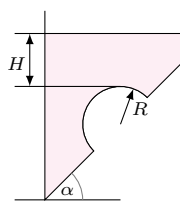


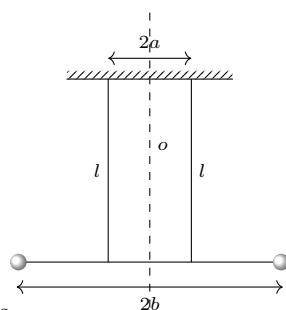
Klub 44 F



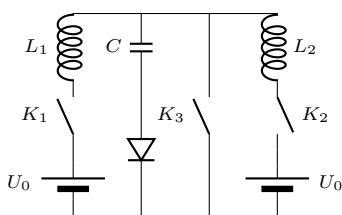
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2026



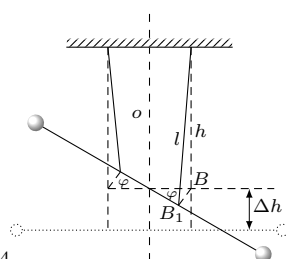
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 814, 815

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

814. Dno naczynia nachylone jest pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. W dnie znajduje się półsferyczna wypukłość o promieniu R (rys. 1). Wysokość słupa cieczy nad wypukłością wynosi H . Jaką siłą działa ciecz w kierunku pionowym na wypukłą część dna? Gęstość cieczy jest równa ρ .

815. Należy przeprowadzić gaz doskonały ze stanu 1 o temperaturze T_1 do stanu 2 o temperaturze $T_2 > T_1$ w taki sposób, aby temperatura w ciągu całego procesu odwracalnego $1 \rightarrow 2$ nie malała, a gaz nie oddawał ciepła. Minimalna ilość ciepła, jaką może pobrać gaz w opisanym procesie, wynosi Q_1 . Jaka może być maksymalna ilość tego ciepła?

Rozwiązania zadań z numeru 11/2025

Przypominamy treść zadań:

806. Hantla składa się z dwóch jednakowych małych kulek o masach m , zaczepionych na końcach lekkiego pręta i jest zawieszona w położeniu poziomym na dwóch nierozciągliwych niciach o długości l , oddalonych od siebie o $2a$ (rys. 2). Odległość między kulkami wynosi $2b$. Znaleźć okres małych drgań skrętnych tej hantli.

807. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 klucz K_3 jest na początku zamknięty, a klucze K_1 i K_2 otwarte. W pewnej chwili zamknięto klucz K_1 , a po czasie $t_1 = 0,1$ s zamknięto klucz K_2 . Po kolejnym czasie $t_2 = 0,2$ s otwarto klucz K_3 . Znaleźć: 1) natężenie prądu przez cewkę L_1 po długim czasie od zamknięcia klucza K_1 ; 2) maksymalne napięcie na kondensatorze. Opory omowe zanedbujemy, dioda jest idealna. Przyjmujemy $L_1 = 1$ H, $L_2 = 0,5$ H, $C = 10$ μ F, $U_0 = 10$ V.

806. Podczas drgań skrętnych hantla obraca się wokół osi o . Kąt obrotu oznaczmy przez φ (rys. 4). Podczas obrotu środek ciężkości hantli podnosi się o h względem położenia równowagi. Z rysunku 4: $\Delta h = l - h$, gdzie $h = \sqrt{l^2 - |BB_1|^2}$. $|BB_1| = a\varphi$, ponieważ kąt φ jest mały, więc $l^2 - h^2 = a^2\varphi^2 \Rightarrow a^2\varphi^2 = \Delta h(l + h)$, $\Delta h = a^2\varphi^2/(l + h) \cong a^2\varphi^2/2l$. Energia potencjalna hantli (mierzona od położenia równowagi) zależy od kąta obrotu zgodnie z wzorem:

$$(1) \quad E_p(\varphi) = 2mg\Delta h = mga^2\varphi^2/l.$$

Przy małych drganiach możemy zanedbać składowe pionowe prędkości kulek i przyjąć, że wektory prędkości leżą w płaszczyźnie poziomej i mają jednakowe wartości:

$v = b\omega(\varphi) = bd\varphi/dt$, gdzie $\omega(\varphi)$ to prędkość kątowa obrotu kulki. Energia kinetyczna hantli zależy od kąta obrotu zgodnie z wzorem:

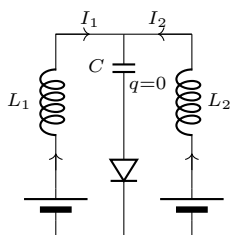
$$(2) \quad E_k(\varphi) = 2mv^2/2 = mb^2(d\varphi/dt)^2.$$

Wzory (1) i (2) są analogiczne do wzorów opisujących energię potencjalną i kinetyczną ciężarka o masie M , drgającego na sprężynie o współczynniku sprężystości k :

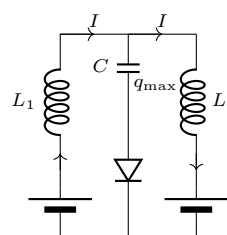
$E_p(x) = kx^2/2$, $E_k(x) = M(dx/dt)^2/2$, gdzie x jest wychyleniem ciężarka z położenia równowagi. Korzystając z tej analogii, możemy zapisać wzory (1), (2) w postaci:

$E_p(x) = mga^2x^2/lb^2$, gdzie $x = b\varphi$, stąd $k = 2mga/lb^2$. $E_k(x) = m(dx/dt)^2/2$, gdzie $M = 2m$. Okres małych drgań skrętnych hantli wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

807. Po zamknięciu klucza K_1 w cewce L_1 zaczyna płynąć prąd, który rośnie liniowo z czasem: $L_1 dI_1/dt = U_0$, $I_1 = U_0 t/L_1$. Podobnie jest w cewce L_2 po zamknięciu klucza K_2 . W chwili otwarcia klucza K_3 (rys. 5) $I_1 = U_0(t_1 + t_2)/L_1 = 3$ A, $I_2 = U_0 t_2/L_2 = 4$ A. Gdy ładunek kondensatora osiągnie wartość maksymalną (która pozostanie stała, ze względu na diodę) przez obie cewki będzie płynął taki sam prąd I (rys. 6). Napięcie baterijek kompensuje się, nie ma oporów omowych, dlatego strumień pola magnetycznego w obwodzie nie zmienia się: $L_1 I_1 - L_2 I_2 = L_1 I + L_2 I$, stąd szukane natężenie prądu płynącego przez cewkę L_1 wynosi $I = (L_1 I_1 - L_2 I_2)/(L_1 + L_2) = 2/3$ A. Od chwili zamknięcia klucza do ustalenia się maksymalnego ładunku na kondensatorze baterijki wykonały pracę $W = q_{\max} U_0$. Z zasady zachowania energii: $L_1 I_1^2/2 + L_2 I_2^2/2 + W = (L_1 + L_2)I^2/2 + q_{\max}^2/2C$, stąd $q_{\max} \cong 1,3 \cdot 10^{-2}$ C. Maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $U_{\max} = q_{\max}/C = 1300$ V.

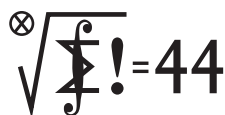


Rys. 5



Rys. 6

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2026

Zadania z matematyki nr 917, 918

Redaguje Marcin E. KUCZMA

917. Znaleźć największą liczbę c , mającą tę własność, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n oraz dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $|x^n - 1| \geq c|x - 1|$.

918. W trójkącie ABC punkty D, E, F są spodkami wysokości AD, BE, CF . Proste DE i CF przecinają się w punkcie G . Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie ABG przechodzi przez środek odcinka DE .

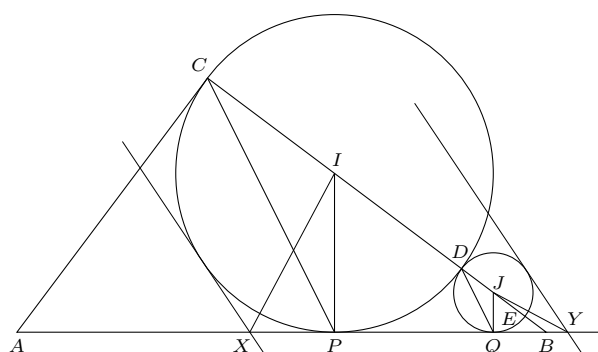
Zadanie 918 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2025

Przypominamy treść zadań:

909. Trójkąt prostokątny ABC ma boki $AB = 5a, BC = 4a, CA = 3a$ ($a =$ jednostka długości). Na boku BC leżą punkty D, E takie, że okręgi o średnicach CD i DE są styczne do boku AB odpowiednio w punktach P i Q . Przez dowolnie wybrany punkt X na odcinku AP prowadzimy prostą (różną od AP) styczną do okręgu CPD . Równoległa do niej prosta styczna do okręgu DQE przecina półprostą QB w punkcie Y . Wyznaczyć minimalną długość odcinka XY , gdy punkt X zmienia swoje położenie na odcinku AP .

910. Rozważamy graf skierowany o nieskończenie wielu wierzchołkach ponumerowanych wszystkimi liczbami całkowitymi nieujemnymi. Krawędź zorientowana od wierzchołka ℓ do wierzchołka m prowadzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < m - \ell \leq 3$ oraz dokładnie jedna z liczb $m - \ell, m\ell$ jest podzielna przez 3. Dla każdej liczby naturalnej n obliczyć, ile jest ścieżek prowadzących od wierzchołka 0 do wierzchołka $3n$.



909. Oznaczmy środki okręgów CPD, DQE odpowiednio przez I, J . Kąt BCA jest prosty, zatem okrąg CPD jest styczny do prostej AC , skąd wniosek, że $AP = AC = 3a, BP = 2a$. Z podobieństwa $\triangle BIP \sim \triangle BAC$ wynikają proporcje $\frac{IP}{BP} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$, wobec czego $IP = \frac{3}{2}a$. To promień okręgu CPD ; tę samą długość mają promienie IC, ID , skąd $CD = 3a$ i $BD = a$.

Równoramienne trójkąty CIP, DJQ , o równoległych bokach IP, JQ , też są podobne. Zatem $CP \parallel DQ$ i na mocy twierdzenia Talesa $\frac{BQ}{BP} = \frac{BD}{BC} = \frac{JQ}{IP} = \frac{1}{4}$. Uzyskujemy równości $PQ = \frac{3}{2}a$ oraz $JQ = \frac{3}{8}a$.

Półproste XI i YJ to dwusieczne kątów (ostrego i rozwartego), jakie tworzy prosta AB z kierunkiem dwóch prostych równoległych (stycznych do danych okręgów, zgodnie z treścią zadania). Zatem $XI \perp YJ$ i dlatego $\triangle IPX \sim \triangle YQJ$ (trójkąty o bokach odpowiednio prostopadłych). Stąd $\frac{PX}{QJ} = \frac{IP}{YQ}$, czyli $PX \cdot QY = IP \cdot QJ = \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{8}a$. W takim razie

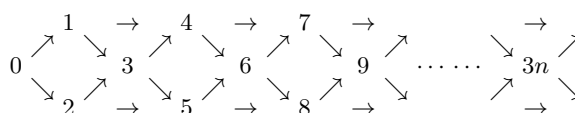
$$PX + QY \geq 2\sqrt{PX \cdot QY} = \frac{3}{2}a$$

(średnia arytmetyczna i geometryczna) i ostatecznie (skoro $PQ = \frac{3}{2}a$):

$$XY = XP + PQ + QY \geq 3a.$$

Równość jest osiągnięta, gdy $PX = QY = \frac{3}{4}a$, czyli gdy $\angle IXP = 2$. Tak więc $3a$ to szukane minimum.

910. Oznaczmy przez x_n, y_n, z_n (dla $n \geq 1$) liczbę ścieżek (odpowiednio) od wierzchołka 0 do wierzchołka z etykietą $3n-2, 3n-1, 3n$; zadanie pyta o wartość z_n . Do każdego z wierzchołków 1 i 2 wchodzi jedna krawędź od punktu 0, więc $x_1 = y_1 = 1$. Ogólnie, z warunków zadania wynika (dla $n \geq 2$), że do punktu $3n-2$ wchodzi krawędzie z punktów $3n-5$ i $3n-3$, zaś do punktu $3n-1$ wchodzi krawędzie z punktów $3n-4$ i $3n-3$; natomiast (dla $n \geq 1$) do punktu $3n$ wchodzi krawędzie z punktów $3n-2$ i $3n-1$.



To daje zależności rekurencyjne

$$x_n = x_{n-1} + z_{n-1}, \quad y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 2);$$

$$z_n = x_n + y_n \quad (\text{dla } n \geq 1).$$

W ostatnim z tych wzorów możemy cofnąć numerek i uzyskaną równość $z_{n-1} = x_{n-1} + y_{n-1}$ (dla $n \geq 2$) wstawić do dwóch poprzednich wzorów, otrzymując:

$$x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 2).$$

Przez oczywistą indukcję (z bazą $x_1 = y_1 = 1$):

$x_n = y_n = 3x_{n-1} = 3^{n-1}$. Stąd odpowiedź na postawione pytanie: $z_n = x_n + y_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Skrypt regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.