






SPIS TREŚCI NUMERU 6 (445)

Sztuka anamorficzna <i>Michał Budzyński, Maria Szostak</i>	str. 1
Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne	str. 3
Czy widział ktoś płaszczynę rzutową? <i>Maria Donten-Bury</i>	str. 4
 Obserwacje planet pozasłonecznych <i>Sebastian Mizera</i>	str. 7
 Dzieci pytają, profesor nie wie... <i>Magdalena Fikus</i>	str.10
Podsumowania Olimpiad	str.11
Kącik przestrzenny (8): Kąty płaskie w przestrzeni <i>Michał Kieza</i>	str.15
Laboratorium w domu <i>Jan Gaj</i>	str.16
 Zadania	str.17
Sprawa niezbyt pedagogiczna <i>Jerzy Zabczyk</i>	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (42): Przepływ w sieci <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.19
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Najcięższa gwiazda neutronowa <i>Michał Bejger</i>	str.24
Czerwiec <i>Agnieszka Majczyna</i>	str.24
 Warto dobrze ustawić	str.25
<i>Joanna Jaszńska</i>	

Benoît Mandelbrot (1924, 2010)

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):

deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Sztuka anamorficzna

Michał BUDZYŃSKI*, Maria SZOSTAK*

Obrazem anamorficznym nazywamy obraz powstały przez celowe zniekształcenie jego proporcji w taki sposób, aby jego poprawny odczyt był możliwy przez popatrzenie na niego z ustalonej perspektywy lub odbicie go w odpowiednim zwierciadle. Takie specjalne lustro nazywane jest anamorfoskopem i może nim być np. lustrzany cylinder, lustrzany stożek czy też zwyczajna łyżka. Dziedzina, która zajmuje się tworzeniem takich obrazów, nazywa się sztuką anamorficzną. Termin ten powszechnie nie jest znany, lecz to, co się kryje pod jego nazwą, obserwujemy praktycznie na co dzień. Współczesne anamorfozy mają często charakter atrakcji turystycznych, ale także ozdobny, a przede wszystkim praktyczny.



Rys. 1

Obrazy anamorficzne można zobaczyć w wielu miejscach. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyjrzeć się chociażby poziomym znakom drogowym namalowanym na ulicach. Nietrudno zauważyć, że większość z nich jest nieproporcjonalnie rozciągnięta lub pogrubiona. Zabieg ten jest celowo stosowany przez projektantów, aby kierowcy jadący samochodem widzieli znaki we właściwych proporcjach. Obok przedstawiony został znak P-8c, czyli strzałka kierunkowa do skrętu w lewo.

W wielu miastach na świecie, np. Paryżu, Berlinie, Dun Laoghaire, można podziwiać wykorzystujące anamorfozę niesamowite malowidła na chodnikach, budynkach. Budzą one ogromne zainteresowanie wśród przechodniów.

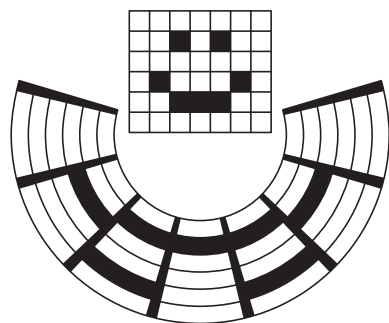
Właściwości obrazu anamorficznego wykorzystywane są także w kinematografii, przy kręceniu filmów panoramicznych oraz nagrywaniu DVD. Podczas filmowania używane są kamery ze specjalnym anamorficznym obiektywem, który powoduje poziome „ściśnięcie” obrazu (ok. dwukrotne), a następnie w kinie do projektora zakładana jest odpowiednia anamorficzna soczewka, która rozciąga wyświetlany obraz. Dzięki takiej metodzie wykorzystywana jest cała dostępna powierzchnia taśmy filmowej, a w konsekwencji zapewniona jest największa możliwa rozdzielczość.

Pomysł ten przeniesiony został również na DVD z pewną różnicą – tutaj rolę obiektywu anamorficznego pełni elektronika odtwarzacza DVD. W tym przypadku rejestrowany obraz jest kompresowany do proporcji 4 : 3. Jeśli odbiornik telewizyjny wyposażony jest w odpowiednią opcję, obraz jest dekompresowany i transformowany do formatu 16 : 9. W przeciwnym przypadku następuje redukcja liczby linii obrazu poprzez zmniejszenie jego wysokości oraz dodanie u góry i z dołu czarnych pasów na wyświetlanym obrazie.

W malarstwie najbardziej znanym przykładem zastosowania anamorfozy jest dzieło namalowane w XVI wieku przez Hansa Holbeina Młodsze, noszące tytuł *Ambasadorowie*. Można je było zobaczyć w zapowiedzi tego artykułu w poprzednim numerze *Delty*. Jest ono także na naszej stronie deltami.edu.pl. Poza przedstawionymi postaciami oraz licznymi detalami o bogatej symbolice uwagę skupia podłużny, ukośny kształt w dolnej części obrazu. Z pozoru nic nieprzypominająca smuga okazuje się ludzką czaszką. Aby się o tym przekonać, wystarczy punkt obserwacji umieścić nad obrazem (pod kątem ok. 30°) na drodze wiodącej w kierunku wyznaczonym przez tę deformację. Co ciekawe, Czytelnik może spróbować zobaczyć czaszkę na uwypukleniu łyżki.

Metoda, przy użyciu której wykonuje się tego rodzaju obrazy anamorficzne, jest, oczywiście, zwykłym rzutowaniem perspektywicznym, w związku z czym do poprawnego odczytania nie trzeba dysponować żadnym specjalnym zwierciadłem.

Sytuacja jednak znacznie się komplikuje, gdy obraz anamorficzny chcemy uzyskać przez odbicie w lustrzanym cylindrze. Na przestrzeni wieków ludzie próbowali w różny sposób radzić sobie z tym problemem. Za każdym razem myślą przewodnią było stworzenie odpowiedniej siatki kołowej (rys. 2).

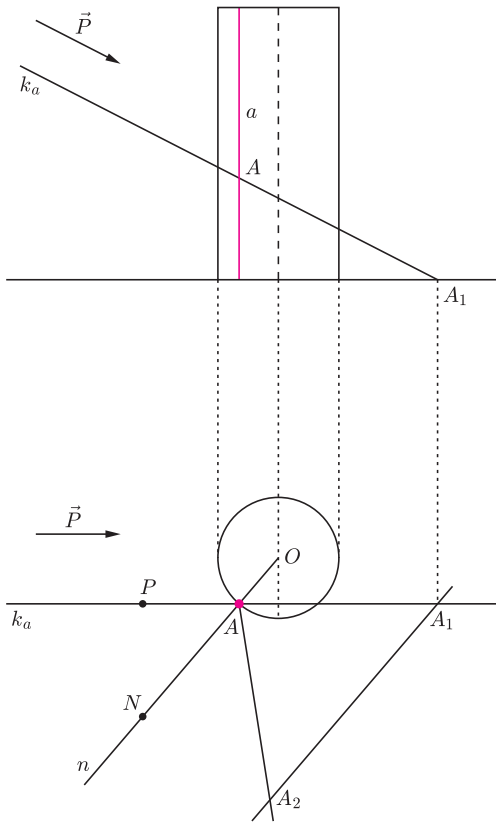


Rys. 2. Przykładowa siatka dla lustrzanego cylindra.

*studenci, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Idea ta polegała na tym, aby najpierw podzielić dany obraz w szachownicę, a następnie w pewien intuicyjny sposób narysować obraz anamorficzny zawartości oczek takiej siatki. Dzięki takiemu zabiegowi problem redukowal się do malowania oddzielnie małych fragmentów anamorficznych w każdym polu. Przez długi czas nie umiano jednak wyznaczyć dokładnego obrazu anamorficznego wybranego punktu, a w konsekwencji również precyzyjnej siatki kołowej. Z czasem jednak udało się znaleźć rozwiązanie tego problemu.

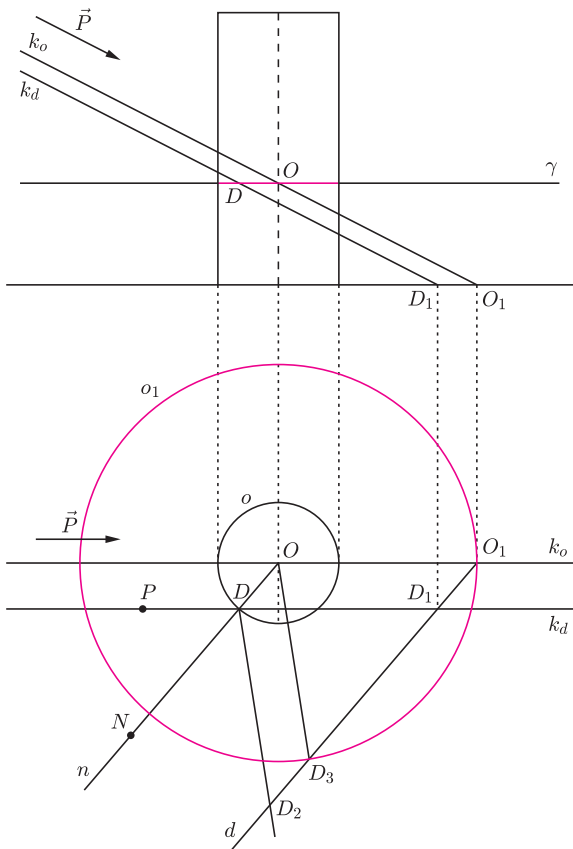
Zakładamy, że obserwator (oko) jest dostatecznie daleko od lustrzanego cylindra, a obraz anamorficzny jest wyznaczony przez promienie równoległe do danego wektora \vec{P} , nie zaś przez jeden środek rzutów. Znalezienie siatki kołowej sprowadza się do wyznaczenia obrazu anamorficznego dwóch szczególnych krzywych leżących na walcu – tworzącej walca oraz okręgu leżącego w jego przekroju poprzecznym. Najpierw znajdziemy obraz tworzącej walca. Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku 3. Niech wektor \vec{P} oznacza kierunek rzutowania, natomiast a tworzącą walca. Na początku wyznaczmy obraz dowolnego punktu $A \in a$, rozwiązując przy okazji podstawowy problem, z którym dawniej nie mogli uporać się malarze. W tym celu poprowadźmy prostą k_a równoległą do kierunku rzutowania, przechodzącą przez punkt A . Korzystając z górnej części rysunku 3, przedstawiającej rzut walca z boku, wyznaczamy punkt A_1 będący punktem przecięcia prostej k_a oraz płaszczyzny rzutowania. Przez A_2 oznaczmy szukany obraz anamorficzny punktu A .



Rys. 3. Schemat odbicia tworzącej walca, górna część: rzut z boku, dolna: rzut z góry.

Spójrzmy teraz na dolną część rysunku 3 przedstawiającą rzut walca z góry. Zauważmy, że w rzucie prostokątnym mamy równość odcinków $AA_1 = AA_2$. Oznaczmy teraz przez n prostą prostopadłą do powierzchni walca przechodzącą przez punkt A . Zgodnie z prawem fizycznym mówiącym, że kąt padania jest równy kątowi odbicia, mamy równość kątów: $\sphericalangle PAN = \sphericalangle NAA_2$. Ponadto z równości kątów wierzchołkowych wynika, że $\sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle NAA_2$. W związku z tym również kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego AA_1A_2 mają tę samą miarę. Z tego z kolei wynika równoległość prostych n i A_1A_2 . Obierając inny punkt na prostej a – oznaczmy go B – i postępując analogicznie, otrzymamy punkty B_1 i B_2 , przy czym (wobec tego, że prosta n będzie ta sama) trójkąty AA_1A_2 i BB_1B_2 będą podobne. Zatem obrazem anamorficznym tworzącej a będzie półprosta AA_2 o wierzchołku w punkcie A .

Zastanówmy się teraz, jaki będzie obraz anamorficzny okręgu o wyznaczonego przez przekrój walca płaszczyzną γ . Przyjmijmy, że promień walca jest równy r , natomiast punkt O należy jednocześnie do osi walca i płaszczyzny γ . Wówczas O jest środkiem okręgu o , a r jego promieniem. Niech D będzie dowolnym punktem okręgu o . Poprowadźmy (rys. 4) dwie proste równoległe do kierunku rzutowania – k_o oraz k_d – przechodzące odpowiednio przez punkty O oraz D . Oznaczmy przez O_1 oraz D_1 punkty przecięcia tych prostych z płaszczyzną rzutowania, natomiast przez D_2 szukany obraz anamorficzny punktu D . W obrazie rzutu prostokątnego zachodzi, oczywiście, równość odcinków $DD_1 = DD_2$. Dodatkowo, podobnie jak w poprzednim przypadku, korzystając z prawa odbicia, otrzymujemy równość kątów $\sphericalangle PND$ i $\sphericalangle NDD_2$, która pociąga za sobą następującą równość: $\sphericalangle NDD_2 = \sphericalangle ODD_1 = \sphericalangle DD_1D_2 = \sphericalangle OO_1D_1$. Zatem punkty O_1 , D_1 i D_2 są współliniowe. Rozważmy teraz okrąg



Rys. 4. Schemat odbicia okręgu leżącego w przekroju poprzecznym walca, górna część: rzut z boku, dolna: rzut z góry.

Ślimak Pascala to szczególny rodzaj konchoidy okręgu. *Konchoida* krzywej Φ o biegunie B i promieniu a to zbiór punktów leżących na dowolnej z prostych przechodzących przez B i odległych o a od jej przecięcia z Φ . Ślimak Pascala to taka szczególna konchoida okręgu, której biegun leży na tym okręgu.

Kovχε (konche) to po grecku muszla – stąd pochodzi nazwa ślimaka Pascala. Jest on krzywą stopnia 4; jeśli okrąg o promieniu r umieścimy tak, by miał równanie $(x - r)^2 + y^2 = r^2$, jego konchoida o biegunie $(0, 0)$ i promieniu a będzie miała równanie

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Na rysunkach mamy ślimaki, dla których a jest równe, odpowiednio, $r/2$, r , $3r/2$, $2r$, $5r/2$; czwarta z nich ma osobną nazwę – to *kardioida*.

o środku O przechodzący przez O_1 . Oznaczmy przez D_3 punkt przecięcia prostej d z okręgiem o_1 . Wówczas czworokąt ODD_2D_3 jest równoległobokiem o bokach równych co do długości promieniom okręgów o oraz o_1 .

Z przeprowadzonej analizy wynika, że obraz anamorficznego punktu D leży na prostej przechodzącej przez punkty O_1 oraz D_1 , a ponadto znajduje się w odległości r od drugiego punktu przecięcia tej prostej z okręgiem o_1 . W celu wyznaczenia obrazu anamorficznego okręgu o wystarczy zatem poprowadzić półproste z punktu O_1 , a następnie wyznaczyć na nich punkty odległe o r od punktów ich przecięcia z okręgiem o_1 . Krzywa, jaką otrzymamy w wyniku takiego procesu, nosi nazwę ślimaka Pascala.

Jak się zatem okazuje, krzywa będąca obrazem anamorficznym okręgu leżącego w przekroju poprzecznym walca nie jest łatwa do określenia na pierwszy rzut oka. Nie ma się zatem co dziwić malarzom, którzy przez długi czas mieli problemy z wyznaczeniem dokładnej siatki kołowej. Z czasem udało się również zbudować urządzenie mechaniczne (przypominające swym wyglądem wielonogi cyrkiel) służące do wykreślania tego typu siatek, które jednak w dobie grafiki komputerowej chyba znacznie traci na wartości. W szczególności dostępne są darmowe programy generujące obrazy anamorficzne w przekształceniu walcowym dowolnego zdjęcia. Przykładem takiego programu jest *Anamorph Me!*. Wiele niezwykłych obrazów grafiki anamorficznego Czytelnik może znaleźć bez trudu w Internecie pod hasłem *anamorphic art*.

IAN STEWART

KROWY W LABIRYNCIE

i inne eksploracje matematyczne



Ian Stewart, *Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne*, przełożyła Agnieszka Sobolewska, wyd. Prószyński i S-ka, 2011.

Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne

Tytułowa książka Iana Stewarta to kolejny – po *Histeriach matematycznych* i dostępnej tylko w języku angielskim pozycji *How to Cut a Cake* – zbiorek felietonów tego światowej klasy matematyka i popularyzatora matematyki. W kilkunastostronicowych esejach pisanych swobodnym językiem autor przedstawia różne ciekawe (i często nietypowe) zagadnienia matematyczne, przy czym samą matematykę traktuje jako naukę *poważną*, choć niekoniecznie *podniosłą*. Czytelnik znajdzie tu więc zabawy (a nawet tańce!) ze sznurkami i węzłami, analizę gry w kości oraz gry Hex (uwaga: obie gry bardzo wciągające!), próbę ustalenia kształtu łyzy, łamigłówek związane ze skoczkiem na szachownicy i kwadratami magicznymi, wreszcie tytułowy labirynt z krowami, czyli grę planszową zbudowaną z wykorzystaniem logicznej samozwrotności. W tej pozornie błażej tematyce kryją się nierzadko niebanalne fakty matematyczne.

Inną grupę tekstów stanowią zaskakujące zastosowania metod i pojęć matematycznych: w zoologii – badanie sposobów poruszania się zwierząt, w sztuce rzeźbiarskiej wykorzystującej fizyczne właściwości cementu, a nawet w przesłuchaniach na sali sądowej. Za pomocą takich przykładów autor potwierdza postawioną na wstępie tezę, że *nasza cywilizacja nie mogłaby funkcjonować bez matematyki*.

Na kartach książki jedynie sporadycznie znajdziemy gotowe rozwiązania postawionych problemów. Autor zachęca raczej do próby samodzielnego zrozumienia opisanych własności, do stawiania kolejnych pytań oraz przeprowadzania eksperymentów. Dzięki temu czytelnik ma szansę przekonać się osobiście, że *matematyka to niezła zabawa*.

A dla ciekawych tego, co nas czeka w kolejnych latach, jest cykl trzech felietonów pt. *Podróż do przyszłości*...

J. R.

Płaszczyznę rzutową można sobie wyobrażać np. na jeden z poniższych sposobów.

Sposób fizyczny. Na nieważkiej, sztywnej (zwykłej, szkolnej) płaszczyźnie obieramy trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z nich wyposażamy w ciężar lub wypór (wypór to też ciężar, tylko ujemny – to on utrzymuje statki na powierzchni wody i unosi balony). Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt, w którym można podeprzeć tę płaszczyznę, aby nie zmieniała położenia – ten punkt to *środek ciężkości* tak obciążonej płaszczyzny. Można sprawdzić, że każdy punkt płaszczyzny jest – przy pewnym obciążeniu – jej środkiem ciężkości. Ale pewne obciążenia nie mają środka ciężkości na (zwykłej) płaszczyźnie: np. obciążenie, odpowiednio, ciężarem 1, wyporem 1 i ciężarem/wyporem 0 (czasami fizycy nazywają to parą sił). Jeśli do płaszczyzny dołączymy (idealne) punkty pełniące rolę środków ciężkości dla takich obciążeń, to otrzymana wzbogacona płaszczyzna będzie płaszczyzną rzutową.

Sposób malarski. Patrząc na realne proste równoległe (np. szyny prostego toru kolejowego), mamy wrażenie, że na horyzoncie spotykają się. To spostrzeżenie stało się podstawą odkrytej przez malarzy Odrodzenia metody przedstawiania przestrzeni na płaszczyźnie obrazu zwanej *perspektywą zbieżną*. Jeśli do (zwykłej) płaszczyzny dołączymy wszystkie punkty horyzontu i jeszcze uznamy horyzont za prostą (pewnie taki by był, gdyby Ziemia była płaska, a nie kulista), otrzymamy płaszczyznę rzutową.

Sposób algebraiczny. Jeśli będziemy utożsamiali proporcjonalne trójki liczb (z wyłączeniem trójki zer), to możemy jeden egzemplarz ich zbioru uznać za zbiór punktów, a drugi egzemplarz za zbiór prostych. Te dwa zbiory będą płaszczyzną rzutową, jeśli umówimy się, że punkt $[x_1, x_2, x_3]_{\sim}$ leży na prostej $[y_1, y_2, y_3]_{\sim}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = 0$.

Sposób astronomiczny. Najkrótsze drogi na sferze (czyli powierzchni kuli) to okręgi wielkie. Uznając je za proste, otrzymamy *płaszczyznę sferyczną* – była ona badana przez astronomów już w zamierzchłej Starożytności jako sfera niebieska. Utożsamienie na płaszczyźnie sferycznej punktów antypodycznych (czyli leżących na końcach tej samej średnicy sfery) czyni z niej płaszczyznę rzutową.

Sposób topologiczny. Zarówno koło, jak i wstęga Möbiusa mają brzeg będący jedną krzywą zamkniętą. Gdy jest to **ta sama** krzywa, to tak połączone tworzą płaszczyznę rzutową.

Sposób aksjomatyczny. Płaszczyzną rzutową jest każdy obiekt złożony z punktów i prostych spełniających następujące trzy aksjomaty:

- A1** Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.
- A2** Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden wspólny punkt.
- A3** Istnieje czworokąt.

Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?

Maria DONTEN-BURY

Obejrzeć płaszczyznę rzutową wcale nie jest łatwo. Z bliska, kiedy widzimy tylko mały fragment, wygląda całkiem jak zwykła płaszczyzna, więc to nic ciekawego. A gdybyśmy chcieli widzieć całą naraz, to musielibyśmy umieć widzieć w przestrzeni przynajmniej czterowymiarowej, bo w naszych trzech wymiarach po prostu nie da się jej porządnie ułożyć. Jeśli nie wierzysz, Czytelniku, wykonaj dający się wziąć w rękę, **krawiecki model** płaszczyzny rzutowej. Jest to płócienna realizacja wymienionego wyżej topologicznego sposobu wyobrażania sobie płaszczyzny rzutowej. Bierzymy okrągły kawałek materiału – dalej piszemy o nim *kółko* – i suwak od kurtki (lepiej od śpiwora), którego długość jest równa obwodowi kółka. Przyszywamy jedną ze stron tego suwaka do brzegu kółka. Następnie z dwa razy krótszego paska materiału robimy wstęgę Möbiusa i do jej brzegu (równego wtedy obwodowi kółka) przyszywamy drugą stronę suwaka. Zapinamy suwak i widzimy, że... naprawdę nie da się zapiąć do końca! Proszę spróbować i to najlepiej kilka razy!

Jak to możliwe? W końcu płaszczyzna rzutowa to powierzchnia (będziemy też używali zwrotu: *powierzchnia rzutowa*), więc można by się spodziewać, że będzie zachowywać się podobnie jak sfera lub torus. A tymczasem w świecie rzeczywistym widzimy mnóstwo różnych piłek i obwarzanków, ale nie ma niczego o kształcie powierzchni rzutowej.

Zamiast martwić się tym stanem rzeczy, spróbujmy zrozumieć, dlaczego tak jest. Zrozumieć, czyli nie tylko podać *dowód*, ale również coś, co można nazwać *powodem* tej sytuacji. Tutaj za powód można uznać bardzo mały obiekt: graf pełny o zaledwie sześciu wierzchołkach, oznaczany K_6 . Okaże się, że gdybyśmy umieli porządnie zanurzyć powierzchnię rzutową w trzy wymiary, to zaplątałibyśmy ten graf w taki sposób, który nie ma prawa się pojawić!

Pewnie wydaje się zaskakujące, że taka niewielka, dyskretna struktura zawiera istotną informację o położeniu powierzchni w przestrzeni. A jednak tak jest,



Rozwiązanie zadania M 1316.

Szacujemy lewą stronę:

$$\begin{aligned} x(1-y)^2 + y(1-x)^2 &< \\ < x(1-y)(1-xy) + \\ &+ y(1-x)(1-xy) = \\ &= (x+y-2xy)(1-xy). \end{aligned}$$

Dla liczb z przedziału $(0, 1)$ zachodzi nierówność $(x-1)(1-y) < 0$, równoważna $x+y < 1+xy$. Zatem $x+y-2xy < 1-xy$, co daje tezę.

i wcale nie jest to nowa myśl w matematyce. Kiedy w 1872 roku Felix Klein wygłosił w Erlangen odczyt o nowych drogach badania geometrii, proponował właśnie, żeby zamiast na przestrzeń z nieskończonością punktów i kształtów patrzeć na przypisaną jej niedużą strukturę. Ta struktura – grupa – obejmuje zbiór przekształceń zachowujących badane własności i możliwość składania tych przekształceń. Bardzo często, dla złożonych geometrii, jest ona dobrze opisywana przez pewien skończony zbiór przekształceń. To oznacza, że możemy dowiedzieć się bardzo dużo o geometrii olbrzymiej przestrzeni, badając mały, dyskretny obiekt.

Pewien graf

Wracając do powierzchni rzutowej, spróbujmy najpierw zlokalizować na niej ten graf, który będzie najważniejszym elementem dowodu. W tym celu musimy przedstawić powierzchnię rzutową jako kwadrat z naprzeciwległymi bokami sklejonymi zgodnie z kierunkiem strzałek (rys. 1). Zauważmy, że gdybyśmy zaokrąglili rogi kwadratu na rysunku 1, to otrzymalibyśmy dokładnie projekt modelu z suwakiem. Odcinając z tego kwadratu dwa trójkąty, z góry po prawej stronie i z dołu po lewej, otrzymamy równoległobok, który na powierzchni rzutowej staje się wstęgą Möbiusa (rys. 2).

A co zostaje? Na rysunku 3 widać, że dwa trójkąty, które odcięliśmy, na powierzchni rzutowej stają się kołem. Wobec tego powierzchnia rzutowa to nic innego, jak wstęga Möbiusa z doklejonym do jej brzegu (pamiętamy, że ma tylko jeden) kołem. Cały problem polega na tym, że tego koła nie można dokleić tak, żeby łączyło się ze wstęgą tylko na brzegu.

Teraz już mamy gdzie narysować graf: umieścimy go na wstędze Möbiusa. Wykonamy rysunek na pasku papieru, pamiętając, że po sklejeniu końców paska odpowiednie elementy rysunku muszą się zgadzać (rys. 4). O tym rysunku należy myśleć tak, jakby był wykonany na cienkim papierze flamastem, który przebija na drugą stronę (można zresztą wykonać odpowiedni model) – tylko wtedy otrzymamy dobry graf na wstędze Möbiusa. Litery przy krawędziach paska pomogą szybko sprawdzić, jak będą krawędzie grafu w miejscu połączenia.

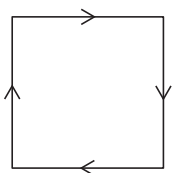
Sploty

Przedstawmy narzędzie potrzebne do dalszej pracy: sploty, czyli układy dwóch rozłącznych okręgów w przestrzeni trójwymiarowej. Interesuje nas, czy takie dwa okręgi są zaplątane tak, jak na przykład sąsiednie ogniwa łańcucha – to jest nie da się ich rozdzielić bez przzerwania jednego z nich (rys. 5). O takim splotcie powiemy, że jest nietrywialny. Dokładniej, powiemy, że splot jest trywialny, jeśli w przestrzeni istnieje dysk (membrana, może być powyginana), którego brzegiem jest jeden z okręgów splotu i który nie ma punktów wspólnych z drugim okręgiem. Spróbuj przekonać się, Czytelniku, że splot ogniwa łańcucha nie spełnia tej definicji. Łatwo zgadnąć, że sploty nietrywialne to te, które nie są trywialne.

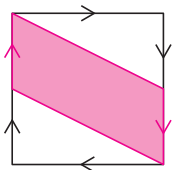
Jeśli popatrzymy na rysunek grafu w przestrzeni trójwymiarowej, czyli *reprezentację* tego grafu w \mathbb{R}^3 , to zwykle zobaczymy wiele splotów. Najpierw szukamy cykli prostych, czyli zamkniętych dróg po krawędziach grafu, które nie przechodzą dwa razy przez żaden wierzchołek. Taki cykl to w istocie okrąg, co najwyżej trochę wygięty. Sploty w grafie to pary cykli, które nie mają wspólnych wierzchołków. Widać, że jeśli graf ma dostatecznie dużo krawędzi, to jest w nim wiele możliwości utworzenia splotu. Informacja, ile jest splotów trywialnych, a ile nietrywialnych, to ważna cecha charakterystyczna rysunku grafu.

My, rzecz jasna, przyjrzymy się splotom w reprezentacjach grafu K_6 . W cyklu prostym muszą wystąpić przynajmniej trzy wierzchołki, czyli w naszej sytuacji splot może powstać jedynie przez podział zbioru wierzchołków na połowy i utworzenie cyklu z każdej połowy. Takich podziałów jest 10 – tyle będzie różnych splotów.

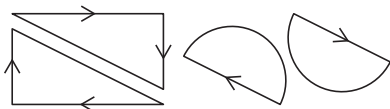
5



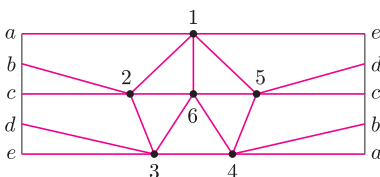
Rys. 1



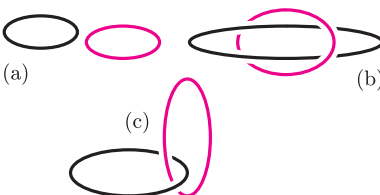
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. (a), (b) sploty trywialne; (c) splot nietrywialny.

Potrzebujemy też własności reprezentacji grafu K_6 , którą wyraża następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Każda reprezentacja grafu K_6 w przestrzeni trójwymiarowej ma przynajmniej jeden nietrywialny splot.

Dowód tej własności opiera się na obliczaniu przypisanych splotom liczb, które moglibyśmy nazwać *współczynnikami zaplątania*. Nie jest dla nas istotne, jak to dokładnie przebiega, z wyjątkiem jednego bardzo ważnego szczegółu, wspomnianego już na początku. Powiedzieliśmy, że powierzchni rzutowej nie da się zanurzyć w trzech wymiarach w sposób *porządny* i tylko takie zanurzenia nas interesują. Porządne zanurzenie to, na przykład, zanurzenie za pomocą funkcji kawałkami liniowej albo dające się do takiego przekształcić za pomocą homeomorfizmu przestrzeni. To ograniczenie klasy rozpatrywanych zanurzeń jest konieczne właśnie po to, żeby działał dowód podanego twierdzenia.

Wszystko widać na rysunku

Teraz możemy wrócić do grafu K_6 narysowanego na wstędze Möbiusa (rys. 4). Umieszczając wstęgę w przestrzeni, otrzymujemy reprezentację grafu, w której będziemy badać sploty. O niektórych bardzo łatwo stwierdzić, że są trywialne. Spójrzmy, na przykład, na splot zadany przez podział wierzchołków na zbiory 1, 2, 3 i 4, 5, 6. Cykl odpowiadający wierzchołkom 1, 2 i 3 będzie dobrze widoczny dopiero po sklejeniu paska. Na rysunku są krawędzie od 1 do 2 i od 2 do 3, ale ostatnia krawędź powstaje przez sklejenie fragmentu od 3 do punktu oznaczonego literą e na lewym brzegu oraz fragmentu od litery e na prawym brzegu do wierzchołka 1. Natomiast cykl wierzchołków 4, 5 i 6 widać w całości już na pasku, na którym wykonaliśmy rysunek. Można zobaczyć nawet więcej – trójkąt ograniczony przez cykl 4, 5, 6 nie przecina się z krawędziami cyklu 1, 2, 3, więc po zanurzeniu wstęgi w przestrzeń tworzy dysk (mocno powyginany), rozpięty na cyklu 4, 5, 6, który świadczy o trywialności rozpatrywanego splotu.

Okazuje się, że zdecydowana większość splotów na tym rysunku zachowuje się podobnie. Czytelnik Skrupulatny prześledzi zapewne, że sploty dla wypisanych poniżej podziałów składają się z cyklu, który ogranicza pewną powierzchnię na wstędze (podkreślony cykl), i cyklu, który tej powierzchni nie przecina. Powierzchnię trzeba czasami skleić z dwóch kawałków, jak w przypadku cyklu 1, 2, 4, który ogranicza obszar będący sumą czworokąta $12ba$ i trójkąta $4ab$. Można zauważyć, że drugi cykl zawsze biegnie dookoła wstęgi.

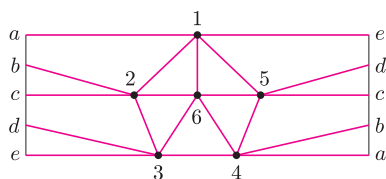
$$\begin{array}{cccccc} (123, \underline{456}) & (\underline{124}, 356) & (125, \underline{346}) & (126, 345) & & \\ (\underline{135}, 246) & (136, \underline{245}) & (145, \underline{236}) & (146, \underline{235}) & (\underline{156}, 234) & \end{array}$$

Wypisaliśmy 9 splotów – brakuje ostatniego, którym jest $(134, 256)$. Przypomnijmy, że podane wcześniej twierdzenie mówi, iż w naszej reprezentacji K_6 istnieje przynajmniej jeden nietrywialny splot. Ponieważ wszystkie inne są trywialne, więc $(134, 256)$ musi być nietrywialny. Zauważmy, że jego cykle to brzeg wstęgi (134) i okrąg biegnący przez jej środek (256) .

Załóżmy teraz, że udało nam się porządnie zanurzyć powierzchnię rzutową w przestrzeń. Zamiast powierzchni zobaczymy wstęgę Möbiusa i dysk doklejony do jej brzegu. Wiemy, że splot złożony z brzegu wstęgi i jej środkowego okręgu jest nietrywialny. To oznacza, że doklejony dysk, którego brzegiem jest brzeg wstęgi, musi przecinać środkowy okrąg wstęgi. Czyli doklejony dysk i wstęga stykają się w jakimś punkcie oprócz brzegu!

Wobec tego wcale nie zanurzyliśmy powierzchni rzutowej w przestrzeń, ponieważ pewne dwa punkty powierzchni – jeden z dysku, drugi z okręgu środkowego wstęgi – zostały umieszczone w tym samym punkcie przestrzeni. A to właśnie jest ten punkt, w którym okazuje się, że w krawieckim modelu powierzchni rzutowej nie można dalej przesunąć suwaka.

Homeomorfizm, mówiąc intuicyjnie, to przekształcenie, które punktom bliskim przypisuje punkty bliskie, a dalekim – dalekie.



Rysunek 4 jeszcze raz.



Rozwiązanie zadania F 789.

Jeśli pionowe siły działające na kulkę równoważą się, mamy

$$mg + 2N \sin \alpha = 2kN \cos \alpha,$$

gdzie N jest siłą nacisku deski na kulkę. Warunkiem równoważenia się momentów sił działających na zawias łączący deski jest

$$\frac{1}{2}Mgl \sin \alpha = \frac{1}{2}Nl,$$

gdzie l jest długością desek. Stąd:

$$k \geq \frac{m + 2M \sin^2 \alpha}{M \sin 2\alpha}.$$



Obserwacje planet pozasłonecznych

Jeszcze dwadzieścia lat temu nie znaleźliśmy żadnych planet pozasłonecznych. Dzisiejsza technika pozwala nam nie tylko stwierdzić ich istnienie, ale także poznać bliżej ich naturę. Do tej pory naukowcy odkryli niemal pół tysiąca egzoplanet (taką nazwę nadano wszystkim planetom poza Układem Słonecznym). Dla większości z nich możemy z dużą dokładnością określić parametry, takie jak masa czy okres obiegu wokół gwiazdy macierzystej. Mimo tego, że egzoplanety są poszukiwane i badane bardzo intensywnie już od dłuższego czasu, wciąż wiemy o nich mało. Dlaczego? Przede wszystkim – z definicji – nie świecą one własnym światłem, a jedynie odbijają to przychodzące od gwiazdy macierzystej. Są również stosunkowo zimne i małe w porównaniu z gwiazdami, tak więc emitują dużo mniej promieniowania. Dodatkową przeszkodą w obserwacji egzoplanet jest ziemska atmosfera, która zaburza wyniki pomiarów. Wymienione czynniki decydują o tym, że zaobserwowanie planet jest znacznie utrudnione. Można je porównać z komarem siedzącym na żarówce – jeżeli stoimy daleko od żarówki, to nie jesteśmy w stanie zobaczyć komara, bo niknie on w blasku światła – podobnie jest z planetami i gwiazdami. Jak więc odkrywa się nowe planety? Odpowiedź jest prosta: podobnie do innych astrofizycznych obserwacji – w sposób pośredni.

Cała historia zaczyna się w roku 1992, kiedy Aleksander Wolszczan oraz Dale Frail dokonali odkrycia pierwszych planet pozasłonecznych, krążących wokół pulsara PSR 1257+12. Wydarzenie to stało się kamieniem milowym w dzisiejszej astrofizyce. Aktualnie znamy kilka metod, które pozwalają na odkrywanie egzoplanet. Postaram się krótko opisać trzy z nich. Najbardziej efektywną techniką detekcji nowych planet jest metoda prędkości radialnych. Gwiazda oraz planeta krążąca wokół niej stanowią układ ciał, który krąży wokół wspólnego środka masy. Porusza się wokół niego zarówno planeta (wykonując ruch obiegowy), jak i sama gwiazda. Ponieważ gwiazdy są ciałami niebieskimi o znacznie większej masie od planet, więc poruszają się one z niezwykle małą prędkością, jak na kosmiczną skalę. Detekcja takich ruchów jest stosunkowo trudna przy użyciu tradycyjnych metod astrometrycznych. Z tego względu stosuje się technikę wykorzystującą zjawisko Dopplera. Za każdym razem, gdy gwiazda zbliża się i oddala od obserwatora (Ziemi), przesuwają one swoje widmo, odpowiednio, ku fioletowi lub czerwieni. W ten sposób można zaobserwować

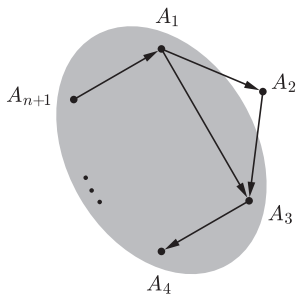
Prędkość radialna jest składową prędkości ciała mierzoną wzdłuż kierunku obserwator-źródło. (przyj. red.)

z dużą dokładnością, jak porusza się gwiazda. Odnajdując cykle (powtórzenia) w jej ruchu, jesteśmy w stanie stwierdzić, jaka może być minimalna masa planety powodującej te zmiany oraz promień jej orbity. W przypadku, gdy gwiazdę okrąża układ planet, a jej ruch staje się bardziej złożony, stosowane są zaawansowane algorytmy pozwalające określić parametry obserwowanych egzoplanet. Nowoczesne teleskopy, takie jak HARPS znajdujący się w Chile, mogą dzięki wykorzystaniu efektu Dopplera dokonywać pomiarów prędkości radialnych gwiazd z dokładnością 3 m/s. Niestety, mimo dużej skuteczności w wykrywaniu egzoplanet, metoda ta ma sporą wadę – poszukiwane planety muszą mieć dużą masę lub znajdować się blisko gwiazdy. Technikę tę stosuje się również do potwierdzenia istnienia planety zaobserwowanej innymi metodami.

Kolejną efektywną techniką detekcji planet okrążających odległe gwiazdy jest tranzyt. *Tranzytem* nazywamy przejście jednego ciała niebieskiego (w tym przypadku planety) przed tarczą drugiego (gwiazdy). Mówiąc prościej, w niektórych przypadkach planeta zasłania światło emitowane przez gwiazdę. Metoda ta, bardzo prosta w swej koncepcji, może dać wiele ciekawych informacji na temat badanej planety. Przede wszystkim pozwala ona określić promień planety, co w połączeniu z danymi dotyczącymi jej masy (uzyskanymi np. dzięki metodzie prędkości radialnych) daje informację o jej średniej gęstości. To umożliwia określenie, czy mamy do czynienia z planetą o budowie skalistej czy gazowej. Dodatkowo, światło, które przechodzi przez atmosferę planety, zmienia swoje widmo. Naukowcy, badając tę zmianę, są w stanie określić, jakie pierwiastki występują w atmosferze obserwowanej planety. Odkrywanie planet metodą tranzytu okazało się bardzo skuteczne, mimo licznych wad tej techniki. Po pierwsze, aby obserwacja była możliwa, szukany obiekt musi przechodzić przed tarczą gwiazdy. Zdarza się to stosunkowo rzadko, nawet dla bardzo ciasnych orbit. Drugą wadą jest duża podatność na występowanie błędów obserwacyjnych – wymagana jest dokładność pomiaru jasności gwiazdy rzędu tysięcznych części wielkości gwiazdowej. W większości przypadków odkrycie potwierdzone jest innymi technikami.



Rozwiązanie zadania M 1317.
Dla $n = 4$ sprawa jest jasna. Załóżmy więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n \geq 4$ i spróbujmy je udowodnić dla $n + 1$ zawodników. Nazwijmy ich A_1, A_2, \dots, A_{n+1} i przyjmijmy, że w tej właśnie kolejności siedzą przy stole, czyli A_1 wygrał z A_2 , który wygrał z A_3 , itd.



Jeśli A_3 wygrał z A_1 , to mamy tezę. W przeciwnym przypadku tezę otrzymujemy, stosując założenie indukcyjne do zawodników $A_1, A_3, A_4, \dots, A_{n+1}$.

Wykrywanie planet pozasłonecznych ciekawą metodą – mikrosoczewkowaniem grawitacyjnym – zaproponowali w 1991 roku Bohdan Paczyński oraz jego kolega z Princeton University Shude Mao. Jedenaście lat później przy użyciu tej techniki została po raz pierwszy odkryta nowa planeta. Pomimo tego, że metoda ta pozwoliła na odkrycie niewielu egzoplanet, pozostaje ona nadal jedyną, która umożliwia detekcję ciała niebieskiego o stosunkowo małej masie. Mikrosoczewkowanie grawitacyjne wykorzystuje fakt, że pole grawitacyjne gwiazdy ugina światło. Działa więc podobnie do soczewki skupiającej (lupy). W sytuacji, gdy na linii obserwator-źródło znajdzie się niewidoczny, dosyć masywny obiekt (soczewka), powoduje on na skutek mikrosoczewkowania pojaśnienie źródła. Krzywa blasku (wykres jasności gwiazdy w zależności od czasu) takiego zjawiska jest bardzo charakterystyczna i nie można pomylić go z niczym innym. Jeżeli gwiazda soczewkująca ma planetę, to istnieje szansa, że zaburzy ona obraz soczewkowania, powodując dodatkowe, mniejsze pojaśnienie. Wiemy wtedy, iż mamy do czynienia z ciałem okrążającym gwiazdę soczewkującą, oraz jesteśmy w stanie określić jego masę i promień orbity. Metoda ta wymaga bardzo specyficznych warunków – położenie obu gwiazd oraz planety jest unikalne, czyli raz wykonanej obserwacji nie można na ogół powtórzyć w przyszłości. Poszukiwaniem planet

Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne

To coroczna impreza organizowana przez studentów UW pod patronatem Koła Naukowego Informatyków UW, Koła Pasjonatów Matematyki UW i Studenckiego Koła Fizyki UW, przeznaczona dla licealistów zainteresowanych

matematyką, informatyką lub fizyką.

Każdy uczestnik Warsztatów będzie mógł wybrać kilka spośród kilkunastu propozycji kilkudniowych bloków zajęć. Zajęcia będą odbywać się w małych grupach i będą mieć charakter warsztatowy. Obok wykładów bardzo istotną będzie część praktyczna – na zajęciach z programowania funkcyjnego uczestnicy zaimplementują wspólnie spory projekt, na zajęciach z astronomii przeprowadzą obserwacje astronomiczne dobrym teleskopem. . . Wiezorami będzie można uczestniczyć w „luźnych” wykładach i prezentacjach, niezwiązanych z żadnym blokiem zajęć, poruszających różne ciekawe tematy z nauk ścisłych, lub samemu wygłosić taki wykład! A poznanaukowo proponujemy integrację, gry i zabawy: dla chętnych przeprowadzimy przyspieszony kurs brydża i go, bardziej zaawansowani gracze spróbują swoich sił w turnieju, a każdy będzie mógł zagrać w seta, rpg, planszówki czy pośpiewać ogniskowe piosenki.

W zeszłym roku odbyły się zajęcia między innymi z:

- **algebraicznej teorii liczb,**
- **sieci neuronowych,**
- **teorii węzłów,**
- **szczególnej teorii względności,**
- **programowania współbieżnego.**

W tym roku będzie co najmniej tak samo ciekawie!

Tegoroczna (już siódma) edycja WWW odbędzie się w dniach

8–18 sierpnia 2011 w Olsztynie.

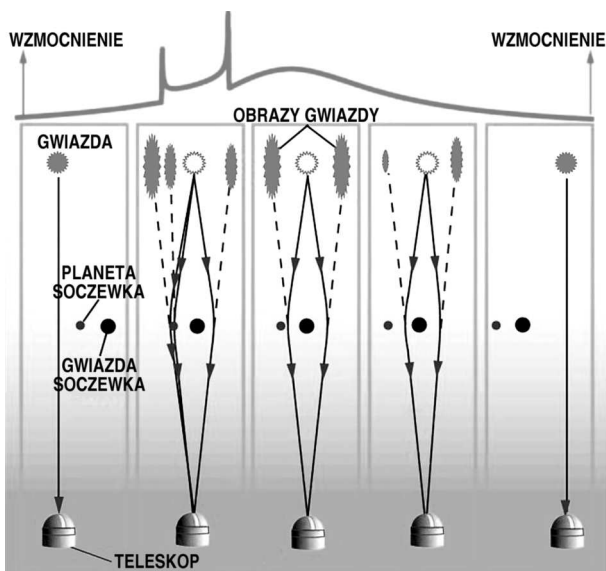
Więcej informacji na stronie:

<http://warsztatywww.wikidot.com>

Zachęcamy też do kontaktu mailowego:

warsztatywww@gmail.com

tą metodą zajmuje się, między innymi, polski projekt OGLE, którego jednym z największych osiągnięć było odkrycie jednej z pierwszych planet podobnych do Ziemi (tzw. super-Ziemi) – OGLE-2005-BLG-390Lb.



Rysunek na podstawie oryginału wykonanego przez Davida Benetta (Notre Dame University, USA); zob. http://ogle.astrouw.edu.pl/cont/4_main/ep1/blg235/blg235.html

Oprócz trzech wyżej opisanych metod istnieją też inne, które okazały się jednak nieco mniej skuteczne. Planety pozasłoneczne można również odkryć poprzez obserwacje dysków okołogwiazdowych oraz pulsarów. Rozwój technologii obserwacyjnych pozwala nam dzisiaj również na bezpośrednią obserwację niektórych planet poza Słońcem. Za przykład może posłużyć tutaj niedawna obserwacja planet krążących wokół gwiazdy HR 8799. Szacuje się, że w Drodze Mlecznej jest od kilku miliardów do nawet setek miliardów planet. Większość z odkrytych egzoplanet znajduje się w promieniu 300 lat świetlnych od Słońca. Zdecydowanie największa część z wykrytych planet to tzw. gorące Jowisze, czyli planety mające masę zbliżoną do Jowisza i bardzo ciasne orbity. To, że ich odkryto najwięcej, wiąże się z ograniczeniami technik obserwacyjnych. Jednym ze sposobów na pokonanie ograniczeń jest umieszczenie teleskopu w przestrzeni kosmicznej, co pozwala, między innymi, na wielokrotne zmniejszenie błędów obserwacji. Poza tym teleskop taki może obserwować interesujące nas obiekty znacznie dłużej, bo nie ogranicza go ani pogoda, ani występowanie dnia i nocy. Aktualnie na orbitach okołozemskich pracują dwa teleskopy, których zadaniem jest poszukiwanie planet pozasłonecznych. Pierwszym z nich jest COROT wystrzelony w 2006 roku przez Europejską Agencję Kosmiczną – do tej pory odkrył on kilkanaście planet. Drugim jest obserwatorium Kepler, które zostało uruchomione w 2009 roku. Odkryło ono metodą tranzytu 15 nowych planet. Przygotowywane są kolejne misje kosmiczne, mające obserwować niebo w poszukiwaniu planet. Głównym celem, dla którego poszukuje się i bada egzoplanety, jest poznanie odpowiedzi na pytanie, czy we Wszechświecie istnieje inteligentne życie poza Ziemią. Do tej pory udało nam się odszukać ledwie kilka planet leżących w tzw. ekosferze, czyli strefie wokół gwiazdy, w której istnieją warunki umożliwiające powstanie życia. Duncan Forgan z Edinburgh University szacuje ilość inteligentnych cywilizacji w naszej galaktyce na tysiące. Czy ma rację? Czas pokaże.

*Małą Deltę przygotował Sebastian MIZERA**

*uczeń, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Dzieci pytają, profesor nie wie...

Byłam niedawno z wykładem „Geny i my” we Wrocławskim Uniwersytecie Dzieci. Dzieci nie wahają się zadawać najróżniejszych, fantastycznych pytań, bo jeszcze nie nauczyły się od niemądrych dorosłych, że takie pytania źle świadczą o pytającym, dowodzą braku wiedzy. Jeszcze gorzej: pytany nieznający odpowiedzi powinien się wstydzić. Ja się do tego przyznaję, ale może tracę wtedy autorytet?

Okazało się, że najciekawsze dla słuchaczy są mutacje. (W słowniku: *Mutacja to zmiana w sekwencji DNA.*) Należy zatem zdefiniować, co jest sekwencją wyjściową. Między sobą ludzie różnią się w 0,1% sekwencji DNA. Które z tych różnic są mutacjami?

Dwa pytania z Wrocławia były takie:

**CZY STULATEK JEST MUTANTEM?
CZY LEWORĘCZNOŚĆ JEST MUTACJĄ?**

W stosunku do ludzi – powiedziałam – naszą uwagę skupiają głównie takie mutacje, które upośledzają życie nosiciela: metabolizm, zdolności motoryczne. Bardzo rzadko te zmiany wynikają z naruszenia DNA tylko JEDNEGO genu - zwykle są to zmiany „wielogenowe”. Na pewno wynikiem zmian wielogenowych jest leworęczność. Można być też „zlateryzowanym” w pracy nóg, oczu i uszu (tylko pozornie jesteśmy symetryczni). Zdarzają się wszelkie kombinacje, np. praworęczność, ale precyzyjniejsza praca lewego oka. Asymetria funkcjonalna wynika z asymetrii budowy mózgu.

Leworęczność zaczyna się w okresie niemowlęcym, utrwała około drugiego roku życia. 70–85% ludzi to praworęczni, więc ci „lewo” wydają się dziwakami, ale wśród Eskimosów i Żydów leworęczność występuje u 20%, natomiast u Chińczyków i Japończyków – u 3%. Przez wiele stuleci rodzice zmuszali dzieci do przestawienia się z lewo- do praworęczności, co zmienia struktury mózgu niekoniecznie w kierunku pozytywnym. Dziś w Ameryce Płn. i Europie zaprzestano tych działań.

Przeczytałam gdzieś, że występowanie leworęczności nie zdarza się u szympanów, ale może zbyt mało szympanów na tę okoliczność przebadano?

Praworęczni zbudowali nam świat. Lista przedmiotów i struktur nastawionych na praworęczność jest zadziwiająco długa, od profilu ostrza noża, przez usytuowanie mikrofonu wewnątrz telefonu komórkowego, kolejność ułożenia artykułów na półkach supermarketów, strukturę myszki i joysticka, krzesła z ruchomym pulpitem do notowania, wiele narzędzi kuchennych, ustawienie ławek w klasach do światła z lewej strony, niektóre instrumenty muzyczne. . .

Czy leworęczność jest mutacją? Chyba jest, bo dotyczy z pewnością zmian w budowie wielu genów mniejszości ludzi, ale widocznie nie tak istotną, żeby ewolucja wyeliminowała ją z naszego gatunku. Może czasem bywa pożyteczna? O asymetrii ludzkiego mózgu w porównaniu z szympanami – tu się przyznam – nic nie wiem – wiedzą pewno coś neurofizjology.

Na zakończenie: czy stulatek jest mutantem?

Ten wspaniały wiek, w dodatku w dobrym stanie zdrowia, osiąga niewielu z nas. Ostatnio genetycy zajęli się badaniem tego problemu. Wiedzą już, że długowieczność związana jest z działaniem zestawu genów, takiej „genetycznej” orkiestry, która brzmi wtedy dobrze, kiedy każdy wykonuje swoją partię bez zarzutów. Czy to jest mutacja? To są liczne mutacje, w sumie korzystne dla osobnika. Jeżeli chcemy mieć długo żyjące dzieci, dowiedzmy się, jak długo żyli moi przodkowie i przodkowie potencjalnego partnera, choć to pytanie rzadko niepokoi nas, gdy szykujemy się do wypowiedzenia tzw. sakramentalnego tak.

Drodzy Leworęczni: wasz światowy Dzień przypada 13. sierpnia.

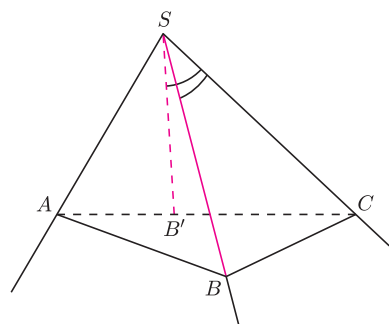
Wasza PRAWORĘCZNA

Kącik przestrzenny (8) Kąty płaskie w przestrzeni

Tym razem opowiemy o kątach w przestrzeni, a dokładniej o tym, jak rozwiązywać zadania zawierające nierówności miar kątów w przestrzeni. W zadaniach pojawiają się dwa typy kątów – płaskie i dwuścienne. Ten odcinek poświęcimy kątom płaskim, a o dwuściennych opowiemy następnym razem. W zadaniach z nierównościami dotyczącymi kątów płaskich nie ma wielkiej filozofii, należy zapamiętać jedno ważne twierdzenie i jeden prosty wniosek – właśnie od nich rozpoczniemy.

Twierdzenie 1. W dowolnym kącie trójściennym każdy z kątów płaskich jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych kątów.

Dowód. Mamy wykazać, że w kącie trójściennym $SABC$ o wierzchołku S zachodzi nierówność $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$ (rys. 1). Przyjmijmy, że $\sphericalangle ASC > \sphericalangle BSC$ (w przeciwnym przypadku nie ma czego dowodzić). Niech B' będzie punktem leżącym wewnątrz ściany ASC , takim że $\sphericalangle CSB' = \sphericalangle CSB$ i $SB' = SB$. Można, oczywiście, przyjąć, że punkt A leży na prostej $B'C$. Wtedy z nierówności trójkąta mamy $AB + BC > AC$, skąd otrzymujemy, że $AB > AB'$. Trójkąty ASB i ASB' mają dwa boki równe, a trzeci w pierwszym jest większy, skąd wniosek, że $\sphericalangle ASB > \sphericalangle ASB'$ (np. na mocy twierdzenia cosinusów). To zaś dowodzi naszej nierówności.



Rys. 1

Twierdzenie 2. W dowolnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od 360° .

Dowód. Przyjmijmy, że dany kąt bryłowy o wierzchołku S tworzy n ścian. Niech $A_1A_2 \dots A_n$ będzie wielokątem powstałym z przecięcia ścian tego kąta płaszczyzną. Korzystając z poprzedniego twierdzenia dla $i = 1, 2, \dots, n$, dostajemy nierówności

$$\sphericalangle A_{i-1}A_iS + \sphericalangle SA_iA_{i+1} > \sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}.$$

Dodając je wszystkimi stronami, otrzymamy po lewej stronie $n \cdot 180^\circ - d$, gdzie d oznacza sumę kątów płaskich danego kąta bryłowego, a po prawej sumę kątów wielokąta $A_1A_2 \dots A_n$, czyli $(n-2) \cdot 180^\circ$. Stąd wynika, że $d < 360^\circ$.

Dowód twierdzenia 2 wskazuje, że czasem, zamiast patrzeć bezpośrednio na interesujący nas kąt, warto spojrzeć na dwa pozostałe kąty trójkąta i dla nich stosować twierdzenie 1. Wykorzystamy naszą wiedzę do rozwiązania następującego zadania.

1. (OM 55-I-8) Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360^\circ$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że płaszczyzna ABP przecina krawędź CD w punkcie Q (rys. 3). Stosując twierdzenie 1, otrzymujemy

$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle CPQ > \sphericalangle BPQ} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DPQ + \sphericalangle DPA > \sphericalangle APQ}.$$

Ponieważ $\sphericalangle CPQ + \sphericalangle DPQ = \sphericalangle CPD$, więc dostajemy

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > \sphericalangle APB + \sphericalangle BPQ + \sphericalangle APQ = 360^\circ.$$

Jak nietrudno zauważyć, z powyższego zadania wynika ogólniejszy rezultat, który był treścią jednego z zadań na III Austriacko-Polskich Zawodach Matematycznych:

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA + \sphericalangle APD + \sphericalangle BPD + \sphericalangle CPD > 540^\circ.$$

Zadania

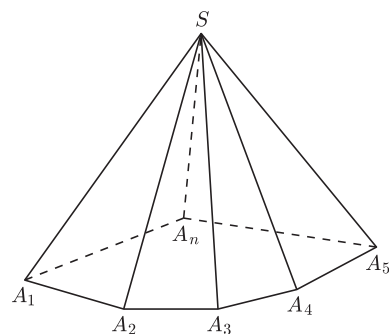
2. (ZWARDONŃ 2001) Udowodnić, że w dowolnym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym wszystkie kąty płaskie są ostre.

3. (YUG 1985) Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

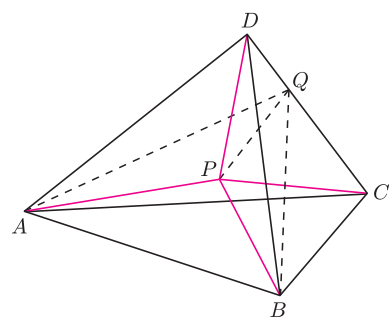
$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA > \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA}.$$

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA



Rys. 2

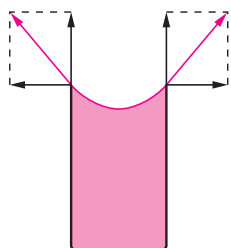


Rys. 3

W numerze kwietniowym pożegnaliśmy Jana Gaja. Teraz chcemy jeszcze raz Go przypomnieć. Najlepiej zrobić to mogą Jego teksty. Wybraliśmy w tym celu artykuł z trzeciego numeru Delt, czyli numeru 3/1974.

Laboratorium w domu

Budujemy perpetuum mobile albo: i Ty możesz zostać ornitologiem

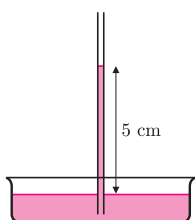


Tym razem nie damy się nabrać! – powiecie. *Perpetuum mobile*, czyli urządzenie poruszające się i wykonujące pracę bez dopływu energii z zewnątrz, nie istnieje.

Jesteśmy zbyt pewni zasady zachowania energii, żeby poważnie zastanowić się nad możliwością skonstruowania czegoś takiego. No trudno, macie rację. Urządzenie, którego wykonanie Wam proponuję, nie będzie prawdziwym *perpetuum mobile*.

Zasada działania

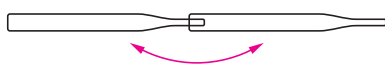
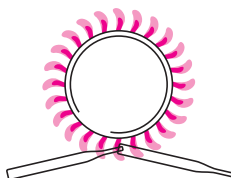
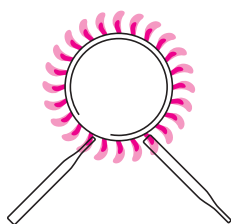
W konstrukcji naszego ptaka pijącego wodę (stąd druga część tytułu) oprzemy się na zjawisku włoskowatości, czyli wciągania cieczy do wąskich rurek wykonanych z materiału zwilżanego przez ciecz. Jak wiemy, powstaje wtedy menisk wklęsły. Na jego obwodzie działają siły napięcia powierzchniowego P . Jeżeli zsumujemy te siły, ich składowe poziome zredukują się, a pionowe się dodadzą, tworząc siłę wciągającą ciecz do rurki. Efekt ten jest najwyraźniej widoczny w bardzo cienkich rurkach zwanych kapilarami.



Dajcie mi kapilarę, a ... zbuduję ptaka

Nie ma tak dobrze! Kapilarę zrobicie sami. Będzie to najtrudniejsza część doświadczenia. Potrzebna będzie do tego rurka szklana oraz płomień gazowy (np. w kuchence domowej czy turystycznej). W razie trudności ze zdobyciem rurki można kupić w aptece kilka zakraplaczy. Rurkę szklaną ogrzewamy silnie w płomieniu (stałe ją obracając), żeby dobrze zmiękla, następnie wyjmujemy ją i szybko rozciągamy w długą nitkę. Jeżeli dysponujemy tylko zakraplaczami, najpierw łączymy ich kilka, aby otrzymać dłuższy odcinek i nie poparzyć rąk. Musimy w tym celu rozgrzać silnie końce dwóch zakraplaczy w płomieniu i połączyć je, a następnie wyprostować. Po połączeniu w ten sposób np. czterech zakraplaczy (po zdjęciu gumek, oczywiście!) robimy kapilarę jak z rurki szklanej.

Uwaga: szkło wprowadzamy do płomienia powoli, aby nie popękało, i grzejemy, stałe je obracając.

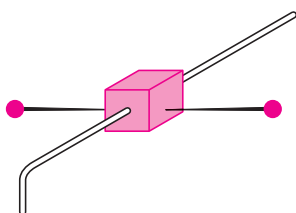


Oczywiście, średnica otrzymanej kapilary zależy od tego, jak mocno rozgrzejemy i jak szybko będziemy rozciągać rurkę. W praktyce średnicę najlepiej ocenić, badając, jak wysoko podniesie się poziom wody w kapilarze, kiedy ją pionowo zanurzymy. Różnica poziomów powinna wynosić kilka centymetrów.

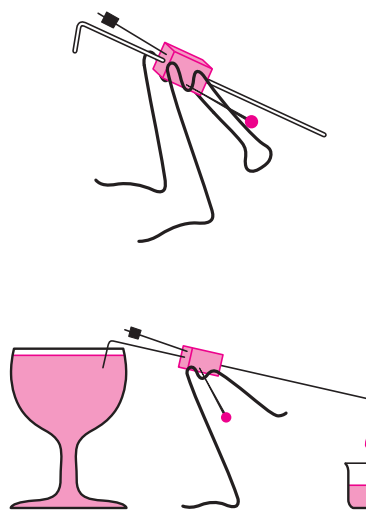
Odlamujemy teraz około 15 cm kapilary i wyginamy ją ostrożnie nad płomieniem, tak aby otrzymać mniej więcej kształt pogrzebaczka. Uważamy przy tym, aby nie zatopić otworu w kapilarze.

Montujemy ptaka

Nadzwiamy teraz na kapilarę kawałek korka i wbijamy węł szpilkę, która będzie osią obrotu. Zasadnicza część ptaka gotowa. Trzeba jeszcze go wyważyć i zrobić mu nogi z drutu. Jako przeciwwagę dla długiego ogona wbiliśmy w korkowy tułów dodatkową szpilkę z łebkiem obciążonym kulką z plasteliny. Ilość plasteliny dobieramy tak, aby „ptak” pochylił się dziobem w dół. Jeżeli teraz podstawimy mu szklanę z wodą, zacznie on „pić” wodę, która będzie zbierać się w postaci kropli na końcu ogona, wreszcie przeważy go i ogon opadnie w dół; dochodząc do oporu, strąci z siebie kroplę i powróci do poprzedniego położenia. Jeśli kropla spada z ogona nie przeważając go, należy zmniejszyć ilość plasteliny.



Tylna część wykonanej z drutu podstawki („nóg”) musi stanowić opór dla ogona, aby nie opadł on zbyt nisko. Jeżeli kropla nie spada po dojściu ogona do oporu, należy ilość plasteliny powiększyć tak, aby dopiero większa kropla była w stanie go przeważyć.



A co z *perpetuum mobile*?

Oczywiście, nikt nam nawet przez chwilę nie uwierzy, że to jest *perpetuum mobile*. Woda, opadając, wykonuje pracę kosztem energii potencjalnej. Możemy jednak nasze urządzenie skomplikować, przymocowując do ogona kawałek gazy lub ligniny (ponownie wyważyć!). Wtedy kropla nie spadnie i ptak pozostanie ze spuszczonego ogonem, dopóki woda z niego nie wyparuje. Dla przyspieszenia parowania możemy przybliżyć do niego lampę.

Dobrze, a gdzie ten ptak?

Tylko ci spośród Was, których zasób dobrej woli jest największy, dopatrzili się ptaka w opisanym urządzeniu. Rzecz jasna, przedstawiłem Wam tylko pewien model fizyczny, rodzaj silnika, który możecie dowolnie „ubrać w piórka”, nadając mu postać bardziej atrakcyjną czy maskującą jego zasadę działania.

Przyślijcie opisy wykonanych przez Was ptaków ze zdjęciami. Najciekawsze opublikujemy.

Jan GAJ

Otrzymaliśmy nawet kilkanaście starannie opakowanych ptaków, z których kilka nie zostało podczas przesyłki potłuczonych.

Redakcja



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1315. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD , BCE , CDA , DEB i EAC są równe. Wykaż, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

Rozwiązanie na str. 19

M 1316. Udowodnij, że dla każdych liczb x, y należących do przedziału $(0, 1)$ spełniona jest nierówność

$$x(1 - y)^2 + y(1 - x)^2 < (1 - xy)^2.$$

Rozwiązanie na str. 4

M 1317. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy A , B i C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

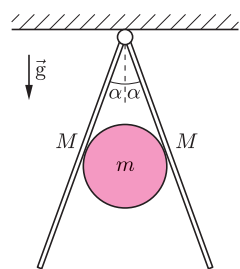
Rozwiązanie na str. 8

Redaguje Ewa CZUCHRY

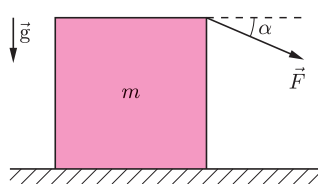
F 789. Dwie jednakowe deski o masie M połączone są zawiasowo, a kąt między nimi jest równy 2α (rys. 1). Między nimi znajduje się kulka o masie m , przy czym punkty styczności kulki z deskami znajdują się w połowie desek. Dla jakiego minimalnego współczynnika tarcia statycznego kulka nie wypadnie? Rozwiązanie na str. 6

F 790. Na poziomym stole leży sześcian o masie m (rys. 2). Z jaką minimalną siłą i pod jakim minimalnym kątem α trzeba pociągnąć sześcian za jego górną krawędź, żeby się przewrócił bez poślizgu? Współczynnik tarcia statycznego sześcianu o stół wynosi k .

Rozwiązanie na str. 19



Rys. 1



Rys. 2

Sprawa niezbyt pedagogiczna

Jerzy ZABCZYK*

Richard Feynman, laureat Nagrody Nobla z fizyki, miał bardzo krytyczny stosunek do rozważań czysto teoretycznych. Wspomina o tym Kai Lai Chung, wybitny probabilista amerykański, w książce *Green, Brown and Probability*. Feynman wypowiadał się o *eternal futility* nie tylko matematyki wyższej, ale również teoretycznej fizyki i astronomii. Twierdził, że matematycy są niepotrzebni, bo gdy fizykowi jakiś wynik matematyczny będzie potrzebny, to sam potrafi go udowodnić. Wiedząc o tym, Chung postanowił z Feynmana zażartować i podczas spotkania w restauracji zaproponował mu udowodnienie następującego twierdzenia geometrycznego.

Boki trójkąta dzielimy na trzy równe części każdy, a następnie łączymy odcinkami każdy z wierzchołków z pierwszym punktem podziału na przeciwległym boku. W rezultacie odcinki utworzą trójkąt, którego pole jest równe $\frac{1}{7}$ pola wyjściowego trójkąta.

Feynman przyjął ten fakt z niedowierzaniem i po kilku obliczeniach stwierdził, że twierdzenie nie jest prawdziwe, bo wskazują na to jego przybliżone obliczenia. Przyjął zakład, że ma rację, i poddał się dopiero wtedy, gdy stwierdził, że twierdzenie jest prawdziwe dla trójkąta równobocznego. W związku z tym zdarzeniem proponujemy kilka zadań.

Zadanie 1. Udowodnić sformułowane powyżej twierdzenie

- dla trójkąta równobocznego,
- dla trójkąta dowolnego.

Zadanie 2. Na bokach trójkąta zaznaczamy punkty w odległości od wierzchołków równej γ razy długość boku, gdzie $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, i łączymy je odcinkami z przeciwległymi wierzchołkami. Jaki jest stosunek pól $S(\gamma)$ trójkąta utworzonego z odcinków i wyjściowego trójkąta?

Zadanie 3. *Kontynuacja zadania 2.* Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne n , że gdy $\gamma = \frac{1}{n}$, to stosunek pól jest postaci $\frac{1}{N}$ dla pewnej liczby naturalnej N .

Zadanie 4. *Kontynuacja zadania 3.* Znaleźć wszystkie takie wymierne liczby γ , że $S(\gamma)$ jest również liczbą wymierną.

Zadanie 5. Czy dla czworokątów prawdziwe jest twierdzenie analogiczne do twierdzenia przedstawionego Feynmanowi?

Zadanie 6. *Kontynuacja zadania 2.* Wyznaczyć długości odcinków m_a, m_b, m_c łączących wierzchołki z zaznaczonymi punktami w zależności od liczby γ i długości boków trójkąta a, b, c .

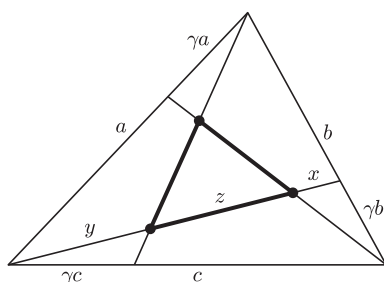
Podpowiedzi

- $y : z : x = \gamma : (1 - 2\gamma) : \gamma^2$.
- $m_a^2 = (1 - \gamma)b^2 + \gamma c^2 - \gamma(1 - \gamma)a^2$,
 $m_b^2 = (1 - \gamma)c^2 + \gamma a^2 - \gamma(1 - \gamma)b^2$,
 $m_c^2 = (1 - \gamma)a^2 + \gamma b^2 - \gamma(1 - \gamma)c^2$.
- Niech $\tilde{m}_a, \tilde{m}_b, \tilde{m}_c$ będą długościami boków otrzymanego trójkąta. Wtedy
$$\tilde{m}_a = m_a \cdot \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}, \quad \tilde{m}_b = m_b \cdot \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}, \quad \tilde{m}_c = m_c \cdot \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}.$$
- Niech $S_{a,b,c}$ oznacza pole trójkąta o bokach a, b, c . Udowodnić, że

$$\frac{S_{\tilde{m}_a, \tilde{m}_b, \tilde{m}_c}}{S_{a,b,c}} = \left(\frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2} \right)^2 (\gamma^2 + \gamma^2(1 - \gamma)^2 + (1 - \gamma)^2)^{1/2}$$

(= $\frac{1}{7}$, gdy $\gamma = \frac{1}{3}$).

Od redaktora: Chung zapewne zaczerpnął zadanie z popularnego w angielskim kręgu językowym *Mathematical Snapshots* (w wydaniu z 1950 roku str. 8), czyli z *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa (w wydaniu z 1989 roku zadanie i rozwiązanie jest na stronie 17).

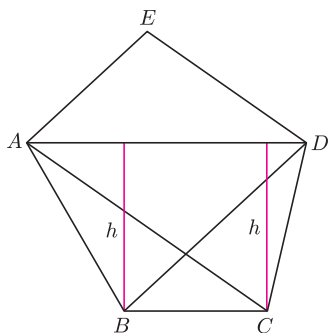


*Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

[Kai Lai Chung, *Green, Brown and Probability*, World Scientific, 1995.]



Rozwiązanie zadania M 1315.
Trójkąty ABD i CDA mają równe pola oraz wspólny bok AD .



Wobec tego wysokości tych trójkątów poprowadzone do boku AD są równe. Ponadto punkty B i C leżą po tej samej stronie prostej AD . Stąd wniosek, że przekątna AD jest równoległa do boku BC . Analogicznie dowodzimy, że pozostałe cztery przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równoległe do odpowiednich jego boków.

Informatyczny kącik olimpijski (42): Przepływ w sieci

Jednym z zadań, które zostały postawione przed uczestnikami akademickich drużynowych zawodów programistycznych ACM ICPC Dhaka Regional Contest 2010, było zadanie o nieco mylącym tytule *Network Flow* (*Przepływ w sieci*).

Trochę zagmatwaną treść zadania można streścić w następujący sposób: mamy dany n -wierzchołkowy graf nieskierowany G , w którym każdy z wierzchołków utożsamiamy z pewnym, zadanym punktem na płaszczyźnie. Stopień każdego wierzchołka (czyli liczba krawędzi z nim incydujących) to 2 lub 4. Naszym zadaniem jest znaleźć taki cykl Eulera w G (tj. cykl, który przechodzi każdą krawędzią dokładnie raz), którego koszt jest minimalny. Kosztem cyklu nazywamy sumę kątów pomiędzy każdą parą kolejnych krawędzi cyklu, przy czym interesują nas najmniejsze kąty pomiędzy prostymi zawierającymi pary kolejnych krawędzi.

Najprostszym rozwiązaniem jest przejrzenie wszystkich możliwości połączeń par krawędzi w każdym wierzchołku stopnia 4. Dla każdego układu połączeń sprawdzamy, czy tworzy on cykl Eulera, a jeśli tak, to obliczamy jego koszt. Niestety, takie rozwiązanie ma złożoność czasową $O(3^n)$.

Tak od razu nie widać metody na szybkie znalezienie najtańszego cyklu Eulera, podejźmy zatem do problemu od innej strony. Możemy, na przykład, spróbować stworzyć jakikolwiek cykl Eulera, a później stopniowo zmniejszać jego sumaryczny koszt. Autor tego kącika nie ma jednak pomysłu na szybkie rozwiązanie problemu tym sposobem.

Podejście odwrotne daje natomiast rezultaty. Spróbujmy utworzyć ze wszystkich krawędzi grafu G możliwie najtańszy *zbiór* cykli, a później najmniejszym kosztem pozmieniamy połączenia w poszczególnych wierzchołkach tak, by powstał cykl Eulera. Na początku w każdym wierzchołku stopnia 4 łączymy krawędzie w pary tak, aby suma kosztów była jak najmniejsza. W ten sposób otrzymujemy zbiór cykli \mathcal{C} o minimalnym możliwym koszcie. Zauważmy teraz, że jeśli dwa cykle A i B z tego zbioru przechodzą przez ten sam wierzchołek v , to – poprzez dowolną zamianę połączeń w wierzchołku v na inne – łączymy te dwa cykle w jeden. Oznaczmy minimalny koszt takiej zmiany w wierzchołku v przez z_v . Jeśli zaś zmienimy połączenia w wierzchołku, który należy do jednego cyklu (przy czym cykl przechodzi przez niego dwukrotnie), to albo nic się nie zmieni, albo podzielimy tenże cykl na dwa.

Stwórzmy teraz nowy multigraf H , w którym wierzchołkami są cykle ze zbioru \mathcal{C} , a krawędziami wierzchołki stopnia 4 z G – przez każdy taki wierzchołek przechodzą wszakże dokładnie dwa cykle (niekoniecznie różne). Kosztem krawędzi odpowiadającej wierzchołkowi v z G niech będzie z_v . Szukamy najtańszego sposobu połączenia wszystkich cykli w jeden, ale w multigrafie H odpowiada to szukaniu zbioru krawędzi o minimalnym koszcie łączącego wszystkie wierzchołki. Jest to zatem problem wyznaczenia najtańszego drzewa rozpinającego w H . Zauważmy, że gdyby krawędzie H mogły mieć ujemne koszty, to takie rozwiązanie nie działałoby, gdyż, być może, opłacałoby się wybrać, poza drzewem rozpinającym, jeszcze trochę krawędzi z H , które zmniejszyłyby koszt. U nas jednak $z_v \geq 0$ dla każdego wierzchołka v z G .

Znanych jest kilka efektywnych algorytmów znajdujących minimalne drzewo rozpinające, np. algorytmy Kruskala i Prima, działające dla grafu $H = (V, E)$ w czasie $O(|E| \log |V|)$. Całe rozwiązanie zadania wymaga zbudowania grafu H (koszt liniowy), a następnie znalezienia minimalnego drzewa rozpinającego w H , co możemy wykonać w czasie $O(n \log n)$.

Takie rozwiązanie w żaden sposób nie korzysta ze specyfiki danych wejściowych, w szczególności z geometrycznych własności grafu oraz sposobu obliczania kosztów. Autor nie zna rozwiązania, które w istotny sposób korzystałoby z tych informacji, zachęca więc Czytelnika do próby znalezienia takowego.

Tomasz KULCZYŃSKI



Rozwiązanie zadania F 790.

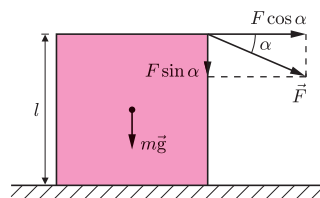
Posłizg nie nastąpi, gdy będzie

$$F \cos \alpha \leq k(F \sin \alpha + mg).$$

Obrót zaś nastąpi, jeśli

$$Fl \cos \alpha \geq \frac{1}{2} mgl,$$

przy czym ramię siły ciężkości wynosi $l/2$, a ramię siły F jest równe $l \cos \alpha$.



Z powyższych nierówności wynika, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - 2k}{k},$$

$$F_{\min} = \frac{mg}{2k} \sqrt{(2k - 1)^2 + k^2} \quad \text{dla } k < \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 0, \quad F_{\min} = \frac{mg}{2} \quad \text{dla } k > \frac{1}{2}.$$

Wibrujący zapach deuteru

Rozpoznawanie zapachów nie jest najsilniejszą stroną człowieka. Większość kręgowców radzi sobie z tym znacznie lepiej niż my. Również owady wydają się lepiej wyposażone przez naturę. Owadzi węch okazuje się jednak nie tyle lepszy, co bardziej selektywny. Np. muszka owocowa (*Drosophila melanogaster*), ulubienica genetyków, a jednocześnie zmora winiarzy, bezbłędnie wyczuwa przejrzałe owoce, a ma tylko 62 receptory zapachowe.

Okazuje się, że nadal nie ma pewności, w jaki sposób zapachy są wykrywane. Dominuje teoria ograniczająca zdolności olfaktoryczne do rozpoznawania kształtu cząsteczek zapachowych (ich fragmentów – grup funkcyjnych) przez odpowiadające im receptory na zasadzie klucza i matrycy. Konkurencyjny pogląd odwołuje się dodatkowo do rozpoznawania częstości drgań takich fragmentów.

Do niedawna brakowało jednak jednoznacznego dowodu na realność tego drugiego mechanizmu. Praca [1] została zaprojektowana tak, aby takiego dowodu dostarczyć. Zasadniczy pomysł polegał na porównaniu reakcji muszki owocowej na acetofenon (keton fenylo-metylowy $C_6H_5COCH_3$), pachnący jak zasuszone róże, oraz na acetofenon w różnym stopniu deuteryzowany, czyli z n atomami wodoru zastąpionymi przez tę samą liczbę atomów deuteru. Taki d_n -acetofenon ma identyczny kształt co zwykły acetofenon, bo elektrony (wiązania chemiczne) „nie czują” dwa razy masywniejszego jądra deuteru. Dla receptora kształtu ta odmiana acetofenonu powinna być nieodróżnialna od zwykłej cząsteczki. Natomiast dla receptora wibracji różnica powinna być zasadnicza, bo wiązanie C–H ma inną częstość rezonansową niż wiązanie C–D (wiązanie–sprężynka utrzymuje dwa razy większą masę).

Okazało się, że silnie wabiący charakter acetofenonu znika dla d_3 -acetofenonu, dla d_5 -acetofenonu staje się odstręczający, a dla d_8 -acetofenonu odstręczające działanie jeszcze się nasila.

Następnie porównano wabiąco-odstręczającą siłę dwóch innych cząsteczek zapachowych: oktanolu (oktan-1-ol: $CH_3(CH_2)_7OH$; słodko pachnący alkohol) i benzaldehydu (benzenokarboaldehyd: C_6H_5CHO ; o zapachu migdałów), szukając takiej różnicy koncentracji zwykłych i deuteryzowanych cząsteczek, żeby przy jednoczesnej stymulacji z przeciwnych stron uzyskać efekt neutralny.

Po ustaleniu takich koncentracji dla wszystkich trzech par (acetofenon – d_8 -acetofenon; oktanol – d_{17} -oktanol; benzaldehyd – d_5 -benzaldehyd) rozpoczęto tresowanie muszek za pomocą elektrowstrząsów aplikowanych przy obecności jednego z sześciu związków. Utrwaloną awersję testowano za pomocą ustalonej wcześniej stymulacji równowagowej. Muszki,

zgodnie z oczekiwaniami, bardzo dobrze uczyły się unikania zapachu kojarzonego z bolesnymi przejściami.

Dla tak wytresowanych muszek sprawdzano, czy są one w stanie odróżnić inną deuteryzowaną cząsteczkę od zwyczajnej. Okazało się, że w każdym przypadku nabyta awersja do zapachu wiązania C–H lub C–D ujawniała się zgodnie z oczekiwaniami.

Różnica między deuteryzowanymi i normalnymi cząsteczkami polega na przesunięciu maksimum częstości rezonansowej wibracji z liczby falowej około 3000 cm^{-1} na około 2150 cm^{-1} (taki sposób zapisu jest typowy dla spektroskopii podczerwonej, która jest używana do identyfikacji). Jeżeli muszki rzeczywiście rozpoznają tę zmianę, to powinny odpowiednio reagować na zupełnie inne cząsteczki wykazujące podobne maksima spektroskopowe.

Aby sprawdzić związek zdolności muszek z wrażliwością na częstość wibracji wiązania, użyto pary cząsteczek, które, przynajmniej dla człowieka, pachną podobnie, ale mają inne grupy funkcyjne. Wybrano parę: cytronelal (3,7-dimetylookt-6-en-1-al: $C_{10}H_{18}O$, aldehyd) oraz odpowiadający mu nityryl (3,7-dimetylookt-6-en-1-nityryl: $C_{10}H_{18}N$), różniący się występowaniem potrójnego wiązania reszty węglowodorowej z azotem zamiast podwójnego z tlenem. Oba związki mają zapach trawy cytrynowej (palczatka cytrynowa, *Cymbopogon citratus*). Nityryl ma słabe maksimum około 2150 cm^{-1} , a aldehyd nie. Dzięki temu muszki nauczone unikania d_{17} -oktanolu (nityrylu) uciekają od nityrylu (d_{17} -oktanolu), podczas gdy tresowanie w obecności oktanolu (lub aldehydu) nie przenosi się na odróżnianie aldehydu od nityrylu (lub, odpowiednio, deuteryzowanego od normalnego oktanolu).

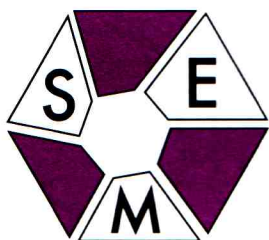
W ten sposób praca [1] dowodzi istnienia jakiegoś rodzaju spektroskopu wibracyjnego działającego jako receptor zapachu, przynajmniej u muszki owocowej. Jeden z autorów zasugerował już 15 lat temu, że receptor taki może wykorzystywać zjawisko nieelastycznego tunelowania elektronów, czyli pokonywania bariery potencjałów dzięki absorpcji fononów (na takiej zasadzie działają spektrometry IETS).

W takim razie, czy bylibyśmy w stanie odróżniać izotopy po zapachu? Albo wytresować do tego psy? Niestety, raczej nie. Nawet jeżeli udałoby się odróżnić zwykłe cząstki od deuteryzowanych, to i tak im bardziej masywne atomy, tym mniejsza różnica masy między ich izotopami.

Natomiast deuteryzowane środki czystości pewnie kiedyś się pojawią. Przecież wyraźnie słyhać ich większą skuteczność.

Piotr ZALEWSKI

[1] M.I. Franco, L. Turin, A. Mershin, E.M.C. Skoulakis, *Molecular vibration-sensing component in Drosophila melanogaster olfaction*, www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1012293108



W zawodach II stopnia LXII Olimpiady Matematycznej wzięło udział 599 uczniów z całej Polski. Spośród nich do finału zakwalifikowano 139 osób. Oto jeden z problemów, z którymi przyszło im się zmierzyć:

Zadanie 4. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O , przy czym $AD = BE = CF$. Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H . Wykazać, że

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

Jedną z metod używanych do dowodu tej równości było obrócenie układu punktów A, B, C i D o kąt $\sphericalangle AOC$ wokół środka O i stąd wnioskowanie o kątach. Przedstawimy jedno z najładniejszych rozwiązań tego typu. Opiera się ono na pracy ucznia Krzysztofa Kleintera z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Rozwiązanie. Bez straty ogólności możemy założyć, że promień danego okręgu wynosi 1. Będziemy używać łukowych miar kątów, tzn. $\sphericalangle XOY$ ma miarę równą długości łuku \widehat{XOY} . Ponieważ $AD = BE = CF$, więc $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOE = \sphericalangle COF$. W takim razie

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD - \sphericalangle BOD = \sphericalangle BOE - \sphericalangle BOD = \sphericalangle DOE}.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOF \quad \text{i} \quad \sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF}.$$

Oznaczmy, jak na rysunku, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE = \alpha$ oraz $\sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF = \beta$. Mamy wtedy

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOF = \alpha + \beta}.$$

Obróćmy płaszczyznę o kąt $\varphi = \alpha + \beta$ wokół punktu O zgodnie z ruchem wskazówek zegara i oznaczmy obraz dowolnego punktu X przez X' . W szczególności mamy $A' = C$ i $D' = F$. Punkt E' leży na okręgu, choć – być może – poza danym półokręgiem. Mamy wtedy następujące równości kątów:

$$\sphericalangle COB' = \sphericalangle A'OB' = \sphericalangle DOE = \sphericalangle D'OE' = \sphericalangle FOE' = \alpha}.$$

Oznaczmy przez l_{XY} prostą zawierającą punkty X i Y . Ponieważ $G \in l_{AD} \cap l_{BE}$, więc $G' \in l_{A'D'} \cap l_{B'E'} = l_{CF} \cap l_{B'E'}$. Zauważmy teraz, że ośmiokąt $OE'FEDB'CBO$ jest przystający do figury $OABCB'DEFO$. Istnieje zatem izometria płaszczyzny przekształcająca punkty O, E', F, E, D, B', C i B odpowiednio na punkty O, A, B, C, B', D, E i F . Zatem obrazem prostej $l_{B'E'}$ jest prosta l_{AD} , prostą $l_{D'A'} = l_{FC}$ – prostą l_{BE} , a prostą l_{BE} – prostą l_{FC} .

W takim razie: punkt $G' \in l_{B'E'} \cap l_{D'A'} = l_{B'E'} \cap l_{FC}$ przechodzi na $G \in l_{DA} \cap l_{BE} = l_{CF} \cap l_{EB}$, a punkt $H \in l_{A'D'} \cap l_{BE} = l_{CF} \cap l_{EB}$ na siebie.

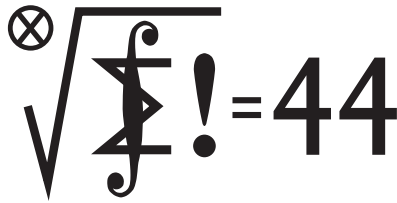
Stąd wynika równość $\sphericalangle G'OH = \sphericalangle GOH$, a z niej:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle GOG' = 2\sphericalangle GOH},$$

czego chcieliśmy dowieść.

Uwaga. Izometria, o której mowa w rozwiązaniu, to symetria względem prostej OH , bo jest to złożenie obrotu o kąt α , przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, wokół punktu O , z symetrią osiową względem prostej OH i jeszcze raz z tym samym obrotem.

Andrzej FRYSZKOWSKI



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
607 ($WT = 2,59$) i 608 ($WT = 1,07$)
z numeru 10/2010

Bartłomiej Dydą	Wrocław	41,03
Jerzy Cisło	Wrocław	40,66
Michał Kieza	Warszawa	38,62

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 623, 624

Redaguje Marcin E. KUCZMA

623. Czy można umieścić w polach szachownicy $n \times n$ liczby $1, \dots, n^2$ tak, by w każdym wierszu suma liczb była całkowitą potęgą dwójki?

624. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dla jakich dodatnich liczb rzeczywistych b można znaleźć funkcję f , ciągłą na przedziale $\langle 0; b \rangle$, różniczkowalną wewnątrz tego przedziału oraz spełniającą warunki: $f(0) = 1$, $f'(x) \geq f(x)^k$ dla $x \in \langle 0; b \rangle$?

Zadanie 624 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2011

Przypominamy treść zadań:

615. Każdemu podzbirowi B zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, który nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, przyporządkowujemy liczbę $p(B)$, będącą iloczynem liczb w zbiorze B (dla zbioru pustego przyjmujemy $p(\emptyset) = 1$). Obliczyć sumę kwadratów wszystkich uzyskanych liczb $p(B)$.

616. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich x, y, z :

$$\frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geq 6.$$

615. Oznaczmy szukaną wartość przez b_n . Weźmy pod uwagę wszystkie te podzbiory B zbioru $\{1, \dots, n\}$, które nie zawierają żadnej pary liczb kolejnych i do których nie należy liczba n . Są to więc podzbiory zbioru $\{1, \dots, n-1\}$; suma kwadratów uzyskanych dla nich liczb $p(B)$ wynosi b_{n-1} .

Z kolei zbiory B (bez pary liczb kolejnych), do których liczba n należy, traktujemy jak podzbiory zbioru $\{1, \dots, n-2\}$, z dołączonym elementem n ; suma kwadratów uzyskanych dla nich liczb $p(B)$ wynosi $n^2 b_{n-2}$.

Dostajemy wzór rekurencyjny $b_n = b_{n-1} + n^2 b_{n-2}$, który z wartościami początkowymi $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ prowadzi przez łatwą indukcję do wyniku w jawnej postaci: $b_n = (n+1)!$.

616. Po pomnożeniu przez wspólny mianownik dostajemy do dowodu nierówność $L \geq P$, gdzie

$$\begin{aligned} L &= (y+z)^2(y^2+zx)(z^2+xy) + \\ &\quad + (z+x)^2(z^2+xy)(x^2+yz) + \\ &\quad + (x+y)^2(x^2+yz)(y^2+zx), \\ P &= 6(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy). \end{aligned}$$

Teza wynika natychmiast z tożsamości

$$\begin{aligned} L - P &= yz(y^2 - z^2)^2 + zx(z^2 - x^2)^2 + xy(x^2 - y^2)^2 + \\ &\quad + (y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2, \end{aligned}$$

którą nietrudno sprawdzić, otwierając nawiasy i wykonując wskazane działania.

To już całe rozwiązanie – ta zmyślna tożsamość zaiste trywializuje problem, a jej sprawdzenie jest czynnością czysto mechaniczną (*Mathematica* robi to w ułamku sekundy; ręcznie sprawdzamy ją w parę minut). Ale jak na nią wpaść?!

Na przykład tak: dla $x = z$ różnica $L - P$ przyjmuje wartość $2yz(y^2 - z^2)^2$; analogicznie dla $x = y$ i dla $y = z$. Zatem przyjmując

$$F(x, y, z) = yz(y^2 - z^2)^2 + zx(z^2 - x^2)^2 + xy(x^2 - y^2)^2,$$

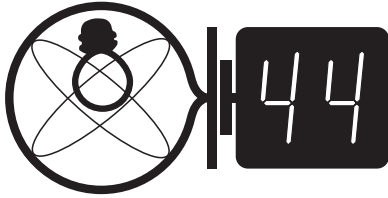
widzimy, że wielomian $(L - P) - F$ ma wartość zero, gdy dowolne dwie zmienne są równe. Jest więc podzielny przez wielomian

$$G(x, y, z) = (y-z)(z-x)(x-y).$$

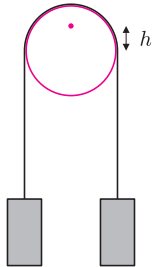
Skoro zaś L, P, F są wielomianami symetrycznymi, natomiast G jest wielomianem antysymetrycznym (zmienia znak przy transpozycji zmiennych), wynika stąd, że iloraz $(L - P - F)/G$ też jest antysymetryczny – ma więc wartość zero, gdy dwie zmienne są równe, i w konsekwencji dzieli się znów przez G . To znaczy, że wielomian $L - P - F$ dzieli się przez G^2 . Są to wielomiany jednorodne szóstego stopnia, ich iloraz musi być stałą.

Wniosek: $L - P - F = cG^2$. Wartość stałej c znajdujemy, podstawiając w miejsce x, y, z dowolne trzy różne liczby; wychodzi $c = 1$. Tak więc $L - P = F + G^2$. Jest to właśnie „ta zmyślna” tożsamość.

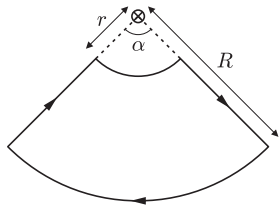
Redaguje Jerzy B. BROJAN



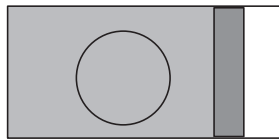
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2011



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

520. Dwa ciężarki o jednakowych masach są połączone długą nicią przełożoną przez nieważki krążek o promieniu r , który może się swobodnie obracać wokół osi odległej o h od środka krążka (rys. 1). Nić nie ślizga się po krążku. Obliczyć okres małych drgań układu wokół położenia równowagi.

521. W prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu I_1 , a w ramce leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do tego przewodnika – prąd o natężeniu I_2 . Ramka składa się z dwóch odcinków radialnych o kącie rozwarcia α oraz łuków okręgów odległych od przewodnika prostoliniowego o r i R (rys. 2). Względna przenikalność magnetyczna ośrodka jest równa 1. Znaleźć siłę i moment siły oddziaływania ramki na przewodnik prostoliniowy.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2011

Przypominamy treść zadań:

512. Dwóch studentów przechadzało się nad brzegiem stawu. W mętnej wodzie podskakiwała szyjka butelki wrzuconej przez jakiegoś wandała.

– Zażożę się o dychę, że potrafię obliczyć średnią głębokość zanurzenia tej butelki – powiedział Fizyk.
– Ściemniasz, przecież nic nie widać w tej zupie! – zaoponował Humanista. – Przyjmuję zakład!

Fizyk ustawił funkcję stopera na swoim zegarku i zmierzył czas 10 okresów drgań butelki – wyszło mu 7,8 sekundy. Przetawił zegarek na kalkulator i po paru obliczeniach zawołał:

– Piętnaście centymetrów, sprawdzamy i jesteś do tyłu o dychę!

Który student wygrał zakład?

513. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się powietrze, w którym unosi się bańka mydlana (rys. 3). Przesunięto tłok, sprężając powietrze. Jeśli przepływy ciepła można pominąć (przemiana adiabatyczna), to mocniej ogrzało się powietrze wewnątrz bańki, czy na zewnątrz niej, czy jednakowo?

512. Załóżmy, że przynajmniej dolna część butelki ma kształt walcowy, a szukaną głębokość zanurzenia oznaczmy przez h . W położeniu równowagi masa butelki m równa jest masie wypartej wody $Sh\rho$, gdzie S – pole przekroju poprzecznego butelki, ρ – gęstość wody. Jeśli zanurzenie zwiększy się o x , to siła wyporu wzrośnie o $S\rho gx$, zatem mamy do czynienia z ruchem harmonicznym o okresie $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdzie k – stała proporcjonalności siły do wychylenia, tzn. $k = S\rho g$. Po przekształceniach można wyznaczyć $h = g(T/2\pi)^2$, tą drogą Fizyk otrzymał wynik $h = 15$ cm.

Podane wyprowadzenie wzoru pomija jednak fakt, że razem z butelką drga także pewna ilość wody otaczającej butelkę, której masę (tzw. masa związana) należy dodać do m we wzorze na T . W efekcie wyliczona wartość h będzie zawyżona – w przeprowadzonym doświadczeniu autor otrzymał zanurzenie o około 25% mniejsze, co w opisaney sytuacji odpowiadałoby wartości 11 cm. A jednak wygrał Humanista...

513. Ciśnienie wewnątrz bańki p_w jest równe sumie ciśnienia zewnętrznego p_z i ciśnienia samej błonki p_b . Ciśnienie błonki jest odwrotnie proporcjonalne do jej promienia, czyli do pierwiastka trzeciego stopnia z objętości powietrza wewnątrz bańki V_w . Dla małych przyrostów mamy więc

$$\frac{\Delta p_b}{p_b} = -\frac{1}{3} \frac{\Delta V_w}{V_w}.$$

Równanie przemiany adiabatycznej gazu w zmiennych V - T w wersji różniczkowej ma postać

$$\frac{\Delta T_w}{T_w} = -(\gamma - 1) \frac{\Delta V_w}{V_w},$$

gdzie $\gamma = c_p/c_v$. Stąd

$$\frac{\Delta p_b}{p_b} = \frac{1}{3(\gamma - 1)} \frac{\Delta T_w}{T_w}.$$

Zapiszmy jeszcze przemianę adiabatyczną wewnątrz i zewnątrz bańki w zmiennych p - T :

$$(\gamma - 1) \frac{\Delta p_w}{p_w} = \gamma \frac{\Delta T_w}{T_w}, \quad (\gamma - 1) \frac{\Delta p_z}{p_z} = \gamma \frac{\Delta T_z}{T_z}.$$

Jeśli początkowo temperatury były jednakowe, to podstawiając zmiany ciśnienia do wzoru $\Delta p_w = \Delta p_z + \Delta p_b$, dochodzimy do wyniku

$$\left(\gamma p_w - \frac{1}{3} p_b\right) \Delta T_w = \gamma (p_w + p_b) \Delta T_z,$$

z którego widać, że wewnątrz bańki wzrost temperatury był większy.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
508 ($WT = 1,00$) i 509 ($WT = 1,83$)
z numeru 12/2010

Jerzy Witkowski	Radlin	37,45
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,04
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Andrzej Idzik	Bolesławiec	29,30

Patrz w niebo: Najcięższa gwiazda neutronowa

Wieczorami, nisko na południowym niebie zauważymy gwiazdozbiór Skorpiona z charakterystycznym czerwonym Antaresem, najjaśnieszą gwiazdą tej konstelacji (i szesnastą pod względem jasności na niebie). W tym samym gwiazdozbiórze, w odległości około 4000 lat świetlnych od Ziemi znajduje się także, niestety niewidoczny gołym okiem, układ podwójny białego karła i bardzo wyjątkowego pulsara, oznaczonego numerem PSR J1614-2230.

Pulsary radiowe są obserwowalnym przejawem istnienia niezwykle gęstych (średnia gęstość większa od gęstości jądrowej, 10^{17} kg/m³), zdolnych szybko rotować (obecny rekord to 716 Hz), silnie magnetycznych (10^4 – 10^{11} T), a jednocześnie niewielkich (porównywalnych z rozmiarem miasta) obiektów o masach rzędu masy Słońca (zwykle około $1,4 M_{\odot}$), zwanych gwiazdami neutronowymi.

Stosunkowo niewielkie pole magnetyczne pulsara J1614-2230, $2 \cdot 10^4$ T, oraz duża częstość rotacji, 317 Hz, świadczą o jego przynależności do grupy *pulsarów milisekundowych*, których pole magnetyczne zmalało z początkowych 10^8 T w trakcie akrecyjnego „rozkręcania” przez materię spadającą z dysku w układzie podwójnym. Szczęśliwym zbiegiem okoliczności oś orbity układu i kierunek „do obserwatora” tworzą kąt niemal dokładnie równy 90° , co w momentach zaćmienia umożliwia detekcję relatywistycznego opóźnienia pulsu przechodzącego w okolicy zakrzywiającego przestrzeń towarzysza (efekt Shapiro). Wykorzystanie ogólnej teorii względności pozwoliło na precyzyjny pomiar masy pulsara: $1,97 \pm 0,04 M_{\odot}$.

Wyjątkowo dokładny pomiar masy znacząco większej od przeciętnej wartości $1,4 M_{\odot}$ to niemały kłopot, ale i źródło ekscytacji astrofizyków – przewidywania teoretyczne i wyniki eksperymentów naziemnych sugerują istnienie egzotycznych cząstek (hiperonów, swobodnych kwarków) we wnętrzach gwiazd neutronowych, uwzględnienie oddziaływań tych cząstek w „przepisie na materię” prowadzi natomiast do drastycznego obniżenia dopuszczalnej masy gwiazd. Jedynie „zwykłe” modele materii złożonej z neutronów, protonów i elektronów, w których nie ma miejsca na żadną egzotykę, nie są sprzeczne z istnieniem PSR J1614-2230. Mimo że obecnie nadal nie wiemy, z czego składają się gwiazdy neutronowe, obserwacja PSR J1614-2230 stanowi długo oczekiwaną przełom w astrofizycznych badaniach bardzo gęstej materii.

Michał BEJGER

Czerwiec

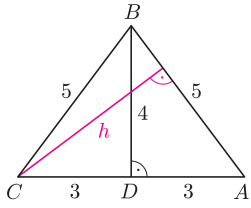
Krótkie, letnie noce, choć ciepłe, nie sprzyjają obserwacjom. Płytko schowane pod horyzontem Słońce to brak zmiernych astronomicznych i, niestety, brak czarnego nieba. Jeśli chodzi o widoczność planet, to czerwiec też nas nie będzie rozpieszczał. Co prawda, Saturna łatwo będzie dostrzec na południowo-zachodnim niebie w gwiazdozbiórze Panny, Uran zaś widoczny będzie tylko nad ranem, bardzo nisko nad południowym horyzontem w gwiazdozbiórze Ryb, na granicy widoczności nieuzbrojonym okiem (+5,9 mag). Bardzo jasnego (–2,2 mag) Jowisza, znajdującego się w gwiazdozbiórze Barana, trudno jednak będzie dostrzec w drugiej połowie nocy, bowiem będzie miał wysokość jeszcze mniejszą niż Uran. Obserwacje pozostałych planet nie będą raczej możliwe, bo pojawią się one nad horyzontem na krótko przed wschodem Słońca. Wyjątkowo okazała będzie za to Droga Mleczna, widoczna w południowo-wschodniej części nieboskłonu. Obserwatorzy o bystrym wzroku lub uzbrojeni w lornetkę czy niewielki teleskop mogą pokusić się o obserwację spektakularnej gromady

kulistej (M13) w Herkulesie, o jasności +5 mag. W drugiej połowie nocy warto też zwrócić uwagę na Wielką Mgławicę w Andromedzie (M31), ale ze względu na jej niewielką jasność powierzchniową warto mieć lornetkę. Jak to latem, piękny Trójkąt Letni, z Denebem, Węgą i Altairem w wierzchołkach, pojawia się niemal w zenicie w południowej części nieba. Nów Księżyca przypada 1 czerwca, a pełnia 15. Niewątpliwą atrakcją miesiąca będzie całkowite zaćmienie Księżyca, 15 czerwca, z fazą maksymalną o godzinie 22:12. W Polsce nie będzie można obejrzeć początku zjawiska – Księżyc po wschodzie widoczny będzie nisko nad południowo-wschodnim horyzontem. 21 czerwca o godzinie 19:16 Słońce znajdzie się w znaku Bliźniąt, a więc rozpocznie się astronomiczne lato. Noc 21/22 będzie najkrótszą w roku, a dzień 22 czerwca potrwa ponad 16 godzin. Niestety, potem dni będą już coraz krótsze. 27 czerwca przypadnie maksimum roju Bootydów. A zatem czystego nieba!

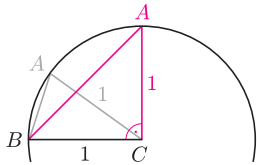
Agnieszka MAJCZYNA

W niektórych zadaniach geometrycznych (i nie tylko) warto dobrze coś ustawić, aby łatwiej rozwiązać problem. Poniżej podaję szereg tego rodzaju przykładów. Większość z nich można rozwiązać „zwyczajnie”, ale jest to droga często bardziej pracochłonna, a nawet żmudna. Odpowiednie, czasem nietypowe ustawienie danej figury lub bryły pozwala znaleźć rozwiązanie krótsze i bardziej pomysłowe. Ocenę, czy także ładniejsze, pozostawiam Czytelnikowi.

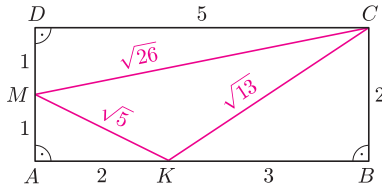
Nawias kwadratowy oznacza pole figury.



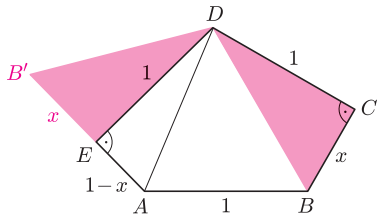
Rys. 1



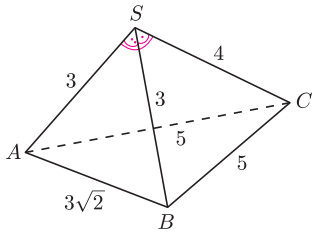
Rys. 2



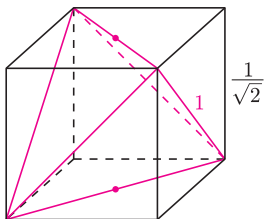
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

1. Oblicz wysokość h z wierzchołka C na podstawę AB w trójkącie ABC , mając dane $AB = BC = 5$ i $AC = 6$.

2. Ramiona AC i BC trójkąta równoramiennego ABC mają długość 1. Dla jakiej podstawy AB pole tego trójkąta jest maksymalne?

3. Oblicz pole trójkąta o bokach długości $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ i $\sqrt{26}$.

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach C i E są proste. Oblicz $[ABCDE]$, jeśli $AB = CD = DE = 1$ oraz $BC = x$, $AE = 1 - x$ dla $0 < x < 1$.

5. Dany jest ostrosłup trójkątny $ABCS$. Krawędzie podstawy mają długości $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = CA = 5$. Krawędzie boczne mają długości $AS = BS = 3$, $CS = 4$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

6. Oblicz odległość pomiędzy środkami przeciwległych krawędzi czworoscianu foremnego o krawędzi 1.

Rozwiązania

R1. Ustawmy trójkąt tak, by AC było podstawą, i niech D będzie spodkiem wysokości z wierzchołka B (rys. 1). Wtedy $AD = DC = 3$ oraz $BD = 4$, zatem $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Ponieważ jednocześnie $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$, to $h = 24/5$. \square

R2. Ustawmy trójkąt tak, by BC było podstawą. Wtedy wierzchołek A leży na okręgu o środku C i promieniu 1 (rys. 2). Pole trójkąta jest maksymalne, gdy wysokość z A jest maksymalna (bo podstawa BC ma ustaloną długość 1), czyli gdy wysokość ta jest równa 1. Zachodzi to dla $\sphericalangle BCA = 90^\circ$, czyli dla $AB = \sqrt{2}$. \square

R3. Rozważmy prostokąt $ABCD$ o bokach $AB = 5$ i $BC = 2$. Niech punkt M będzie środkiem boku DA , a punkt K niech należy do boku AB , przy czym $AK = 2$, $KB = 3$ (rys. 3). Wtedy z twierdzenia Pitagorasa $MK = \sqrt{5}$, $KC = \sqrt{13}$, $CM = \sqrt{26}$. Należy obliczyć pole trójkąta MKC . Jest ono równe $[ABCD] - [AKM] - [BCK] - [CDM] = 10 - 1 - 3 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$. \square

R4. Ustawmy trójkąt BCD obok trójkąta DEA , jak na rysunku 4 (B' oznacza odpowiednik wierzchołka B). Wtedy w trójkącie ADB' podstawa AB' ma długość $1 - x + x = 1$, wysokość DE jest równa 1, więc pole jest równe $1/2$.

Pozostałą częścią pięciokąta jest trójkąt ADB . Przystaje on do trójkąta ADB' , ponieważ $AB = 1 = AB'$, $DB = DB'$ oraz bok AD jest wspólny. Stąd $[ADB] = [ADB'] = 1/2$, więc pole pięciokąta równe jest 1. \square

R5. Ściana ASC jest trójkątem o bokach długości 3, 4, 5, ma zatem kąt prosty przy wierzchołku S (rys. 5). Analogicznie $\sphericalangle BSC = 90^\circ$. Ściana ASB ma boki długości 3, 3, $3\sqrt{2}$, czyli jest połową kwadratu o boku 3, więc też ma kąt prosty przy S .

Ustawmy dany ostrosłup inaczej: niech ASB będzie podstawą. Wobec powyższych obserwacji CS jest wtedy wysokością i $[ASB] = 9/2$. Stąd objętość ostrosłupa to $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 4 = 6$. \square

R6. Ustawmy czworoscian na krawędzi i rozważmy sześcian, którego czterema wierzchołkami są wierzchołki tego czworoscianu (rys. 6). Każda z krawędzi czworoscianu jest przekątną pewnej ściany sześcianu, zatem krawędź sześcianu ma długość $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Środki przeciwległych krawędzi czworoscianu są środkami przeciwległych ścian sześcianu, więc ich odległość równa jest długości krawędzi sześcianu. \square