

Daj mi jedno słowo...

Michał MIŚKIEWICZ

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Opisane tu wydarzenia nie miały miejsca w rzeczywistości. Ale mogły, niewiele brakowało.

Dużą część wakacji spędzam z rodziną w Jantarze koło Stegny. Chcąc nie chcąc, oprócz uroków morza chłonę tam disco polo dobiegające z budek z zakręconymi frytkami, smażalni oraz meleksów – zwłaszcza te ostatnie trudno zignorować, bo mijaniu jadącego meleksa towarzyszy charakterystyczny efekt „zdławienia” muzyki. Hitem lata 2025 było *Daj mi jedno słowo*. Jest to taneczny utwór o tematyce romantycznej, którego emocjonalny charakter podkreśla modulacja – ostatnie powtórzenie refrenu jest śpiewane o pół tonu wyżej niż wszystkie poprzednie. Po pewnym czasie znalazłem już tę piosenkę na pamięć.



Większość utworu jest w tonacji h-moll, ale ostatni refren w c-moll, czyli pół tonu wyżej

Pewnego razu zamyślony siedziałem na ławeczce przy ulicy Morskiej, a przejeżdżający meleks grał to, co zawsze. Dopiero gdy przejechał, a piosenka dobiegła końca, zauważyłem, że tym razem wcale nie usłyszałem modulacji – każdy refren był na tej samej wysokości. Chwilę trwało, zanim do mnie dotarło, czego właśnie byłem świadkiem.

Efekt Dopplera! To właśnie on powoduje, że dźwięk wydaje się wyższy, gdy jego źródło się do nas zbliża, a niższy, gdy się oddala. W mieście najczęściej ten efekt zauważamy, gdy mija nas karetka na sygnale, ale głośne meleksy nad morzem podlegają tej samej prawidłowości. Jeśli stoimy w pewnej odległości od trasy pojazdu, to zmiana częstotliwości jest dość płynna, i stąd wspomniany efekt „dławienia” muzyki, ale przy mijaniu z bliska zmiana jest skokowa. W przytoczonej wyżej historii meleks najwidoczniej mijał mnie dokładnie w momencie modulacji, a efekt Dopplera obniżył słyszane przeze mnie dźwięki dokładnie o pół tonu, tak że nie odnotowałem żadnej zmiany w melodii. Powstaje naturalne pytanie:

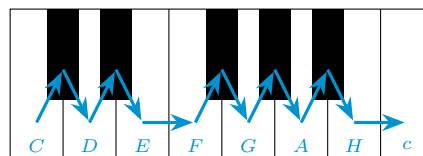
Z jaką prędkością jechał meleks?

Żeby odpowiedzieć, sięgnijmy po odpowiednie formuły. Przyjmijmy, że meleks oddala się z prędkością v i emituje dźwięk o okresie T . Jeśli w punkcie A właśnie wysyła czoło fali, to następne czoło wyśle w punkcie B oddalonym o $d = T \cdot v$. Zanim to czoło dotrze do punktu A , minie czas $\Delta T = \frac{d}{c} = T \cdot \frac{v}{c}$, gdzie c to prędkość dźwięku. To jest właśnie szukana wartość opóźnienia – słyszany przeze mnie dźwięk będzie miał okres $T + \Delta T$, a więc częstotliwość $f_- = \frac{1}{T + \Delta T} = \frac{f}{1 + v/c}$, która jest mniejsza od wyjściowej częstotliwości $f = \frac{1}{T}$.



W przypadku zbliżania się jest podobnie, ale ΔT ma przeciwny znak, i w rezultacie słyszany dźwięk ma częstotliwość $f_+ = \frac{f}{1 - v/c}$, większą od wyjściowej. Ostatecznie więc różnica w odbiorze przed i po minięciu meleksa wyraża się przez iloraz $\frac{f_+}{f_-} = \frac{1 + v/c}{1 - v/c}$. Ma on odpowiadać jednemu półtonowi... czyli czemu?

Ile to jest półton? Dźwięki oddległe o oktawę mają częstotliwości będące w stosunku 1 : 2, np. C odpowiada 65,4 Hz, zaś c to 130,8 Hz. W stroju równomiernie temperowanym oktawę dzielimy na 12 równych półtonów – równych w tym sensie, że częstotliwości dwóch kolejnych dźwięków są zawsze w tym samym stosunku. Oznacza to, że do rozwiązania mamy równanie $(f_+/f_-)^{12} = 2$, czyli $f_+/f_- = 2^{1/12}$.



Chwila rachunków prowadzi nas do wyniku $\frac{v}{c} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$, przy oznaczeniu $\beta := 2^{1/12}$. Uff, sprawa rozwiązana!

Obliczenia na plaży to jednak nie tak łatwa sprawa. Smartfon został w domu, bo i tak nie ma zasięgu, więc musiałem sobie poradzić bez kalkulatora. Przyda się więc garść przybliżeń i mnemotechnik.

Po pierwsze, elementarz każdego plażowicza uczy nas, jak ocenić dystans do nadciągającej burzy. Mianowicie każde 3 sekundy między błyskawicą a grzmotem oznaczają około 1 kilometra odległości. To oznacza, że prędkość dźwięku to mniej więcej $c \approx \frac{1 \text{ km}}{\frac{3}{3600} \text{ h}} = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (przyjeliśmy tu, że czas dotarcia światła od pioruna do nas jest zanedbywalnie krótki).

Skoro znamy c , to pozostaje wyznaczyć v/c , a to już tylko obliczenia. Półton to niewiele, a więc $\beta \approx 1$ i możemy przyjąć $\frac{v}{c} \approx \frac{1}{2}(\beta - 1)$. Dokładniejsze oszacowanie da nam wzór $e^x \approx 1 + x$, trzeba tylko przypomnieć sobie, że $2 = e^{\ln(2)}$. W ten sposób dostajemy $\beta = e^{\ln(2)/12} \approx 1 + \frac{\ln(2)}{12}$ i w rezultacie $\frac{v}{c} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(2)}{12}$.

Tylko ile to jest $\ln(2)$? Wzór $\ln(x) \approx x - 1$ jest użyteczny jedynie dla $x \approx 1$, a $x = 2$ to już jednak dość daleko. Dlatego posłużymy się sztuczką:

$$\ln(2) = \ln\left(\frac{4/3}{2/3}\right) = \ln(4/3) - \ln(2/3) \approx \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Po tych wszystkich zabiegach otrzymujemy ostateczny wynik, od którego tak wiele zależy:

$$v \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{12} \cdot 1200 \text{ km/h} \approx 33 \text{ km/h}.$$

Meleksy mają ograniczenie prędkości do 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (powyżej wymagana jest rejestracja). Cóż, ten widocznie się rozpędził, zjeżdżając z góry!