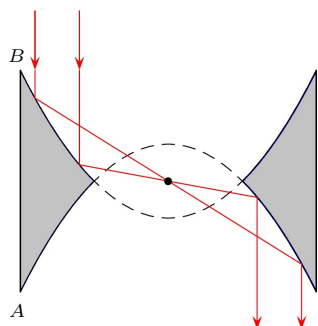


Kształt i opór, część 4/4: Czapka niewidka

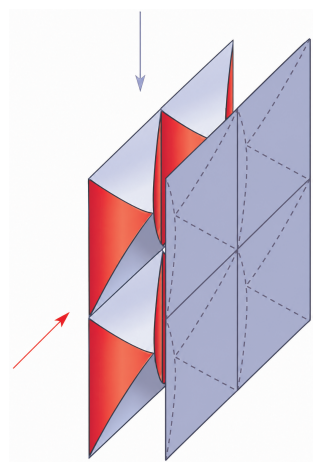
Jarosław GÓRNICKI*

* Kontakt: gornicki59@gmail.com

Przypominamy niezwykłą własność optyczną paraboli. Promień światła, wychodzący z ogniska paraboli i odbijający się od powierzchni paraboli (gdzie kąt padania jest równy kątowi odbicia), wędruje dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii paraboli (rys. 1). Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii paraboli, po odbiciu od „wewnętrznej strony” powierzchni paraboli, skupia się w jej ognisku.

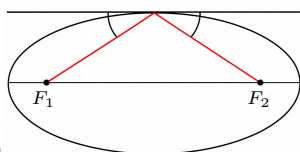


Rys. 1

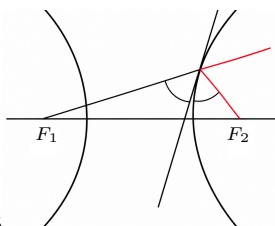


Rys. 3

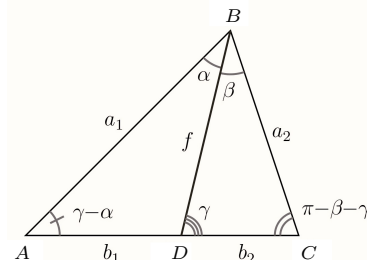
Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty F_1, F_2 zwane *ogniskami*. Zbiór punktów płaszczyzny, których suma odległości od punktów F_1 i F_2 jest stała (i większa od odległości ognisk), nazywamy *elipsą*. Zbiór punktów płaszczyzny, których moduł różnicy odległości od punktów F_1 i F_2 jest stały (i mniejszy od odległości ognisk), nazywamy *hiperbolą*.



Rys. 4



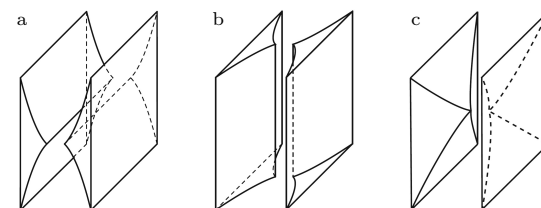
Rys. 5



Rys. 6

Obiekt uznajemy za niewidzialny, jeśli każdy promień światła dociera do oka wzdłuż tej samej linii, po której biegł przed spotkaniem z obiektem. W poprzednim odcinku (Δ_{26}^{10}) rozważaliśmy bryły stawiające zerowy opór; wśród nich niewidzialnymi (z jednego kierunku) są te z rysunków 10, 11, 13c, ale bryły z rysunków 9, 13a już nie. Zatem niewidzialność to własność silniejsza niż brak oporu!

Stworzymy teraz bryłę niewidzialną w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. W tym celu rozważmy dowolną parabolę; odbijając ją symetrycznie względem ogniska, otrzymamy dwie parabole o wspólnym ognisku i wspólnej osi (rys. 1). Zaznaczone trójkąty krzywoliniowe przesuwamy prostopadłe do płaszczyzny rysunku o długość odcinka AB . Otrzymujemy bryłę (rys. 2a, dwie symetryczne granie o podstawie kwadratowej) o zerowym oporze w kierunku północ-południe. Gdy obrócimy ją o 90° , to otrzymamy bryłę (rys. 2b) o zerowym oporze w kierunku wschód-zachód. Część wspólna tych brył (rys. 2c), para krzywoliniowych piramid, ma zerowy opór w dwóch kierunkach równoległych do boków podstaw piramid. Teraz, aby uzyskać ciało niewidoczne w dwóch (wzajemnie prostopadłych) kierunkach, wystarczy poczwórną zwiększyć tę strukturę (rys. 3) i pokryć ją powłoką lustrzaną.



Rys. 2

Rozwiązania te łatwo skrytykować. Stworzyliśmy powierzchnie niewidzialne dla równoległej wiązki światła, a nasz sposób widzenia jest bardziej skomplikowany, bo przecież mamy dwoje oczu. Jednym widzimy, gdy wszystkie promienie zbiegają się w punkcie – źrenicy oka. Zatem problem jest trochę inny – czy istnieją powierzchnie niewidzialne (dla nas) choćby z jednego punktu? Tak!

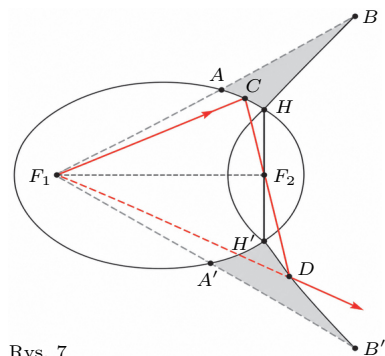
Przed ich stworzeniem przypomnimy niezwykle własności optyczne pozostałych krzywych stożkowych – elipsy oraz hiperboli. Każdy promień światła wychodzący z jednego ogniska elipsy, po odbiciu od „wewnętrznej” powierzchni elipsy, przejdzie przez drugie ognisko. Innymi słowy, wszystkie promienie wychodzące z jednego ogniska elipsy skupiają się w jej drugim ognisku (rys. 4). Tak samo będzie dla wewnętrznej powierzchni elipsoidy obrotowej, gdy osią obrotu jest prosta F_1F_2 . Podobnie każdy promień światła wychodzący z jednego ogniska hiperboli po odbiciu od hiperboli przekształca się w promień, którego przedłużenie przechodzi przez drugie ognisko. W innym wypadku wszystkie promienie wychodzące z jednego ogniska hiperboli będą się rozchodzić z drugiego (rys. 5). Ta sama własność przysługuje bryle otrzymanej w wyniku obrotu hiperboli wokół prostej F_1F_2 .

Skorzystamy jeszcze z następującego lematu:

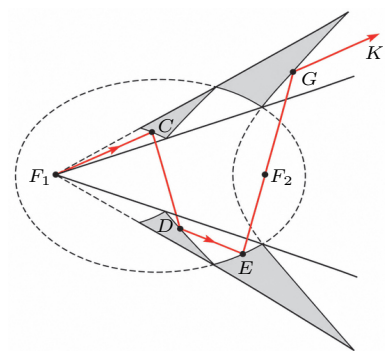
Lemat. W trójkącie $\triangle ABC$ (rys. 6) odcinek BD jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2$

Twierdzenie Stewarta (1746), zob. S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, Wyd. Aksjomat (2020).

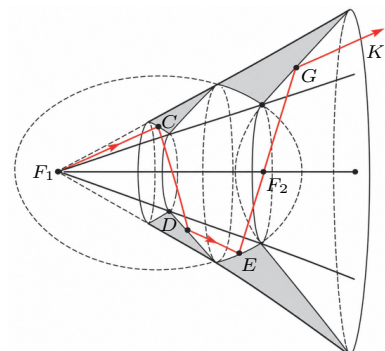
Szkic dowodu: należy wyznaczyć a_1^2 oraz a_2^2 z twierdzenia cosinusów w trójkątach $\triangle ABD$ oraz $\triangle BDC$, a następnie odpowiednio połączyć uzyskane równości.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Obracając powstałą konstrukcję wokół półprostej F_1F_2 (rys. 9) i pokrywając ją powłoką lustrzaną, otrzymujemy powierzchnię, która jest niewidoczna, jeśli spojrzymy na nią jednym okiem z danego punktu F_1 w przestrzeni. Obiekty ukryte w „szarej strefie” są niewidoczne. Istnieją też inne, bardziej złożone powierzchnie, które są niewidoczne, gdy patrzymy obojgiem oczu lub gdy obiekt ma być niewidoczny w skończonej liczbie kierunków.

I nie chodzi tu o półprzepuszczalne lustra (powierzchnie), iluzjonistyczne sztuczki, o ciemny strój w nocy, a o możliwości drzemające w najstarszej gałęzi matematyki – w geometrii.

Dowód. Przywołajmy twierdzenie M. Stewarta (patrz margines), które mówi, że

$$a_1^2b_2 + a_2^2b_1 = (b_1 + b_2)(f^2 + b_1b_2).$$

Jeśli zachodzi równość z lematu, to we wzorze wyżej możemy podstawić $f^2 = (a_1 + b_1)(a_2 - b_2)$, co po pewnych przekształceniach daje

$$(b_1 + b_2 + a_1 - a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Pierwszy czynnik wynosi $AC + AB - BC$, a więc jest dodatni na mocy nierówności trójkąta. Stąd wnioskujemy równość $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ lub inaczej $a_1/b_1 = a_2/b_2$, co z twierdzenia o dwusiecznej oznacza, że AD musi być dwusieczną.

W istocie rozumowanie to pokazuje również przeciwną implikację. Mianowicie, jeśli AD jest dwusieczną, to $a_1/b_1 = a_2/b_2$, co po powtórzeniu tych samych przekształceń algebraicznych (w odwrotnej kolejności) prowadzi nas do równości $a_1^2b_2 + a_2^2b_1 = (b_1 + b_2)(g^2 + b_1b_2)$ spełnianej przez wielkość $g^2 = (a_1 + b_1)(a_2 - b_2)$. W połączeniu z twierdzeniem Stewarta daje to $f^2 = g^2$, czyli równość z lematu. $\square$

Tak przygotowani możemy przystąpić do konstrukcji rzeczywiście niewidzialnego dla nas obiektu, choć tylko z jednego punktu. Rysujemy współogniskowe elipsę i hiperbolę tak, aby odcinek HH' (łączy dwa punkty ich przecięcia) zawierał ognisko F_2 (rys. 7) i był prostopadły do odcinka F_1F_2 . Następnie z ogniska F_1 prowadzimy półprostą przechodzącą powyżej punktu H , która przecina elipsę i hiperbolę w punktach A, B , odpowiednio. Odcinek F_1B odbijamy symetrycznie względem prostej łączącej ogniska F_1F_2 ; odbity odcinek przecina teraz elipsę i hiperbolę odpowiednio w punktach A', B' . Otrzymujemy w ten sposób dwa symetrycznie położone krzywoliniowe trójkąty ABH oraz $A'B'H'$. Rozważmy teraz promień wychodzący z ogniska F_1 i odbijający się od pary wskazanych trójkątów. Promień odbija się w punkcie C od łuku elipsy, przechodzi przez ognisko F_2 , po czym odbija się od łuku hiperboli w punkcie D i biegnie dalej wzdłuż prostej F_1D . Popatrzmy na trójkąt $\triangle F_1CD$ (rys. 7). Ponieważ $F_1C + F_2C = F_1H + F_2H$ (z określenia elipsy), $F_1D - F_2D = F_1H - F_2H$ (z określenia hiperboli), więc

$$\begin{aligned} (F_1C + F_2C)(F_1D - F_2D) &= (F_1H + F_2H)(F_1H - F_2H) \\ &= F_1H^2 - F_2H^2 = F_1F_2^2, \end{aligned}$$

bo trójkąt $\triangle F_1F_2H$ jest prostokątny. Zatem na podstawie lematu prosta F_1F_2 jest dwusieczną kąta $\angle CF_1D$ w trójkącie $\triangle F_1CD$. Gwarantuje to, że promień po odbiciu w punkcie D porusza się wzdłuż linii F_1D , która jest symetryczna do linii F_1C względem prostej F_1F_2 .

Jest tylko jeden problem: kierunek odbicia promienia w punkcie D nie pokrywa się z kierunkiem promienia, który wyszedł z punktu F_1 . Aby temu zaradzić, wystarczy zaznaczone trójkąty krzywoliniowe przekształcić jednokładnie względem punktu F_1 , jak pokazuje to rysunek 8. Wówczas promień F_1C po czterech odbiciach porusza się wzdłuż promienia GK , który jest przedłużeniem promienia F_1C . Zapewnia to niewidzialność punktu F_1 . Oczywiście ruch promieni światła odbywa się w przeciwną stronę – promień porusza się w kierunku, w którym znajduje się oko (punkt F_1), dokonując czterech odbić od czterech krzywoliniowych trójkątów, by ostatecznie dotrzeć do oka wzdłuż tej samej prostej, po której początkowo się poruszał.

Problem jest trudny, bo załamywanie światła wynika z anatomii oka. Jednak niewidzialność jest możliwa! Może kiedyś powstanie materiał, który nam na to pozwoli...

Literatura

- [1] D. Bucur, G. Buttazzo, *Variational methods in shape optimization problems*, Birkhäuser (2005).
- [2] I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, Copernicus Center Press (2011).
- [3] A. Plakhov, *Exterior billiards. Systems with impacts outside bounded domains*, Springer Science & Business Media (2012).