

## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (370)

Obserwujemy zbieżność  
szeregów potęgowych, czyli  
*Mathematica* w akcji  
*Przemysław Kajetanowicz* str. 1

Oddziaływania elementarne  
i wczesny Wszechświat  
*Stefan Pokorski*  
*Krzysztof Turzyński* str. 4

Zadania str. 6

Aktualności str. 7

### Mała Delta:

Geometryczne osobliwości:  
niezmiennicze sumy str. 8

Pas Goulda  
*Krzysztof Czart* str.10

Niezmienniki w geometrii  
*Marcin Pitera* str.12

Klub 44 str.14

Patrz w niebo str.16

Marzec str.16

Kącik biologiczny str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Armen Edigarian, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Ryszard J. Pawlak, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwika, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwika Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem  $\TeX$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 663-87-52, 663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Grafiy w kryptografii

# Obserwujemy zbieżność szeregów potęgowych, czyli *Mathematica* w akcji

Przemysław KAJETANOWICZ

Znany program do obliczeń symbolicznych i numerycznych *Mathematica* firmy Wolfram jest szalenie wdzięcznym narzędziem do eksperymentowania z różnymi pojęciami matematycznymi. Spróbujemy to zademonstrować tutaj na przykładzie szeregów potęgowych.

Szeregi potęgowe są ważnym pojęciem analizy matematycznej. Pozwalają znajdować przybliżone wartości funkcji za pomocą wielomianów. Zwróćmy uwagę na to, że z obliczeniowego punktu widzenia wielomiany są funkcjami „łatwymi” w obsłudze – do znajdowania ich wartości wystarczą cztery operacje arytmetyczne, w odróżnieniu od takich „trudniejszych obliczeniowo” obiektów, jak funkcje trygonometryczne, wykładnicze czy logarytmiczne.

Szeregiem potęgowym rzeczywistym nazywamy wyrażenie postaci

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

gdzie  $c_k$ ,  $x_0$  oraz  $x$  są liczbami rzeczywistymi. Liczba  $x_0$  nazywa się *środkiem* szeregu, liczby  $c_k$  – jego współczynnikami. Dla każdego całkowitego  $n \geq 0$  wyrażenie

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x - x_0)^k$$

nazywa się *n-tą sumą częściową szeregu potęgowego*. Zauważmy, że przy ustalonych współczynnikach i środku szeregu potęgowego każda jego suma częściowa jest wielomianem zmiennej  $x$ . Jeżeli istnieje skończona granica

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

to mówimy, że szereg potęgowy *jest zbieżny w punkcie  $x$* , a  $S(x)$  nazywamy jego *sumą*. Zauważmy ponadto, że dla danego szeregu potęgowego (tzn. przy danych współczynnikach i środku) jego suma jest funkcją zmiennej  $x$ .

Natychmiast widać, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny w punkcie  $x_0$  i że jego suma wynosi wtedy  $c_0$ . Można udowodnić, że zbiór tych  $x \in \mathbb{R}$ , dla których szereg potęgowy jest zbieżny, jest albo zbiorem jednopunktowym, albo całą prostą, albo pewnym przedziałem o środku w  $x_0$ . Przedział ten nazywa się *przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego. Przedział zbieżności może być otwarty, domknięty lub jednostronnie domknięty – zależy to od konkretnego szeregu.

Ze szczególnymi przypadkami szeregów potęgowych spotykamy się już w szkole. Popatrzmy, na przykład, na szereg geometryczny

$$1 + x + \dots + x^n + \dots$$

Pamiętamy, że szereg taki jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego iloraz spełnia warunek  $|x| < 1$ . Przedziałem zbieżności szeregu jest więc w tym przypadku przedział  $(-1, 1)$ . Dla każdego  $x \in (-1, 1)$  zachodzi równość

$$1 + x + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1 - x},$$

wynikająca ze znanego wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Przepisując tę równość w postaci

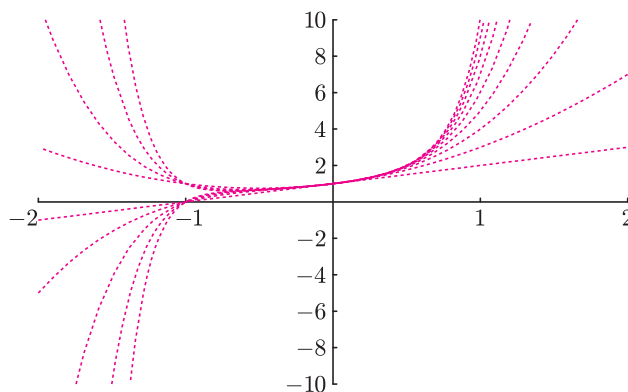
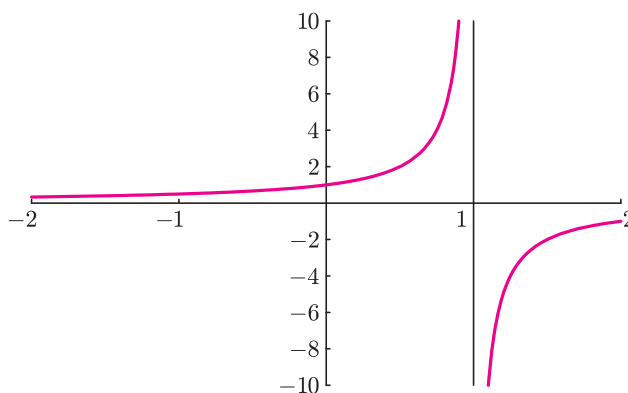
$$\frac{1}{1 - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + \dots + x^n),$$

możemy ją następująco wysłowić w języku „funkcyjnym”:

dla każdego  $x \in (-1, 1)$  wartość funkcji  $f(x)$  jest granicą ciągu wartości wielomianów

$$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}.$$

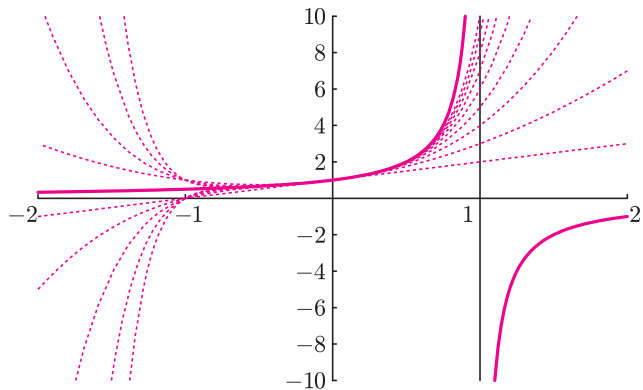
Efekt „zbliżania się” sum częściowych  $S_n(x)$  do  $f(x)$  dla różnych wartości  $x \in (-1, 1)$  można zaobserwować na rysunkach wygenerowanych za pomocą pakietu *Mathematica*. Górny rysunek niżej przedstawia wykres funkcji  $f$ , dolny – wykresy sum częściowych  $S_n$  dla  $n = 3, \dots, 11$ . Widać wyraźnie, jak „psuje się” zbieżność sum częściowych szeregu poza przedziałem zbieżności.



Zbieżność

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + \dots + x^n)$$

widać jeszcze lepiej, gdy wszystkie wykresy umieszczone są w jednym układzie współrzędnych.



Wróćmy do ogólnego przypadku. Jak zauważyliśmy na samym początku, suma szeregu potęgowego jest pewną funkcją zmiennej  $x$ . Dziedziną tej funkcji jest, oczywiście, przedział zbieżności szeregu. Nasuwa się pytanie: kiedy daną funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej można przedstawić jako sumę pewnego szeregu potęgowego?

Odpowiedź na to pytanie zależy od własności funkcji związanych z jej różniczkowalnością i prowadzi do pojęcia szeregu Taylora. Załóżmy, że  $f$  jest funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  i że ma w tym otoczeniu wszystkie pochodne. Szereg

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

nazywa się *szeregiem Taylora funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $x_0$* . Suma częściowa  $S_n(x)$  szeregu Taylora nazywa się *wielomianem Taylora rzędu  $n$* , a jego

Ostatnią równość nazywamy *rozwinięciem Taylora funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $x_0$* . Podobnie jak poprzednio, jeśli  $x_0 = 0$ , to mówimy o *rozwinięciu Maclaurina funkcji  $f$* .

Można udowodnić, że rozwinięcie Taylora jest jedynym sposobem przedstawienia danej funkcji jako sumy szeregu potęgowego. Mówiąc ściśle, jeżeli w jakimkolwiek przedziale otwartym zawierającym  $x_0$  zachodzi równość

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots,$$

to funkcja  $f$  ma wszystkie pochodne w tym przedziale oraz  $f^{(n)}(x_0) = n!c_n$ . Fakt ten pozwala znajdować rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy niekoniecznie przez obliczanie kolejnych pochodnych. Przypomnijmy rozważany wcześniej szereg geometryczny

$$1 + x + \dots + x^n + \dots$$

Jego sumą w przedziale  $(-1, 1)$  jest funkcja

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

– można to udowodnić elementarnie. Można też łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, że omawiany szereg geometryczny jest właśnie szeregiem Maclaurina funkcji  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Wiele funkcji elementarnych daje się rozwinąć w szereg Taylora (częściej rozważamy rozwinięcia Maclaurina, ponieważ dają one wygodny „wzór na funkcję” w języku szeregu).

współczynniki – *współczynnikami Taylora funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $x_0$* .

W przypadku  $x_0 = 0$  szereg Taylora przyjmuje postać

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

i nazywa się *szeregiem Maclaurina funkcji  $f$* .

Z samej definicji widać, że szereg Taylora funkcji  $f$  jest zbieżny w punkcie  $x_0$  i że jego suma jest wtedy równa  $f(x_0)$ . W ogólnym przypadku szereg Taylora nie musi być zbieżny do  $f(x)$  dla wartości  $x$  różnych od  $x_0$ . Klasycznym przykładem jest funkcja

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Można sprawdzić, że funkcja ta ma wszystkie pochodne w każdym punkcie i że wszystkie jej pochodne w zerze są równe zero. Szereg Maclaurina rozważanej funkcji ma zatem postać

$$0 + 0x + \dots + 0x^n + \dots$$

i jego suma jest, oczywiście, równa 0 dla każdego  $x$  rzeczywistego. Natomiast sama funkcja przyjmuje wartość 0 tylko w zerze. Kiedy więc szereg Taylora jest zbieżny do „swojej” funkcji? Można udowodnić, że jednym z warunków dostatecznych takiej zbieżności jest wspólna ograniczoność pochodnych  $f^{(n)}(x)$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Dokładniej, jeśli istnieją stała  $M$  i otoczenie  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  punktu  $x_0$ , takie że dla każdego  $n$  naturalnego i dla każdego  $x \in U$  zachodzi nierówność  $|f^{(n)}(x)| \leq M$ , wówczas

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

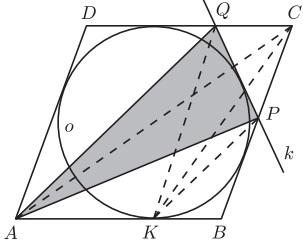
dla każdego  $x \in U$ .





### Rozwiązanie zadania M 1092.

Oznaczmy przez  $K$  punkt styczności okręgu  $o$  z bokiem  $AB$ .



W zadaniu 1089 z poprzedniej *Delty* wykazaliśmy, że proste  $KP$  i  $AQ$  są równoległe. Stąd, oznaczając przez  $[XYZ]$  pole trójkąta  $XYZ$ , otrzymujemy  $[APQ] = [AKQ] = [AKC]$ . Pole trójkąta  $AKC$  nie zależy od wyboru stycznej  $k$ , skąd teza.

Na przykład funkcja wykładnicza  $e^x$  oraz funkcje trygonometryczne  $\sin x$  i  $\cos x$  są na całej prostej sumami swoich szeregów Maclaurina:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

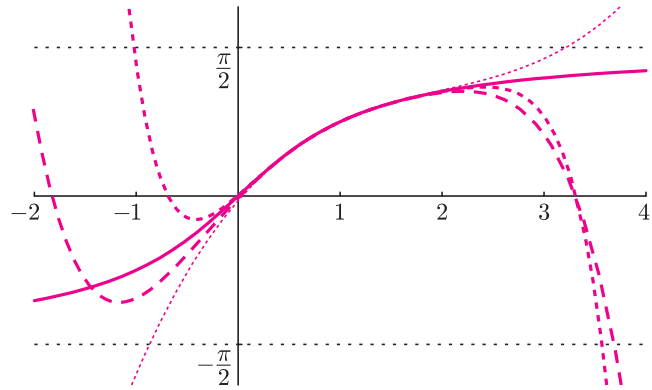
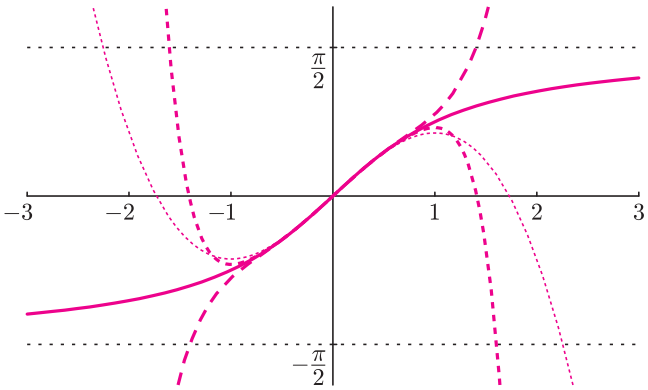
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots,$$

Może się oczywiście zdarzyć, że szereg Taylora jest zbieżny tylko w pewnym przedziale ograniczonym. Na przykład szereg Maclaurina funkcji  $y = \arctg x$  jest zbieżny tylko w przedziale  $(-1, 1]$ . Rozwinięcie Maclaurina tej funkcji ma postać

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

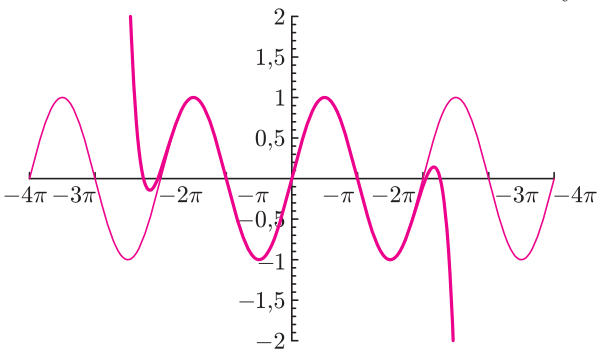
Zwróćmy uwagę, że sama funkcja  $y = \arctg x$  jest określona na całej prostej, jednak jest sumą swojego szeregu Maclaurina tylko w przedziale  $(-1, 1]$ . Jeśli chcemy uzyskać przybliżenia tej funkcji wielomianami w otoczeniu innego punktu, musimy użyć odpowiedniego szeregu Taylora. Ilustrują to dwa rysunki niżej (wygenerowane przez *Mathematica*). Przedstawiono na nich wykres funkcji  $y = \arctg x$ . Dodatkowo pierwszy rysunek zawiera wykresy jej wielomianów Maclaurina, drugi – wielomianów Taylora w otoczeniu punktu  $x_0 = 1$ . W obu przypadkach są to wielomiany stopnia 3, 5 i 7. Zaobserwujemy ponownie, jak dobrze funkcja  $\arctg x$  jest przybliżana swoimi wielomianami Taylora w przedziale zbieżności odpowiedniego szeregu potęgowego (na rysunkach wykresy praktycznie się pokrywają) i jak wszystko się psuje poza przedziałem zbieżności.



Pakiet *Mathematica* zawiera specjalną funkcję *Series* pozwalającą znajdować wielomiany Taylora. Wpisanie w komórkę dokumentu *Mathematica* przykładowego wyrażenia `Normal[Series[Sin[x], x, x0, n]]` spowoduje, że *Mathematica* zwróci wyrażenie będące wielomianem Taylora rzędu  $n$  funkcji  $\sin x$  w otoczeniu punktu  $x_0$ . Oczywiście, w konkretnym wywołaniu w miejsce parametrów  $x_0, n$  należy wstawić wartości liczbowe.

Spektakularne efekty można uzyskać, rysując wielomiany Maclaurina funkcji sinus i cosinus w „dużych” przedziałach o środku w zerze, pod warunkiem, że wielomiany te są dostatecznie wysokiego stopnia (przypomnijmy, iż obie

funkcje są sumami swoich szeregów Maclaurina na całej prostej). Wpisanie następującego kodu do komórki dokumentu *Mathematica* wygeneruje obrazek demonstrujący, w jaki sposób funkcja  $\sin x$  jest przybliżana przez swój wielomian Maclaurina stopnia 15 w przedziale  $[-2\pi, 2\pi]$ :



```
mojMaclaurin=Normal[Series[Sin[x], x, 0, 15]];
Plot[Sin[x], mojMaclaurin, x, -4Pi, 4Pi,
PlotStyle -> Thickness[0.004], Thickness[0.008],
PlotRange -> -4Pi, 4Pi, -2, 2,
Ticks -> Range[-4Pi, 4Pi, Pi], Automatic]
```



# Oddziaływania elementarne i wczesny Wszechświat

Stefan POKORSKI, Krzysztof TURZYŃSKI

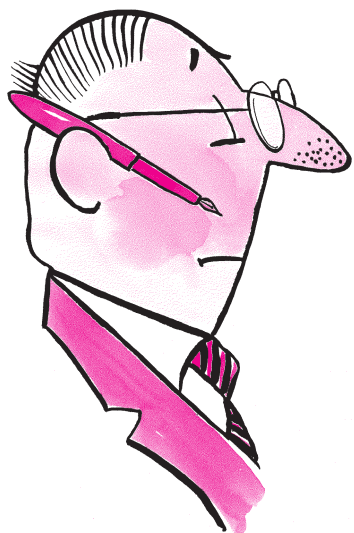
Oddziaływania silne, słabe i elektromagnetyczne, w pełni zrozumiane w ramach Modelu Standardowego, są odpowiedzialne za nukleosyntezę i tworzenie się neutralnych atomów. Standardowy Model Kosmologiczny razem z Modelem Standardowym oddziaływań elementarnych daje w pełni zgodny z obserwacjami opis historii Wszechświata, począwszy od pierwszej sekundy po Wielkim Wybuchu. W tym momencie temperatura Wszechświata wynosiła około 10 miliardów kelwinów i wciąż panowała równowaga termodynamiczna między elektronami, neutrinami, fotonami, protonami, neutronami i jądrami atomowymi, przy czym, zgodnie z rozkładem statystycznym, tych ostatnich było znikomo mało z uwagi na ich dużą masę. Wraz z dalszym obniżaniem się temperatury Wszechświata podstawowe procesy zapewniające równowagę termodynamiczną między protonami, neutronami i innymi cząstkami – tj. przemiany  $\beta$ , czyli np. proces  $p + e \leftrightarrow n + \nu$  – zaczęły przebiegać zbyt wolno w porównaniu z tempem rozszerzania się Wszechświata. Neutrony przestały więc być w równowadze termodynamicznej z resztą cząstek. Oznaczmy przez  $T_n$  temperaturę, przy której to nastąpiło. Stosunek gęstości neutronów do gęstości protonów (decydujący w ostatecznym rozrachunku o liczbie jąder atomowych) przestał zmniejszać się wraz ze spadkiem temperatury otoczenia i ustalił się na poziomie przewidywanym przez rozkład statystyczny dla temperatury  $T_n$ . Ponieważ neutrony są nieco cięższe od protonów, stosunek liczby neutronów do liczby protonów zależał w istotny sposób od temperatury  $T_n$ , a ta zaś od liczby rodzajów neutrin i siły oddziaływań słabych (w Standardowym Modelu Kosmologicznym ten stosunek wynosi około 1/6). Nieodwracalne już rozpady  $\beta$ , przekształcające neutrony w protony, elektrony i neutrino, spowodowały następnie dalszy spadek liczby neutronów oraz wzrost liczby protonów (stosunek liczb tych cząstek spadł do obecnej wartości 1/7).

Drugi etap nukleosyntezy polegał na łączeniu protonów i neutronów w jądra atomowe. Początkowo proces ten przebiegał w sposób odwracalny, gdyż znajdujące się we Wszechświecie fotony miały wciąż energie na ogół wystarczające do rozbijania nowo powstających jąder. Dopiero w miarę spadku temperatury Wszechświata energie fotonów zmniejszyły się na tyle, że jądra atomowe nie ulegały już rozbiciu – moment ten zależał od siły wiązania protonów i neutronów w jądra, czyli od właściwości oddziaływań silnych. W rezultacie prawie wszystkie neutrony zostały związane w jądra izotopu helu  ${}^4\text{He}$  (zwane inaczej cząstkami  $\alpha$ ), zawierające dwa protony i dwa neutrony. Można stąd obliczyć, że wytworzone w ten sposób jądra  ${}^4\text{He}$  stanowiły 25% pierwotnej materii barionowej. Oprócz tego powstały niewielkie domieszki jąder helu  ${}^3\text{He}$ , deuteru  ${}^2\text{H}$  (mniej więcej 0,001%–0,1% ogólnej liczby jąder w zależności od początkowej liczby protonów i neutronów) oraz litu  ${}^7\text{Li}$  (mniej więcej  $10^{-9}$  ogólnej liczby jąder).

Nawet niewielka zmiana w fizyce opisywanej przez Model Standardowy oddziaływań elementarnych miałyby dramatyczne skutki dla nukleosyntezy. Gdyby liczba rodzajów neutrin była inna, czyli różna od 3, lub gdyby oddziaływania słabe były jeszcze słabsze (np. cząstki  $W^\pm$  i  $Z^0$  miałyby większe masy), to zmieniłby się także stosunek liczby neutronów do liczby protonów. Warto także podkreślić, że proces pierwotnej nukleosyntezy zależał w istotny sposób od tego, czy we Wszechświecie podczas produkcji pierwszych jąder atomowych znajdowała się znacząca liczba cząstek niewystępujących w Modelu Standardowym. Obecność takich „intruzów” znacznie zmieniłaby przebieg całego

procesu i prowadziłyby do powstania innych ilości lekkich pierwiastków niż wynika to z danych obserwacyjnych. Dlatego pierwotna nukleosynteza jest ważnym testem wzajemnej zgodności Standardowego Modelu Kosmologicznego i teorii oddziaływań elementarnych.

Fakt, że obserwacje dotyczące rozpowszechnienia lekkich pierwiastków zgadzają się bardzo dobrze z przewidywaniami teoretycznymi, jest ważnym, niezależnym od doświadczeń, w których cząstki elementarne zderzane są w akceleratorach, potwierdzeniem, iż Model Standardowy oddziaływań



elementarnych jest doskonałą teorią przy energiach cząstek nieprzekraczających  $10^{11}$  eV. Niemniej jednak, jak już pisaliśmy w pierwszym artykule (*Delta* 1/2005), jest ona prawdopodobnie przybliżeniem jakiejś głębszej teorii, podobnie jak teoria grawitacji sformułowana przez Newtona jest bardzo dobrym przybliżeniem ogólnej teorii względności Einsteina dla niezbyt dużych (w skali kosmicznej) mas i prędkości oddziałujących obiektów. Fizyka oddziaływań elementarnych dostarcza obecnie przede wszystkim argumentów teoretycznych za istnieniem teorii bardziej podstawowej niż Model Standardowy. Jej poszukiwanie, obok odkrycia cząstki Higgsa, było główną motywacją do budowania nowego akceleratora cząstek LHC w CERN-ie. Z drugiej strony, istnieją zagadkowe fakty kosmologiczne związane z procesami, które miały miejsce przed nukleosyntezą: brak antymaterii, istnienie ciemnej materii i energii próżni, istnienie bardzo małych niejednorodności energii w niezwykle jednorodnym Wszechświecie i związana z tym idea inflacji mającej miejsce przed prawdziwym Wielkim Wybuchem, czyli chwilą, w której Wszechświat stał się gorący. Nie licząc mas neutrin, zagadki te są obecnie głównymi argumentami empirycznymi za istnieniem bardziej podstawowej teorii oddziaływań elementarnych. Co więcej, liczba i precyzja dostępnych danych obserwacyjnych dotyczących tych faktów kosmologicznych pozwala uznać wczesny Wszechświat za doskonale laboratorium do badania oddziaływań elementarnych.

Czy argumenty teoretyczne dostarczane przez fizykę oddziaływań elementarnych i empiryczne argumenty kosmologiczne są już wystarczające do sformułowania tej bardziej podstawowej teorii? Na razie jeszcze nie. Jak wspomnieliśmy w pierwszym artykule, istnieje zaledwie (aż?!) kilka spójnych koncepcji teoretycznych rozszerzenia Modelu Standardowego, z których najciekawszą i najbardziej elegancką jest bez wątpienia hipoteza istnienia dodatkowej przybliżonej symetrii w przyrodzie, zwanej supersymetrią. Zagadki kosmologiczne nie faworyzują wprowadzenia jednoznacznie supersymetrii jako właściwego rozszerzenia Modelu Standardowego, ale często dają się łatwiej rozwiązać w ramach takiej teorii, nakładając na nią jednocześnie istotne ograniczenia.

Najbardziej wyrazistym przykładem jest przewidywane przez teorię supersymetryczną *neutralino*, nowa i ciężka cząstka pozbawiona ładunku elektrycznego, słabo oddziałująca z innymi cząstkami. Z tego powodu neutralina byłaby świetnym materiałem na ciemną materię. Jednak, aby gęstość tworzących ciemną materię neutralin była równa gęstości ciemnej materii wyznaczonej z obserwacji mikrofalowego promieniowania tła, muszą mieć one ściśle określone właściwości, które mogą być niezależnie sprawdzone w LHC – jest to część programu badawczego tego urządzenia oraz wielu innych eksperymentów.

Inną konsekwencją supersymetrii jest możliwość prostego wyjaśnienia, dlaczego mogła zajść inflacja i w szczególności, dlaczego energia potencjalna pola

wywołującego inflację nie została natychmiast zamieniona na energię kinetyczną, jak dzieje się to np. w przypadku krążka znajdującego się na równi pochyłej. W teoriach supersymetrycznych energia potencjalna niektórych pól ma tzw. kierunki zerowe odpowiadające w naszym przykładzie równi o zerowym nachyleniu, a jeśli uwzględnić poprawki kwantowe i efekty związane z naruszeniem supersymetrii – równi o bardzo małym nachyleniu. W takiej sytuacji energia potencjalna krążka byłaby zamieniana na jego energię kinetyczną bardzo wolno. Podobny efekt zachodzi w przypadku pola powodującego inflację: w teorii supersymetrycznej jego energia potencjalna pozostawałaby przez krótki okres czasu praktycznie stała. Ten okres to właśnie okres inflacji, w którym nastąpiło znaczne i gwałtowne rozszerzenie się Wszechświata. Po nim nastąpiła szybka zamiana energii potencjalnej na energię kinetyczną cząstek, czyli podgrzanie Wszechświata.

Rozwiązanie problemu dominacji materii nad antymaterią także wymaga rozszerzenia Modelu Standardowego. Ponieważ podczas inflacji Wszechświat praktycznie opustoszał, przewaga materii nad antymaterią musiała powstać po inflacji w wyniku szczególnych właściwości jakiegoś rodzaju oddziaływań elementarnych. Oddziaływania te powinny odróżniać cząstki od antycząstek, np. prawdopodobieństwo produkcji cząstek powinno być większe niż prawdopodobieństwo produkcji antycząstek. Musiała być także naruszona równowaga termodynamiczna, gdyż w przeciwnym razie każdemu procesowi produkcji cząstki towarzyszyłby odwrotny proces – anihilacja cząstki.

W Modelu Standardowym oddziaływania silne i elektromagnetyczne nie rozróżniają cząstek i antycząstek. Własność tę mają jedynie oddziaływania słabe, co zostało wykazane doświadczalnie przez obserwację samorzutnej zamiany mezonów  $K^0$  i  $B^0$  – pewnych cząstek złożonych z par kwark-antykwar – w odpowiadające im antycząstki. Jednak naruszenie symetrii cząstka-antycząstka w oddziaływaniach słabych jest bardzo niewielkie i nie wystarcza do wyjaśnienia obserwowanej we Wszechświecie asymetrii pomiędzy materią i antymaterią. Naturalnym, dodatkowym źródłem naruszenia symetrii między cząstkami i antycząstkami mogą być rozpady ciężkich cząstek  $N$  – tych samych, których istnienie wyjaśnia elegancko bardzo małe w porównaniu z innymi cząstkami wartości masy neutrin. Na wczesnych etapach historii Wszechświata cząstki te powinny były wypełniać przestrzeń kosmiczną na równi z materią, antymaterią i fotonami. Przy ochładzaniu się Wszechświata równowaga termodynamiczna tych cząstek została naruszona, tzn. rozpadały się one, lecz przestały już efektywnie zachodzić procesy ich produkcji. Od strony teoretycznej jest bardzo prawdopodobne, że w wyniku rozpadów ciężkich partnerów neutrin może powstać więcej antyleptonów (antycząstek) niż leptonów (cząstek). W wyniku dalszych oddziaływań opisywanych

przez Model Standardowy nadwyżka antyleptonów nad leptonami może przekształcić się na nadwyżkę kwarków nad antykwarkami. W wyniku dalszego ochładzania się Wszechświata wszystkie antykwarki zanihilowały z kwarkami, tworząc fotony, natomiast z nadwyżki kwarków utworzone zostały bariony: protony i neutrony. Opisany wyżej mechanizm nosi nazwę *bariogenezy przez leptogenezę*, czyli generacji nadwyżki barionów nad antybarionami wskutek uprzedniego wytworzenia asymetrii między leptonami i antyleptonami. Wprawdzie supersymetria nie jest konieczna, aby ten mechanizm mógł zachodzić, ale jest on naturalny tylko w teorii supersymetrycznej ze względu na bardzo dużą różnicę skali elektroslabej i skali mas ciężkich cząstek  $N$ :  $M_N/M_{W^\pm, Z^0} \sim 10^{12}$ , która, jakkolwiek mniejsza od  $M_P/M_{W^\pm, Z^0} \sim 10^{16}$ , także wymaga wyjaśnienia.

## Podsumowanie

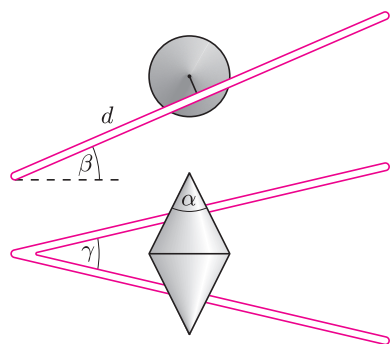
Nie ma obecnie wątpliwości co do silnego związku między fizyką oddziaływań elementarnych i kosmologią. Nie jest to jednak wciąż związek partnerski. Kosmologia

dostarcza na razie najlepszych empirycznych argumentów za koniecznością rozszerzenia Modelu Standardowego, natomiast fizyka oddziaływań elementarnych – argumentów teoretycznych i konkretnych koncepcji takiego rozszerzenia. Kosmologia nie wyróżnia jeszcze wyraźnie żadnej z koncepcji teoretycznych. Konkretnie idee teoretyczne, pochodzące z fizyki oddziaływań elementarnych, wyznaczają jednak pewne ramy rozwiązywania zagadek kosmologicznych i są zarazem ograniczane przez dane płynące z obserwacji kosmosu. Z punktu widzenia fizyki oddziaływań elementarnych najciekawszą koncepcją teoretyczną rozszerzającą Model Standardowy jest teoria supersymetryczna, która także ułatwia wyjaśnienie zagadek kosmologicznych. Jednak ostateczna weryfikacja tej teorii będzie możliwa dopiero dzięki akceleratorowi LHC. Jeśli teoria supersymetryczna okaże się prawdziwa, będzie to zasadniczy krok zarówno w kierunku pełniejszego zrozumienia pochodzenia skali elektroslabej i mas znanych dziś cząstek, jak też do pełnego zrozumienia wczesnej historii Wszechświata.



## Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 1

**F 639.** Klocek w kształcie dwóch, złączonych podstawami stożków o promieniu  $R$  i kącie rozwarcia  $\alpha$  postawiono na dwóch pochyłych szynach rozszerzających się w kierunku do góry. Jakie warunki muszą spełniać kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  (patrz rysunek 1), by klocek był w stanie toczyć się sam po szynach w prawo („pod górę”)?

Rozwiązanie na str. 12

**F 640.** W układzie z poprzedniego zadania: założmy, że klocek początkowo spoczywa na lewym końcu szyn. Potem pozwalamy mu toczyć się w prawo. Podać prędkość liniową klocka w miejscu, gdzie rzut odległości punktu styku klocka i którejsz z szyn od lewego końca szyn wynosi  $d$  (rysunek 1). Dane są masa klocka  $m$ , jego moment bezwładności względem wspólnej osi stożków  $I$  i promień  $R$ . Czy staczanie się będzie odbywało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, jak w przypadku staczania się kulki z równi pochyłej? Dla uproszczenia założyć, że zależność między prędkością kątową klocka  $\omega$  i prędkością liniową  $v$  jest w postaci  $v = \rho\omega$ , gdzie  $\rho$  to odległość osi stożków od punktu styku i pominać tarcie.

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1090.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi punktu  $C$  odpowiednio na dwusieczne kątów  $BAC$  i  $ABC$  (rys. 2). Znając długości boków trójkąta  $ABC$ , obliczyć długość odcinka  $PQ$ .

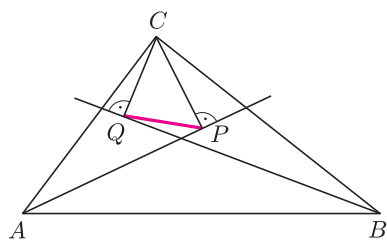
Rozwiązanie na str. 13

**M 1091.** Twierdzenie Lagrange’a orzeka, że każdą liczbę naturalną można zapisać w postaci sumy czterech kwadratów liczb całkowitych. Rozstrzygnąć, czy liczbę  $2^{2005}$  można przedstawić w postaci sumy kwadratów czterech liczb całkowitych dodatnich.

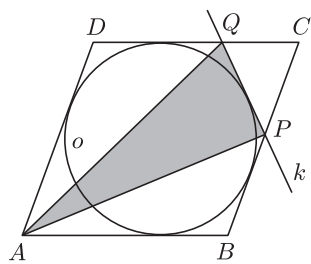
Rozwiązanie na str. 13

**M 1092.** Okrąg  $o$  jest wpisany w romb  $ABCD$ . Styczna  $k$  do okręgu  $o$  przecina odcinki  $BC$  i  $CD$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$  (rys. 3). Wykazać, że pole trójkąta  $APQ$  nie zależy od wyboru stycznej  $k$ .

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2



Rys. 3

## Ławica czarnych dziur

Wspólną cechą łowców z powołania jest cierpliwość. Kolejną – znajomość zwyczajów tropionej zwierzyny. Dobry wędkarz wie, gdzie zakotwiczyć łódkę, aby złapać rekordowego sumę.

Zwierzyna może być różna, ale podstawowa strategia jest zawsze taka sama. Trzeba znać miejsce, w którym warto zacząć się, a następnie cierpliwie czekać.

Właśnie taka myśl przyświecała pomysłowi długoterminowego monitorowania centrum Drogi Mlecznej za pomocą kosmicznego Obserwatorium Promieni-X Chandra.

Dziesiątego stycznia 2005 roku ukazał się raport [1] podsumowujący pięć lat trwania programu. Ponieważ czas obserwacyjny Chandry jest niezwykle cenny, to program monitorowania centrum Drogi Mlecznej musiał zadowolić się pojedynczymi pomiarami robionymi w kilkumiesięcznych odstępach. W sumie wykonano 16 obserwacji za pomocą instrumentu ACIS (Advanced CCD Imaging Spectrometer).

Pomimo to udało się zaobserwować cztery zmienne źródła promieniowania rentgenowskiego (zobacz animację na stronie internetowej *Delty*) w obrębie trzech lat świetlnych wokół Strzelca A\*, czyli potwornie masywnej czarnej dziury okupującej centrum Naszej Galaktyki.

Każde z tych źródeł jest najprawdopodobniej układem podwójnym czarnej dziury i rezerwuaru materii, czyli zwykłej gwiazdy, z którego czarna dziura może czerpać. Przepływająca materia rozgrzewa się do bardzo wysokich temperatur i świeci w zakresie promieniowania X, a ponieważ karmienie odbywa się w sposób nieregularny, to intensywność świecenia zmienia się w czasie.

Z liczby wykrytych układów podwójnych można wnioskować, jaka jest ogólna liczba czarnych dziur w okolicach centrum Drogi Mlecznej. Wygląda na to, że ławica ta zawiera ich ponad dziesięć tysięcy [1]!

Przyjmuje się, że tak duża koncentracja tych ciężkich obiektów wynika z trwającego miliardy lat procesu nazwanego *dynamicznym tarciem*. Wszystkie obiekty wzajemnie oddziałują poprzez grawitację. Średnio jednak cięższe obiekty są spowalniane, podczas gdy lżejsze rozpędzane. W rezultacie czarne dziury i (w mniejszym stopniu) gwiazdy neutronowe, orbitując wokół centralnej czarnej dziury, zbliżają się do niej, a obiekty lżejsze oddalają się.

Efekt ten, przewidziany dekadę temu, wydaje się właśnie znajdować pośrednie potwierdzenie.

Drugim mechanizmem, wydającym się tłumaczyć przeprowadzone obserwacje, jest przechwytywanie zwykłych gwiazd przez czarne dziury, skutkujące powstawaniem układów podwójnych.

Trzecim, w końcu, jest stopniowe zubażanie centrum galaktyk w zwykłe gwiazdy, co tłumaczy, dlaczego miejsca te mogą być relatywnie spokojne, pomimo olbrzymiego tłoku.

Przeprowadzone obserwacje mogą pomóc w wyjaśnieniu mechanizmu powstawania supermasywnych czarnych dziur. Przewiduje się, że mniej więcej raz na milion lat jedna zwykła czarna dziura pada łupem supermasywnego potwora. W ten sposób można jednak wytłumaczyć zaledwie pochodzenie kilku procent masy centralnej czarnej dziury.

Dalsze obserwowanie Strzelca A\* na pewno nie zaszkodzi.

## Globalne skutki tragedii na Oceanie Indyjskim

Wszyscy mamy jeszcze w pamięci obrazy tragicznego tsunami, które spustoszyło wybrzeża Dalekiego Wschodu 26 grudnia zeszłego roku. Pełnej liczby ofiar nigdy nie poznamy, ale wiadomo, że życie straciło około dwustu tysięcy ludzi. To tak, jakby z powierzchni Ziemi zniknął Radom albo Białystok...

W miarę upływu czasu wszyscy będą stopniowo zapominać o tej tragedii. Wszyscy, oprócz tych, których ona bezpośrednio dotknęła...

Powody umieszczenia tego tekstu w Aktualnościach są dwa. W środkach masowego rażenia pojawiła się informacja, że to tsunami spowodowało zmianę długości doby. Istotnie, trzęsienie ziemi (bo oczywiście nie wywołane nim tsunami) spowodowało przyspieszenie tempa obrotu Ziemi. W *Nature* opublikowano artykuł, z którego wynika, że zmiana długości doby wynosi kilka milionowych sekundy. Zmiana ta jest spowodowana przesunięciem jednej ze ścierających się płyt ku środkowi Ziemi. Przesunięcie to spowodowało zmniejszenie się momentu bezwładności Ziemi, a więc, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, zwiększenie prędkości kątownej Naszej Planety.

Drugim powodem wspomniania w *Delcie* o tej tragedii jest przeświadczenie, że nawet jeżeli tragicznych skutków nie dałoby się całkowicie wyeliminować, to na pewno można było je istotnie ograniczyć, a jedyne, co było potrzebne, to edukacja. Gazety na całym świecie podały, że na pewnej plaży życie wielu ludzi uratowała dwunastoletnia panna, która „ze szkoły” pamiętała, iż cofanie się oceanu wyprzedza o kilka minut falę tsunami. Podobno dzięki niej ludzie z tej plaży zdołali się uratować. Nie jestem pewien, czy ta informacja jest w pełni prawdziwa. Ewakuacja plaży w kilka minut, bez wzajemnego tratowania się ludzi, nie jest sprawą prostą. Prawdopodobnie dziewczynka musiała mieć mądrych opiekunów, a w pobliżu pewnie byli rozsądni ratownicy. Wiarygodność tej informacji nie zmienia jednak faktu, że szkolna wiedza mogła uratować wielu ludzi. W tym miejscu pozwolę sobie zadać idiotyczne pytanie retoryczne: czy polska szkoła przekazuje tego typu wiedzę? Bo choć tsunami raczej nam nie grozi, to po pierwsze – Polacy coraz więcej podróżują, a po drugie – są inne żywy zagrażające człowiekowi.

Fala tsunami niewiele różni się od fali powodziowej. Budowanie na terenach zagrożonych tsunami niczym nie różni się od budowania na terenach zalewowych. W obu przypadkach, wcześniej czy później, nastąpi tragedia. Jeżeli nawet uda się uniknąć strat ludzkich, to strat materialnych już nie.

Nie wiem, czy niesienie kaganka oświaty może coś pomóc w skali globalnej. Ale na pewno warto pójść za radą Chama z piosenki Wojciecha Młynarskiego i... budować arkę.

Piotr ZALEWSKI

[1] [http://chandra.harvard.edu/press/05\\_releases/press\\_011005.html](http://chandra.harvard.edu/press/05_releases/press_011005.html)





# mała delta

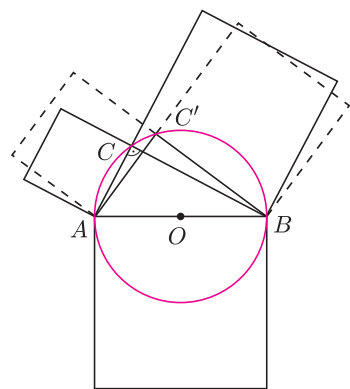
## Geometryczne osobliwości: niezmiennicze sumy

Ze szkolnej geometrii wiemy, że:

- suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa  $\pi$ ; ogólniej: suma miar kątów wewnętrznych wypukłego  $n$ -kąta ( $n \geq 3$ ) jest równa  $(n-2)\pi$ ,
- dla kąta o mierze  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,
- *elipsa* to zbiór punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów jest stała.

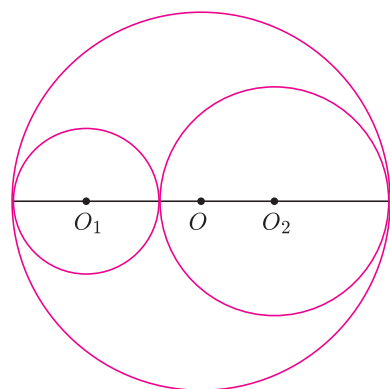
Oto kilka innych obserwacji geometrycznych tego typu. Wskazane w nich sumy nie zmieniają się nawet wtedy, gdy zmianie ulegają parametry figur, których te sumy dotyczą.

**A.** (Dynamiczna interpretacja twierdzenia Pitagorasa.) W okrąg  $O(r)$  wpisujemy trójkąt prostokątny  $ABC$  oparty na jego średnicy (rys. 1). Na zewnątrz trójkąta, na jego bokach, budujemy kwadraty. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa,  $a^2 + b^2 = (2r)^2$ . Zależność ta nie ulega zmianie, gdy wierzchołek  $C$  będziemy przemieszczać wzdłuż półokręgu  $AB$  ( $C \neq A$  i  $C \neq B$ ).



Rys. 1

**B.** W okrąg  $O(r)$  wpisujemy takie dwa okręgi styczne wewnętrznie  $O_1(r_1)$  oraz  $O_2(r_2)$ , że  $r_1 + r_2 = r$  (rys. 2). Wówczas suma obwodów wpisanych okręgów jest równa obwodowi okręgu opisanego:  $2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi r$ .



Rys. 2

**C.** (Twierdzenie Vivianiego) W trójkącie równobocznym  $ABC$  suma trzech odległości punktu wewnętrznego trójkąta  $S$  od boków tego trójkąta nie zależy od położenia tego punktu (rys. 3).

**D.** W trójkąt równoramienny  $ABC$ , o podstawie  $2a$  i wysokości  $h$ , wpisujemy dwa styczne kwadraty leżące na podstawie  $AB$  (rys. 4). Wówczas suma długości boków tak wpisanych kwadratów jest stała:  $x + y = \frac{2ah}{(a+h)}$  (jest średnią harmoniczną liczb  $a$ ,  $h$ ).

Z proporcji  $\frac{x}{a} = \frac{a}{h}$  mamy  $p = \frac{ax}{h}$ . Z proporcji  $\frac{y}{h} = \frac{h}{a}$  mamy  $q = \frac{ay}{h}$ .

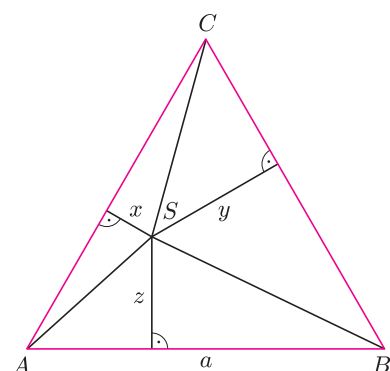
Wstawiając otrzymane wartości do równania  $p + x + y + q = 2a$  (długość odcinka  $AB$ ), otrzymujemy oczekiwaną zależność.

**E.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$ , o podstawie  $2a$  i wysokości  $h$ , wpisujemy dwa styczne zewnętrznie półokręgi, których średnice leżą na podstawie  $AB$  (rys. 5). Wówczas suma promieni tak wpisanych półokręgów jest stała:  $R + r = \frac{2ah}{h + \sqrt{a^2 + h^2}}$ . Z proporcji  $\frac{R}{x} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$  mamy  $x = \frac{R}{h} \sqrt{a^2 + h^2}$ . Z proporcji  $\frac{r}{y} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$  mamy  $y = \frac{r}{h} \sqrt{a^2 + h^2}$ .

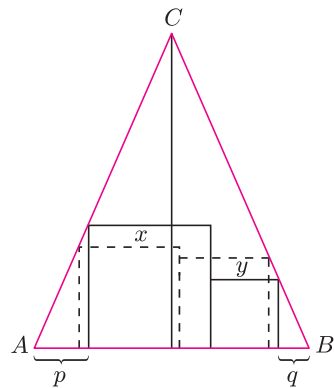
Wstawiając otrzymane wartości do równania  $x + R + r + y = 2a$  (długość odcinka  $AB$ ), otrzymujemy oczekiwaną zależność.

*Uwaga.* Analogiczną zależność mamy dla stycznych zewnętrznie półkul wpisanych w stożek, położonych na jego podstawie.

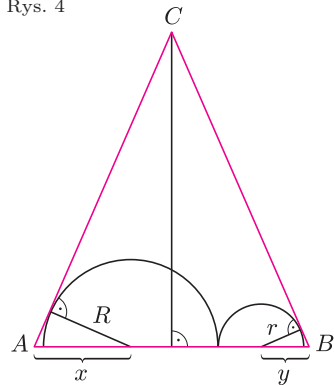
**F.** Przez podstawę  $AB$  trójkąta równobocznego  $ABC$  prowadzimy prostą  $k$ , a przez wierzchołek  $C$  prostą  $l$ , która nie ma punktów wspólnych z wnętrzem trójkąta. Na zewnątrz trójkąta w obszarach ograniczonych prostymi  $k$  i  $l$  dopisujemy styczne okręgi  $O_1(r_1)$  oraz  $O_2(r_2)$ , (rys. 6). Wówczas  $r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Rozważając trójkąty prostokątne



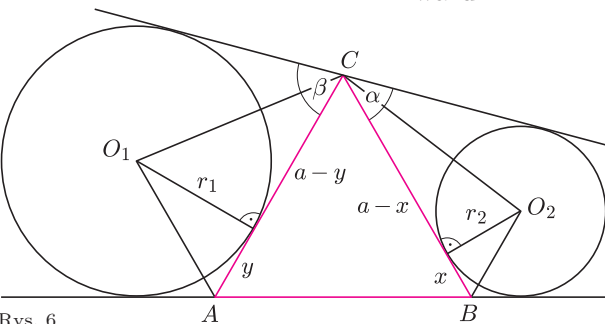
Rys. 3



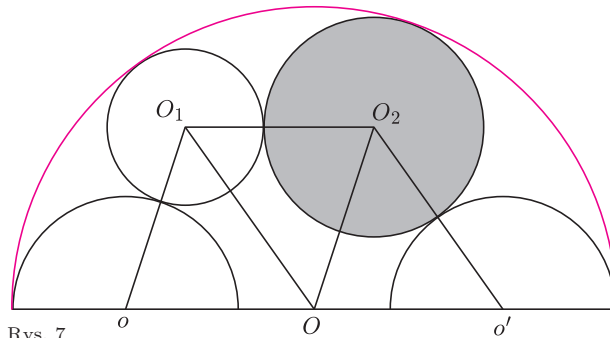
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

tworzące trójkąt  $ACO_1$ , mamy  $\frac{a-y}{r_1} = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ ,  $\frac{y}{r_1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , a stąd

$$r_1 = \frac{a}{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Prowadząc podobne rozważania dla trójkąta  $BCO_2$ , otrzymujemy

$$r_2 = \frac{a}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

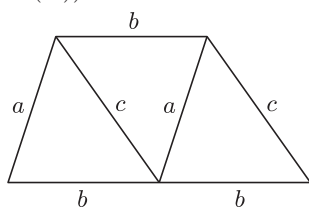
Korzystając z zależności  $\alpha + \beta = \frac{2}{3}\pi$  oraz znanych zależności trygonometrycznych, po niezbyt uciążliwych rachunkach otrzymamy zapowiedzianą równość.

**G.** W półokrąg  $O(R)$  wpisujemy dwa identyczne półokręgi  $o(r)$  o promieniach  $r < \frac{1}{2}R$  tak, że leżą one na średnicy okręgu  $O(R)$  i są do niego styczne wewnętrznie (rys. 7). W pozostały obszar półokręgu  $O(R)$  wpisujemy okrąg  $O_1(d_1)$  styczny zewnętrznie do okręgu  $o(r)$  oraz wewnętrznie do okręgu  $O(R)$  (oczywiście:  $\frac{Rr-r^2}{R+r} \leq d_1 \leq \frac{R^2-Rr}{R+r}$ ). Następnie w powstałą „lukę” wpisujemy okrąg styczny zewnętrznie do okręgów  $O_1(d_1)$  i drugiego okręgu  $o(r)$ , oraz styczny wewnętrznie do okręgu  $O(R)$ . Dla tak wpisanych okręgów  $O_1(d_1)$ ,  $O_2(d_2)$  mamy  $d_1 + d_2 = R - r$ .

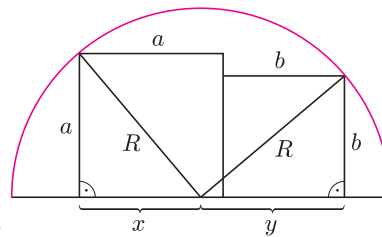
Załóżmy, że istnieje dokładnie jeden okrąg  $O_2(d_2)$ , jaki możemy wpisać w powstałą „lukę” (uzasadnienie tego faktu nie jest banalne). Oznacza to, że dla danych już punktów  $O, o, o', O_1$  (będących środkami okręgów) istnieje dokładnie jedna konfiguracja z punktem realizująca opisane wyżej warunki.

Rozważmy teraz trzy trójkąty z rysunku 8, których boki mają długości:  $a = r + d_1$ ,  $b = d_1 + d_2$ ,  $c = r + d_2$ .

Prostymi rachunkami sprawdzamy, że wykreślając z wierzchołków tych trójkątów odpowiednie okręgi, zrealizujemy konfigurację spełniającą wyżej opisane warunki. Ponieważ taka konfiguracja (przy danych punktach  $O, o, o', O_1$ ) jest dokładnie jedna, więc  $|O_1O_2| = d_1 + d_2 = b$ , gdzie  $b = R - r$  (patrz na średnicę okręgu  $O(R)$ ).



Rys. 8



Rys. 9

### Literatura

1. H. Fukagawa, D. Pedle, *Japanese temple geometry problems (San Gaku)*, The Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, 1989.
2. L. C. Tien, *Constant-sum figures*, The Mathematical Intelligencer 23 (2001), 15–16.
3. J. Zydler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

**H.** W półokrąg o promieniu  $R$  wpisujemy dwa stykające się bokami kwadraty leżące na średnicy (rys. 9). Suma pól tak wpisanych kwadratów jest stała:  $a^2 + b^2 = R^2$ . Przy oznaczeniach z rysunku 9 mamy  $x^2 = R^2 - a^2$ ,  $y^2 = R^2 - b^2$ . Stąd  $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$ . Łącząc tę równość z zależnością  $x + y = a + b$  (patrz rys. 7), obliczamy:  $x = b$  i  $y = a$ , a stąd już wynika oczekiwana równość.

Odkrycie innych tego typu zależności może być nie tylko przyjemną, ale i inspirującą przygodą.

Jarosław GÓRNICKI

# Pas Goulda

Krzysztof CZART

## Historia

Pas Goulda to struktura złożona z gwiazd znajdująca się w pobliżu Słońca, która jest wyróżniana spośród pozostałych gwiazd należących do dysku Galaktyki na podstawie rozmieszczenia w przestrzeni, wieku i cech kinematycznych. Historia zaczyna się w połowie XIX wieku, kiedy to kilku astronomów dokonało jego pierwszych obserwacji. Jednym z nich był W. Herschel, znany jako odkrywca Urana. W 1847 r. ustalili, że wiele jasnych gwiazd w otoczeniu Słońca wydaje się tworzyć pas nachylony do płaszczyzny równika galaktycznego pod kątem około  $20^\circ$ . Około roku 1880 Benjamin Gould przeprowadził dokładne badania tego podsystemu gwiazd. Ponieważ strukturę nazwano później jego imieniem, kilka słów o tym astronomie.

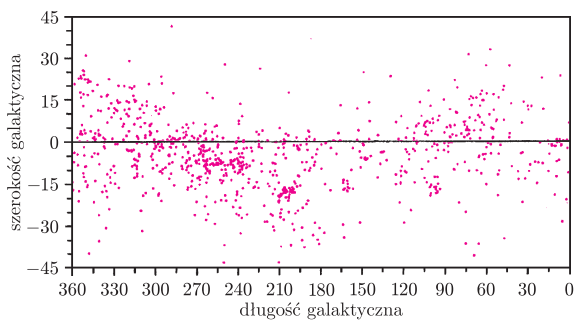


Benjamin Apthorp Gould

Benjamin Apthorp Gould żył w latach 1826–1896. Był pierwszym Amerykaninem, który otrzymał doktorat z astronomii. Dokonał tego pod opieką samego Gaussa na uniwersytecie w Getyndze. W roku 1849 założył czasopismo *The Astronomical Journal*. Był pionierem fotografii astronomicznej. Jego największą pracą stał się atlas gwiazd nieba południowego. Prace nad nim zaczął w roku 1870 w Argentynie i po kilku latach opublikował pt. *Uranometria Argentina*, wraz z dokładnymi pomiarami pozycji ponad 50 000 gwiazd. Podczas pobytu w Argentynie Gould odkrył południową część struktury zwanej dziś jego imieniem. W czasie swojego życia zgromadził wielką kolekcję książek astronomicznych, której część znajduje się obecnie w Dudley Observatory (Schenectady, New York, USA), w którym to obserwatorium pracował przez pewien czas.

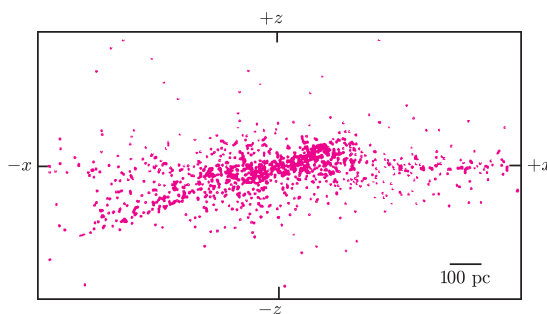
## Rozmieszczenie gwiazd Pasa

Na rysunku 1 mamy przedstawione rozmieszczenie na sferze niebieskiej gwiazd jaśniejszych od 7 mag i typie widmowym wcześniejszym niż B6. Wyraźnie widać, że grupują się one w pasie nachylonym do równika Galaktyki. Rozmieszczenia takiego nie wykazują gwiazdy o typach późniejszych.



Rys. 1

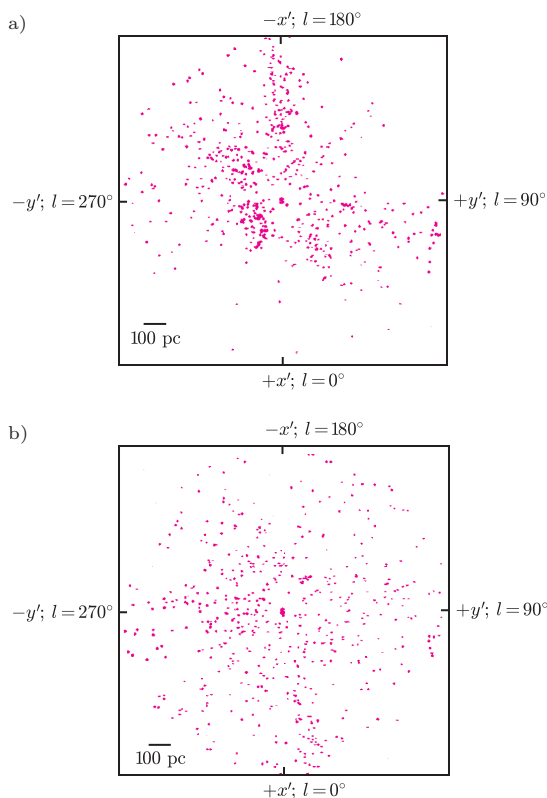
Pozwala to wysunąć przypuszczenie, iż istnieje grupa młodych gwiazd o typach widmowych O i B, która wyróżnia się spośród otoczenia. Jej istnienie najłatwiej stwierdzić, „popatrzawszy” na Galaktykę z boku. Na rysunku 2 naniesione są gwiazdy O–B5 znajdujące się w odległości do 800 pc od Słońca.



Rys. 2

Oś  $X$  leży w płaszczyźnie Galaktyki, a Słońce znajduje się na przecięciu osi  $X$  i  $Z$ . Sugerowałoby to centralne położenie naszej gwiazdy w Pasię Goulda. Jeżeli jednak wziąć pod uwagę wiek Słońca (5 mld lat) oraz wiek gwiazd O i B (rzędu 100 mln lat), najbardziej uzasadniony wydaje się wniosek, że związek Słońca z Pasem Goulda jest przypadkowy. Po prostu nasza gwiazda w swojej wędrówce wokół centrum Galaktyki znalazła się akurat w takim rejonie młodych gwiazd.

Różnice między rozmieszczeniem gwiazd Pasa Goulda i gwiazd dysku widać także na rysunku 3, na którym mamy przedstawione rzuty ich pozycji na płaszczyzny odpowiednio Pasa i Galaktyki.



Rys. 3. Pozycje gwiazd 0–B5 (w odległości do 800 pc) a) należących do Pasa Goulda rzutowane na jego płaszczyznę, b) należących do dysku galaktycznego rzutowane na płaszczyznę Galaktyki.

Można zauważyć, że gwiazdy dysku rozmieszczone są bardziej losowo, podczas gdy gwiazdy Pasa Goulda tworzą grupy, które można powiązać ze znanymi asocjacjami (rozbiegającymi się grupami młodych gwiazd), np. Sco-Cen, Per OB2, Ori OB1.

Można tu zapytać, w jaki właściwie sposób wyznaczono usytuowanie Pasa Goulda w przestrzeni. Otóż ogólne równanie płaszczyzny ma postać  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Mając współrzędne  $xyz$  każdej z gwiazd, można obliczyć jej odległość od płaszczyzny reprezentowanej przez współczynniki  $A, B, C, D$ . Współczynniki te uznajemy za najlepiej pasujące do obserwacji, gdy suma kwadratów odległości gwiazd od przewidywanej płaszczyzny będzie najmniejsza. Nazywa się to dopasowaniem w sensie najmniejszych kwadratów. Właśnie ta metoda dała kąt nachylenia płaszczyzny Pasa do równika galaktycznego równy  $20^\circ$ . Analogiczne obliczenia pozwalają na ustalenie pozycji centrum Pasa Goulda, które znajduje się w odległości około 200 pc od Słońca.

## Kinematyka

Równania Oorta opisują średni ruch orbitalny gwiazd w dysku Galaktyki. Dają teoretyczną zależność między składowymi prędkości gwiazdy względem Słońca (radialną  $v_r$ , w długości galaktycznej  $v_l$  i w szerokości  $v_b$ ) a odległością  $r$  gwiazdy i jej współrzędnymi na niebie (długości galaktycznej  $l$  i szerokości  $b$ ). W wersji uproszczonej równania Oorta wyglądają następująco:

$$\begin{aligned}v_r &= Ar \cos^2 b \sin 2l, \\v_l &= r \cos b (A \cos 2l + B), \\v_b &= -\frac{1}{2} Ar \sin 2b \sin 2l.\end{aligned}$$

$A$  i  $B$  to tzw. stałe Oorta, wyznaczone na podstawie obserwacji i charakterystyczne dla okolicy Słońca. Różnica  $B - A$  daje wartość kątovej prędkości rotacji, natomiast samo  $A$  jest pochodną tej prędkości względem odległości od osi rotacji. Okazało się jednak, że rotacja Galaktyki ma charakter bardziej skomplikowany, jest więc opisywana przez bardziej skomplikowane wzory Oorta, zawierające w pełnej wersji dodatkowe stałe  $C$  i  $K$ . Dominującym ruchem w otoczeniu Słońca jest rotacja wokół centrum Galaktyki (przy czym Słońce znajduje się w odległości 8,5 kpc od centrum i obiega je z prędkością około 200 km/s). Wyniki wyznaczeń stałych Oorta dla Pasa Goulda dają na  $K$  wartość niezerową, co sugeruje, że ta grupa młodych gwiazd ekspanduje.

## Masa

Oszacowanie masy Pasa można wykonać, przyjmując, że składa się on z gwiazd B4 (o masie 6 mas Słońca) i gorętszych (masywniejszych). Do Pasa zalicza się ponad 400 gwiazd. Mniej lub bardziej drobiazgowo obliczenia dają jako masę gwiazd Pasa Goulda liczbę  $5 \times 10^4$  mas Słońca. Ale Galaktyka składa się nie tylko z gwiazd, lecz i z materii międzygwiazdowej. Masę jej głównego składnika, chłodnego gazu zawartego w Pasie

Goulda, ocenia się na  $8 \times 10^5$  mas Słońca. Znając jeszcze na podstawie modeli ewolucyjnych wiek gwiazd Pasa, można ocenić tempo formowania się tych gwiazd, które okazuje się porównywalne z otrzymywanym dla obłoków molekularnych i obszarów gwiazdotwórczych.

## Gaz

Otoczająca Słońce materia międzygwiazdowa także wykazuje ekspansję, co prawdopodobnie jest rezultatem wydarzeń, które miały miejsce w niedalekiej przeszłości (w galaktycznej skali czasu). Podejrzewa się więc, że materia międzygwiazdowa również tworzy strukturę podobną do utworzonego przez gwiazdy Pasa Goulda. Strukturę tę nazwano Pierścieniem Lindblada, a jego centrum stanowi prawdopodobnie asocjacja Cas-Tau położona w odległości prawie 170 pc od Słońca. W odległości 315 pc obserwuje się wyraźny skok (spadek) prędkości gazu, zatem odległość ta może być traktowana jako promień Pierścienia Lindblada. Mając zaś prędkość ekspansji i odległość mas gazu, bez trudu można oszacować wiek całej struktury – wynikiem jest 85 mln lat, z błędem 20 mln lat. 85 mln lat temu centrum Pierścienia Lindblada znajdowało się w ramieniu spiralnym w gwiazdozbiornie Kila i można przypuszczać, że to wtedy rozpoczęła się ekspansja pewnego obszaru materii międzygwiazdowej, w którym później znalazło się Słońce.

## Pochodzenie

Istnieje kilka hipotez na temat powstania Pasa Goulda:

- skutek oddziaływania materii międzygwiazdowej z ramieniem spiralnym,
- rozchodzenie się „fali gwiazdotwórczej” zapoczątkowanej przez wybuch supernowej,
- fragmentacja olbrzymiego obłoku molekularnego,
- spadek szybkiego obłoku z galaktycznego halo na dysk.

Jak dotąd, sprawa jest otwarta. Na wiele innych pytań też nie znamy jeszcze odpowiedzi, np. jaki jest związek (jeśli jest) między naszym Pasem Goulda a wielkimi obszarami gwiazdotwórczymi obserwowanymi w innych galaktykach? Jaka jest rola struktur tego typu w dysku galaktycznym? Czy podobne struktury występują w innych galaktykach? To tylko przykładowe pytania. Duża część niepewności w odpowiedziach na nie wynika z braku precyzyjnej definicji, czym jest Pas Goulda. Co gorsza, jego własności mogą być dostatecznie dokładnie obserwowane właściwie tylko z jego wnętrza. Nie ma też pewności, czy są one koniecznymi konsekwencjami hipotetycznych procesów prowadzących do powstania takich struktur. Wiedza o nich znacznie zwiększyłaby się, gdyby dało się je znaleźć w innych galaktykach. Takim kandydatem na „Pas Goulda” wydaje się być struktura znajdująca się w galaktyce M83, odległej od nas o 3,7 Mpc (patrz okładka). Zapewne nasz Pas Goulda wyglądałby podobnie, gdybyśmy mieli szansę obserwować go spoza jego granic.



# Niezmienniki w geometrii

Marcin PITERA

Niezmiennikiem, zwanym też inwariantem, nazywa się pewną wielkość, niezmienną się przy dokonywaniu pewnych przekształceń na danym obiekcie. Aby zobrazować tę definicję i pokazać, na czym polega wykorzystywanie niezmienników w praktyce, posłużę się pewnym przykładem.

**Zadanie 1.** Dana jest szachownica o wymiarach  $10 \times 10$ . Udowodnić, że nie można jej wypełnić płytkami o wymiarach  $1 \times 4$ .

**Rozwiązanie.** Pokolorujmy pola szachownicy tak, jak na rysunku 1. Łatwo zauważyć, iż każda płytka o wymiarach  $1 \times 4$  zajmie dokładnie jedno pokolorowane pole. Czarnych pól powinno więc być 25 i ta liczba jest niezmiennikiem każdego pokrycia. Jest ich jednak 26, co daje sprzeczność – płytkami tymi nie można wypełnić szachownicy.

Uogólniając problem zawarty w tym zadaniu, dochodzimy do następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Załóżmy, że  $m \leq n_1$  oraz  $m \leq n_2$ . Wówczas (pokratkowany) prostokąt o wymiarach  $n_1 \times n_2$  można wypełnić płytkami o wymiarach  $1 \times m$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  jest dzielnikiem liczby  $n_1$  lub dzielnikiem liczby  $n_2$ .

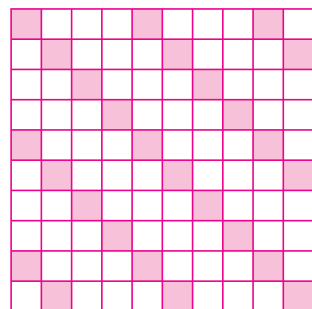
Dowód.

$\Leftarrow$  Implikacja jest oczywista.

$\Rightarrow$  Niech  $r_1$  oraz  $r_2$  będą resztami z dzielenia  $n_1$  i  $n_2$  przez  $m$ :

$$n_1 = A \cdot m + r_1, \quad n_2 = B \cdot m + r_2.$$

Podzielmy prostokąt  $n_1 \times n_2$  na cztery mniejsze prostokąty o wymiarach  $Am \times Bm$ ,  $Am \times r_2$ ,  $Bm \times r_1$  oraz  $r_1 \times r_2$ . Następnie ponumerujemy pola prostokątnej szachownicy w sposób podany na rysunku 2.

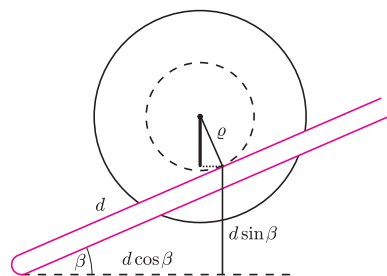


Rys. 1



**Rozwiązanie zadania F 639.**

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy przetoczenie klocka w prawo powoduje w obniżeniu jego środka ciężkości. Z rysunku 1 widać, że wysokość środka ciężkości jest równa  $h = d \sin \beta + \rho \cos \beta$ , gdzie  $d$  oznacza odległość punktu styku klocka z szynami od początku szyn zrzutowaną na płaszczyznę rysunku.

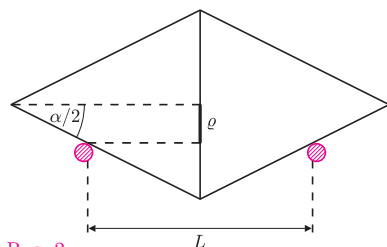


Rys. 1

Z drugiej strony z rysunku 2 widzimy, że

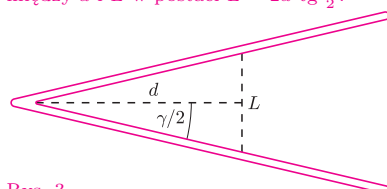
$$\rho = R - \frac{L}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

gdzie  $R$  to promień wspólnej podstawy stożków, a  $L$  to odległość między szynami w punkcie styku z klockiem.



Rys. 2

Wreszcie z rysunku 3 dostajemy zależność między  $d$  i  $L$  w postaci  $L = 2d \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ .



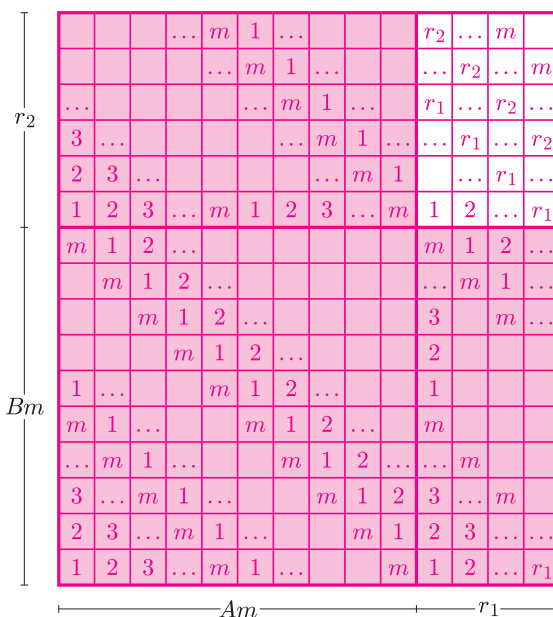
Rys. 3

Podstawiając te zależności do wzoru na  $h$  dostajemy

$$h = R \cos \beta + d(-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cos \beta + \sin \beta)$$

Aby stacanie następowało samorzutnie, wyraz przy  $d$  musi być ujemny, czyli

$$\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$



Rys. 2

Zauważmy, iż każda płytka o wymiarach  $1 \times m$  będzie zajmowała dokładnie jedno pole z ustalonym numerem. W szarych prostokątach każdy z numerów występuje na tej samej liczbie pól, gdyż przynajmniej jeden z boków jest podzielny przez  $m$ . A zatem – jeśli prostokąt można pokryć płytkami o wymiarach  $1 \times m$  – w czwartym prostokącie o wymiarach  $r_1 \times r_2$  musi być po tyle samo pól oznaczonych tym samym numerem. Zauważmy jednak, że jeśli  $r_1$  lub  $r_2$  są różne od zera, to pól oznaczonych numerem  $r_1$  lub numerem  $r_2$  jest w nim więcej niż pól oznaczonych liczbą  $m$ . A zatem  $r_1$  oraz  $r_2$  muszą być równe zeru.

Uogólniając poruszony w zadaniu problem i korzystając z tego, iż prostokąt  $m_1 \times m_2$  można potraktować jako  $m_2$  złączonych płytek  $1 \times m_1$  oraz jako  $m_1$  złączonych płytek  $1 \times m_2$ , a także z tego, iż płytki przy ścianach muszą do siebie przylegać, dochodzimy do następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.** Prostokąt o bokach  $n_1 \times n_2$  można wypełnić płytkami o bokach  $m_1 \times m_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{lub } [(m_1|n_1 \text{ i } m_2|n_2) \text{ lub } (m_1|n_2 \text{ i } m_2|n_1)]$$

lub

$$[(m_1|n_1 \text{ i } m_2|n_1) \text{ i } (n_2 = x \cdot m_1 + y \cdot m_2, x, y \in Z)],$$

lub

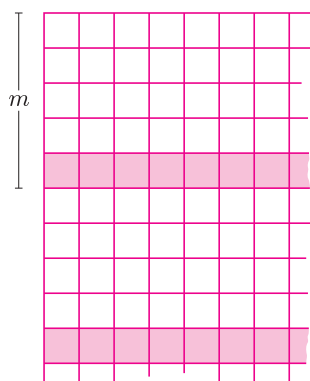
$$[(m_1|n_2 \text{ i } m_2|n_2) \text{ i } (n_1 = x \cdot m_1 + y \cdot m_2, x, y \in Z)].$$

**Twierdzenie 3.** Kwadrat  $n \times n$  można wypełnić kwadratami  $2 \times 2$  i  $m \times m$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $2|n$  lub  $m|n$ .

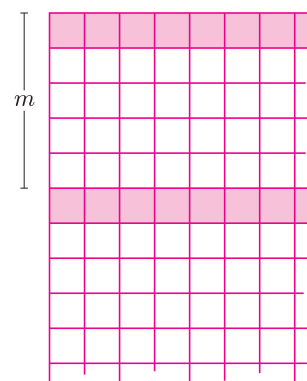
$\Leftarrow$  Implikacja jest oczywista.

$\Rightarrow$  Jeżeli  $m$  jest liczbą parzystą, to kwadrat o wymiarach  $m \times m$  można wypełnić płytkami  $2 \times 2$  i wówczas kwadrat  $n \times n$  można wypełnić tylko płytkami o wymiarach  $2 \times 2$ . Zatem  $2$  musi dzielić  $n$ . Jeżeli  $m$  jest liczbą nieparzystą, to przeprowadzę dowód nie wprost: Załóżmy, iż  $2$  i  $m$  nie dzielą  $n$ . Niech  $r$  będzie resztą z dzielenia  $n$  przez  $m$ :  $n = A \cdot m + r$ . Dzielimy kwadrat na dwa prostokąty, pierwszy o wymiarach  $A \cdot m \times n$  i drugi o wymiarach  $r \times n$ . Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

Jeśli  $r$  jest nieparzyste, kolorujemy pewne pola kwadratu tak, jak na rysunku 3. Łatwo zauważyć, iż liczba białych pól w pierwszym prostokącie będzie parzysta i równa  $A \cdot n \cdot (m - 1)$ . Natomiast w drugim prostokącie liczba białych pól to  $r \cdot n$ , co jest liczbą nieparzystą, gdyż ani  $r$ , ani  $n$  nie są podzielne przez  $2$ . Z drugiej strony kwadrat  $m \times m$  zajmie zawsze  $(m - 1) \times m$  białych pól (liczba parzysta), a kwadrat  $2 \times 2$  dwa lub zero białych pól. Sprzeczność.



Rys. 3



Rys. 4

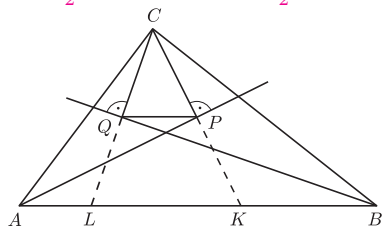
Jeśli z kolei  $r$  jest parzyste, to kolorujemy pola kwadratu tak, jak na rysunku 4 i rozumowanie przebiega analogicznie jak w przypadku poprzednim.



**Rozwiązanie zadania M 1090.**

Oznaczmy przez  $K, L$  punkty przecięcia odpowiednio prostych  $CP$  i  $CQ$  z prostą  $AB$ . Wówczas  $CP = PK$  oraz  $CQ = QL$ . Stąd wynika, że

$$PQ = \frac{1}{2} KL = \frac{1}{2}(AK + BL - AB) = \frac{1}{2}(AC + BC - AB).$$

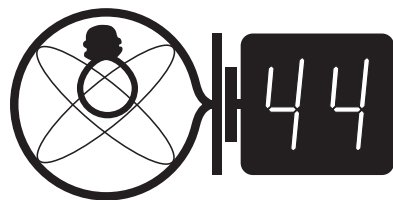


**Rozwiązanie zadania M 1091.**

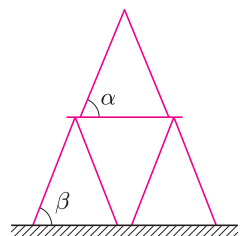
Przypuśćmy, że

$$2^{2005} = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

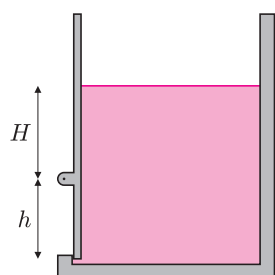
gdzie liczby  $A, B, C, D$  są całkowite dodatnie. Równość tę dzielimy stronami przez największą możliwą potęgę liczby 4, sprowadzając ją do postaci  $2^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , gdzie liczba  $n$  oraz co najmniej jedna z liczb całkowitych dodatnich  $a, b, c, d$  jest nieparzysta. Przypuśćmy, że  $n \geq 3$ . Wówczas aby liczba  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  była podzielna przez 4, każda z liczb  $a, b, c, d$  musiałaby być nieparzysta. Kwadrat każdej liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, więc liczba  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  dawałaby resztę 4 z dzielenia przez 8, co stoi w sprzeczności z tym, że jest ona równa  $2^n$  i  $n \geq 3$ . Zatem musi być  $n = 1$ , co również jest niemożliwe, gdyż  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że żądane przedstawienie nie istnieje.



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 V 2005



Rys. 1



Rys. 2

## Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

**382** ( $WT = 3,55$ ), **383** ( $WT = 1,15$ )

**384** ( $WT = 1,30$ ) i **385** ( $WT = 2,65$ )

z numerów 9/2004 i 10/2004

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	45,80
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	29,30
Jerzy Witkowski	– Radlin	24,55
Piotr Kumor	– Olsztyn	13,92
Konrad Kapcia	– Częstochowa	13,15

Kolejny rekord pobity! Już po raz szósty zdobył 44 punkty pan Andrzej Idzik, bezkonkurencyjny lider naszego peletonu!



### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z fizyki nr 394, 395

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**394.** Z siedmiu kart do gry zbudowano „domek” (zob. rys. 1). Jeśli współczynnik tarcia kart o stół i o siebie nawzajem jest równy  $\mu = 0,25$ , to jaka jest minimalna wartość kąta  $\alpha$  między górnymi kartami a poziomem? Jaka jest minimalna wartość kąta  $\beta$  między dolnymi kartami a poziomem? Zakładamy, że kąt  $\alpha$  jest jednakowy dla obu górnych kart, a kąt  $\beta$  – jednakowy dla czterech dolnych.

**395.** Automatyczna szpłuczka zawiera zbiornik, którego ścianka boczna może się obracać bez oporu wokół ustalonej osi (rys. 2). Jeśli wysokość ścianki poniżej osi obrotu jest równa  $h$ , to do jakiej wysokości  $H$  powyżej osi musi się nalać woda, aby ścianka się obróciła i zbiornik uległ opróżnieniu?

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2004

Przypominamy treść zadań:

**386.** Małe ciało położono w najwyższym punkcie pochylni o kształcie paraboli o ramionach opadających i nadano mu pewną prędkość początkową w kierunku poziomym (rys.). Prędkość ta była zbyt mała, aby ciało oderwało się od pochylni i poleciało swobodnie. Ciało porusza się po pochylni bez tarcia. Czy nacisk ciała na pochylnię będzie rósł w miarę wzrostu prędkości ciała, czy malał? Czy możliwe jest, żeby ciało początkowo sunęło po pochylni, a w pewnym momencie się od niej oderwało?

**387.** Ciała będące dobrymi absorberami promieniowania są również – jak wiadomo – dobrymi emiterami. Dlaczego więc termometr z bańką pomalowaną na czarno nagrzewa się w promieniach Słońca silniej od termometru z bańką pomalowaną na białą?

**386.** Zapiszmy równanie paraboli w postaci  $y = (1/2)kx^2$  (oś  $x$  jest pozioma, a oś  $y$  – pionowa ze zwrotem w dół), a prędkość ciała w najwyższym punkcie toru oznaczmy przez  $v_0$ . Zgodnie z treścią zadania spełniony jest warunek  $kv_0^2 < g$ . Prędkość ciała w dowolnym punkcie wyznaczmy z zasady zachowania energii  $v^2 = v_0^2 + 2gy$ , a siłę nacisku  $N$  – z równania  $N = mg \cos \alpha - mv^2/R$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem nachylenia stycznej, a  $R$  – promieniem krzywizny. Należy tu podstawić

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 x^2}}$$

oraz (por. w poradnikach matematycznych wzory na krzywiznę wykresu funkcji)

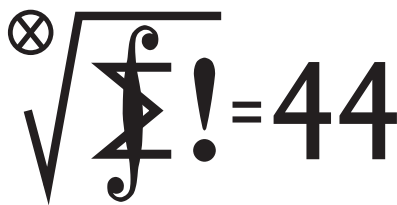
$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{k}{(1 + k^2 x^2)^{3/2}}$$

Otrzymujemy

$$N = m \frac{g - kv_0^2}{(1 + k^2 x^2)^{3/2}}$$

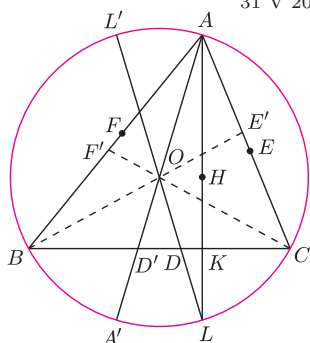
Widzimy, że siła nacisku maleje, ale nie osiąga zera.

**387.** Odprowadzanie ciepła z bańki termometru do otoczenia zachodzi nie tylko wskutek emisji promieniowania, ale także wskutek kontaktu z powietrzem. Ten przepływ ciepła zależy tylko od temperatury termometru, a nie od jego pomalowania, co spowoduje wyższą temperaturę termometru pobierającego więcej energii promienistej (czarnego). Ponadto termometr pochłania głównie światło widzialne, a emituje promieniowanie podczerwone. Nie jest pewne, czy farba biała w świetle widzialnym jest równie biała w podczerwieni (a czarna w świetle widzialnym – równie czarna w podczerwieni).



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2005



Zadania z matematyki nr 497, 498

Redaguje Marcin E. KUCZMA

497. Dane są liczby rzeczywiste  $a, b$ .

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych  $x, y, z$  układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6ab \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3(a^3 + b^3) \end{cases}$$

498. Niech  $n$  będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie  $n$ -wyrazowe ciągi  $(a_1, \dots, a_n)$ , spełniające warunki:

- liczby  $a_i$  są całkowite,  $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 1$ ;
- $a_1 + \dots + a_n = 2n$ ;
- dla każdego układu wskaźników  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  (dla dowolnego  $k$ ) suma  $a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$  jest różna od  $n$ .

Zadanie 498 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2004

Przypominamy treść zadań:

489. Wysokości trójkąta ostrokątnego  $ABC$ , wpisanego w okrąg o środku  $O$ , przecinają się w punkcie  $H$ . Wykazać, że istnieją punkty  $D, E, F$ , leżące odpowiednio na bokach  $BC, CA, AB$ , takie, że  $|OD| + |DH| = |OE| + |EH| = |OF| + |FH|$ , a proste  $AD, BE, CF$  przecinają się w jednym punkcie.

490. Wyznaczyć liczbę permutacji  $\pi$  zbioru  $\{1, \dots, 15\}$ , spełniających warunek  $|\pi(i+1) - \pi(i)| > 1$  dla  $i = 1, \dots, 14$ .

489. Oznaczmy przez  $O$  i  $R$  środek i promień okręgu opisanego, przez  $K$  – spodek wysokości z wierzchołka  $A$ , przez  $L$  – punkt przecięcia jej przedłużenia z okręgiem opisanym, a przez  $D$  oraz  $D'$  – punkty przecięcia średnic  $AA'$  oraz  $LL'$  z bokiem  $BC$ . Punkty  $L$  i  $H$  leżą symetrycznie względem  $K$ , więc  $|OD| + |DH| = |OL| = R$ . Symetralna boku  $BC$  jest osią symetrii prostokąta  $ALA'L'$  (bo  $AL \perp BC$ ); zatem  $|BD| = |D'C|$ ,  $|DC| = |BD'|$ .

Analogicznie określamy punkty  $E, E'$  na boku  $CA$  i punkty  $F, F'$  na boku  $AB$ . Otrzymujemy równości  $|OE| + |EH| = |OF| + |FH| = R$  oraz

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|D'C|}{|BD'|} \cdot \frac{|E'A|}{|CE'|} \cdot \frac{|F'B|}{|AF'|}$$

Stosujemy teraz dwukrotnie twierdzenie Cevy: odcinki  $AD', BE', CF'$  przechodzą przez punkt  $O$ , więc iloczyn po prawej stronie ma wartość 1. W takim razie również iloczyn po lewej stronie ma wartość 1, wobec czego odcinki  $AD, BE, CF$  przecinają się w jednym punkcie. Zatem punkty  $D, E, F$  mają wymagane własności.

490. Permutację  $\pi$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  interpretujemy jako uporządkowanie: ciąg, w którym element  $i$  znajduje się na pozycji  $\pi(i)$ . Niech  $A_{n,k}$  będzie zbiorem tych permutacji zbioru  $\{1, \dots, n\}$  (dla  $n \geq 2$ ), w których dokładnie  $k$  par liczb kolejnych  $i, i+1$  trafia na pozycje sąsiadujące, przy czym para  $n-1, n$  nie jest jedną z nich; i niech  $B_{n,k}$  będzie zbiorem tych permutacji, w których na sąsiadujące pozycje trafia para  $n-1, n$  oraz  $k$  innych par  $i, i+1$  ( $i \leq n-2$ ).

Oznaczmy moce zbiorów  $A_{n,k}$  i  $B_{n,k}$  odpowiednio przez  $f(n, k)$  i  $g(n, k)$ . Dla  $n = 2$  mamy:

- $f(2, k) = 0$  dla wszystkich  $k \geq 0$ ;
- $g(2, 0) = 2, g(2, k) = 0$  dla  $k \geq 1$ .

Należy wyznaczyć wartość  $f(15, 0)$ . Wyprowadzimy dwie zależności rekurencyjne.

Z dowolnej permutacji  $\pi \in A_{n,k}$  możemy uzyskać  $n+1$  permutacji zbioru  $\{1, \dots, n+1\}$ , umieszczając element  $n+1$  na początku, na końcu, bądź gdziekolwiek między już ustawionymi elementami. Dostaniemy w ten sposób:

- (1)  $k$  permutacji należących do zbioru  $A_{n+1, k-1}$ ;
- (2) 2 permutacje należące do zbioru  $B_{n+1, k}$ ;
- (3)  $n-1-k$  permutacji należących do zbioru  $A_{n+1, k}$ .

Uzasadnienia:  $k$  permutacji (1) uzyskujemy, wkładając element  $n+1$  pomiędzy pewne sąsiadujące  $i, i+1$  (ponieważ

$n-1, n$  nie sąsiadują, więc będą to istotnie permutacje ze zbioru  $A_{n+1, k-1}$ ). Dwie permutacje (2) powstaną przez umieszczenie elementu  $n+1$  obok  $n$ , z lewej lub prawej strony. Umieszczenie elementu  $n+1$  na dowolnej z pozostałych pozycji da permutacje (3).

Rozumując podobnie, stwierdzamy, że z permutacji  $\pi \in B_{n,k}$  powstanie – przez dołączenie elementu  $n+1$ :

- (4)  $k$  permutacji należących do zbioru  $A_{n+1, k}$ ;
- (5) 1 permutacja należąca do zbioru  $B_{n+1, k}$ ;
- (6) 1 permutacja należąca do zbioru  $B_{n+1, k+1}$ ;
- (7)  $n-1-k$  permutacji należących do zbioru  $A_{n+1, k+1}$ .

Uzasadnienia: teraz  $n-1$  i  $n$  sąsiadują – jest ponadto  $k$  innych sąsiadujących par  $i, i+1$ ; rozdzielając je elementem  $n+1$ , dostajemy  $k$  permutacji (4). Umieszczając element  $n+1$  obok  $n$  (po tej stronie, co  $n-1$ , lub po przeciwnej), dostaniemy permutacje (5) i (6). Permutacje (7) to wynik umieszczenia  $n+1$  na innych pozycjach.

Zastępując  $k$  przez  $k+1$ , tak przepisujemy informację (1):

(1') każda permutacja  $\pi \in A_{n, k+1}$  daje  $k+1$  permutacji z  $A_{n+1, k}$ .

Podobnie, „cofając” indeks  $k$ , przeformułujemy informację (6) i (7):

(6') każda permutacja  $\pi \in B_{n, k-1}$  daje 1 permutację z  $B_{n+1, k}$ ;

(7') każda permutacja  $\pi \in B_{n, k-1}$  daje  $n-k$  permutacji z  $A_{n+1, k}$ .

Z własności (1'), (3), (4), (7') wynika wzór rekurencyjny  $f(n+1, k) = (k+1)f(n, k+1) + (n-1-k)f(n, k) + kg(n, k) + (n-k)g(n, k-1)$ ; a z własności (2), (5), (6') – wzór  $g(n+1, k) = 2f(n, k) + g(n, k) + g(n, k-1)$ . (Wzory są słuszne także dla  $k=0$ , jeśli przyjąć, że  $g(n, -1) = 0$ ).

Otrzymane wzory rekurencyjne pozwalają obliczać wyrazy obu macierzy,  $[f(n, k)]$  i  $[g(n, k)]$ . Oto ich początkowe wiersze:

$f$	$k=0$	1	2	3	...	$g$	$k=0$	1	2	3	...
$n=2$	0	0	0	0	...	$n=2$	2	0	0	0	...
3	0	2	0	0	...	3	2	2	0	0	...
4	2	8	2	0	...	4	2	8	2	0	...
5	14	34	22	2	...	5	6	26	14	2	...

Kontynuując, osiągamy w skończonym (nie przesadnie długim) czasie wiersz piętnasty, a w nim szukaną wartość  $f(15, 0) = 175\,203\,184\,374$ .





### Rozwiązanie zadania F 640.

Korzystamy z zasady zachowania energii i z wyników poprzedniego zadania.

Na lewym końcu szyn energia kinetyczna i energia potencjalna klocka wynosiła zero. Po przetoczeniu się klocka jego energia potencjalna zmalała do

$$E_p = mgd \left( \sin \beta - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cos \beta \right).$$

Energia kinetyczna klocka składa się z energii ruchu postępowego  $\frac{mv^2}{2}$  oraz energii kinetycznej ruchu obrotowego  $\frac{I\omega^2}{2}$ . Zakładając, że między  $v$  i  $\omega$  występuje zależność  $v = \omega \rho$  i wstawiając wzór na  $\rho$  z poprzedniego zadania dostajemy

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I}{2} \frac{v^2}{(R - d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})^2}$$

Rozwiązując równanie  $E_k + E_p = 0$  ze względu na  $v$  dostajemy

$$v = \sqrt{\frac{2mgd \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cos \beta - \sin \beta \right)}{m + \frac{I}{(R - d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})^2}}$$

Zauważmy, że  $v$  w zależności od  $d$  najpierw rośnie, a potem maleje. Ruch nie jest więc jednostajnie przyspieszony.

W praktyce staczanie się stożków, w przeciwieństwie do np. walca na równi, nie może odbyć się bez poślizgu i tarcia. Stąd konieczność założeń upraszczających.

## Patrz w niebo

Zwykle gwiazdy świecą w wyniku przerabiania własnego wodoru na hel lub helu na dalsze ciężkie pierwiastki; białe karły świecą „z rozpędu”, tj. niczego nie przerabiają, jedynie stygną; gwiazdy neutronowe – dzięki materii dostarczanej z zewnątrz, a czarne dziury właściwie w ogóle nie świecą. Ten uproszczony schemat wart jest komentarza. Przede wszystkim gwiazda neutronowa, jako obiekt bardzo gorący, oczywiście świeciłaby, gdyby można było ją bezpośrednio zobaczyć. Tymczasem zazwyczaj jest ona składnikiem układu podwójnego i za pośrednictwem dysku akrecyjnego wchłania materię towarzyszącej jej zwykłej gwiazdy. Najsilniej w takim układzie świeci ów dysk, gdyż jego materia opadając po spiralach na gwiazdę, ogrzewa się do temperatury milionów stopni, przez co dolne części dysku stają się potężnym źródłem rentgenowskim.

Na pozór podobnie dzieje się w pobliżu czarnej dziury, ale tylko na pozór, bo cały ten mechanizm inaczej działa w potężnym polu grawitacyjnym czarnej dziury. Po pierwsze, materia, która znalazła się dostatecznie blisko czarnej dziury, musi zostać przez nią wchłonięta nie tylko dlatego, że z góry ciągle napływa nowa. Bowiem w pobliżu czarnej dziury nie istnieją stabilne orbity kołowe cząstek materii i wszystko, co się tam znajdzie, musi opaść, ale nie zmienia to jakościowo procesu wchłaniania materii przez czarną dziurę. Ważniejsze jest, że – po drugie – im bliżej czarnej dziury znajdzie się świecąca materia, tym mniej pochodzącego z niej światła może wydostać się „do nieskończoności”. Ogólna teoria względności przewiduje więc, że przypadkowe gorące zgęszczenia materii dysku, szedłszy poniżej najniższej stabilnej orbity, muszą po spiralach gwałtownie spadać na czarną dziurę, zwiększając prędkość obiegową i zarazem słabnąc! Dokładnie takie zjawisko zarejestrowano około dziesięciu lat temu za pomocą Teleskopu Hubble’a w układzie rentgenowskiego źródła Cygnus X-1: obserwowano ciągi pojaśnień (pojaśnieniu odpowiada ruch zgęszczenia ku obserwatorowi) o skracającym się okresie i o zanikającej amplitudzie. Obserwacje te potwierdzają zatem kilka naraz przewidywań ogólnej teorii względności. Trudno o lepszy argument za jej poprawnością – oczywiście, o ile ktoś jeszcze miał wątpliwości.

*Tomasz KWAST*

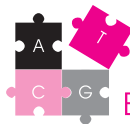
## Marzec

W marcowe wieczory nisko nad południowym horyzontem widać fragment Ruffy, właściwie już południowego gwiazdozbioru, który kiedyś nie istniał samodzielnie, lecz wchodził w skład jednego wielkiego gwiazdozbioru – Okrętu Argo. Przez Rufę przechodzi Droga Mleczna, warto więc skierować tam lornetkę, oczywiście jeżeli atmosfera nad horyzontem jest dostatecznie czysta. Jak zwykle w Drodze Mlecznej mamy tu bogactwo gromad otwartych, z których trzy, o jasnościach na granicy dostrzegalności gołym okiem, zgrupowane są bardzo blisko jedna drugiej. Są to M46, M47 i NGC 2423. Ich przybliżone odległości kolejno wynoszą 1800, 1200 i 700 pc. Rufa nie zawiera jasnych gwiazd, ale gromad tych należy szukać w odległości 10° na południe od bardzo jasnej alfy Małego Psa, Procjona.

12 III Merkury osiągnie największą kątową odległość od Słońca, dzięki czemu można próbować go odnaleźć wieczorem na zachodnim niebie. Wenus jest w Rybach – wraz ze Słońcem, a zatem jej nie widać; 31 III nastąpi jej górne złączenie ze Słońcem. Mars jest w Strzelcu, wschodzi więc dopiero nad ranem. Jowisz jest w Pannie, widać go więc właściwie przez całą noc. Saturn jest w Bliźniętach, wieczorem widać go wysoko na niebie i świeci w pierwszej połowie nocy. Nów Księżycy wypada 10 III, a pełnia 25 III. 3 III Księżyc zakryje Antaresa, alfę Skorpiona, ale zjawisko to zobaczą tylko mieszkańcy Ameryki Północnej i Środkowej; 26 III zakryje Jowisza, ale zakrycie będzie widoczne z Oceanu Indyjskiego i Antarktydy; wreszcie 30 III zakryje po raz drugi Antaresa, ale zakrycie będzie widać na dalekim wschodzie i na Pacyfiku. W Polsce zobaczymy tylko zbliżenia Księżycy do tych ciał. 20 III nastąpi równonoc, czyli Słońce wejdzie w znak Barana, albo jeszcze inaczej – idzie wiosna!

*T. K.*

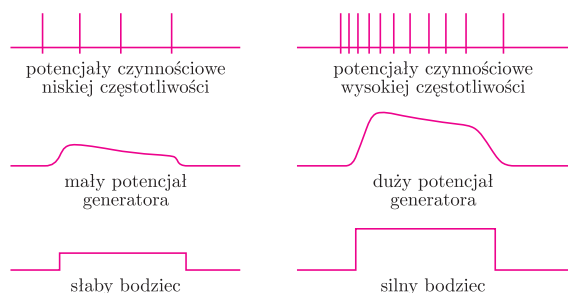




### „Jak to czujesz?”

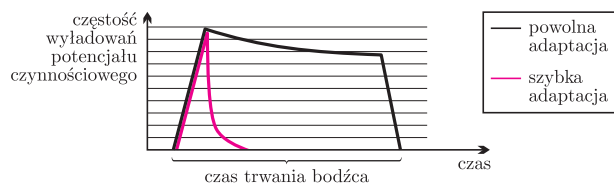
Jak myśli mózg? To pytanie póki co pozostaje jeszcze bez odpowiedzi. Idąc w ślady noblisty, Francisca Cricka, zastąpimy je pytaniem o to, jak mózg przetwarza informacje o świecie zewnętrznym. Na ten temat już trochę wiadomo, akurat tyle, aby wyobrazić sobie, jak działa sieć neuronowa zamknięta w naszych głowach. Poniżej przedstawię kilka przykładów takiej obróbki.

Informacja z zewnątrz odbierana jest przez receptory, czyli komórki zdolne do reagowania na światło, nacisk, drgania, zmiany składu chemicznego otoczenia itd. Receptor pobudzony przez właściwy bodziec zaczyna generować powtarzające się potencjały czynnościowe odbierane przez kolejne komórki nerwowe (o powstaniu potencjału czynnościowego pisaliśmy w *Delcie* 1/2005). Intensywność bodźca jest zazwyczaj zakodowana w częstości generowania potencjałów czynnościowych.



Czasami, jak w przypadku receptorów temperatury, zależność jest liniowa, częściej jednak bywa logarytmiczna. Dzięki temu możemy rozróżnić bardzo szeroki zakres natężenia sygnału. W niektórych przypadkach receptory mają znacznie prostszą budowę i reagują jedynie na przekroczenie określonej wartości progowej bodźca. Dopiero grupa kilku receptorów o różnych wartościach progowych pozwala na odebranie dokładniejszej informacji o natężeniu sygnału.

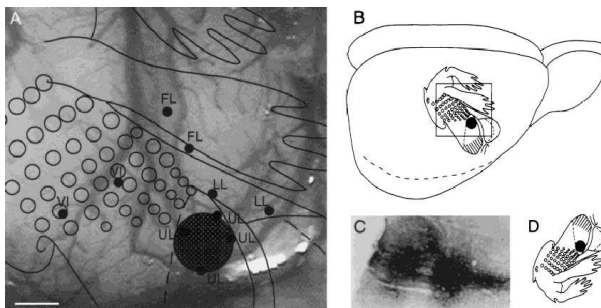
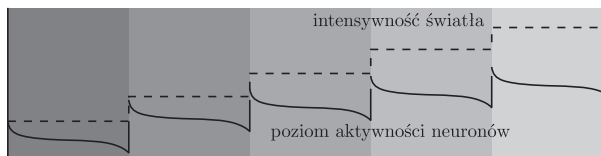
Jeśli bodziec się nie zmienia, receptory adaptują się i pobudzenie ustaje. Przykładem wykorzystania tego zjawiska są kombinacje trzech receptorów wrażliwych na nacisk na skórę. Te, które wolno się adaptują, przesyłają informację o sile nacisku przez cały czas jego trwania. Szybciej adaptujące się wysyłają sygnał tylko wtedy, gdy nacisk zmienia się w czasie. Kolejnie adaptują się jeszcze szybciej i reagują tylko na zmianę przyspieszenia bodźca.



To, gdzie dokładnie w ciele został odebrany bodziec, jest zakodowane po prostu tym, które komórki nerwowe zostają pobudzone przez receptory. Neurony na kolejnych piętrach dróg czuciowych mają coraz bardziej skomplikowane pola recepcyjne, czyli obszary, z których zbierają informację. Przykładem komplikacji pola recepcyjnego jest powszechne w drogach zmysłowych zjawisko hamowania obocznego. Polega ono na tym, że neuron jest pobudzany przez receptory znajdujące się w środku pola, a hamowany przez te z jego obrzeży, co zwiększa kontrast na granicy między bodźcami i rozdzielczość przestrzenną.

Połączenia pomiędzy neuronami są czasem dość złożone i umożliwiają integrację skomplikowanej informacji. Pola recepcyjne w kolejnych warstwach neuronów, tzw. mapy

projekcyjne, odpowiadają kolejnym piętrům przetwarzania informacji przez sieć neuronową. Mapy całościowe są homeomorficznym odwzorowaniem powierzchni zmysłowej. Proporcje reprezentacji poszczególnych jej fragmentów mogą być znacznie zaburzone – np. w mapie czuciowej nieproporcjonalnie dużo miejsca zajmują palce rąk czy wargi, gdyż tam nasza wrażliwość na dotyk jest największa.



Przykładowa mapa recepcyjna w pierwszorzędowej korze czuciowej szczura

Innym rodzajem map są mapy nieciągłe, podzielone na domeny będące homeomorficznymi odwzorowaniami jakiegoś fragmentu powierzchni recepcyjnej, jednak blisko leżące domeny mogą odpowiadać odległym fragmentom powierzchni. Odpowiada to często funkcjom wykonywanym przez mózg, który musi np. skoordynować ruch rąk i nóg podczas marszu, gdy tymczasem pewne fragmenty ciała znajdujące się pomiędzy rękami i nogami nie uczestniczą w tym aktywnie.

Najwięcej informacji odbieramy za pomocą wzroku.

Siatkówka oka zawiera około  $10^8$  fotoreceptorów oraz kilka warstw komórek nerwowych wstępnie obrabiających informację.

Nerw wzrokowy zawiera już tylko około  $10^6$  aksonów przesyłających sygnał do mózgu, co świadczy o tym, że stopień obróbki informacji przez samą siatkówkę już jest znaczny. W istocie zachodzą tu procesy hamowania obocznego wydobywające krawędzie i wzmacniające kontrasty, procesy sumowania sygnału z wielu receptorów, zwiększające czułość oka, procesy hamowania czopków wrażliwych na różne długości fal, pozwalające rozróżniać kolory, które są kombinacją barw podstawowych.

Dalej sygnał przekazywany jest do kory mózgowej, gdzie zachodzą bardziej złożone procesy obróbki danych. Jednym z nich jest ten, który umożliwia nam widzenie stereoskopowe. Ponieważ źrenice są od siebie odległe o około 6 cm, to obiekty są przez nie widziane pod nieco innym kątem, co jest wykorzystane do pomiaru odległości od widzianego obiektu. Informacje z odpowiadających sobie obszarów pola widzenia obu oczu trafiają w jedno miejsce mapy recepcyjnej w korze mózgowej. Tam znajdują się neurony, których pola recepcyjne mają kształt beleczek o różnych kątach nachylenia oraz neurony zdolne do pomiaru odległości pomiędzy neuronami pobudzonymi przez podobne linie zauważone przez lewe i prawe oko.

To tylko kilka spośród wielu poznanych mechanizmów obróbki sygnałów wejściowych w naszym mózgu. Nawet opis ich wszystkich zostawiłby nas ledwie na początku drogi do zrozumienia, jak działa mózg, co to jest pamięć, uwaga czy świadomość. Neurofizjologia rozwija się dziś bardzo szybko i być może już za parę lat przynajmniej część z tych zagadnień zostanie rozwikłana.

Paweł PORĘBA

Współpraca: Anna LORENC, Jarek BRYK