

Czy o czasie coś powiedzieć da się?

Miroslaw LACHOWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wśród tysięcy wypowiedzi przypisywanych Albertowi Einsteinowi prawdziwość wielu jest co najmniej dyskusyjna, jednak tę dobrze udokumentowano. W liście z 21 marca 1955 roku do rodziny zmarłego przyjaciela Michelego Angela Besso, inżyniera szwajcarskiego, noblista pisał: „*Michele odszedł z tego dziwnego świata wcześniej niż ja. Ale to nie ma znaczenia. Dla nas, wierzących w fizykę, rozróżnienie między przyszłością, teraźniejszością a przyszłością jest tylko uparcie podtrzymywaną iluzją*”. List powstał niespełna miesiąc przed jego śmiercią – Einstein zmarł 18 kwietnia 1955.

Znane jest zdanie św. Augustyna z Hippony (354–430): *Czymże jest czas? Jeśli nikt mnie o to nie pyta, wiem. Jeśli pytającemu usiłuję wytłumaczyć, nie wiem.* Skądinąd częsta wymówka studentów.

Przykłady i cytaty z książek P. Coveney, R. Highfield, *Strzałka czasu*, Zysk i S-ka (1990) oraz J. Gleick, *Podróż w czasie*, Zysk i S-ka (2018).

Problemem jest to, że podstawowe teorie w fizyce, w tym te, które tworzyły naszą cywilizację, są „odwracalne w czasie”. Czyli „kierunek czasu” nie jest w nich określony.

Jedną z tych podstawowych teorii fizycznych, które niewątpliwie tworzyły naszą cywilizację i ustalały sposób rozumienia Świata, jest klasyczna mechanika newtonowska. Istotną jej cechą to właśnie „odwracalność w czasie”, co oznacza, że żaden „kierunek upływu czasu” nie jest wyróżniony. Wynika to z faktu, iż transformacja $t \rightarrow -t$ nie zmienia postaci równań. Można to wyrazić następująco: obserwuj układ od chwili początkowej 0 do chwili $t > 0$, następnie zmień znaki ($\pm \rightarrow \mp$) prędkości wszystkich cząsteczek – spowodujesz powrót do stanu początkowego.

Przyjrzyjmy się temu dokładniej. Równanie dynamiki Newtona, bez uwzględnienia oporów otoczenia (np. tarcia), ma postać

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

gdzie m to masa obiektu, F to działająca nań siła, zaś a – jego przyspieszenie. W języku pochodnych (przyjmując, dla uproszczenia, że $m = 1$),

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = v_0,$$

gdzie x_0 jest początkowym położeniem, a v_0 – początkową prędkością. Transformacja $t \rightarrow 2t_0 - t$ nie zmienia postaci równania, zamienia tylko znak początkowej prędkości v_0 :

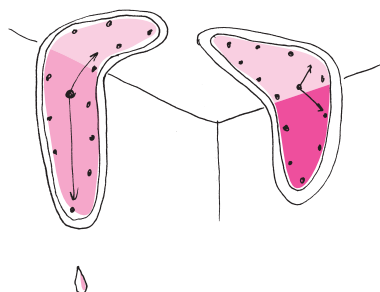
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = -v_0.$$

Co z tym począć? Jak żyć w świecie, w którym nie ma kryterium, określającego, „w którą stronę” płynie czas?

Istnieje jednakże w fizyce teoria, która bezpośrednio mówi o nieodwracalności w czasie. Jest to termodynamika, a precyzyjniej, II zasada termodynamiki, sformułowana w 1852 roku przez Williama Thomsona (Lorda Kelvina). Określa ona kierunek czasu, czyli odróżnia przeszłe od przyszłego. Jedno z możliwych sformułowań II zasady termodynamiki (dzięki wprowadzonemu w 1865 roku przez Clausiusa pojęciu entropii) mówi, że entropia układu izolowanego rośnie w czasie.

Ale jak połączyć odwracalną w czasie mechanikę Newtona z nieodwracalną termodynamiką?

Ludwig Boltzmann (1844–1906) podjął próbę „wyprowadzenia” nieodwracalności z odwracalnej dynamiki newtonowskiej dla rozrzedzonego gazu. W roku 1872 sformułował równanie, dzisiaj nazywane równaniem Boltzmanna, w oparciu o tzw. hipotezę o molekularnym chaosie, będącą założeniem probabilistycznej niezależności stanów cząsteczek. Przyjęcie tej hipotezy nadało opisowi charakter losowy i nieodwracalny w czasie, przynajmniej zdaniem Boltzmanna.



Własność nieodwracalności w czasie wyraża „twierdzenie H Boltzmanna”, mówiące o istnieniu pewnego funkcjonału, który „na” rozwiązaniu równania Boltzmanna maleje w czasie, a więc ma charakter entropii ze znakiem „-”. Niech $f = f(t, x, v)$ będzie rozwiązaniem równania Boltzmanna, czyli po scałkowaniu po zbiorze $\mathcal{X}$ względem x i zbiorze $\mathcal{V}$ względem v wyraża liczbę cząsteczek o położeniu w zbiorze $\mathcal{X}$ i pędzie w zbiorze $\mathcal{V}$ w chwili t (oczywiście zbiory $\mathcal{X}$ i $\mathcal{V}$ są mierzalnymi podzbiorami $\mathbb{R}^3$). Wówczas funkcja

$$H[f](t) = \int \int f(t, x, v) \log f(t, x, v) dx dv$$

maleje w czasie (to sformułowanie wymaga dużej uważności matematycznej, by rzeczywiście stało się twierdzeniem).

To, co Boltzmann uważał za największy sukces swojej teorii, było najzacieklej atakowane przez jej przeciwników. Paradoks odwracalności, sformułowany przez Lorda Kelvina w 1874 roku oraz Josefa Loschmidta w 1876 roku, został wyrażony następująco: nieodwracalność zawarta w teorii Boltzmanna nie może być konsekwencją mechaniki newtonowskiej. Paradoks powracalności, opisany w 1896 roku przez Ernsta Zermelo (tego „od aksjomatu wyboru”), opiera się na twierdzeniu Poincarégo: *każdy zachowawczy i zamknięty układ mechaniczny powraca, po dostatecznie długim czasie, do dowolnie małego otoczenia prawie każdego stanu początkowego* (patrz K. Turzyński i H. Żołądek, *Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej*, Δ_{15}^8 i Δ_{15}^9). Warto zaznaczyć, że idee okresowości, lub też quasi-okresowości, jak w twierdzeniu Poincarégo, były i są obecne w historii ludzkości i są nierozłącznie związane ze sposobami pomiaru czasu. Więcej o tym przeczytać można w dodatku do elektronicznej wersji niniejszego tekstu.

Miedzy Boltzmannem a jego krytykami dochodziło do ostrych polemik (patrz tekst *Paradoksy symetrii czasowej*, Δ_{93}^7). Te burzliwe ataki były dotkliwe dla Boltzmanna. Jak wiele wybitnych osób płacił za swój geniusz bardzo dużą cenę...

David Goodstein, „States of Matter”: „Ludwig Boltzmann, który poświęcił znaczną część swojego życia na badanie mechaniki statystycznej, zmarł w 1906 roku śmiercią samobójczą. Paul Ehrenfest, który kontynuował jego pracę, zmarł podobnie w 1933. Teraz nasza kolej ... zapewne jest rzeczą rozsądną zachować ostrożność w badaniach”.

Oczywiście nic nie jest takie proste, jak przedstawia się, by ubarwić rozważania.

Czy można matematycznie opisać związek prawdopodobieństwa i nieodwracalność w czasie? Rozważmy $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ – przestrzeń z miarą probabilistyczną, tzn. $\mu(X) = 1$.

Rodzaj analogu twierdzenia H Boltzmanna występuje w teorii procesów Markowa. Są to procesy stochastyczne

(tzn. losowe) o tej własności, że ich ewolucja zależy tylko od stanu w danej chwili, a nie od przeszłego przebiegu. Taki proces stochastyczny opisuje funkcja $P(t, x, A)$. Określa ona prawdopodobieństwo tego, że startując w chwili $t_0 = 0$ ze stanu x , proces po czasie t znajdzie się w stanie ze zbioru A . To prawdopodobieństwo można wyrazić poprzez chwile wcześniejsze s , czyli $0 < s < t$, za pomocą równania Chapmana–Kołmogorowa

$$P(t, x, A) = \int_X P(s, x, dy) P(t-s, y, A).$$

Niech miara μ będzie miarą niezmienniczą, czyli

$$\int_X P(t, x, A) \mu(dx) = \mu(A),$$

dla zbiorów mierzalnych $A \subseteq X$, $t \geq 0$.

Rozważmy teraz dowolną funkcję f określoną na X i niech $(T_t f)(x)$ będzie wartością oczekiwaną $f(Y_t)$, gdzie Y_t jest wartością po czasie t procesu startującego z $x \in X$, czyli

$$(T_t f)(x) = \int_X P(t, x, dy) f(y)$$

dla funkcji całkwalnej f .

Zauważmy, że $(T_0 f)(x) = f(x)$. Ponadto z równania Chapmana–Kołmogorowa wynika, że

$$(T_{t+s} f)(x) = (T_t(T_s f))(x) \text{ dla dowolnych } t, s > 0.$$

Prawdziwe jest twierdzenie Yosidy (Kôsaku Yosida, 1909–1990). Dotyczy ono funkcji klasy Zygmunda (Antoni Zygmund, 1900–1992), czyli klasy funkcji $f \geq 0$ takich, że

$$\int_X f(x) \mu(dx) < \infty, \quad \int_X f(x) \log^+ f(x) \mu(dx) < \infty,$$

gdzie $\log^+ x = \log x$, gdy $x \geq 1$ oraz $\log^+ x = 0$, gdy $x < 1$.

Twierdzenie 1. Niech f będzie funkcją klasy Zygmunda. Wówczas

$$H[f](t_1) \geq H[f](t_2) \quad \text{dla } t_1 < t_2,$$

gdzie

$$H[f](t) = \int_X (T_t f)(x) \log(T_t f)(x) \mu(dx).$$

Dowód. Funkcja $h(x) = x \log x$ spełnia $h''(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x > 0$, a więc jest wypukła dla $x > 0$. Z nierówności Jensena dla dowolnego „uśredniania” zachodzi

$$\text{średnia wartość } h(f(x)) \geq h(\text{średnia wartość } f(x)),$$

w szczególności

$$\begin{aligned} \int_X P(t, x, dy) h(f(y)) &\geq h\left(\int_X P(t, x, dy) f(y)\right) \\ &= h(T_t f(x)). \end{aligned}$$

Całkując obie strony względem $\mu(dx)$ po całej przestrzeni X , korzystając z niezmienniczości tej miary oraz zamieniając kolejność całkowania, dostajemy

$$\int_X h(f(y))\mu(dy) \geq \int_X h(T_t f(x))\mu(dx).$$

Wstawiając $T_s f$ w miejsce f , oraz korzystając z zależności $T_{t+s} = T_t \circ T_s$, mamy

$$\int_X h(T_s f(y))\mu(dy) \geq \int_X h(T_{t+s} f(x))\mu(dx).$$

Czyli

$$H[f](s) \geq H[f](t+s), \quad s, t > 0,$$

co jest równoważne tezie. $\square$

K. Yosida, *The Markoff process with a stable distribution*, Proceedings of the Imperial Academy 16 (1940), 49–54; również K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1995).

Czy twierdzenie to rozwiązuje problem? Raczej rozpoczyna dyskusję! Można jednak uznać, że powyższe twierdzenie precyzuje intuicyjne podejście jakoby „losowość prowadziła do nieodwracalności w czasie”, o czym wspominałem powyżej.

Gary Miller i Marvin Shinbrot podali prosty przykład układu równania typu Newtona

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(x, y) &= (x, y), \\ (x, y) \Big|_{t=0} &= (x_0, y_0), \\ \frac{d}{dt}(x, y) \Big|_{t=0} &= (x_0, -y_0), \end{aligned}$$

gdzie $(x, y) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Jedynym rozwiązaniem jest funkcja $(x, y) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t})$. Po transformacji $t \mapsto -t$ funkcja $(x, y) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^t)$ jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia z prędkościami z przeciwnymi znakami

$$\frac{d}{dt}(x, y) \Big|_{t=0} = (-x_0, y_0),$$

czyli zagadnienie jest odwracalne w czasie, w wyżej wymienionym sensie. Rozważmy rodzinę przekształceń

$$T_t(x, y) = (x e^t, y e^{-t}).$$

Podobnie jak wcześniej, zachodzi $T_t \circ T_s = T_{t+s}$. Niech $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie początkową funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Niech

$$f(t, x, y) = f_0(T_{-t}(x, y)),$$

ponieważ przekształcenia T_t nie zmieniają pola prostokątów, więc zachowują miarę. Oznacza to, że dla każdego t funkcja $f(t, x, y)$ również jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Oznaczmy $\bar{f}(t, x) = \int f(t, x, y) dy$. Definiujemy

$$H[f](t) = \int \bar{f}(t, x) \log(\bar{f}(t, x)) dx.$$

Mamy

$$\bar{f}(t, x) = \int f_0(x e^{-t}, y e^t) dy = e^{-t} \bar{f}_0(x e^{-t}),$$

gdzie $\bar{f}_0(x) := \int f_0(x, y) dy = \int e^{-t} f_0(x, y e^t) dy$ (druga równość wynika z liniowej zamiany zmiennej, względem której całkujemy). Zatem (ponownie wykorzystując zamianę zmiennych)

$$\begin{aligned} H[f](t) &= \int \bar{f}_0(x) \log(e^{-t} \bar{f}_0(x)) dx \\ &= -t \int \bar{f}_0(x) dx + \int \bar{f}_0(x) \log \bar{f}_0(x) dx \\ &= -t + \text{const.} \end{aligned}$$

Zaproponowany funkcjonal $H[f]$ jest monotonicznie malejący względem zmiennej t , czyli zachowuje się jak funkcja H Boltzmanna. A zagadnienie jest odwracalne w czasie!

G. Miller, M. Shinbrot, *The H-theorem and reversibility*, Transport Theory and Statistical Physics 12 (1983), 195.

Wielu fizyków, podobnie jak Einstein, wyraża opinię – zapewne w odniesieniu do mechaniki kwantowej lub ogólnej teorii względności – że czas jest iluzją.

Julian Barbour napisał: *Czas, tak jak go postrzegamy, nie istnieje jako coś innego niż iluzja. Wiele problemów w fizyce wynika z założenia, że istnieje. Nie mamy żadnych dowodów przeszłości poza naszą pamięcią o niej i żadnych dowodów na przyszłość poza naszą wiarą w nią.*

Julian Barbour, *The end of time: the next revolution in our understanding of the universe* (1999).

Podobnie twierdził filozof brytyjski John M.E.

McTaggart (1866–1925): *Nasza koncepcja czasu zawiera sprzeczność, a zatem rzeczywistość nie może być czasowa. Nasze postrzeganie czasu jest iluzją, a sam czas jest po prostu ideałem.*

J.M.E. McTaggart, *The unreality of time*, Mind 17 (1908), 457–474.

Sformułowany na poparcie tej tezy argument jest znany jako *paradoks McTaggarta*.

Moim zdaniem bardzo trafną uwagę sformułował Lee Smolin: *Czas jest realny – niektórzy fizycy błędnie odrzucają realność czasu, ponieważ mylą swoje abstrakcyjne modele z rzeczywistością.*

Lee Smolin, *Time reborn: from the crisis in physics to the future of the universe*, Houghton Mifflin Harcourt (2013).

Zgadza się z tym zdaniem. Każda – nawet, jak się wydaje, najszersza teoria fizyczna – jest pewnym przybliżeniem rzeczywistości, i to w nieznanym zakresie. Żadna więc nie może przesądzić o tym, „czym jest czas”. Nasza wiedza pozostanie tylko częściowa. Twierdzenia Tarskiego, Gödla, Turinga, zasada Heisenberga, twierdzenie Arrowa, wyraźnie wskazują na to, że jest rzeczą rozsądną wykazać ostrożność.

K. Wójtowicz, *O nadużywaniu twierdzenia Gödla w sporach filozoficznych*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce XIX (1996), 24–45.

Dodatkowo, pamiętając o możliwych nadużyciach, środowisko naukowe powinno zachować czujność.

A. Sokol, J. Bricmont, *Modne bzdury. O nadużywaniu pojęć z zakresu nauk ścisłych przez postmodernistycznych intelektualistów*, Prószyński i S-ka (2004).