

Oczywiście możemy przyjąć, że początkowa lista kolorów jest nieskończona, ale wystarczy się ograniczyć do liczby kolorów nie większej niż liczba wierzchołków danego grafu – poza pewnymi szczególnymi przypadkami nie użyjemy ich wszystkich!

Grafem nazywamy obiekt złożony z wierzchołków (punktów) i – łączących niektóre z nich – krawędzi (linii). Zakładamy, że dowolne dwa wierzchołki mogą być połączone co najwyżej jedną krawędzią i że żaden wierzchołek nie jest połączony krawędzią z samym sobą. Dwa wierzchołki nazywamy *sąsiednimi*, jeżeli są połączone krawędzią. Na marginesie widzicie rysunek przykładowego grafu, którego zbiorem wierzchołków jest  $\{a, b, d, i, k, r, s, u, z\}$ .

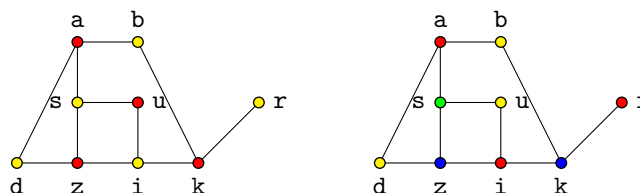
Rozważmy zadanie polegające na pokolorowaniu każdego wierzchołka grafu tak, aby żadne dwa sąsiednie nie miały tego samego koloru. Tak postawiony problem jest trywialny – aby spełnić przedstawiony warunek, wystarczy każdemu wierzchołkowi nadać unikatowy kolor. Co jednak, gdy chcemy użyć mniej kolorów niż mamy wierzchołków, a wręcz: możliwie jak najmniej? To zadanie jest już znacznie trudniejsze i jednym z pomocnych narzędzi jest algorytm *first-fit*:

1. Ustawmy zbiór kolorów w ciąg  $(c_1, c_2, \dots)$  – dzięki temu będziemy mogli mówić o kolorze *pierwszym*, *drugim* itd.
2. Ustawmy zbiór wierzchołków  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  w ciąg  $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ .
3. Dla  $1 \leq i \leq n$  kolorujemy wierzchołek  $v_{\pi(i)}$  najmniejszym **dostępnym** kolorem.

Zauważmy, że liczba kolorów użytych przy *first-fit* może zależeć od wyboru ciągu wierzchołków! Zobrazujmy to na naszym przykładowym grafie. Dany niech będzie ciąg kolorów

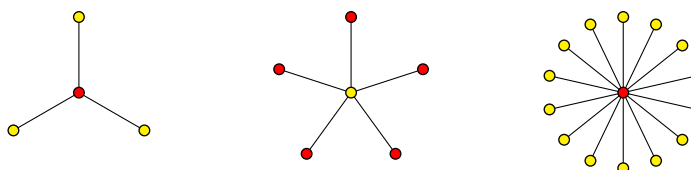
(●, ●, ●, ●, ●, ●, ●, ●, ○).

Przy kolejności  $(a, b, s, d, u, z, k, r, i)$  używamy tylko dwóch kolorów, a przy  $(a, i, u, d, z, s, b, k, r)$  – czterech!



Gwiazdą nazywamy graf, w którym jedynymi krawędziami są te, które łączą jeden wyróżniony wierzchołek z pozostałymi.

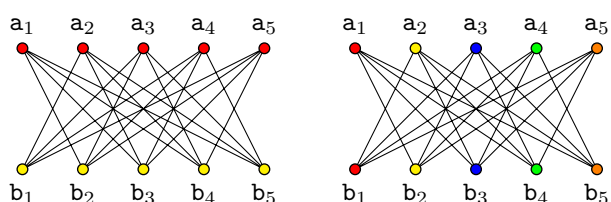
Oczywiście istnieją takie grafy, w których niezależnie od kolejności wierzchołków, użyjemy takiej samej liczby kolorów – poświadczyć o tym mogą chociażby *gwiazdy*:



A czy różnica pomiędzy najmniejszą a największą liczbą kolorów względem algorytmu *first-fit* może być dowolnie duża? Aby uzasadnić odpowiedź twierdzącą, posłużymy się następującą konstrukcją.

Niech  $n \geq 3$ . Rozważmy graf, którego zbiór wierzchołków składa się z dwóch równolicznych i rozłącznych podzbiorów:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  oraz  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Każdy wierzchołek  $a_i$  łączymy krawędzią z każdym wierzchołkiem  $b_j$ , o ile  $i \neq j$ .

Zauważmy, że dla takiego grafu najmniejsza liczba kolorów użytych przez *first-fit* to 2, a największa to  $n$ . Na marginesie prezentujemy to dla  $n = 5$ .



Czytelnikowi pozostawiam opisanie doboru kolejności kolorowania wierzchołków w obu przedstawionych przypadkach.

Najmniejsza możliwa liczba kolorów uzyskana dzięki algorytmowi *first-fit* to tzw. *liczba chromatyczna*, a największa – *liczba Grundy'ego* danego grafu. Zachęcam do samodzielnego poszukiwania zależności między tymi dwiema wartościami!