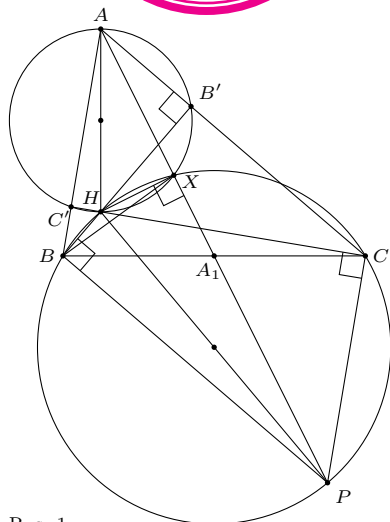
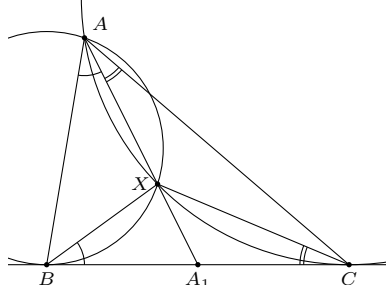




Rys. 1



Rys. 2

Humpty...

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ten i następny odcinek powstały na podstawie notatek mojej uczennicy, Aleksandry Żyniewicz, której bardzo dziękuję za ich udostępnienie. Głównym bohaterem jest punkt zwany pieszczotliwie *Humptym*.

Kilka oznaczeń czyniących życie przyjemniejszym. Okrąg o średnicy XY będziemy oznaczać $\odot(XY)$, zaś przez $\odot(XYZ)$ będziemy rozumieć okrąg opisany na trójkącie XYZ . W trójkącie ABC punkty G, O, H oznaczają, odpowiednio, środek ciężkości, środek okręgu opisanego i ortocentrum; ponadto przez A', B', C' będziemy oznaczać spodki wysokości poprowadzonych z odpowiednich wierzchołków, a przez A_1, B_1, C_1 – środki boków naprzeciw tych wierzchołków.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku trójkąta ostrokątnego. W rozwartokątnym sytuacja wygląda podobnie, jeżeli dobrze rozumieć odpowiednie kąty.

Twierdzenie. Każda z poniższych definicji określa jednoznacznie ten sam punkt X :

- (1) rzut prostokątny punktu H na prostą AA_1 ;
- (2) różny od H punkt przecięcia $\odot(AH)$ i $\odot(BCH)$ (lub punkt H , gdy te okręgi są styczne);
- (3) punkt X spełniający równości $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle CBX|$ i $|\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle BCX|$;
- (4) punkt X , dla którego $\odot(ABX)$ i $\odot(ACX)$ są styczne do prostej BC .

Dowód. Niech P będzie punktem symetrycznym do A względem A_1 . Czworokąt $ABPC$ jest równoległobokiem, więc $BP \perp BH$ oraz $CP \perp CH$, a zatem punkt P należy do $\odot(BCH)$ oraz $\odot(BCH) = \odot(PH)$ (rys. 1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Wystarczy zauważyć, że rzut punktu H na prostą AA_1 jest drugim punktem wspólnym okręgów $\odot(AH)$ i $\odot(PH)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Mamy $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle CHX| = |\sphericalangle CBX|$ – pierwsza równość wynika z własności kąta zewnętrznego H czworokąta $AXHC'$ wpisanego w okrąg (ma taką samą miarę co przeciwległy kąt wewnętrzny); druga ze wspólnego łuku CX . Analogicznie dowodzimy równości $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle XCB|$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Ponieważ

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CPB| &= |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAX| + |\sphericalangle XAC| \\ &= |\sphericalangle CBX| + |\sphericalangle XCB| = 180^\circ - |\sphericalangle BXC|, \end{aligned}$$

widzimy, że $X \in \odot(PH)$, zatem $|\sphericalangle HXP| = 90^\circ$.

Z równości $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle XPB|$ wynika, że punkt X leży na prostej AP (czyli na AA_1). Stąd X jest rzutem prostokątnym punktu H na prostą AA_1 .

(3) $\iff$ (4) Równoważność wynika natychmiast z (obustronnego!) twierdzenia o stycznej i cięciwie (rys. 2).

Punkt X spełniający którąkolwiek (a zatem i wszystkie) spośród definicji (1)–(4) nazywamy punktem *A-Humpty* trójkąta ABC . Będziemy go oznaczać H_A , analogicznie definiujemy punkty H_B i H_C .

Zadania

1. Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym ABC punkty G, H, H_A, H_B, H_C leżą na jednym okręgu.
2. Symediana poprowadzona z wierzchołka A trójkąta ostrokątnego ABC przecina $\odot(ABC)$ w punkcie $K \neq A$. Punkt K' jest symetryczny do K względem prostej BC . Wykazać, że punkt K' leży na prostej AA_1 (symediany to proste izogonalnie sprzężone do środkowych – zob. kącik nr 86 w Δ_{26}^1).
3. Rozważmy trójkąt ostrokątny ABC . Niech B, C, R, S będą czterema różnymi punktami na prostej BC . Dowieść, że punkty A, H_A, R, S leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki BC i RS są sprzężone harmonicznie (zob. kącik nr 81 w Δ_{25}^9).
4. Dany jest trójkąt ostrokątny, różnoboczny ABC . Punkt K_A jest spodkiem dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku A , a punkt L_A – zewnętrznego. Okrąg opisany na trójkącie AK_AL_A przecina prostą AA_1 w punkcie $X_A \neq A$. Punkty X_B i X_C są określone analogicznie. Wykazać, że środek $\odot(X_AX_BX_C)$ leży na prostej Eulera trójkąta ABC (zob. kącik nr 22 w Δ_{20}^{10}).

Wskazówki do zadań

1. Jest to okrąg o średnicy HG .
2. Z pomocą (3) można wykazać, że $K' = H_A$.
3. Zgodnie z własnością (4) zachodzą równości: $|A_1B|^2 = |A_1A| \cdot |A_1H_A| = |A_1R| \cdot |A_1S|$ (por. kącik nr 11 w Δ_{16}^{10}). Pozostaje skorzystać z zadania 1(c) z przytoczonego (por. kącik nr 81 w Δ_{25}^9).
4. Odcinki BC i K_AL_A są harmonicznie sprzężone (dla czego? – można skorzystać z poprzedniego zadania).