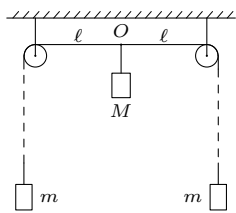


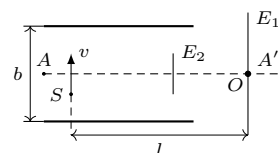
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2026



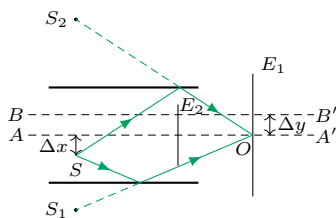
Rys. 1



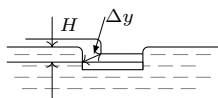
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 824, 825

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

824. Przez dwa nieruchome bloki, oddległe od siebie o $2l$, przerzucona została bardzo długa nieważka nić, na której końcach zawieszono jednakowe ciężarki o danych masach m (rys. 1). Rozmiary bloków są małe w porównaniu z odległością między nimi. W środku, między blokami, wisi na nici ciężarek o masie M , którego punkt zawieszenia O utrzymywany jest początkowo na wysokości bloków, a następnie zostaje oswobodzony.

- 1) Jaki warunek musi spełniać masa M , aby środkowy ciężarek ciągle się opuszczał? Jaką maksymalną prędkość może on wtedy osiągnąć?
- 2) Jeżeli pierwszy warunek nie jest spełniony, to przy jakiej wartości kąta α między nachylonymi odcinkami nici a pionem środkowy ciężarek zatrzyma się i zacznie się podnosić?

825. Rozważmy wiązkę jednakowych jąder, które lecą równolegle do siebie z prędkościami v_0 . Jądra rozpadają się samorzutnie na dwa identyczne fragmenty. Te fragmenty, które lecą w tym samym kierunku co jądra, mają wartość prędkości v_1 .

- 1) Znaleźć prędkość fragmentów, które poruszają się w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu jąder, gdy $v_1 > 2v_0$.
- 2) Znaleźć maksymalny możliwy kąt między wektorami prędkości jednego z fragmentów i kierunkiem ruchu jąder, gdy $v_1 < 2v_0$.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2026

Przypominamy treść zadań:

820. Punktowe źródło światła monochromatycznego, S , o długości fali $\lambda = 6000\text{\AA}$ umieszczono między dwoma nieruchomymi równoległymi zwierciadłami płaskimi, oddległymi od siebie o $b = 3\text{ cm}$ (rys. 2). W dużej odległości $l = 1\text{ m}$ od źródła umieszczono ekran E_1 , na którym powstaje obraz interferencyjny, utworzony przez dwie wiązki światła odbite od zwierciadeł. Bezpośredni strumień światła od źródła zasłonięty jest ekranem E_2 . W płaszczyźnie ekranu E_1 na osi symetrii układu AA' umieszczony jest odbiornik O , który rejestruje sygnał proporcjonalny do natężenia padającego na niego światła. Rozmiar odbiornika jest mały w porównaniu z szerokością pasm interferencyjnych na ekranie E_1 . Uwzględniając tylko jednokrotne odbicia światła od zwierciadeł, znaleźć częstotliwość zmiennego sygnału rejestrowanego przez odbiornik podczas ruchu źródła w kierunku prostopadłym do zwierciadeł z prędkością $v = 0,1\text{ mm/s}$.

821. Okrągłą płytkę o średnicy $d = 40\text{ mm}$ i grubości $a = 0,5\text{ mm}$ położono ostrożnie na powierzchni wody. Dzięki napięciu powierzchniowemu płytka nie utonęła, a w miejscu zetknięcia jej górnej powierzchni z powierzchnią wody kąt między nimi okazał się równy 90° (rys. 3). Wyznaczyć gęstość materiału płytki. Współczynnik napięcia powierzchniowego wody $\sigma = 0,073\text{ N/m}$.

820. Rozważmy sytuację, gdy źródło znajduje się na osi symetrii układu. Obserwujemy interferencję od dwóch źródeł pozornych S_1 i S_2 , będących obrazami źródła w zwierciadłach 1 i 2. Odległość między nimi wynosi $2b$ i jest dużo mniejsza od odległości między źródłem a ekranem E_1 . Możemy więc stosować przybliżenie małych kątów, a szerokość pasma interferencyjnego, czyli odległość między sąsiednimi maksimami, jest stała i wynosi

$$\Delta y = y_{k+1} - y_k = l\lambda/(2b).$$

Gdy źródło znajduje się w odległości Δx od osi symetrii AA' (rys. 4), odległość między obrazami

$$|S_1 S_2| = 2(b/2 - \Delta x) + 2(b/2 + \Delta x) = 2b$$

pozostaje niezmienną. Oś symetrii tego układu jest przesunięta o Δx względem osi AA' . Gdy $\Delta x = \Delta y$, odbiornik w punkcie O rejestruje maksimum sygnału i w odstępach czasu $\Delta t = \Delta x/v$ następne ($v \ll c$). Szukana częstotliwość wynosi

$$\nu = v/(\Delta y) = 2bv/(\lambda l) = 10\text{ Hz}.$$

821. Warunek równowagi sił działających na płytkę w kierunku pionowym ma postać:

$$(1) \quad mg - \Delta p S - F = 0,$$

gdzie mg jest siłą ciężkości, Δp różnicą ciśnień na płytkę z dołu i z góry, F siłą napięcia powierzchniowego.

Masa płytki wyraża się przez jej szukaną gęstość ρ wzorem

$$(2) \quad m = \rho g a \pi d^2 / 4.$$

Siła napięcia powierzchniowego działająca na płytkę ze strony wody wynosi

$$(3) \quad F = \sigma \pi d.$$

Siła związana z różnicą ciśnień wywołaną obniżeniem poziomu wody pod płytką ma postać

$$(4) \quad \Delta p S = \rho_w g (H + a) \pi d^2,$$

gdzie ρ_w jest gęstością wody, H głębokością zanurzenia górnej powierzchni płytki. Wielkość H wyznaczmy z warunku równowagi sił w kierunku poziomym na wydzielony na rysunku 5 element objętości wody o szerokości $\Delta y \ll d$ i wysokości H :

$$(5) \quad \sigma \Delta y = p_{\text{sr}} \Delta S = \rho_w g (H/2) H \Delta y,$$

$$\text{stad } H = \sqrt{2\sigma/(\rho_w g)}.$$

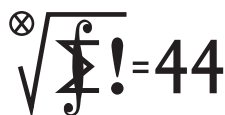
Po skorzystaniu z równań (2)–(5) równanie równowagi płytki (1) przybiera postać:

$$\frac{\rho g a \pi d^2}{4} - \rho_w g \left(\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_w g}} + a \right) \frac{\pi d^2}{4} - \sigma \pi d = 0,$$

a stad gęstość materiału płytki:

$$\rho = \rho_w + \frac{\sqrt{2\sigma\rho_w/g}}{a} + \frac{4\sigma}{adg} \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
917 ($WT = 1,48$) i 918 ($WT = 2,78$)
z numeru 3/2026

Janusz Olszewski	Warszawa	45,79
Krzysztof Kamiński	Pabianice	44,14
Jędrzej Biedrzycki	Wrocław	43,54
Roksana Słowik		43,23
Marian Łupieżowiec	Gliwice	40,52
Janusz Fiett	Warszawa	39,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,46
Paweł Najman	Kraków	34,11
Paweł Kubit	Kraków	34,03
Piotr Kumor	Olsztyn	33,66
Marek Spychała	Warszawa	33,42
Piotr Wiśniewski	Warszawa	33,12
Łukasz Merta		33,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,65

Pan Janusz Olszewski niestrudzony
(i wciąż nieznudzony): 26 rund. Weteran
Krzysztof Kamiński też pięknie: czwarte
okrążenie to obiecujący zadatek na
kolejną normę weterańską!

923. Obliczając wartości lewej strony dla niewielkich k , znajdujemy dwie pary (k, m) o wymaganej własności: $(3, 4)$ oraz $(5, 7)$. Wykażemy, że innych nie ma. Przypuśćmy, że istnieje taka para, w której $k \geq 6$. Jasne, że $k < m$. Zadane równanie przepisujemy w postaci

$$k! + 6 = 3 \left(\prod_{j=k+1}^n j \right).$$

Jeśli $m \geq k + 3$, to iloczyn ujęty w nawias dzieli się przez 3, czyli prawa strona napisanej równości dzieli się przez 9, a lewa nie (bo gdy $k \geq 6$, to $k!$ dzieli się przez 9). Stąd wniosek, że $m = k + 1$ lub $m = k + 2$. Badane równanie sprowadza się do alternatywy

$$k! + 6 = 3(k + 1) \quad \text{lub} \quad k! + 6 = 3(k + 1)(k + 2);$$

po prostym przekształceniu:

$$k(k - 2)! = 3 \quad \text{lub} \quad (k - 1)! = 3(k + 3).$$

Pierwszy wariant daje sprzeczność natychmiast (rozważamy $k \geq 6$). Drugi – też, bo dla $k \geq 6$ zachodzi nie równość, lecz nierówność $(k - 1)! > 3(k + 3)$ (dla $k = 6$ prawda, a dalej banalna indukcja).

Stąd odpowiedź: istnieją dwie pary (k, m) , o jakie chodzi $(3, 4)$ i $(5, 7)$.

Zadania z matematyki nr 927, 928

Redaguje Marcin E. KUCZMA

927. Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ niech M_n będzie zbiorem wszystkich par uporządkowanych (x, y) , których elementy są liczbami naturalnymi x, y względnie pierwszymi, spełniającymi warunki $0 < x < y \leq n$, $x + y > n$. Obliczyć (w zależności od n) sumę odwrotności iloczynów xy utworzonych z par $(x, y) \in M_n$.

928. Niech $j(k)$ oznacza liczbę jedynek w rozwinięciu dwójkowym liczby naturalnej k . Dla danych liczb naturalnych a, b rozważamy ciąg określony wzorem

$$j(na) - j(nb), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnić, że ten ciąg jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz a/b jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym.

Zadanie 928 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2026

Przypominamy treść zadań:

923. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych k, m takie, że $k!(k! + 6) = 3m!$.

924. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną; $n \geq 2$. Funkcje f, g są określone wzorami: $f(x) = x^n - x$, $g(x) = x^{2n} - x$. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki: $f(a) = 1$, $g(b) = 3a$. Ustalić (w zależności od n), która z liczb a, b jest większa.

924. Zaczniemy od wykazania, że $a \geq 1$. Przydatne będą własności:

- (1) $0 \geq f(x), g(x) > -1$ dla $x \in [0, 1]$;
- (2) funkcje f, g są ściśle rosnące w przedziale $[1, \infty)$;
- (3) $f(x), g(x) \geq 0$ dla $x \in [1, \infty)$;

własność (1) wynika z tego, że $0 \leq x^{2n} \leq x^n \leq x < 1$ dla $x \in [0, 1]$; własność (2) jest widoczna z przedstawień $f(x) = x(x^{n-1} - 1)$, $g(x) = x(x^{2n-1} - 1)$; zaś (3) to wniosek z (2). Liczba a , dla której $f(a) = 1$, nie leży więc w przedziale $[0, 1]$.

Przypuśćmy wobec tego, że $a < 0$. Wówczas $b = b^{2n} - g(b) = b^{2n} - 3a > 0$. Stąd (wobec (1) i (3)) $g(b) > -1$, czyli $a = \frac{1}{3}g(b) \in (-\frac{1}{3}, 0)$. Jeśli n jest liczbą parzystą, to $a^n < \frac{1}{9}$, więc $f(a) = a^n - a < \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$, wbrew temu, że $f(a) = 1$. Jeśli natomiast n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f jest nieparzysta, zatem $f(-a) = -f(a) = -1$; ale $-a \in (0, \frac{1}{3})$ i mamy sprzeczność z własnością (1).

Tak więc (niezależnie od n) $a \geq 1$; przy tym $a \neq 1$ (bo $f(1) \neq 1$). Rozważmy przypadek, gdy również $b \geq 1$. Skoro $f(a) = 1$, czyli $a^n = a + 1$, zatem

$$g(a) = a^{2n} - a = (a + 1)^2 - a = 3a + (a - 1)^2 > 3a = g(b).$$

Wobec własności (2), $a > b$. W pozostałym przypadku, czyli gdy $b < 1$, tym bardziej $a > b$. Stąd odpowiedź: niezależnie od n , liczba a jest większa od b .

Uwaga. Rozwiązanie zadania **921** (Δ_{26}^9) nie jest poprawne. Wariant poprawiony zostanie pokazany (z komentarzem) w następnym numerze. Za niedopatrzenie przepraszamy.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.