss podał, że w przypadku (d) wspólna granica ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jest równa $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}$. Wykażemy to na drodze elementarnych rozważań geometrycznych, korzystając z rozważań inspirowanych obserwacją Jacques’a Schwaba z 1813 roku (J. Schwab, *Éléments de Géométrie*, Première Partie, Géométrie Plane, Nancy, 1813):

Niech P będzie n -kątem foremnym i niech P_1 będzie $2n$ -kątem foremnym, oba o tych samych obwodach. Jeżeli a i b są promieniami okręgów wpisanego i opisanego na wielokącie P , a a_1 i b_1 oznaczają analogiczne wielkości dla wielokąta P_1 , to $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{a_1 b}$.

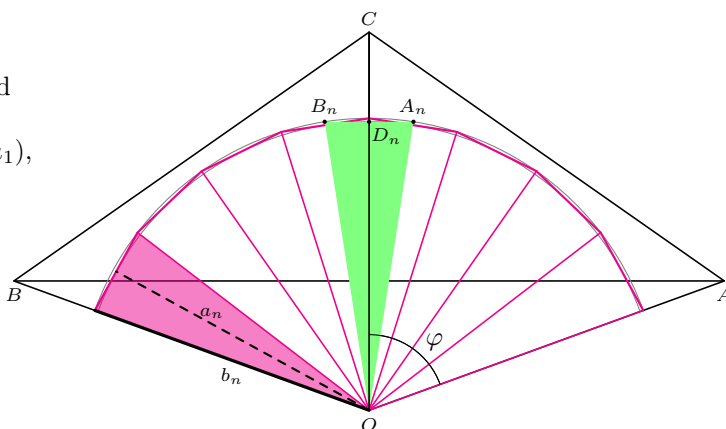
Kreślimy trójkąt równoramienny OAB , w którym $|OA| = |OB| = b$ i wysokość $|OD|$ jest równa a (rys. 1). Niech $\sphericalangle AOB = 2\varphi$. Na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu b (opartym na kącie środkowym $\sphericalangle AOB$) wyznaczamy punkt C taki, że $|AC| = |CB|$.

Niech A_1 i B_1 będą środkami odcinków AC i CB , odpowiednio. Niech D_1 będzie punktem przecięcia odcinka A_1B_1 z odcinkiem OC . Ponieważ D_1 jest środkiem odcinka DC , więc

$$|OD_1| = \frac{1}{2}(|OC| + |OD|) = \frac{1}{2}(b + a) = a_1.$$

Trójkąt OA_1C jest prostokątny, a A_1D_1 jest jego wysokością, w związku z tym $\frac{|OA_1|}{|OC|} = \frac{|OD_1|}{|OA_1|}$, a zatem

$$|OA_1| = \sqrt{|OD_1| \cdot |OC|} = \sqrt{a_1 b} = b_1.$$



Przy $n \rightarrow \infty$ mamy $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$, zatem

$$|AB| = 2\varphi \cdot \alpha, \text{ skąd } \alpha = \frac{|AB|}{2\varphi} = \frac{|AD|}{\varphi}.$$

Ponieważ trójkąt OAD jest prostokątny, więc

$$|AD| = \sqrt{b^2 - a^2} \text{ oraz } \cos \varphi = \frac{|OD|}{b} = \frac{a}{b},$$

dlatego ostatecznie

$$\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}.$$

Zauważmy jeszcze, że dla $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ otrzymujemy $\alpha = \frac{2}{\pi}$, więc ciągi (d) pozwalają nam obliczać przybliżoną wartość π .

Czasem potrafimy coś obliczyć... i to bez komputera!