

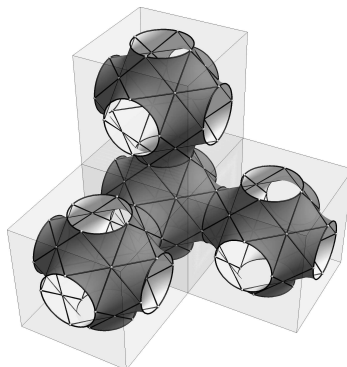
Nagrodę Dziekanów

dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2010/2011
uzyskał

Piotr Różański

za artykuł *Ilu mamy przodków?*
zamieszczony w numerze 4(443)/2011

W następnym numerze o książce Pawła Strzeleckiego



Matematyka współczesna dla myślących laików

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (453)

Czarnobyl 25 lat później
Władysław Surala,
Piotr Brzeziński,
Kornel Biernacki,
Kacper Bieńkowski str. 1


Suma nieskończona –
co to jest?
Michał Krych str. 4


 Zadania str. 7

Szachy – wygrana czy remis?
Tomasz Pintał,
Paweł Kubit str. 8


Czy $W(x) = 0$?
Jakub Radoszewski str.10

Prosto z nieba: Nowa nadzieja
Michał Bejger str.11

 O sadzeniu drzew
Marek Kordos str.12


 Na początku było...
Magdalena Fikus str.14

Informatyczny kącik olimpijski
(49): Monety
Tomasz Idziaszek str.15


 Silnik unipolarny
z wirującą baterią
Stanisław Bednarek str.16

Aktualności str.17

Klub 44 str.18

 Nowa formuła
Olimpiady Matematycznej
Gimnazjalistów
Waldemar Pompe str.23

Luty
Agnieszka Majczyna str.24

 Potęga punktu
Joanna Jaszewska str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Patrycja Bliuj-Stodulska, Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; www.prenumerata.ruch.com.pl

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 03-236 Warszawa, ul. Annopol 17a Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:
SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Czarnobyl 25 lat później

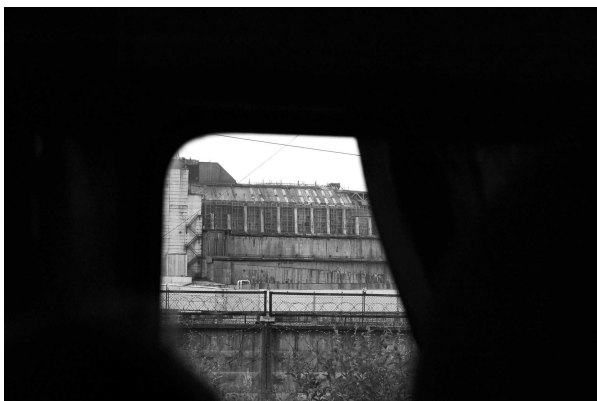
Pomiar promieniotwórczości gleby w mieście Prypeć

Władysław SURAŁA*, Piotr BRZEZIŃSKI*,
Kornel BIERNACKI**, Kacper BIENKOWSKI**

zdjęcia w tekście i na okładce: Weronika WOLSZCZAK



Fot. 1. Ekspedycja przy reaktorze nr 4.



Fot. 2. Widok hali reaktora.



Fot. 3. Wrak autobusu na składowisku sprzętu, używanego do likwidacji skutków awarii, nieopodal składowiska odpadów w Burakliwce.

O działalności Studenckiego Koła Fizyki więcej można dowiedzieć się na stronie skfiz.fuw.edu.pl.

*Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

**Uniwersytet Warszawski, Wydział Geologii

Trochę historii. W dniu 26 kwietnia 1986 roku w reaktorze w czwartym bloku elektrowni jądrowej w Czarnobylu nastąpił wybuch. Podczas testów systemów bezpieczeństwa reaktora (sic!) niekompetentna obsługa doprowadziła do niekontrolowanego, lawinowego wzrostu jego mocy. Woda chłodząca odparowała i rozerwała osłonę reaktora; następnie wybuch uwolnionego z wody wodoru rozsadził dach budynku. Fragmenty grafitowego rdzenia oraz paliwa jądrowego wydostały się na zewnątrz, stając się zarzewiem pożaru. Do atmosfery dostała się część paliwa jądrowego oraz pary radioaktywnego ceszu i jodu.

Wokół reaktora bezpośrednio po wybuchu wyznaczono strefę bezpieczeństwa o promieniu 30 km. Przesiedlono ponad 200 tysięcy osób, w tym całą ludność pięćdziesięciotysięcznego miasta Prypeć, odległego o 4 km od miejsca awarii. Do dziś teren ten pozostaje strefą zamkniętą, a dostanie się tam wiąże się z koniecznością uzyskania specjalnych pozwoleń, mimo że wizyta taka obecnie nie jest ryzykowna.

Wybuch w Czarnobylu był największą katastrofą w historii cywilnej energetyki jądrowej i jedyną, w której zginęli ludzie. Niewątpliwie z tego względu stał się on symbolem niebezpieczeństw związanych z wykorzystaniem energii jądrowej – mimo że będący jego wynikiem opad promieniotwórczy był wyraźnie mniejszy niż ten spowodowany testami wojskowych głowic nuklearnych w latach 50. i 60. XX wieku. Do dziś wiele publicznych wypowiedzi o wybuchu w Czarnobylu trudno nazwać racjonalnymi i opartymi na faktach, a skalę psychozy może ilustrować fakt, że mniej więcej w tym samym czasie magnetyczny rezonans jądrowy zaczęto powszechnie nazywać obrazowaniem za pomocą rezonansu magnetycznego, aby nie wywoływać złych skojarzeń.

Ekspedycja. W dniach 27 lipca – 5 sierpnia 2011 roku kierowana przez Arkadiusza Trawińskiego ze Studenckiego Koła Fizyki grupa studentów Uniwersytetu Warszawskiego odbyła pod patronatem Polskiego Towarzystwa Nukleonowego ekspedycję naukową do zamkniętej strefy wokół Czarnobylskiej Elektrowni Jądrowej. W ramach ekspedycji przeprowadzono interdyscyplinarne badania z różnych dziedzin: od fizyki, przez biologię i chemię, aż po psychologię. Zadania badawcze obejmowały m.in. pomiary radioaktywności w strefie zamkniętej, badanie zawartości izotopu ^{137}Cs w mchu, badanie aktywności promieniotwórczej gleby i żywności, poszukiwanie trwałych zmian w organizmach żywych, takich jak ślimaki, oraz badania społeczne za pomocą specjalnie w tym celu przygotowanych ankiet.

Zanim przystąpimy do omawiania naszego zadania, chcielibyśmy się podzielić z Czytelnikami ogólnymi spostrzeżeniami ze strefy zamkniętej. Prypeć jest obecnie miastem całkowicie opuszczonym i bardzo zdewastowanym. W zabudowanych miejscach wyglądem przypomina wizje grafików projektujących gry komputerowe, których akcja dzieje się w epoce ponuklearnej. Wydaje się, że czas zupełnie się zatrzymał – na ulicy można natknąć się na świadectwa uczniów i dzienniki szkolne z roku 1986, w dużym sklepie straszyc potrafią dawno rozbite telewizory. Wszystkie przedmioty



Fot. 4. Znak drogowy w pobliżu opuszczonej i zrównanej z ziemią wioski Kopaczi.



Fot. 5. Dozometr RKP-1-2.



Fot. 6. Sklep w Prypeci przy ulicy Hydroprojektowej.



Fot. 7. Szpital w Prypeci.

mające jakąkolwiek wartość zostały dawno wywiezione. W lecie miasto wygląda, jakby budynki wzniesione zostały w samym środku lasu – drzewa nie rosną tylko tam, gdzie kiedyś była betonowa wylewka. Widząc młodą brzozę, rosnącą w podłodze hallu ósmego piętra hotelu „Polesie”, można odnieść wrażenie, że siły natury próbują odebrać ten teren cywilizacji. Życie w strefie zamkniętej – poza ludzkim – po prostu kwitnie, chociaż żądni widoków ośmionogich myszy czy świecących grzybów będą z pewnością niezmiernie zawiedzeni. Ta mieszanka niszczących wytworów człowieka i witalności przyrody powoduje, że wizyta w sąsiedztwie elektrowni w Czarnobylu jest przeżyciem trudnym do opisanego – to trzeba po prostu zobaczyć samemu. Nietrudno jest zarazem znaleźć widoki, które, uwiecznione na zdjęciach, będą stanowiły albo niezwykle emocjonalny przekaz wyolbrzymiający ogrom katastrofy, albo, zgoła przeciwnie, argument za tym, że normalne życie w strefie zamkniętej jest w zasadzie możliwe.

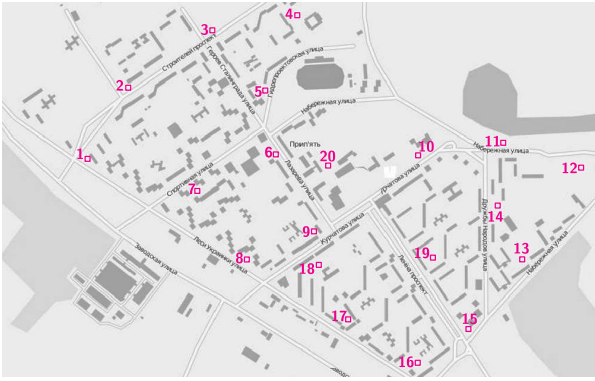
Podczas pobytu w strefie zamkniętej naszym konkretnym zadaniem był pomiar promieniotwórczości gleby w sąsiedztwie dawnej elektrowni jądrowej. To proste doświadczenie pozwoliło nam przekonać się na własne oczy o obecnej skali skażenia radioaktywnego, będącego wynikiem wybuchu w elektrowni jądrowej 25 lat wcześniej. Istotne jest dla nas również to, że dzięki wykonaniu tego i innych zadań możemy dorzucić – na miarę naszych skromnych możliwości – kilka faktów do toczącej się od lat dyskusji o bezpieczeństwie energetyki jądrowej. Temat ten jest bardzo kontrowersyjny, a w mediach bardzo często brakuje rzetelnych informacji dotyczących poruszanej poniżej tematyki.

Przyrządy pomiarowe. W badaniach wykorzystaliśmy dozometr RKP-1-2, przedstawiony na fotografii 5. Na dozometr założona była metalowa osłona praktycznie nieprzepuszczająca promieniowania alfa i obniżająca dziesięciokrotnie natężenie promieniowania beta. Dzięki temu wynik wskazywany przez dozometr odpowiadał przede wszystkim promieniowaniu gamma (pochodzącemu z izotopu ^{137}Cs). Moc dawki pochłoniętej mierzona była w mikrogrejach na godzinę ($\mu\text{Gy/h}$). Gdyby mierzone przez nas promieniowanie było wyłącznie promieniowaniem gamma, przelicznik z grejów na siwerty wynosiłby 1.

Zarówno grej (Gy), jak i siwert (Sv) są równe J/kg. W grejach mierzy się ilość promieniowania pochłoniętego przez dany materiał, siwert zaś jest jednostką biologicznego równoważnika dawki, tj. określa ilość promieniowania gamma powodującego skutki równoważne danemu rodzajowi promieniowania. Dla promieniowania beta przelicznik z Gy na Sv jest równy jedności, dla promieniowania alfa równoważnik dawki jest dwudziestokrotnie większy niż dawka pochłonięta.

Chociaż zbadanie składu promieniowania jonizującego, docierającego do dozymetru, było poza naszym zasięgiem, zastosowanie osłony pozwala nam przyjąć, że dla naszego przyrządu odpowiedni przelicznik jest rzędu jedności.

Pomiary. W glebie na terenie strefy zamkniętej można spodziewać się zwiększonej w porównaniu z naturalną zawartości izotopów promieniotwórczych. Ich obecność jest wynikiem opadu radioaktywnego wywołanego awarią, a także wtórnego skażenia spowodowanego np. przepływem skażonej wody. Źródłem tej składowej promieniowania są izotopy ^{137}Cs oraz ^{90}Sr o czasie połowicznego rozpadu rzędu 30 lat – wchłaniane wraz z wodą mogą powodować również skażenie flory i fauny badanych terenów. Do pomiarów użyto sondy geologicznej. Dla każdego punktu pomiarowego wywiercono siedem otworów leżących w wierzchołkach sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 m oraz w środku tego okręgu (współrzędne tego punktu określały stanowisko pomiarowe). Dokładnie mieszając całą głęboką ze wszystkich odwiertów, formowaliśmy z niej grubą



Mapa punktów pomiarowych, kwadraty wyznaczające miejsce pomiaru mają bok około 30 m.



Fot. 8. Wagon kolejowy na opuszczonej stacji Janów, wykorzystany do ewakuacji mieszkańców Prypeci.



Fot. 9. Klatka schodowa jednego z budynków mieszkalnych w Prypeci.



Fot. 10. Sztuczny zalew, skąd pobierano wodę do chłodzenia elektrowni w Czarnobylu.

warstwę o powierzchni odpowiadającą powierzchni pomiarowej dozymetru RKP-1-2, a następnie zbliżyliśmy do niej dozymetr na odległość około 1 cm i dokonywaliśmy pomiaru. Ten sposób pomiaru gwarantował dobre uśrednienie wartości mocy dawki pochłoniętej w danym punkcie pomiarowym. Następnie zapisywana była dokładna długość i szerokość geograficzna punktu pomiarowego przy użyciu systemu GPS. Dokładne wartości pomiarów i ich współrzędne geograficzne zawarte są w tabeli. Niepewność pomiaru wynosiła 1 $\mu\text{Gy/h}$ (niepewność systematyczna radiometru). Dokładność użytego systemu GPS wynosi jedną sekundę kątową.

N	E	pomiar [$\mu\text{Gy/h}$]	N	E	pomiar [$\mu\text{Gy/h}$]
51°24'26"	30°2'24"	7	51°24'28"	30°3'55"	6
51°24'35"	30°2'34"	5	51°24'24"	30°4'10"	20
51°24'43"	30°2'53"	11	51°24'11"	30°4'2"	15
51°24'45"	30°3'10"	8	51°24'17"	30°3'55"	7
51°24'34"	30°3'3"	16	51°24'4"	30°3'50"	8
51°24'26"	30°3'5"	14	51°23'57"	30°3'36"	13
51°24'21"	30°2'48"	17	51°24'3"	30°3'22"	10
51°24'12"	30°3'0"	6	51°24'10"	30°3'14"	14
51°24'15"	30°3'14"	7	51°24'11"	30°3'41"	11
51°24'27"	30°3'40"	10	51°24'26"	30°3'16"	4

Współrzędne i wartości pomiarów mocy dawki pochłoniętej.

Dyskusja wyników. Średnia dawka pochłonięta, obliczona z pomiarów, wynosi $10 \pm 4 \mu\text{Gy/h}$. Poziom skażenia gleby pod powierzchnią jest wyższy niż na powierzchni (w zakresie jednego rzędu wielkości), jednak moc dawki pochłoniętej promieniowania jest porównywalna z występującą w Warszawie i na pewno mniejsza niż w wielu miejscach na świecie, np. w Finlandii czy Iranie przy strukturach geologicznych zawierających duże ilości granitu. Zróżnicowanie wyników pomiarów jest najprawdopodobniej spowodowane różnym stopniem wypłukania radioaktywnych izotopów (cez jest rozpuszczalny w wodzie) oraz nierównomiernym opadem po awarii elektrowni. Przeliczając moc dawki pochłoniętej z mSv/rok na $\mu\text{Sv/h}$ i przyjmując, że przelicznik z Sv na Gy jest rzędu jedności, zauważamy, że promieniowanie w Prypeci przekracza średnią na powierzchni Ziemi (ok. 2,5 mSv/rok) o co najmniej rząd wielkości [1].

Nie ma jednak wielkiego sensu bezpośrednie porównywanie naszych wyników pomiaru średniej dawki pochłoniętej do średniego równoważnika dawki na powierzchni Ziemi. Choć średni udział dawki promieniowania pochodzącej od skorupy ziemskiej dla większości miejsc na Ziemi waha się od 0,3 do 0,6 mSv na rok, znanych jest wiele obszarów, w których wartość ta jest tysiącrotnie większa [1]. Pomimo to w obszarach tych nie notuje się zwiększonej zapadalności na choroby nowotworowe czy większej częstości mutacji komórek. Oznacza to, że według naszych pomiarów, zbieżnych z wynikami innych badaczy [2], teren miasta Prypeć nie jest miejscem, gdzie promieniowanie jonizujące może w jakikolwiek sposób być niebezpieczne dla zdrowia osób tam przebywających, przy zachowaniu prostych środków bezpieczeństwa, np. niezbliżaniu się do szczególnie aktywnych przedmiotów (pozostałości sprzętu z akcji ratunkowej, ubiorów strażaków).

Literatura

- [1] Ludwik Dobrzyński, *Podstawy fizyczne medycyny nuklearnej*, Instytut Problemów Jądrowych, Otwock-Świerk, 2009.
- [2] Albert Gattner, *Katastrofa w Czarnobylu, po dwudziestu latach: stan miejsca i ludzi, konsekwencje dla rozwoju energetyki i ekologii, postrzeganie społeczne*, Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2009.

Suma nieskończona – co to jest?

Michał KRYCH*

W różnych sytuacjach pojawiają się sumy nieskończenie wielu składników. Już w szkołach podstawowych pojawiają się obiekty typu $7132,32323232323 \dots$. Należy, oczywiście, rozumieć, że chodzi o liczbę

$$7130 + 2,3 + 0,023 + 0,00023 + 0,0000023 + \dots$$

Oznaczając $x = 2,3 + 0,023 + 0,00023 + 0,0000023 + \dots$, otrzymujemy równość $x = 2,3 + \frac{x}{100}$, z której wnioskujemy, że $x = \frac{2,3}{0,99} = \frac{230}{99} = 2\frac{32}{99}$, zatem $7132,323232323 \dots = 7132\frac{32}{99}$. Rozumowanie to możemy uogólnić. Obliczmy sumę $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ – w podanym wcześniej przykładzie było $a = 2,3$ oraz $q = \frac{1}{100}$. Mamy

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = a + q(a + aq + aq^2 + \dots) = a + qS,$$

więc jeśli tylko $q \neq 1$, to $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = S = \frac{a}{1-q}$. Podstawiając $a = 1$, $q = -1$, otrzymujemy równość

$$(\$) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Jednak mamy też

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

oraz

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Wobec tego $\frac{1}{2} = 0 = 1$, co nawet absolwentom współczesnych szkół może wydać się podejrzane.

Tylko nieliczni zakwestionowaliby równość

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

W końcu po obu stronach równości występują te same liczby, co prawda kolejność składników jest inna, ale są to te same składniki. Jednak zachodzą „oczywiste” równości

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots\right) -$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots\right) =$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots\right) -$$

$$- \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots\right).$$

Z tych równości wynika od razu, że

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots\right),$$

co wygląda źle, bo zachodzi oczywista nierówność

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots >$$

$$> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

– w każdym nawiasie jest liczba dodatnia, a po pomnożeniu liczby dodatniej przez 2 otrzymujemy liczbę większą od wyjściowej!

Zmarły ojciec zostawił Janowi i Józefowi w spadku jeden cudowny miecz. Ustalili, że w pierwszym roku miecz będzie u Jana, w drugim u Józefa, w trzecim znów u Jana itd. W ten sposób podzielili spadek na pół. Taka bajeczka miała w XVIII w. przemawiać za słusnością wzoru (§).



*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Niels Abel (1802–1829): *Z wyjątkiem szeregu geometrycznego nie istnieje w matematyce ani jeden szereg, którego sumę można dokładnie zdefiniować. Cóż, świat się powoli zmienia...*

Jasne też jest, że

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots < \\ & < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \\ & \quad + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \\ & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \\ & \quad + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots = 1, \end{aligned}$$

więc suma

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

jest liczbą z przedziału $(\frac{1}{2}, 1)$, zatem nie uratuje nas ani równość $2 \cdot 0 = 0$, ani $2 \cdot \infty = \infty$.

Takich rozumowań, prowadzących do wyników sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem, można podać dowolnie wiele. Po to, by móc porozumiewać się i mieć szansę na poprawne rozumowania, trzeba zdefiniować sumę nieskończoną. Potem trzeba się zastanowić nad własnościami działań w nowej sytuacji.

Sumą nieskończoną, czyli sumą szeregu o wyrazach a_0, a_1, a_2, \dots , nazywamy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ciągu sum częściowych, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$

Jeśli suma szeregu jest skończona, to mówimy, że szereg jest **zbieżny**. Jeśli suma szeregu jest nieskończona lub jeśli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to mówimy o szeregu **rozbieżnym**. Jeśli szereg ma sumę, skończoną lub nieskończoną, to oznaczamy ją symbolem

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

W świetle tej definicji suma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ po prostu nie istnieje, bo ciąg sum częściowych wygląda tak: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$, więc nie ma granicy. Podobnie nie jest prawdą, że $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$, bo w „wyprowadzeniu” wzoru $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q}$ traktowaliśmy sumę $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ jak liczbę, a ta suma jest równa $+\infty$ – po drodze odejmowaliśmy $+\infty$ od $+\infty$, a tego działania sensownie zdefiniować nie sposób.

Suma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

jest dobrze zdefiniowana, co łatwo można wykazać:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} < \\ &< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} < \dots, \end{aligned}$$

więc ciąg „parzystych” sum częściowych jest rosnący, podobnie

$$1 > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \dots,$$

więc ciąg „nieparzystych” sum częściowych maleje, a ich różnica dąży do zera, zatem oba mają tę samą granicę, wobec tego skończoną. Pokazaliśmy wcześniej, że zmiana kolejności składników tej sumy może prowadzić do dwukrotnego zmniejszenia jej wartości.

Czytelnikowi proponujemy udowodnienie równości

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \right) = \\ & = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

– znów po obydwu stronach równości są te same liczby, ale w innej kolejności.



Z nierówności $1 + \frac{1}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} > 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ itd. wynika, że gdyby suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

była skończona, to byłaby większa od siebie, a to nie jest możliwe, wobec tego

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots = \infty.$$

Stąd wynika, że również

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{\infty}{2} = \infty,$$

a zatem $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \infty$, bowiem $1 > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$, itd.

Niech A będzie dowolną liczbą. Zmienimy kolejność składników sumy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots,$$

tak by po tym przekształceniu sumą stała się liczba A . Niech m_1 oznacza taką najmniejszą liczbę naturalną, że zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} \geq A.$$

Przez n_1 oznaczamy taką najmniejszą liczbę naturalną, że

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n_1} \leq A.$$

Przyjmijmy, że m_2 jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2m_1 + 1} + \frac{1}{2m_1 + 3} + \dots + \frac{1}{2m_2 - 1} \geq A$$

i jednocześnie $m_2 > m_1$. Potem określamy n_2 jako najmniejszą z tych liczb naturalnych, dla których

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2m_1 + 1} + \dots + \frac{1}{2m_2 - 1} - \frac{1}{2(n_1 + 1)} - \frac{1}{2(n_1 + 2)} - \dots - \frac{1}{2n_2} \leq A$$

i jednocześnie $n_2 > n_1$. Definiujemy w taki sposób dwa ściśle monotoniczne ciągi liczb naturalnych (m_j) i (n_j) oraz nowy szereg nieskończony, różniący się od sumy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ jedynie kolejnością składników. Niech S_n oznacza n -tą sumę częściową nowego szeregu. Jasne jest, że

$$A - \frac{1}{2n_1} \leq S_{m_1+n_1} \leq A,$$

$$A \leq S_{m_1+n_1+m_2} < A + \frac{1}{2m_2 - 1},$$

$$A - \frac{1}{2n_2} < S_{m_1+n_1+m_2+n_2} \leq A \quad \text{itd.}$$

Pozostałe sumy częściowe znajdują się między pojawiającymi się w tych nierównościach. Wynika stąd, że $A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Wykazaliśmy więc, że zmiana kolejności sumowania może spowodować w zasadzie dowolną zmianę sumy.

Czytelnik może zmodyfikować to rozumowanie, tak by nowa suma była równa ∞ lub $-\infty$. Może też doprowadzić do tego, by po zmianie kolejności składników ciąg (S_n) w ogóle granicy nie miał.

Bernhard Riemann, jeden z najwybitniejszych matematyków wszech czasów, zaobserwował, że jeśli suma $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ ma skończoną wartość i jednocześnie $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots = +\infty$, to można zmienić kolejność wyrazów szeregu, tak by suma stała się równa z góry danej liczbie rzeczywistej A . Podane wyżej rozumowanie po kosmetycznych zmianach staje się dowodem tego twierdzenia.



Dla $A = 2$ początek wygląda tak:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{39} + \frac{1}{41} - \frac{1}{4},$$

więc $m_1 = 8$, $n_1 = 1$, $m_2 = 21$, $n_2 = 2$.

Spacerujemy wokół punktu A , po przekroczeniu go natychmiast zawracamy w przeciwną stronę. Wyrazy szeregu to długości kolejnych kroczków.

Dodajmy na koniec, że wzór $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$, z pozoru absurdalny, może mieć jednak pewien sens. Możemy napisać równość

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a) - (z-a)} = \frac{1}{1-a} \left(1 + \frac{z-a}{1-a} + \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^2 + \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^3 + \dots \right),$$

która zachodzi dla każdej liczby zespolonej z , dla której spełniona jest

nierówność $\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$; litera a też oznacza liczbę zespoloną. Przyjmując

kolejno $a = 0$, $a = i$, $a = \frac{5}{4} + i$, $a = \frac{9}{4} + i$, otrzymujemy koła otwarte o środkach w wymienionych punktach i promieniach $|1-a|$, czyli 1 , $\sqrt{2}$, $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{17}$, $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{41}$.

Każde dwa kolejne mają punkty wspólne, a ostatnie zawiera liczbę $z = 2$.

Funkcja $\frac{1}{1-z}$ jest więc przedstawiana różnymi wzorami w kolejnych kołach.

Można więc myśleć, że $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2}$ to wartość funkcji, która

w kole opisanym nierównością $|z| < 1$ jest zdefiniowana jako $1 + z + z^2 + \dots$,

przedłużonej w rozsądny sposób poza to koło, tak że liczba 2 znajduje się

w dziedzinie tego przedłużenia. W tym przypadku wyglądać może to

na udziwnianie, ale w innych sytuacjach bywa inaczej: dany jest szereg

i nie wiadomo, jaką funkcję przedstawia – to prowadzi do pojęcia funkcji

analitycznej, zresztą na ogół wielowartościowej. Pisał o tym już Leonhard Euler

(1707–1783), ale precyzyjne definicje pojawiły się po ponad stu latach.



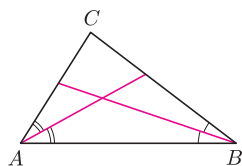
Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 805. Po odsłuchaniu zapisu na taśmie magnetofonowej okazało się, że promień nawiniętej taśmy zmniejszył się dwukrotnie w czasie $t_1 = 20$ minut. Po jakim dodatkowym czasie t_2 promień nawiniętej taśmy zmniejszy się znowu dwukrotnie? Rozwiązanie na str. 10



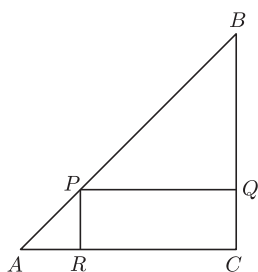
F 806. Na pustą szpulę starego magnetofonu, obracającą się ze stałą prędkością kątową, nawija się taśma magnetyczna. Po zakończeniu nawijania w czasie t_1 okazało się, że promień nawiniętej taśmy r_k jest trzy razy większy od początkowego promienia r_0 . W jakim czasie można nawinąć na tę samą szpulę taśmę magnetyczną takiej samej długości, ale dwa razy cieńszą? Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1339. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma większą miarę niż kąt przy wierzchołku B (rys. 1). Wykazać, że dwusieczna poprowadzona z wierzchołka B jest dłuższa niż dwusieczna poprowadzona z wierzchołka A . Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

M 1340. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC wybrano punkt P . Niech Q i R będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki BC i CA (rys. 2). Udowodnić, że pole którejś z figur ARP , PQB , $PRCQ$ stanowi co najmniej $\frac{4}{9}$ pola trójkąta ABC . Rozwiązanie na str. 24

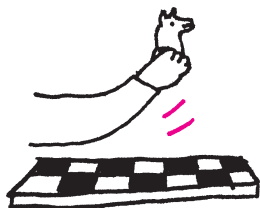
M 1341. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d , takie że $b < c < d$. Udowodnić nierówność

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd).$$

Rozwiązanie na str. 11

Szachy – wygrana czy remis?

Tomasz PINTAL*, Paweł KUBIT**



Półruch (ang. *ply*) to ruch wykonany przez jedną ze stron. Zatem na cały ruch (posunięcie białych jak i czarnych) składają się dwa półruchy.

Dokładniejsze obliczenia i wyjaśnienia techniczne można odnaleźć na stronie <http://jknow.republika.pl/szachy/szachy.html>, z której wykorzystano fragmenty dotyczące obliczeń.

Tablice Nalimova podają ocenę pozycji i określają liczbę ruchów koniecznych do zakończenia partii (uzyskaniem wygranej bądź remisu). Tutaj można sprawdzić, jak to wygląda: <http://www.k4it.de/index.php?topic=egtb&lang=en>

Zastanówmy się nad pytaniem zawartym w tytule, to jest: czy partia szachów, przy bezbłędnej grze obu stron, zakończy się wygraną któregoś z graczy, czy może też nieunikniony jest remis? Do dziś nie jest znana odpowiedź na to pytanie i to pomimo faktu, że w rozwiązaniu tego problemu mogłyby nam pomóc odpowiednio napisany program i posłużenie się superkomputerem (a najlepiej mocą obliczeniową wielu takich urządzeń połączonych w jedną sieć – tak jak w przypadku globalnej sieci Internet). Spróbujmy zatem wstępnie oszacować, ile różnych sytuacji musiałoby zostać przeanalizowanych, aby uzyskać odpowiedź na postawione na początku pytanie.

Zakładamy, że partia trwa 50 ruchów (średnio po około 40 ruchach rozgrywka szachowa albo właśnie się kończy, albo obaj zawodnicy są zorientowani co do końcowego jej wyniku). Jak wiadomo, przy rozpoczęciu partii białe mają 20 możliwości ruchu, w odpowiedzi na to czarne mają także 20 możliwości, czyli po dwóch pierwszych posunięciach (*półruchach*) jest dokładnie 400 różnych wariantów gry. Może się to wydawać niewielką wartością, ale zobaczymy, co dzieje się dalej: liczba możliwych kontynuacji szybko wzrasta wraz z kolejnymi ruchami. Jak szybko? Opisuje to poniższa tabela.

liczba posunięć	2	3	4	5	6
liczba możliwych wariantów	400	8 902	197 281	4 865 609	119 060 324

Po pierwszych trzech pełnych ruchach (6 półruchów, czyli 3 posunięcia białych oraz czarnych) jest nieco ponad 100 milionów wariantów, czyli 10^8 . W zależności od fazy gry jest około 100 do 1000 możliwości kontynuowania gry na ruch (czyli po wymnożeniu liczby posunięć białych i czarnych można uzyskać liczbę w przedziale od 100 do 1000). W efekcie możliwych partii jest rzędu 10^{120} .

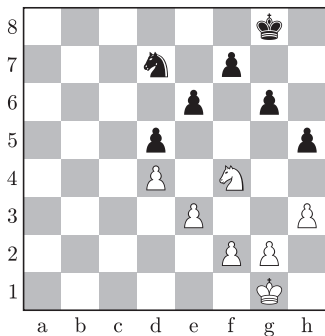
Dla ukazania skali problemu (złożoności szachów) dodajmy, że szacowana liczba atomów w obserwowalnym Wszechświecie to 10^{80} .

Zauważmy też, że skoro na dowolnym polu szachownicy 8×8 można ustawić jedną z 12 bierek bądź też zostawić je puste, to liczba wszystkich ustawień figur (zarówno tych poprawnych w sensie szachowym, jak i szachowo nielegalnych) jest równa 13^{64} , czyli w przybliżeniu 10^{71} .

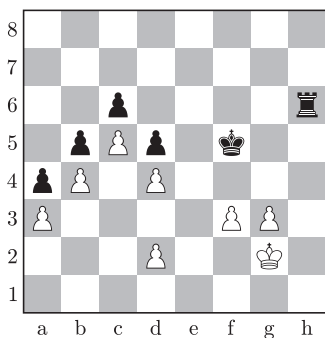
Czy jest więc możliwe rozwiązanie problemu z wykorzystaniem superkomputerów? Zakładając, że nasz program byłby w stanie analizować z szybkością 1 000 000 wariantów na sekundę, na przerobienie całości będzie potrzebował około 10^{107} lat, a więc więcej niż wiek Wszechświata. Nawet przyspieszenie obliczeń 10 milionów razy (10^7) niewiele zmieni, bo nadal otrzymujemy bardzo znaczącą wartość: 10^{100} lat. Na pocieszenie można wspomnieć, iż liczba możliwych pozycji na szachownicy (w tym przypadku należy wyeliminować te „nielegalne”: chociażby takie, w których obydwaj króle są szachowane, na szachownicy jest więcej niż 18 hetmanów lub 20 wież itp.) waha się w granicach od 10^{38} do 10^{46} (dla porównania: w warcabach angielskich mamy „tylko” $5 \cdot 10^{20}$ możliwych ustawień pionów). Niemniej jest to wystarczająco duża liczba, która gwarantuje, że jak na razie odpowiedź na pytanie postawione w tytule jest poza naszym zasięgiem.

Na czym polega zatem częściowy sukces w „badaniu szachów” na obecnym etapie rozwoju techniki? W chwili obecnej są już dostępne tablice końcówek (tzw. *tablice Nalimova*). Są to wygenerowane oraz ocenione wszystkie możliwe prawidłowe pozycje, które można uzyskać w grze szachowej (jak na razie jedynie dla 6 bierek, w tym obowiązkowo zawsze oba króle). Pojawia się pytanie: czemu dostępne są tylko pozycje sześciobierkowe? Opracowanie tablic siedmiobierkowych wymagałoby bowiem potężnych mocy obliczeniowych, a dodatkowo wielkiej przestrzeni do ich zapisania. Tak więc rozwiązanie w ten sposób problemu „przeliczenia szachów do spodu” raczej do końca wieku nam nie grozi. Jedynym ratunkiem jest opracowanie komputerów kwantowych lub też wynalezienie algorytmu, który pozwoli na udowodnienie (za pomocą reguł), iż dane pozycje należą do kategorii remisowych lub wygranych.

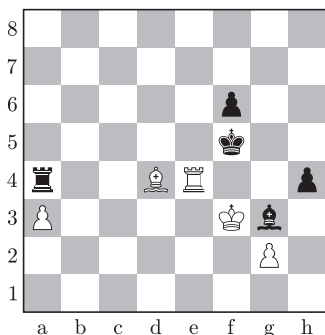
*nauczyciel w klubie szachowym *Szachowe Umysły* w Stalowej Woli
**matematyk, absolwent Uniwersytetu Jagiellońskiego



Rys. 1. Remisowe zakończenie partii Aronian–Nakamura (odpowiednio zawodników nr 3 i 12 światowej listy rankingowej). Brak przewagi materialnej oraz widocznych słabości z obu stron powoduje, że gracze nie podejmują dalszych wysiłków w celu wygrania partii.



Rys. 2. Białe uzyskały remis: ustawiły twierdzę, której nie można sforsować.



Rys. 3. Zugzwang oznacza sytuację, najczęściej w końcowej fazie gry, w której wykonanie ruchu powoduje natychmiastowe pogorszenie pozycji strony będącej na posunięciu (tu białych), prowadzące do przegranej.

Jak wiemy, istnieją takie gry, w których jedna ze stron dysponuje strategią wygrywającą (czyli prowadzącą do zwycięstwa bez względu na to, co zrobi przeciwnik), przy czym nie zawsze jest rozpoznane, jak gracz ma zrealizować swoją wygraną. Tak jest chociażby z grą *hex*. Z szachami być może jest inaczej... W tym miejscu przedstawimy kilka argumentów na poparcie hipotezy, iż szachy są grą remisową.

Rozgrywki na najwyższym światowym poziomie wśród zawodowych szachistów kończą się w zdecydowanej większości remisami (rys. 1). Dzieje się tak zwłaszcza wtedy, gdy obaj przeciwnicy dysponują zbliżonym poziomem gry oraz bardzo dobrym przygotowaniem i znakomitą aktualną formą sportową. Dodatkowym argumentem jest fakt, iż rozgrywki między najsilniejszymi programami komputerowymi (*Houdini*, *Rybka*, *Stockfish* itp.) kończą się zwycięstwem wyłącznie wtedy, gdy któryś z nich osiągnie zdecydowaną przewagę. Najczęściej jest ona wynikiem uzyskania lepszej pozycji dzięki tzw. *książce debiutowej*.

Obecne książki debiutowe są tworzone na podstawie partii najsilniejszych szachistów świata, co powoduje stałe ich ulepszenie. Niektóre z tych książek są wykonywane przez pasjonatów i często bywają znacznie silniejsze niż te dostarczane razem z programami komputerowymi. Dlatego z uwagi na coraz mniejszą ilość „dziur” w książkach debiutowych, można zaryzykować stwierdzenie, że bez znalezienia istotnego wzmocnienia wariantu lub jeszcze gdzieś „niezalałanej dziury”... po prostu nie jest możliwe osiągnięcie przewagi pozwalającej na uzyskanie wygranej.

Kolejna przesłanka wspierająca nasze przypuszczenia jest związana z końcową fazą partii szachowej. Okazuje się, że istnieje pewien odsetek pozycji, które nawet pomimo wyraźnej przewagi jednej ze stron nie są możliwe do wygrania. Za przykład może posłużyć sytuacja, w której strona silniejsza ma dwa skoczki lub też piona bandowego i gońca (niekontrolującego pola przemiany). Są także pozycje typu *twierdza*, w których – pomimo dużej przewagi jednej ze stron – można uzyskać jedynie remis (rys. 2).

Z naszych analiz wynika, iż na chwilę obecną jedyną możliwością obalenia przyjętej hipotezy o remisowości szachów może być sytuacja tzw. *zugzwangu* (rys. 3). *Zugzwang* oznacza, że strona rozpoczynająca partię w końcu dochodzi do pozycji krytycznej, w której konieczność wykonania ruchu powoduje, że z pozycji „idealnej” przechodzi w pozycję przegraną. Niemniej jednak baza kilku milionów partii (którą obecnie ma do dyspozycji niemal każdy szachista) wskazuje wyraźnie, iż bez błędu strony rozpoczynającej nie dochodzi do tego typu pozycji. Zwykle uzyskana przewaga (czy też patrząc od strony słabszej – strata niemająca charakteru krytycznego) gwarantuje uzyskanie jedynie remis. Inaczej mówiąc, to raczej czarne muszą się martwić, aby tak neutralizować przewagę, żeby nie wyjść poza „strefę remisową”, aniżeli białe, aby nie wpaść w pozycję *zugzwangu*. Tak czy inaczej: białe nie są w stanie wygrać (forsownie) partii, jeśli czarne nie popełnią krytycznego błędu (lub błędów), który sprawi, iż wyjdą one poza „strefę remisową”.

Fakt ten nie powinien zresztą nas specjalnie dziwić, bowiem już trzeci mistrz świata, José Raúl Capablanca, blisko sto lat temu przewidywał, iż w niedalekiej przyszłości szachy „umrą na remis”. Z tego względu zarówno on, jak i jego następcy tworzyli różne „odmiany szachów”, których celem byłoby przede wszystkim skomplikowanie gry.

Jednym z przykładów takiego odświeżenia mogą być tzw. *szachy Fischera* (sf960). Ta odmiana jest prostą modyfikacją królewskiej gry, polegającą na losowym ustawieniu figur (klasyczne szachy to jedna z 960 możliwości ustawienia – stąd nazwa) oraz nieco innych reguł wykonywania rozgrywki. Obecnie szachy Fischera są traktowane jako przyszłość szachów, z uwagi na to, że pozwalają one uniknąć powielania utartych schematów debiutowych występujących w szachach klasycznych.

Podsumowując: jeśli w niedalekiej przyszłości okaże się, że szachy to gra remisowa, wówczas być może warto będzie sięgnąć do innej formy tej niezwyklej gry. Na razie jednak zaczekajmy na ich definitywne „rozwiązanie” – udowodnienie tego, że szachy (klasyczne) są na pewno grą remisową.

**Rozwiązanie zadania F 805.**

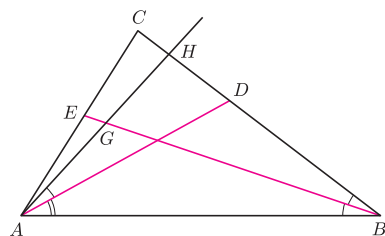
Niech początkowy promień nawiniętej taśmy będzie równy $4r$. Zatem po dwukrotnym zmniejszeniu się tego promienia powierzchnia nawiniętej taśmy zmniejszy się o wielkość $S = \pi(16r^2 - 4r^2) = 12\pi r^2$. Przy odsłuchiwaniu zapisu prędkość liniowa przesuwu taśmy v jest stała, zatem długość nawiniętej taśmy to $l_1 = vt_1$. Z drugiej strony jest ona równa $S/d = 12\pi r^2/d$, gdzie d jest grubością taśmy. Z porównania tych wzorów wynika, że $12\pi r^2 = vt_1 d$.

Gdy promień nawiniętej taśmy zmniejszy się znowu dwa razy, pole powierzchni nawinięcia zmniejszy się o wielkość $S_1 = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$, stąd $3\pi r^2/d = vt_2$. Ostatecznie:

$$t_2 = t_1/4 = 5 \text{ minut.}$$

**Rozwiązanie zadania M 1339.**

Założmy, że w trójkącie ABC mamy $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. Odłóżmy kąt $\frac{1}{2}\sphericalangle B$ na dwusiecznej AD jako na ramieniu, jak na rysunku.



Z podobieństwa trójkątów AHD i BHG mamy $\frac{BG}{AD} = \frac{BH}{AH}$. Ale w trójkącie ABH bok BH leży naprzeciw większego kąta niż bok AH , więc $BH > AH$. Stąd i z uzyskanej proporcji otrzymujemy $BG > AD$. Tym bardziej więc $BE > AD$, co mieliśmy udowodnić.

Inne rozwiązanie można znaleźć w *Delcie* 1/2010.

Czy $W(x) = 0$?

Jakub RADOSZEWSKI

Poszukiwanie pierwiastków wielomianu jest jednym z podstawowych zagadnień rozważanych we wszystkich naukach ścisłych. W tym artykule zajmiemy się czymś znacznie prostszym: sprawdzaniem, czy dana liczba jest pierwiastkiem danego wielomianu. Mając dany wielomian $W(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ i konkretną wartość parametru x , chcemy więc sprawdzić, czy $W(x) = 0$. Można by spytać, czy nie wystarczy w tym celu podstawić wartość x i na tym skończyć? Rzeczywiście, jeśli mamy do czynienia z „nieskomplikowanym” wielomianem (cokolwiek by to miało znaczyć) i „sensownym” parametrem x , to problem jest trywialny. Może się jednak okazać, że nasze dane nie są „nieskomplikowane i sensowne”, ale za to możemy wesprzeć się domowym komputerem...

Przede wszystkim należy sprecyzować, jakimi liczbami zamierzamy się zajmować. Aha, a więc to tutaj tkwi haczyk! Podejrzliwy Czytelnik zapewne domyśla się już, że za moment wkroczymy w mroczny świat komputerowych reprezentacji liczb rzeczywistych, z przybliżeniami, cechami, mantysami i wszędobylskimi epsilonami. Faktycznie, komputerowe sprawdzenie równości $W(x) = 0$ w liczbach rzeczywistych nastęrcza pewnych trudności i jest istotnym zagadnieniem w dziedzinie metod numerycznych. My jednak nie będziemy się w to tutaj wgłębiać i założymy, że mamy do czynienia wyłącznie z liczbami całkowitymi. Czy w takim razie problem zawiera w sobie jeszcze jakąś trudność? Owszem.

Otóż nieprzyjemne jest to, że przy obliczaniu $W(x)$ szybko zaczynamy mieć do czynienia z bardzo dużymi liczbami. I to nawet wtedy, gdy współczynniki a_i są niewielkie, co dla informatyka znaczy, że co do wartości bezwzględnej nie przekraczają dwóch miliardów (orientacyjne ograniczenie standardowego typu całkowitego 32-bitowego ze znakiem; faktycznie jest to 2^{31} , czyli trochę więcej). Rzeczywiście, bez trudu widzimy, że jednym z pierwiastków wielomianu:

$$x^{1000} - 9x^{999} - 9x^{998} + \dots - 9x - 10$$

jest $x = 10$, ale jeśli chcielibyśmy to sprawdzić, wykonując proste podstawienie, musielibyśmy operować na liczbach zawierających 1000 cyfr. Nawet osoba niezaznajomiona z komputerem łatwo zauważy, że obliczenia na takich długiach liczbach muszą być w jakimś sensie trudniejsze. Tak jest w istocie: wykonywanie operacji na dużych liczbach jest powolne, a do tego bywa wyjątkowo niewygodne, jeśli akurat natrafimy na system czy język programowania, który dostarcza implementacje działań jedynie na wbudowanych typach całkowitych, co zazwyczaj oznacza liczby 64-bitowe (ze znakiem), czyli mniejsze co do wartości bezwzględnej niż 2^{63} .

No dobrze, ale my chcemy tylko sprawdzić, czy $W(x) = 0$, a niekoniecznie od razu obliczyć dokładną wartość $W(x)$ – to przecież musi być prostsze! I rzeczywiście: poniżej opisujemy krótką i elegancką metodę rozwiązującą ten problem.

Założmy, że $x \neq 0$ – z przypadkiem $x = 0$ łatwo sobie poradzić, sprawdzając, czy $a_0 = 0$. Chcemy stwierdzić, czy:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

równoważnie czy:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x = -a_0.$$

Lewa strona jest podzielna przez x , a zatem prawa też musi dzielić się przez x . Otrzymujemy pierwszy warunek konieczny na to, żeby x było pierwiastkiem W :

$$(1) \quad a_0 \bmod x = 0.$$

Jeśli on zachodzi, możemy całą równość podzielić przez x , otrzymując:

$$a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 = -\frac{a_0}{x}.$$

Ta sytuacja jest podobna do poprzedniej. Przerzucamy a_1 na drugą stronę:

$$a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x = -\frac{a_0}{x} - a_1$$

i otrzymujemy drugi warunek konieczny:

$$(2) \quad \left(\frac{a_0}{x} + a_1\right) \bmod x = 0.$$



Rozwiązanie zadania M 1341.

Wykonujemy następujące przekształcenia:

$$(a + b + c + d)^2 - 8(ac + bd) =$$

$$= a^2 + 2a(b + c + d) +$$

$$+ (b + c + d)^2 - 8ac - 8bd =$$

$$= a^2 + 2a(b - 3c + d) + (b - 3c + d)^2 +$$

$$+ (b + c + d)^2 - (b - 3c + d)^2 - 8bd =$$

$$= (a + b - 3c + d)^2 +$$

$$+ (2(b - c + d) \cdot 4c - 8bd).$$

Wystarczy wykazać, że drugi składnik jest dodatni. Ale

$$(b - c + d) \cdot c - bd =$$

$$= (b - c) \cdot c + d \cdot (c - b) =$$

$$= (c - b)(d - c) > 0.$$

Następnie znów dzielimy obie strony równości przez x i kontynuujemy to postępowanie, aż po lewej stronie pozostanie samo a_n . Po drodze otrzymamy kolejne warunki konieczne na to, żeby x było pierwiastkiem wielomianu W , na przykład trzeci z nich będzie postaci:

$$(3) \quad \left(\frac{a_0}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_2 \right) \bmod x = 0.$$

Na końcu zaś wystarczy sprawdzić, czy:

$$(4) \quad \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n = 0.$$

W ten sposób uzyskujemy następujący pseudokod, w którym sprawdzamy kolejno warunki (1), (2), (3) itd., a na końcu (4).

$w := a_0;$

if $x \neq 0$ **then**

for $i := 1$ **to** n **do**

if $w \bmod x \neq 0$ **then return false;**

$w := w/x + a_i;$

if $w \neq 0$ **then return false**

else return true;

Zauważmy, że wartość zmiennej w nigdy nie przekroczy sumy wartości bezwzględnych liczb a_i , więc nie będziemy mieć do czynienia z żadnymi dużymi liczbami. Czyli pełny sukces!

Na zakończenie warto dodać, że podany problem można także rozwiązać za pomocą tak zwanego schematu Hornera, w którym wykorzystujemy następujące przedstawienie:

$$W(x) = (((\dots((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \dots) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0.$$

Wystarczy mianowicie próbować obliczyć $W(x)$ zgodnie z tym schematem, od lewej do prawej – na przemian mnożymy przez x i dodajemy a_i – przy czym obliczenia przerywamy, jeśli aktualna wartość staje się zbyt duża. Wiemy wówczas, że na pewno wynikiem nie będzie zero. A to, jaka jest ta graniczna wartość, przy której możemy od razu udzielić odpowiedzi negatywnej, pozostawiamy do rozstrzygnięcia Czytelnikowi.

Prosto z nieba: Nowa nadzieja

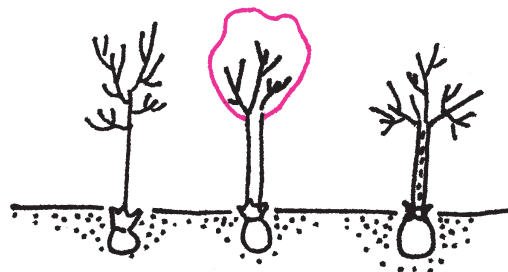
Rozpoczęta w 2009 r., sponsorowana przez NASA misja kosmiczna *Kepler* ma na celu oszacowanie liczby zdolnych do zamieszkania planet, ich parametrów oraz właściwości układów planetarnych, w których się znajdują. Dotychczas zarejestrowano ponad tysiąc kandydatów na planety, obecnie skrupulatnie weryfikowanych podczas dodatkowych obserwacji. Wśród wielu interesujących odkryć jedno zasługuje na szczególną uwagę: jest to planeta znajdująca się w układzie podwójnym. Układ ów tworzą gwiazdy nieco chłodniejsze i nieco mniej masywne od Słońca, a znajduje się on około 200 lat świetlnych od naszego układu planetarnego (w gwiazdozbiorze Łabędzia). Planeta została oznaczona kryptonimem Kepler-16b [1], nieformalnie natomiast astronomowie ochrzczili ją zdecydowanie bardziej romantyczną nazwą Tatooine (znaną z *Gwiezdnych wojen* George'a Lucasa planetą dzieciństwa Luke'a Skywalkera). W odróżnieniu od filmowej Tatooine glob odkryty przez zespół Keplera jest zimnym gazowym gigantem. Nie spodziewamy się tam zatem odnaleźć przejawów życia podobnego do ziemskiego głównie z powodu panującej tam zdecydowanie za niskiej

temperatury – Kepler-16b znajduje się poza obszarem sprzyjającym powstaniu życia (tzw. „ekosferą”).

Doniesienia o odkryciu planety o dwóch słońcach zdarzały się już wcześniej, ale nigdy nie znalazły potwierdzenia podczas bardziej wnikliwej analizy. Obserwacje *Keplera* są jednak tak wysokiej jakości, że ich wiarygodność praktycznie nie jest kwestionowana. Możliwość istnienia planety typu Kepler-16b była od dawna przedmiotem rozważań teoretyków, przewidujących różne niestandardowe sposoby powstawania układów planetarnych. Biorąc pod uwagę fakt, że większość gwiazd w Galaktyce znajduje się w układach podwójnych, możemy spodziewać się większej liczby takich planet, niż to wynika z oszacowań wykorzystujących obserwacje samotnych gwiazd. Oznacza to także, że wzrosło prawdopodobieństwo znalezienia planety o podobnych do Ziemi parametrach. Czas pokaże (trzymamy kciuki!), czy wśród kolejnych planet *Keplera* znajdzie się także druga Ziemia.

Michał BEJGER

[1] <http://kepler.nasa.gov/Mission/discoveries/kepler16b>



O sadzeniu drzew

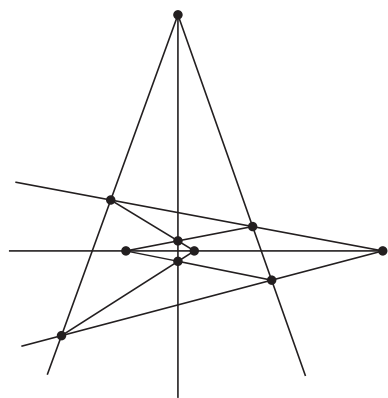
Girard DESARGUES, matematyk, architekt ogrodów, doradca kardynała Richelieu (a więc rówieśnik Atosa, Portosa i Aramis) postawił kolegom ogrodnikom pytanie:

Jak posadzić 10 drzew w dziesięciu rzędach po 3 drzewa w każdym rzędzie?

I kiedy oni doszli do wniosku, że widać matematycy nie są całkiem normalni, przedstawił im widoczne obok rozwiązanie.

Natomiast kolegom matematykom wytłumaczył, że taka możliwość bierze się stąd, iż żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni. Można bowiem – patrząc uważnie na ten rysunek – dopatrzeć się w nim czworościanu przeciętego płaszczyzną.

* * *



Rys. 1

Zasłyszawszy o tym, Blaise PASCAL, matematyk, fizyk, filozof, bezbożnik i teolog, konstruktor arytmetometru, wynalazca taczek, i tak dalej, i dalej... , człowiek szalenie ambitny, postanowił, że zmierzy się z trudniejszym pytaniem:

Jak posadzić 9 drzew w dziewięciu rzędach po 3 drzewa w każdym rzędzie?

I faktycznie pokazał, jak te drzewa trzeba posadzić – rysunek jest obok.

Każdy z nas może wykonać oba te rysunki, bo wykonuje się je „byle jak” – należy po prostu rysować po kolei proste usytuowane podobnie, jak na tych rysunkach, a ostatnia prosta zawsze „sama wyjdzie”. Proszę spróbować!

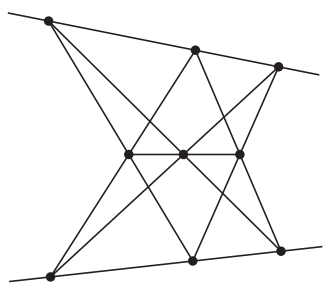
Uzasadnienie jednak, że zadanie Pascala ma rozwiązanie, w matematyce jest równoważne temu, że... $a \cdot b = b \cdot a$ – i kto by to pomyślał! Nie jest jednak łatwo się o tym przekonać.

* * *

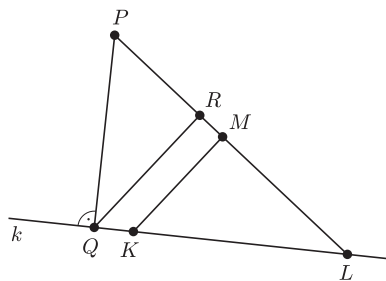
Ćwierć tysiąclecia później Gino FANO, jeden z członków słynnej Włoskiej Szkoły Matematycznej, na wzór której po pierwszej wojnie światowej powstała Polska Szkoła Matematyczna, udowodnił, że siedmiu drzew nie da się posadzić w siedmiu rzędach, po trzy w każdym rzędzie, bo gdyby się dało, to dałoby się również sprawdzić, że $1 + 1 = 0$. To już wymaga wyższej szkoły jazdy.

* * *

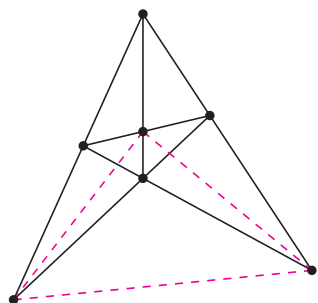
No, a co z ósemką? To zadanie dla Ciebie, Czytelniku.



Rys. 2

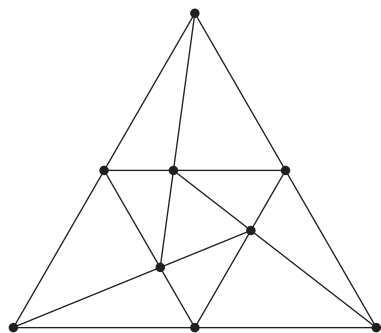


Rys. 3

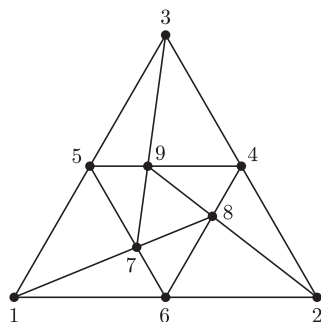
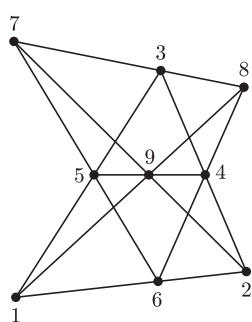


Rys. 4

Istnieje też praca z 1951 roku (G.A. Dirac), która głosi, że dla $n > 7$ „dwudrzewnych” rzędów jest co najmniej $\frac{n}{2}$, ale dowód jest tak zawily, że niewielu chce go zaakceptować.



Rys. 5



Rys. 6

James Joseph SYLVESTER, Anglik, najpierw kabareciarz, potem matematyk, Ojciec Założyciel matematyki amerykańskiej (wykładał tam przed i po wojnie secesyjnej), patrząc na rysunki Desarguesa i Pascala, zauważył, że są na nich (nienarysowane) rzędy, w których są tylko dwa drzewa. Postawił więc pytanie:

A czy istnieje sad, w którym nie wszystkie drzewa stoją w jednym rzędzie, ale w każdym rzędzie są co najmniej 3 drzewa?

I choć odpowiedź wydawała się oczywista – nie (oczywiście rozpatrujemy tylko sady ze skończoną liczbą drzew), to ładny dowód został podany dopiero 60 lat temu. Przedstawił go Theodore MOTZKIN. Oto ten dowód.

Przypuśćmy, że jest sad mający skończoną liczbę drzew, które nie wszystkie stoją w jednym rzędzie, ale na każdej prostej wyznaczonej przez dwa drzewa rośnie jeszcze co najmniej jedno drzewo. Dla każdego drzewa wybierzmy ten rząd drzew, do którego ono nie należy, ale do którego ma najbliższą (jeśli jest takich kilka, to wybierzmy któryś z nich). Teraz wśród wybranych par (drzewo, rząd) wybierzmy tę, dla której odległość ta jest najmniejsza. Niech parą tą będzie (P, k) . Oznaczmy przez Q rzut P na k . Zgodnie z naszym przypuszczeniem na k są co najmniej trzy punkty, zatem co najmniej dwa z nich leżą po jednej stronie punktu Q (zakładamy, że każda ze stron zaczyna się od punktu Q) – oznaczmy je kolejno K i L (rysunek 3). Wtedy wysokość QR w trójkącie prostokątnym PQL jest krótsza od PQ . Na dodatek $KM \leq QR$. Zatem odległość punktu K od prostej PL jest mniejsza od odległości P od k , która miała być najmniejsza – otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Powstało więc pytanie, ile co najmniej jest takich „dwudrzewnych” rzędów w sadzie złożonym z n drzew. Motzkin udowodnił (1951), że więcej niż $\sqrt{2n} - 2$, L.M. Kelly i W.O.J. Moser wykazali (1958), że jest ich co najmniej $\frac{3n}{7}$ i że tego już poprawić się nie da, co widać na rysunku 4.

* * *

Problem Pascala można rozwiązać też w inny sposób (rys. 5). Ale jak się przekonać, że ten sposób jest inny? Ponumerujemy punkty w obu obrazkach ilustrujących problem dziewięciu drzew (rys. 6).

Jeżeli ustalimy na każdym z nich punkty 1, 2, 3, 4, 5, 6, to na obrazku z lewej możemy punkt 7 dobrać prawie dowolnie na prostej 56 i dokończyć rysunek. Natomiast na obrazku z prawej poruszenie punktu 7 nie pozwoli rysunku dokończyć. Zatem rysunki te są rzeczywiście różne, a nie tylko inaczej narysowane.

W geometriach dyskretnych wielokąt \mathcal{B} nazywamy *wpisany* w wielokąt \mathcal{A} , jeśli ma on wierzchołki na prostych zawierających boki wielokąta \mathcal{A} .

Na obu rysunkach trójkąt 123 jest wpisany w trójkąt 789, ten z kolei jest wpisany w trójkąt 456, a ten – o dziwo – w trójkąt 123.

No, a czy można znaleźć takie trójkąty \mathcal{A} i \mathcal{B} , by \mathcal{A} był wpisany w \mathcal{B} , a \mathcal{B} w \mathcal{A} ?

Okazuje się, że nie.

Ale dla pięciokątów jest to już możliwe, co więcej, takie pięciokąty są już na tych stronach narysowane. Kto nie umie ich odszukać, niech poszuka na innych stronach.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Na początku było...

Pytanie o początek (i koniec, oczywiście) każdego zjawiska, które poznajemy, jest szczególnie frapujące. Mogą to być sprawy błahe (kiedy i dlaczego zainteresowałaś się muzyką reggae? kiedy i dlaczego przestałaś się spotykać z tą dziewczyną?), ale mogą dotyczyć spraw zasadniczych, o czym mówi Ewangelia wg Jana.

W miarę rozwoju nauki wzrasta wiedza o końcach i początkach. Ważny naprawdę początek to „Wielki Wybuch”. Nazwa bardzo obrazowa, przemawiająca do laików, takich jak ja, która zawsze starała się dopytać specjalistów, co było w czasie zerowym, a może także, czy było coś przed WW (por. wyżej cytowane słowa Św. Jana). A oni mówią, że matematyka nie jest jeszcze gotowa do odpowiedzi na to pytanie. W dodatku, jeżeli rzeczywiście z innych doświadczeń, o których ostatnio głośno, okaże się, że istnieją cząstki szybsze od światła, to już wszyscy uczeni będą mieli wielki kłopot.

Ostatnio, analizując wyniki uzyskane przez teleskopy zainstalowane na Hawajach, udało się znaleźć pozostałości pierwotnego gazu, niezanieczyszczonego materiałem gwiazdowym, obserwowanego 2 miliardy lat po WW. Po raz pierwszy uzyskano możliwość bezpośredniego potwierdzenia mechanizmu pierwotnej nukleosyntezy. Obserwowany stosunek liczby atomów deuteru i wodoru oraz brak ciężkich pierwiastków świetnie pasował do hipotez o składzie pierwotnego gazu wynikających z teorii WW.

A teraz o zupełnie innych początkach. Dotyczą one problemu zasiedlenia przez ludzi kontynentu Ameryki Północnej.

Badanie takich początków łączy się także z ulepszeniem metodyki badań, w szczególności zwiększenia czułości metod i konstrukcją nowych narzędzi badawczych. Niedawno o istnieniu około milion lat temu trzeciego gatunku człowieka – obok *H. sapiens* i człowieka z Neandertalu – (to inna skala czasowa niż wspomniana uprzednio) wywnioskowano ze znalezionej w syberyjskiej jaskini małej kosteczki dłoni. A dla Amerykanów sensacyjnym odkryciem (znów zmieniamy skalę) okazała się kość żebra mastodonta, w której utkwiał koniuszek strzały (też z kości innego mastodonta) wystrzelonej przez człowieka. Oba wykopaliska z regionu północno-zachodniego wybrzeża Ameryki zbadano najnowszymi technikami datowania radioaktywnym węglem i sekwencjonowania DNA. Mastodont przewrócił się na ten bok, w którym utkwiała strzała i myśliwi z tej części zdobyczy nie mogli skorzystać. Poszli sobie dalej, obrobiwszy dostępny bok giganta. Niby nic nadzwyczajnego, tyle tylko, że i mastodont, i strzała lokalizują w czasie to udane polowanie na 13 800 lat temu, czyli na 1000 lat wcześniej niż dotychczas przyjmowany okres zasiedlenia Ameryki Płn. przez ludzi kultury Clovis. Ślady tych ostatnich znajdowano głównie na dzisiejszych terenach Stanów Zjednoczonych, ale także w Meksyku oraz Ameryce Środkowej.

Zarówno ludzie Clovis, jak i nowo identyfikowani, starsi od nich o 1000 lat, zostawiali po sobie ogromne cmentarzyska upolowanych wielkich ssaków, razem z pozostałościami broni myśliwskiej. I ci wcześniejsi, i ludzie Clovis wytępiłi potem skutecznie mastodonty i mamuty w tamtym regionie. Kultura Clovis trwała tylko 500–800 lat i nie ma uznawanej powszechnie hipotezy, dlaczego tak krótko. Może zjedli całe dostępne mięso?

Amerykańscy Indianie uważają ludzi Clovis za swoich bezpośrednich przodków i starają się uniemożliwić badania miejsc ich pochówków.

Oczywiście, nie trzeba dodawać, że wielu antropologów, fizyków i chemików znajduje słabe punkty w tej historii dwiema kośćmi opisaną. Ja jednak wolę wizję dzielnych ludzi przepływających się przez teren, który dziś nazywamy morzem Beringa, zdobywających nowy ląd, płynących wzdłuż brzegu Pacyfiku ku cieplejszemu światu. Widocznie tyle jest jeszcze we mnie dziecka, które lubi legendy!

Magdalena FIKUS



Rozwiązanie zadania F 806.

Po nawinięciu grubszej taśmy będzie ona zajmować powierzchnię o polu $S_1 = \pi(r_k^2 - r_0^2) = 8\pi r_0^2$. Zatem długość nawiniętej taśmy będzie równa $l = S_1/d = 8\pi r_0^2/d$, gdzie d jest grubością taśmy.

Po nawinięciu cieńszej taśmy będzie ona zajmować powierzchnię o polu $S_2 = \pi(r_x^2 - r_0^2)$, a jej długość wyniesie $l = 2\pi(r_x^2 - r_0^2)/d$. Ponieważ długości taśm są jednakowe, to z porównania wzorów na nie wynika, że $r_x^2 - r_0^2 = 4\pi r_0^2$. Stąd $r_x = r_0\sqrt{5}$.

Liczba obrotów szpulki w pierwszym i drugim przypadku jest równa:

$$N_1 = (r_k - r_0)/d = 2r_0/d,$$

$$N_2 = (r_x - r_0)/(d/2) = 2(\sqrt{5} - 1)r_0/d.$$

Prędkość kątowna jest stała, zatem

$$t_2 = (\sqrt{5} - 1)t_1.$$



Nasza tablica t to po prostu tablica z haszowaniem modularnym, stosująca metodę łańcuchową do rozwiązywania kolizji. Zauważmy, że używamy tutaj matematycznej definicji operacji modulo:

$$x \bmod n = x - n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor,$$

zatem $0 \leq x \bmod n < n$ nawet dla ujemnych wartości x . Nie jest to jednak definicja powszechnie obowiązująca w popularnych językach programowania.

Informatyczny kącik olimpijski (49): Monety

W tym miesiącu opiszemy zadanie *Monety*, które pojawiło się na Potyczkach Algorytmicznych w roku 2010. Dany jest ciąg n rzutów monetą. Należy sprawdzić, jaka jest najdłuższa seria kolejnych rzutów, w której wypadło dokładnie k razy więcej orłów niż reszek. Dla przykładu, w ciągu

RORROORROOORO

serie od piątego do dwunastego, jak również od szóstego do trzynastego rzutu zawierają dokładnie 6 orłów i 2 reszki. Zatem dla $k = 3$ odpowiedzią jest 8, gdyż nie istnieje żadna dłuższa seria zawierająca dokładnie 3 razy więcej orłów niż reszek.

Uprośćmy na chwilę nasze zadanie i powiedzmy, że chcemy znaleźć najdłuższą serię spełniającą warunki zadania, która zawiera pierwszy rzut. Użyjemy dwóch zmiennych r i o , oznaczających liczby reszek i orłów, które wypadły do tej pory. Za każdym razem, kiedy po rzucie wystąpi $k \cdot r - o = 0$, będzie to oznaczało, że znaleźliśmy dłuższą serię. Zauważmy jednak, że nie potrzebujemy aż dwóch zmiennych: nie interesuje nas dokładna liczba orłów i reszek, a jedynie ich wzajemne zbilansowanie. Możemy więc trzymać jeden licznik s , który po każdym rzucie będziemy uaktualniali następująco: wyrzucenie reszki zwiększa s o k , natomiast wyrzucenie orła zmniejsza s o 1. Oznaczmy przez s_i wartość licznika po i -tym rzucie (przyjmujemy też $s_0 = 0$). Teraz każde $s_i = 0$ odpowiada poprawnej serii kończącej się i -tym rzutem.

A co w ogólnym przypadku? Zastanówmy się, jaki warunek musi być spełniony, aby pewna seria spełniająca warunki zadania kończyła się i -tym rzutem monetą. Łatwo przekonać się, że jest tak wtedy, gdy istnieje taki rzut $j < i$, że wartość licznika po i -tym rzucie jest taka sama jak po j -tym rzucie ($s_i = s_j$) – wtedy rzuty od $(j + 1)$ -ego do i -tego tworzą poprawną serię. Chcielibyśmy zatem dla danego s szybko stwierdzać, jaki jest (o ile istnieje) najmniejszy numer rzutu j , dla którego $s_j = s$. Skorzystamy w tym celu z drzewa wyszukiwań binarnych, w którym dla klucza s będziemy trzymać odpowiadający mu numer rzutu. Teraz po i -tym rzucie, jeśli klucz s_i występuje w drzewie z wartością j , to zgłaszamy znalezienie serii o długości $i - j$. W przeciwnym przypadku uaktualnimy drzewo, wstawiając do niego klucz s_i z wartością i . Zauważmy, że jeśli w drzewie istniał już klucz s_i , to nie musieliśmy go uaktualniać, gdyż interesuje nas jedynie najmniejszy numer rzutu odpowiadający temu kluczowi. Każda operacja na drzewie zajmuje czas $O(\log n)$, zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n \log n)$.

Czytelnicy, którzy słyszeli o tablicach haszujących, mogą powiedzieć, że bez kłopotu uzyskalibyśmy rozwiązanie działające w oczekiwanym czasie $O(n)$, gdybyśmy zamiast drzewa wyszukiwań binarnych użyli właśnie tablicy haszującej. To prawda, ale okazuje się, że można jeszcze lepiej – wykorzystując specyfikę naszego zadania, można zaprojektować „tablicę haszującą”, która da nam rozwiązanie $O(n)$, i to w pesymistycznym przypadku!

Zamiast drzewa będziemy mieli tablicę $t[0..n - 1]$. Odwołania do klucza s będą realizowane przez komórkę $t[s \bmod n]$, w której będziemy trzymać listę par postaci (klucz s , numer rzutu). Innymi słowy, po i -tym rzucie sprawdzamy, czy na liście $t[s_i \bmod n]$ znajduje się para (s_i, j) dla pewnego j . Jeśli tak, to zgłaszamy znalezienie serii o długości $i - j$, a w przeciwnym przypadku uaktualnimy listę $t[s_i \bmod n]$, wstawiając do niej nową parę (s_i, i) .

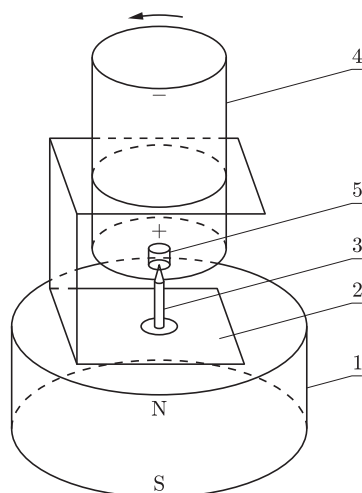
I teraz czas na kluczową obserwację. Załóżmy, że nastąpił drugi z powyższych przypadków. To oznacza, że na liście $t[s_i \bmod n]$ mogą znajdować się tylko pary (s', j) , gdzie $s' = s_i + an$ dla $a \neq 0$. Zauważmy jednak, że ilekroć nasz licznik osiągnął pewną wartość s , to w przyszłości już nigdy nie będzie równy $s - n$ lub mniejszy, ponieważ po każdym rzucie możemy go zmniejszyć co najwyżej o 1. Zatem na liście nie ma żadnej pary dla $a > 0$ (bo wtedy byłoby $s' \geq s_i + n$, co przeczy temu, że aktualna wartość licznika to s_i). Co więcej, skoro pary, które mogą pojawić się na liście, spełniają $s' \leq s_i - n$, to sytuacja, w której licznik byłby równy s' , nigdy już nie wystąpi. Tak więc przed dodaniem pary (s_i, i) do listy $t[s_i \bmod n]$ możemy z niej usunąć wszystkie występujące na niej pary. Widać zatem, że na żadnej liście nie będzie nigdy więcej niż jednej pary – stąd czas wyszukiwania na liście faktycznie będzie stały.

Tomasz IDZIASZEK



W silniku unipolarnym opisanym w poprzednim artykule elementem ruchomym był magnes neodymowy z przyciągniętym do niego gwoździem, natomiast okrągła bateria pozostawała nieruchoma. Teraz odwrócimy tę sytuację i zbudujemy silnik, w którym jedynym elementem ruchomym będzie bateria. Przed przystąpieniem do doświadczeń należy przygotować następujące przedmioty i materiały: duży magnes neodymowy o średnicy co najmniej 3 cm i wysokości 2 cm, stalowy gwoździec lub wkręt, okrągłą, niealkaliczną baterię typu R20, pinezkę, pasek cienkiej, nieferromagnetycznej blachy (miedzianej, mosiężnej albo aluminiowej o wymiarach 10×4 cm i grubości 0,5 mm) oraz mosiężny kapslesek od zużytej baterii płaskiej. Potrzebne będą również kombinerki, nożyczki o zaokrąglonych końcach, wkrętak, okrągły pilnik do metalu, młotek i cienki wodoodporny pisak. Przed przystąpieniem do doświadczeń należy obowiązkowo zapoznać się ze wskazówkami dotyczącymi bezpiecznego postępowania z magnesami neodymowymi, jakie zamieściliśmy w poprzednim artykule.

Z baterii usuwamy obudowę z blachy stalowej. Blachę odgina się za pomocą wkrętaka lub końca noża przy krawędziach, wzdłuż których jest ona złączona, i następnie ściąga kombinerkami. Należy zachować tu ostrożność, żeby nie skaleczyć się ostrą krawędzią blachy i nie powgniatąć cynkowego kubka oraz nie pokruszyć wystającego pręcika węglowego. Kubek cynkowy stanowi ujemny biegun baterii, a pręcik węglowy – dodatni. Dla zabezpieczenia się przed skaleczeniem najlepiej używać podczas tej pracy bawełnianych rękawiczek ochronnych. Bateria musi być niealkaliczna, ponieważ baterie alkaliczne nie mają cynkowego kubka, a rozgięcie blach obudowy spowoduje wyciek elektrolitu i zniszczenie baterii. Kolejnym etapem pracy będzie nałożenie na koniec wystającego pręcika węglowego mosiężnego kapselka, wyjętego ze zużytej baterii płaskiej. W środku kapselka należy wykonać niewielkie wgłębienie, np. przy użyciu ostrego końca gwoźdźcia, w którego łebek lekko uderzamy młotkiem. Jeżeli pręcik baterii R20 ma zbyt dużą średnicę, należy go nieco oskrobać przed nałożeniem kapselka. Kapslesek będzie stanowił łożysko oporowe silnika i zapewni jednocześnie przepływ prądu. W pobliżu końca paska nieferromagnetycznej blachy należy wykonać okrągły otwór o średnicy nieco większej niż średnica zewnętrzna cynkowego kubka baterii R20. Otwór ten najlepiej wyciąć zgrubnie nożyczkami z zaokrąglonymi końcami i wykończyć pilnikiem. Pasek blachy trzeba dwukrotnie zgiąć pod kątem prostym, żeby otrzymać wspornik w kształcie litery C, pokazany na rysunku. Wysokość pionowego ramienia tego wspornika nie powinna przekraczać 1 cm. W dolnym ramieniu wspornika trzeba jeszcze przebić ostrym końcem gwoźdźcia mały otworek, przez który zostanie wciśnięta od zewnątrz pinezka. Otworek ten powinien być wykonany pod środkiem otworu w górnym ramieniu wspornika.



Budowa silnika, w którym obraca się tylko bateria; 1 – magnes neodymowy, 2 – wspornik nieferromagnetyczny, 3 – pinezka, 4 – bateria okrągła, 5 – kapslesek mosiężny.

Po przygotowaniu opisanych elementów czas na doświadczenia z silnikiem. Na środku górnej, płaskiej powierzchni walcowego magnesu należy ustawić wspornik, a w jego otwór wsunąć od góry okrągłą baterię R20 bez stalowej obudowy. Dzięki ferromagnetycznej pinezce wspornik zostanie mocno przyciągnięty do magnesu. Koniec baterii z kapselkiem należy skierować w dół i oprzeć ją na ostrzu pinezki wchodzącym we wgłębienie kapselka. Co wtedy zauważymy? Okazuje się, że następuje powolny obrót baterii. W tym silniku prąd elektryczny płynie od kapselka, nałożonego na dodatni biegun baterii, przez pinezkę i dolne ramię wspornika, do jego ramienia pionowego i górnego oraz do powierzchni cynkowego kubka baterii. Wewnątrz baterii prąd płynie radialnie poprzez elektrolit od cynkowego kubka do pręcika węglowego. Elektrolit z prądem znajduje się w pionowym silnym polu magnetycznym. W tych warunkach na baterię działa siła elektrodynamiczna, skierowana poziomo i stycznie do baterii. Moment tej siły powoduje powolny obrót baterii wokół jej pionowej osi. W tym silniku łatwo możemy zmienić kierunek obrotów przez odwrócenie biegunów baterii lub magnesu.

Opisany tu silnik, ze względu na swoją prostotę i oryginalność konstrukcji, stanowi interesujący przykład wykorzystania praw elektromagnetyzmu. Ale to nie koniec możliwości konstrukcji niezwykłych silników unipolarnych. Więcej w następnym odcinku.

Powabne wyniki LHCb

Naruszenie kombinowanej symetrii przestrzenno-ładunkowej CP (ang. *charge-parity*), odkryte w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku w systemie neutralnych kaonów, czyli neutralnych mezonów (stanów związanych kwark-antykwarck) zawierających kwark dziwny, było sporym zaskoczeniem dla części środowiska naukowego. Później okazało się, że najprostsze wyjaśnienie tego zjawiska wymaga istnienia co najmniej trzech generacji kwarków, podczas gdy w chwili odkrycia jeszcze nie wiadomo o istnieniu kwarków, a hadronów, zawierających kwarki cięższe niż dziwny, jeszcze nie znano.

Bez naruszenia CP nie sposób jednak wyjaśnić przewagi materii nad antymaterią, a więc i naszego istnienia.

Badanie naruszenia CP oraz rzadkich rozpadów cząstek zawierających masywne kwarki *b* (ang. *beauty*, piękno) i *c* (ang. *charm*, powab) jest jednym ze sposobów na poszukiwanie efektów wykraczających poza Model Standardowy. Rozpady tych cząstek zachodzą nie tylko bezpośrednio, lecz także za pomocą wymiany wirtualnych cząstek, wśród których mogą znajdować się również takie, których jeszcze nie odkryliśmy. Mało tego, niektóre takie cząstki wręcz muszą brać udział w takich procesach, o ile tylko istnieją i nie są zbyt masywne. Dlatego badanie tych rzadkich procesów nakłada ograniczenia na parametry modeli wykraczających poza Model Standardowy.

W tej dziedzinie dominującą rolę zaczyna odgrywać eksperyment LHCb. Jest on jednym z czterech głównych eksperymentów przy LHC, ale wygląda i działa inaczej niż pozostałe. Jego detektor nie otacza punktu oddziaływania jak najszczelniej, tylko tworzy jednoramienny spektrometr. Nie tylko jego akceptacja geometryczna jest więc wielokrotnie mniejsza, ale również częstość zderzeń nie jest maksymalna, tylko dobrana tak, by nie było zbyt wielu oddziaływań w pojedynczym przecięciu wiązek protonowych. Wiąże się to ze specyfiką rejestracji hadronów pięknych. Ich czas życia wystarcza do tego, żeby zmierzyć odległość między wierzchołkami produkcji i rozpadu. Zbyt dużo pierwotnych oddziaływań sprawę by tylko komplikowało.

Choć w LHCb zachodzi około rząd wielkości mniej oddziaływań proton-proton niż w ATLAS-ie czy CMS-ie, to liczba zarejestrowanych oddziaływań jest największa. Paradoks bierze się z wielkości przypadków (z ilości zapisywanych informacji). Przypadki LHCb są dużo mniejsze, więc eksperyment, mając do dyspozycji podobną przepustowość, może pozwolić sobie na dużo większą częstość ich zapisu.

Około jedna trzecia zapisywanych przypadków to rozpady cząstek powabnych. Przypadki te są trudniejsze do rozwikłania, bo hadrony powabne żyją krócej i są lżejsze, ale jest ich produkowanych więcej, co umożliwia bardziej selektywny wybór. Główną motywacją badania cząstek powabnych jest nadzieja na stwierdzenie naruszenia CP w sektorze powabnym.

O tak zwanym bezpośrednim łamaniu CP mówi się wtedy, gdy np. obserwuje się różne prawdopodobieństwa rozpadu cząstki D i jej antycząstki \bar{D} do stanu o określonym CP.

Pomiar polega na wyznaczeniu tzw. asymetrii A zdefiniowanej jako iloraz różnicy przez sumę prawdopodobieństw przejścia raz cząstki, a raz antycząstki do tego samego stanu końcowego f .

$$A(D \rightarrow f) = \frac{P(D \rightarrow f) - P(\bar{D} \rightarrow f)}{P(D \rightarrow f) + P(\bar{D} \rightarrow f)}$$

W przypadku mezonów powabnych dobrym sposobem analizy [1] jest wyznaczenie różnicy asymetrii rozpadów D^0 (neutralny stan związany kwarków c i anty u) i anty \bar{D}^0 do stanu końcowego złożonego z różnych par naładowanych mezonów. Raz dziwnych K^+K^- (kaonów), a raz najbliższych $\pi^+\pi^-$ (pionów, zbudowanych tylko z kwarków pierwszej generacji).

$$\Delta = A(D^0 \rightarrow K^+K^-) - A(D^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)$$

W tak zdefiniowanej wielkości wkład do asymetrii, niezwiązane z bezpośrednim naruszeniem CP, wzajemnie się kasują.

Według Modelu Standardowego naruszenie CP w rozpadach D^0 jest możliwe, ale przewiduje się, że asymetria powinna być rzędu jednego promila. Zmierzenie jej wartości powyżej jednego procenta wskazywałoby na jakiś wkład od nowej fizyki.

Pomiar wymaga jeszcze jednego istotnego elementu. Trzeba umieć ustalić, jaki był stan początkowy. W tym celu wykorzystuje się fakt, że większość mezonów D^0 powstaje z rozpadu wzbudzonego stanu D^{*+} , a – odpowiednio – antymezonów \bar{D}^0 z rozpadu D^{*-} . W rozpadach tych, oprócz neutralnego mezonu (odpowiednio antymezonu) powabnego, produkowany jest naładowany pion, po którego znaku można poznać, czy powstał mezon D^0 , czy antymezon \bar{D}^0 . W końcu warto podkreślić decydujące znaczenie wyposażenia LHCb w detektory RICH, które, dzięki rejestracji promieniowania Czerenkowa, pozwalają na odróżnienie naładowanych kaonów od pionów.

Zmierzona różnica asymetrii wyniosła [1] $\Delta = (-0,82 \pm 0,24)\%$, co jest pierwszym wynikiem istotnie (choć w umiarkowanym stopniu) różnym od zera.

Niestety, wartość taka może być, choć z trudem, wyjaśniona w ramach Modelu Standardowego.

Nie potwierdzamy ani nie zaprzeczamy

Tak, moim zdaniem, należy rozumieć informację przekazaną przez eksperymenty ATLAS i CMS 13 grudnia 2011 roku [2].

Jeżeli poszukiwany bozon Higgsa istnieje w najprostszej postaci przewidzianej przez Model Standardowy, to powinien mieć masę między 115 a 127 GeV/c².

Zgodnie z zasadami logiki powyższe zdanie jest prawdziwe również wtedy, gdy taki obiekt w przyrodzie nie występuje.

Inna rzecz, że dokładnie tam się go spodziewamy (jeżeli istnieje) i to nie tylko wtedy, gdyby był standardowy.

Póki co: „piłka jest okrągła, a bramki są dwie”, co najwyżej ustaliliśmy boisko.

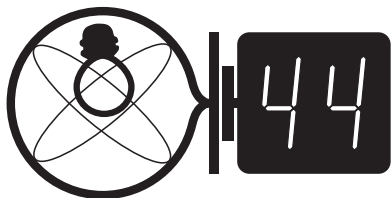
Piotr ZALEWSKI

[1] LHCb Collaboration, *Evidence for CP violation in time-integrated $D^0 \rightarrow h^- h^+$ decay rates*, <https://cdsweb.cern.ch/record/1404248/files/LHCb-PAPER-2011-023.pdf>

[2] <https://indico.cern.ch/conferenceDisplay.py?confId=164890>

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2012

Zadania z fizyki nr 532, 533

Redaguje Jerzy B. BROJAN

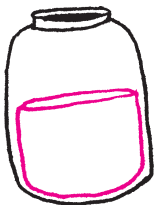
532. Ciężarek o masie m_1 wisiał na sprężynce o stałej sprężystości k i drgał z amplitudą A_1 . Z góry sypie się w tempie $\alpha = dm/dt$ cienki strumień piasku, który spada ze stałą prędkością v_p (stałą wskutek np. działania siły oporu powietrza). Piasek pada na ciężarek i przykleja się, dalej drgając razem z nim. Po czasie długim w porównaniu z okresem drgań masa ciężarka wraz z piaskiem wzrosła do wartości m_2 . Znaleźć końcową amplitudę drgań. Założyć, że prędkość ruchu ciężarka nie przekraczała prędkości spadku piasku.

533. Wodór H_2 znajduje się w temperaturze 300 K pod ciśnieniem 100 Pa w naczyniu o stałej objętości. Ile będzie wynosić ciśnienie w naczyniu, jeśli ogrzać wodór do temperatury $3 \cdot 10^6$ K?

Rozwiązania zadań z numeru 10/2011

Przypominamy treść zadań:

524. Kula o masie $m_1 = 2$ kg, poruszająca się z prędkością początkową $v_1 = 1$ m/s, zderzyła się centralnie i doskonale sprężysto z kulą o masie m_2 , początkowo spoczywającą. Druga kula zderzyła się w podobny sposób z trzecią kulą o masie m_3 , ta z kolei z czwartą, czwarta z piątą itd. aż do kuli o numerze 2011. Dana jest masa ostatniej kuli $m_{2011} = 1$ kg. Dobrać masy pośrednie tak, aby ostatnia kula uzyskała największą prędkość, przy ustalonych wartościach m_1, v_1 i m_{2011} . Ile wynosi ta największa prędkość? Pominąć efekty związane z obrotem kul.



525. Do naczynia nalano słonej wody, a na wierzch – wody czystej, tak że wysokość słupa wody wynosi $h = 30$ cm, a gęstość zmienia się liniowo z wysokością od $\rho_0 = 1$ g/cm³ przy powierzchni do $\rho_1 = 1,1$ g/cm³ przy dnie. W połowie głębokości naczynia pływa w stanie równowagi nurek Kartezjusza – niewielka próbówka ze szkła o gęstości $\rho_s = 3$ g/cm³, zawierająca pewną ilość powietrza i otwarta od dołu. Czy ten stan równowagi jest trwały ze względu na małe przesunięcia pionowe nurka? Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_a = 10^5$ Pa.

524. Gdy funkcja wielu zmiennych osiąga maksimum, jest to także jej maksimum jako funkcji każdej ze zmiennych oddzielnie (gdy pozostałe zmienne uważamy za stałe). Rozważmy więc trzy kule o numerach $i, i + 1$ oraz $i + 2$. Z zasad zachowania energii i pędu oraz warunku zerowej prędkości początkowej kul $i + 1$ i $i + 2$ wyprowadzamy standardowe wzory

$$v_{i+1} = \frac{2m_i v_i}{m_i + m_{i+1}}, \quad v_{i+2} = \frac{2m_{i+1} v_{i+1}}{m_{i+1} + m_{i+2}} = \frac{2m_i}{m_i + m_{i+1}} \frac{2m_{i+1}}{m_{i+1} + m_{i+2}} v_i.$$

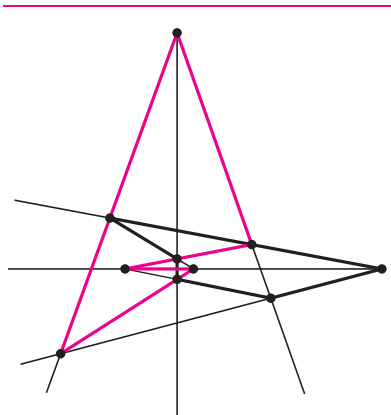
Należy wyznaczyć maksimum ostatniego wyrażenia ze względu na zmienną m_{i+1} . Nietrudno sprawdzić, że jest ono osiąmane dla $m_{i+1} = \sqrt{m_i m_{i+2}}$, tzn. masy powinny tworzyć ciąg geometryczny. Ilorazem tego ciągu jest $q = \sqrt[2010]{m_{2011}/m_1} = 0,999655$, natomiast prędkości tworzą ciąg o ilorazie $2/(1+q)$. Zatem

$$v_{2011} = v_1 \left(\frac{2}{1 + (1/2)^{1/2010}} \right)^{2010} = 1,4142 \text{ m/s.}$$

Dopiero na dalszych miejscach po przecinku wynik różni się od $\sqrt{2}$ m/s. Energia kinetyczna ostatniej kuli jest więc prawie dokładnie równa początkowej energii kinetycznej (po zderzeniach z kulą poprzednią i następną każda z kul pozostaje prawie nieruchoma).

525. Przemieszczenie nurka o mały odcinek dh w górę powoduje spadek siły wyporu o wielkość dF_1 wynikającą ze spadku gęstości wody

$$|dF_1| = (V + V_s)gd\rho,$$



Pięciokąty wzajemnie wpisane – patrz str. 13

gdzie V jest objętością powietrza w nurku, V_s – objętością szkła, a $d\rho = \frac{\rho_1 - \rho_0}{h}dh$.
Z drugiej strony, nastąpi wtedy wzrost siły wyporu o wielkość

$$dF_2 = \rho_{sr}g dV,$$

gdzie $\rho_{sr} = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1)$, a dV jest wzrostem objętości, będącym skutkiem spadku ciśnienia i rozprężenia powietrza w nurku. Warunkiem równowagi trwałej jest

$$|dF_1| > dF_2, \quad \text{czyli} \quad (V + V_s)g \frac{\rho_1 - \rho_0}{h}dh > \rho_{sr}g dV.$$

Wyznaczamy dV na podstawie prawa przemiany izotermicznej, gdyż powietrze w nurku jest niewiele i kontakt ze ściankami zapewnia stałość temperatury. Zatem $pdV + Vdp = 0$, albo

$$dV = V \frac{|dp|}{p_{sr}},$$

gdzie $|dp| = \rho_{sr}g dh$, a p_{sr} jest ciśnieniem w położeniu równowagi nurka, czyli sumą ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia górnej połowy słupa wody. Średnia gęstość wody w górnej połowie wynosi $\frac{1}{4}(3\rho_0 + \rho_1)$, zatem

$$p_{sr} = p_a + \frac{1}{4}(3\rho_0 + \rho_1)g \frac{1}{2}h.$$

W ostatnim kroku zauważamy, że z warunku równowagi, przy pominięciu masy powietrza w nurku, wynika równanie

$$\rho_{sr}(V + V_s) = \rho_s V_s.$$

Po przekształceniach dochodzimy do warunku równowagi trwałej w postaci

$$\frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_{sr}} \frac{\rho_1 - \rho_0}{h} > \frac{\rho_{sr}^2 g}{p_{sr}}.$$

Dla podanych wartości liczbowych warunek ten jest spełniony z dużym nadstatkiem (lewa strona jest prawie 5-krotnie większa od prawej).

* * *

Oto kilka uwag na temat rozwiązań nadesłanych przez naszych Czytelników.

Zadanie 511 [Przepływ cieczy lepkiej przez rurkę] (współczynnik trudności $WT = 1,60$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 4$). Zadanie okazało się ze strony redaktora Ligi złym pomysłem: czterech korespondentów (**M. Koźlik**, **A. Idzik**, **T. Wietecha** i **J. Witkowski**) przysłało dobre rozwiązania, ale wszyscy powołali się na „podręcznikowy” wzór Hagena–Poiseuille’a i jego standardowe wyprowadzenie. Dobre zadanie ligowe powinno natomiast wymagać od rozwiązujących przede wszystkim inwencji, a nie erudycji.

Zadanie 513 [Adiabatyczne sprężenie gazu, w którym unosi się bańka mydlana] ($WT = 3,15$, $LPR = 1$). Obok poprawnego (ale numerycznego i przez to niezbyt eleganckiego) rozwiązania **A. Idzika** należy wyróżnić rozwiązanie **A. Nowogrodzkiego**, odwołujące się do prostej argumentacji „... dla małego promienia bańki ciśnienie jest większe niż dla bańki o dużym promieniu. Przesuwając tłok, sprężamy gaz, średnica bańki zmaleje, a ciśnienie wewnątrz wzrośnie nieproporcjonalnie bardziej. Większy wzrost ciśnienia spowoduje większy wzrost temperatury...”. Chyba ocena tej pracy tylko na 0,4 była krzywdząca, prosimy o wybaczenie!

Zadanie 518 [Źródło dźwięku porusza się jednostajnie po prostej, badamy wykres częstotliwości rejestrowanej przez mikrofon położony z boku] ($WT = 3,05$, $LPR = 1$). Chociaż sześciu Czytelników przystąpiło do rozwiązania, tylko **A. Idzik** i **T. Wietecha** wzięli pod uwagę zasadniczy punkt – rozróżnienie czasów wysłania i odebrania sygnału. Z tej dwójki tylko p. Idzik doszedł do poprawnego wniosku.

Zadanie 520 [Małe drgania ciężarków wiszących na nici przełożonej przez blok ekscentryczny] ($WT = 1,83$, $LPR = 4$). Wyniki **T. Wietechy** i **M. Koźlika** okazały się prawidłowe, choć wyprowadzone przy dziwnym założeniu, że całość układu drgającego jest bryłą sztywną. Poza nimi dość dobre były jeszcze rozwiązania **J. Piotrowskiego** i **A. Idzika**.



Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 521 zadaniach

Tomasz Wietecha (Tarnów)	7–43,71
Jacek Piotrowski (Rzeszów)	1–38,72
Marian Lupieżowicz (Gliwice)	37,70
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2–33,19
Michał Koźlik (Gliwice)	1–28,33
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2–17,02
Ryszard Woźniak (Kraków)	16,47

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2009–2011 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 15 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

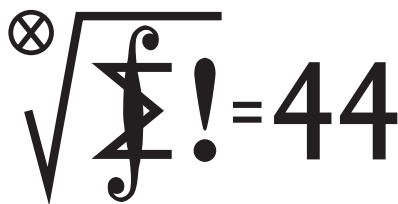
Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski,
A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (10),
T. Wietecha (7), J. Łazuka, M. Wójcicki,
J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, K. Magiera,
A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński,
Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza,
W. Kacprzak, K. Karcia, M. Koźlik,
M. Łącki, B. Mikielewicz, L. Motyka,
R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik,
R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast,
T. Tkocz, P. Wach.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2012

Zadania z matematyki nr 635, 636

Redaguje Marcin E. KUCZMA

635. Niech A, B, C, D, K będą pięcioma różnymi punktami, leżącymi na jednym okręgu. Odległości punktu K od prostych AB, BC, CD, DA wynoszą odpowiednio a, b, c, d . Znaleźć wzór algebraiczny, pozwalający wyznaczyć dowolną z liczb a, b, c, d , gdy znane są trzy pozostałe.

636. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykazać, że ciąg $(2^n x_n)$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

Zadanie 636 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2011

Przypominamy treść zadań:

627. W oienka tabeli prostokątnej o rozmiarach $n \times 2$ (n wierszy, 2 kolumny, $n > 2$) wpisujemy liczby od 1 do $2n$, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem każdego rozmieszczenia. Które z następujących zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

- (A) W dokładnie jednym wierszu znajdzie się para liczb różniących się o 1.
(B) W żadnym wierszu nie znajdzie się para liczb różniących się o 1.

628. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą zbiór wszystkich liczb wymiernych \mathbb{Q} na cały zbiór \mathbb{Q} . Czy stąd wynika, że funkcja f jest przedziałami liniowa (tzn. że \mathbb{R} jest sumą skończenie lub nieskończenie wielu przedziałów dodatniej długości, o rozłącznych wnętrzach, i w każdym z tych przedziałów f jest liniowa)?

627. Weźmy pod uwagę dowolne rozmieszczenie typu (B). Niech m będzie liczbą sąsiadującą w wierszu z liczbą 1; zatem $m \geq 3$. Wykonujemy następującą operację:

Każdą liczbę $k \in \{2, \dots, m-1\}$ zmniejszamy o 1, zaś jedynkę zastępujemy przez $m-1$; pozostałych liczb nie zmieniamy. (Na ilustracji przykładowe rozmieszczenie typu (B) dla $n=5$, w którym $m=7$, oraz nowe rozmieszczenie, powstałe w wyniku opisanej operacji).

$$\begin{array}{ccc} 5 & 8 & 4 & 8 \\ 10 & 6 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & \longrightarrow & 1 & 3 \\ 7 & 1 & & 7 & 6 \\ 9 & 3 & & 9 & 2 \end{array}$$

W nowym rozmieszczeniu widzimy wiersz, w którym sąsiadują ze sobą dwie liczby różniące się o 1, mianowicie $m-1$ i m . Jest to jedyny taki wiersz – bowiem w pozostałych wierszach moduł różnicy między oboma wyrazami albo się zwiększył, albo pozostał niezmienny. Uzyskaliśmy więc rozmieszczenie typu (A).

Zauważmy, że widząc uzyskane rozmieszczenie, jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć rozmieszczenie wyjściowe: mamy wiersz z liczbami $m-1$ i m ; trzeba zastąpić $m-1$ przez jedynkę, zaś każdą liczbę $j \in \{1, \dots, m-2\}$ trzeba zwiększyć o 1.

Opisana operacja określa zatem różnowartościową funkcję ze zbioru rozmieszczeń typu (B) do zbioru rozmieszczeń typu (A). Jednak *nie na cały* ów zbiór. Przecież rozmieszczenie typu (A) może mieć w jednym wierszu liczby 1, 2 (a w pozostałych wierszach pary liczb, różniących się więcej niż o 1). Natomiast opisana operacja produkuje rozmieszczenia z pojedynczymi wierszami postaci $[m-1, m]$ lub $[m, m-1]$, gdzie $m \geq 3$.

Wniosek: jest więcej rozmieszczeń typu (A); wylosowanie takiego rozmieszczenia jest bardziej prawdopodobne niż typu (B).

628. Nie wynika. Prosty kontrprzykład: określamy funkcję f najpierw w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ wzorem

$$f(x) = \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1 \quad \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Jest ona w tym przedziale ściśle rosnącą, ściśle wypukłą i odwzorowuje przedział $\langle 0; 1 \rangle$ na cały ten przedział; łatwo wyznaczyć funkcję odwrotną:

$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y} = 2 - \frac{2}{1+y} \quad \text{dla } y \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Widać, że jeżeli x, y są liczbami wymiernymi z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$, to $f(x), f^{-1}(y)$ też są liczbami wymiernymi z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Zatem obrazem zbioru $\mathbb{Q} \cap \langle 0; 1 \rangle$ jest ten sam zbiór.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
623 ($WT = 1,09$) i 624 ($WT = 2,27$)
z numeru 6/2011

Piotr Sobczak	44,68
Tomasz Warszawski	2-42,26
Paweł Kubit	4-40,94
Janusz Olszewski	12-40,27
Tomasz Tkocz	2-38,41
Zbigniew Skalik	1-37,25
Michał Miodek	35,88
Roksana Słowik	34,62
Zbigniew Sewartowski	1-31,04
Rami Marcin Ayoush	30,55
Jan Czardybon	30,48
Andrzej Daniluk	2-29,74
Andrzej Dorobisz	29,11
Adam Dzedzej	1-28,56
Jerzy Cisło	8-28,30
Paweł Łabędzki	26,92
Krzysztof Kamiński	1-25,94
Tomasz Kochanek	24,75
Witold Bednarek	5-24,70
Jerzy Witkowski	5-24,14
Tomasz Wietecha	8-23,80
Tomasz Czajka	23,20
Andrzej Idzik	1-22,68
Krzysztof Dorobisz	3-22,64
Michał Koźlik	22,17

Legenda (przykładowo): stan konta 8-23,80 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 23,80 punktu.

W tej kolejce 44 punkty przekroczył **Piotr Sobczak** – to nowe nazwisko w naszym Klubie.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2009, 2010 lub 2011.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (12), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (8), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. PeczarSKI, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (8), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (5), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Tkocz, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedziej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Lupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Rozszerzamy f do funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, przesuwając jej wykres o wektor $[1, 1]$ i jego całkowite wielokrotności. Formalnie: przyjmujemy

$$f(k+r) = k + f(r) \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z}, r \in (0; 1).$$

Tak rozszerzona funkcja f jest ściśle rosnąca; w każdym z przedziałów $(k; k+1)$ jest ściśle wypukła – więc nie jest liniowa w żadnym przedziale długości dodatniej. Wreszcie, jest jasne, że obrazem zbioru \mathbb{Q} jest cały zbiór \mathbb{Q} .

* * *

Początek tegorocznego omówienia ligi zadaniowej można by właściwie skopiować z omówienia zeszłorocznego: było kilka bardzo fajnych zadań – a najlepsze zadania pochodziły z propozycji uczestników ligi.

Na szczególną uwagę zasługuje niebanalna nierówność (616) oraz intrygująca konfiguracja geometryczna (618). W obu tych zadaniach – jak i w paru innych, włączonych do omówienia – to uczestnicy znajdowali najciekawsze rozwiązania, bardzo oryginalne i z reguły zgrabniejsze od proponowanych przez nas rozwiązań „firmowych”.

Jak co roku, przedstawiamy wybrane rozwiązania, w formie (z konieczności) bardzo skrótowej. Wszystkich Czytelników, którzy lubią tego typu zadania, mocno zachęcamy do uzupełnienia szczegółów w owych rozumowaniach i do ich starannego prześledzenia; one naprawdę na to zasługują.

Niebagatelny udział w ich dostarczaniu miał uczestnik, będący aktualnie niezagrażonym liderem zmagani ligowych – mający w dorobku dwanaście czterdziestoczworokrotnych rund. I nic nie wskazuje, by którakolwiek kolejna runda miała być już ostatnią!...

Zadanie 607 [$X = \{1, \dots, n\}$, $n > 3$; znaleźć $\max m : \exists A_1, \dots, A_m \subset X \forall i, j (i \neq j) : A_i \not\subset A_j, |A_i| \neq |A_j|$] (współczynnik trudności $WT = 2,59$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 8$). Odpowiedź: $\max m = n - 2$. Łatwo uzyskać oszacowanie $m \leq n - 2$, trudniej wykonać konstrukcję, realizującą równość. W prawie wszystkich pracach (R. M. Ayoush, T. Cieśla, J. Cisło, A. Jóźwik, T. Kochanek, P. Kumor, W. Nadara) była to indukcja względem n , jak w rozwiązaniu firmowym. Z jednym wyjątkiem (J. Olszewski) – metoda zaskakująca oryginalnością: $A_1 = \{1\}$, $A_{n-2} = \{3, 4, \dots, n\}$;

$$\text{dla } 1 < k \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor : A_k = \{2i : 1 \leq i \leq k-1\} \cup \{2k-1\};$$

$$\text{dla } \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor < k < n-2 : A_k = \{2i : 1 \leq i \leq n-2-k\} \cup \{j : 2n-1-2k \leq j \leq n\}$$

(aby zrozumieć, jak to działa, warto dla ilustracji wypisać sobie te zbiory dla kilku niewielkich wartości n). Wszystko się zgadza! (sprawdzenie zupełnie mechaniczne).

Zadanie 610 [$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$); $k \geq 0 \Rightarrow \forall n : a_n \not\equiv 0 \pmod{8k+5}$] ($WT = 3,03$; $LPR = 3$). Trzy dobre rozwiązania (T. Kochanek, J. Olszewski, J. Cisło) nie różniły się istotnie od rozwiązania firmowego (M. Kieza).

Zadanie 613 [Skończenie wiele okręgów na płaszczyźnie, każdy styczny zewnętrznie do pięciu innych] ($WT = 2,66$; $LPR = 10$ (13?)). Zadanie okazało się dobrze znane i łatwe do znalezienia w różnych publikacjach – z reguły z następującym rozwiązaniem: okręgi wpisane w ściany dwunastościanu foremego leżą na jednej sferze; każdy jest styczny do pięciu innych; rzut stereograficzny z dowolnego punktu sfery, położonego „na zewnątrz” wszystkich tych dwunastu okręgów, przenosi je na płaszczyznę.

Takie właśnie rozwiązanie znalazło się we wszystkich pracach, ocenionych maksymalnie. Nieco niższe oceny (z powodu luk w uzasadnieniach) otrzymały prace, w których rozumowanie nie wychodziło poza płaszczyznę (lokalizacja środków okręgów w punktach przecięcia różnych stożkowych bądź też ciągła deformacja pewnej konfiguracji wyjściowej, aż do osiągnięcia konfiguracji wymaganej); uzyskiwano różne liczby okręgów, niekoniecznie dwanaście.

Mniej niż 12 się nie da; zaś liczby 5 z treści zadania nie można zastąpić większą; takim komentarzem, z uzasadnieniem, opatrzyli swoje prace R. M. Ayoush oraz B. Romański.

$$\text{Zadanie 616 } [\forall x, y, z > 0 : \frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geq 6] (WT = 3,36;$$

$LPR = 5$). Tożsamość z rozwiązania firmowego znaleźli Paweł Najman oraz Janusz Olszewski, który podał jeszcze dwa inne dowody (!); oto ich skróty.

Drugi dowód: po przemnożeniu przez wspólny mianownik i przegrupowaniu dostajemy do udowodnienia, że $A_x + A_y + A_z \geq 0$, gdzie $A_x = (y-z)^2(y+z)(y+z-x)(x^2+yz)$ [A_y, A_z analogicznie]. Przyjmując $x \geq y \geq z$, mamy (nietrudno)

$$x^2(y^2+xz) \geq y^2(x^2+yz), \quad y^2(x-z)^2 \geq x^2(y-z)^2, \quad x+z \geq y+z, \quad x+z-y \geq x-y-z;$$

wymnożenie stronami daje (po skróceniu przez x^2y^2 i przekształceniu) nierówność $A_x + A_y \geq 0$; oczywiście $A_z \geq 0$; gotowe!

Trzeci dowód: stosując nierówność Cauchy'ego-Schwarza, mamy

$$\sum (x^2 + yz)(y + z)^2 \cdot \sum \frac{(y + z)^2}{x^2 + yz} \geq \left(\sum (y + z)^2 \right)^2$$

(sumy (x, y, z) -cykliczne); wystarczy więc dowieść, że

$$(1) \quad \left(\sum (y + z)^2 \right)^2 - 6 \sum (x^2 + yz)(y + z)^2 \geq 0$$

– a to prawda, bo lewa strona (1) da się zapisać jako $6R + 4S$, gdzie $R = \sum yz(y - z)^2 \geq 0$, $S = \sum x^2(x - y)(x - z) \geq 0$ (nierówność Schura).

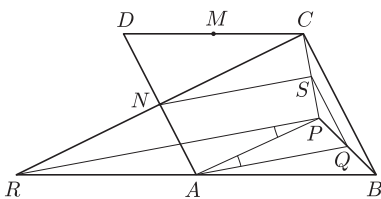
Bardzo oryginalne (niesymetryczne) przegrupowanie składników zadanej nierówności (po uprzednim pomnożeniu przez wspólny mianownik) wymyślił **Piotr Sobczak**, zapisując nierówność w postaci

$$(2) \quad p_1 p_2 p_3 p_4 + q_1 q_2 q_3 q_4 \geq 0,$$

gdzie $p_1 = 2x^2 - y^2 - z^2$, $p_2 = x - z$, $p_3 = x - y + z$, $p_4 = y^2 + xz$, zaś q_i powstaje z p_i przez zamianę $x \leftrightarrow y$. Przyjmując $x \geq y \geq z$, mamy wszystkie $p_i \geq 0$; ponadto $q_2, q_4 \geq 0$. Jeżeli teraz $q_1 q_3 \geq 0$, to (2) zachodzi. Pozostaje możliwość, że albo $q_1 < 0 < q_3$, albo $q_1 > 0 > q_3$. Nietrudno pokazać, że w pierwszym przypadku $p_1 \geq -q_1$, $p_2 \geq q_2$, $p_3 p_4 \geq q_3 q_4$, a w drugim $p_1 p_4 \geq q_1 q_4$, $p_2 p_3 \geq -q_2 q_3$; w każdym z tych przypadków wymnożenie napisanych nierówności prowadzi wprost do tezy (2).

Witold Bednarek także zauważył (korzystając z wypukłości funkcji $t \mapsto 1/t$), że wystarczy udowodnić nierówność (1). Zakładając, że $x \geq y \geq z$, i traktując y, z jako ustalone, wykazał, że lewa strona (1) jest niemalejącą funkcją zmiennej $x \in \langle y; \infty \rangle$ (analiza pochodnych pierwszego i drugiego rzędu). Teza (1) zachodzi dla $x = y$, więc i dla wszystkich $x \geq y$.

Jeszcze jedno rozwiązanie z użyciem pochodnych, bardziej uciążliwe rachunkowo, ale bezbłędne, przedstawił **Zbigniew Sewartowski**.



Zadanie 618 [Równoległobok $ABCD$; punkt P wewnątrz; M, N – środki CD, AD ; $|MP| = |MA|$; $|NP| = |NC|$; Q – środek $BP \Rightarrow |\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle PCQ|$] ($WT = 3,47$; $LPR = 3$). Cztery świetne dowody, zgrabniejsze niż firmy (nie kłóci się to z równością $LPR = 3$, bo dwa dowody są w pracy jednego uczestnika – zgadnijcie, kogo).

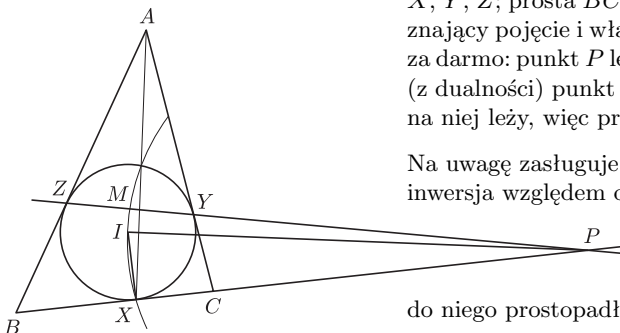
Jerzy Cisko i Janusz Olszewski rozumują tak: proste AB i CN przecinają się w punkcie R ; kąt CPR jest prosty (oparty na średnicy okręgu o środku N). Punkt A jest środkiem BR , więc $AQ \parallel RP$; stąd $|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle APR| = |\sphericalangle APC| - 90^\circ$. Analogicznie $|\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle APC| - 90^\circ$ (podobne to trochę do firmowego, ale jednak prostsze).

Marek Spychała i Janusz Olszewski (drugi sposób!) wprowadzają środek S odcinka CP , powstaje równoległobok $ANSQ$. Odcinek CP jest prostopadły do swojej symetralnej NS , więc i do prostej AQ . Analogicznie $AP \perp CQ$. Zatem P to ortocentrum trójkąta ACQ i teza gotowa.

Zadanie 619 [Szachownica $n \times n$ pokryta płytkami 2×2 ; liczba płytek $> 2(n^2 - n)/3 \Rightarrow$ można usunąć jedną płytkę, szachownica nadal będzie pokryta] ($WT = 2,65$; $LPR = 6$). Dobre rozwiązania (**R. M. Ayoush, J. Cisko, J. Fiett, T. Kochanek, M. Miodek, J. Olszewski**) w większości nie odbiegały od firmowego; jedno lub dwa były bardziej zawiłe.

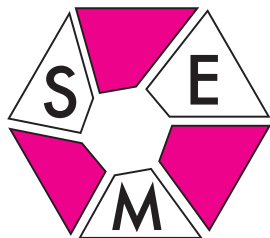
J. Olszewski wskazał ponadto możliwość wzmocnienia wyniku (przez bardziej staranne zliczanie krotności pokrycia pól szachownicy): dla $n \geq 7$ teza zachodzi już przy założeniu, że liczba płytek $> 4n^2/7$.

Zadanie 621 [$\triangle ABC$; okrąg wpisany (środek I) styczny do BC, CA, AB w punktach X, Y, Z ; prosta BC przecina YZ w $P \Rightarrow IP \perp AX$] ($WT = 3,00$; $LPR = 8$). Uczestnicy znający pojęcie i własności biegunowej (**R. M. Ayoush, J. Garnek**) mieli zadanie wręcz za darmo: punkt P leży na biegunowej (YZ) punktu A względem okręgu wpisanego, zatem (z dualności) punkt A leży na biegunowej punktu P względem tego okręgu. Punkt X też na niej leży, więc prosta AX jest ową biegunową – oczywiście prostopadłą do IP .



Na uwagę zasługuje też eleganckie rozwiązanie, które podał **Tomasz Kochanek**: inwersja względem okręgu wpisanego przekształca prostą AX na pewien okrąg, przechodzący przez punkt I (środek inwersji) i przez punkty X oraz M – środek odcinka YZ (obraz punktu A). Kąty IXP, IMP są proste, zatem odcinek IP jest średnicą tego okręgu – jest więc do niego prostopadły. Inwersja zachowuje prostopadłość; stąd $IP \perp AX$.

Inne dobre rozwiązania: **J. Cisko, J. Olszewski, T. Wietecha, P. Sobczak, P. Najman**.



Nowa formuła Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

W bieżącym roku szkolnym VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów została przeprowadzona w nowej, eksperymentalnej formule. Zawody stopnia pierwszego, odbywające się dotychczas wyłącznie w systemie korespondencyjnym, zostały rozbudowane o część testową, w której wzięło udział ponad 14 000 uczniów z 1270 szkół. Zmiana formuły przyniosła nie tylko duże zainteresowanie samym testem, lecz także wpłynęła znacząco na zwiększenie liczby uczestników z części korespondencyjnej, a więc na zainteresowanie OMG w stałej, wypracowanej formule. Nowe elementy OMG okazały się atrakcyjne nie tylko dla uczniów w Polsce: w zawodach OMG uczestniczyły trzy polskie szkoły z Wilna. Nowością był także udział Gimnazjum nr 68 z Krakowa, będącego częścią ośrodka szkolno-wychowawczego dla dzieci niewidomych i słabowidzących. Uczniowie tej placówki zmagali się z brajlowską wersją zadań testowych.

Test składał się z 15 zadań zamkniętych i sprawdzał przede wszystkim predyspozycje ucznia w kierunku umiejętności logicznego wyciągania wniosków i posługiwania się podstawowymi pojęciami matematycznymi. Każde zadanie testowe składało się z trzech stwierdzeń, a uczeń miał podać jedynie odpowiedź, czy dane stwierdzenie jest prawdziwe. Jeśli uczestnik udzielił trzech poprawnych odpowiedzi w obrębie jednego zadania, otrzymywał 1 punkt, dwie poprawne odpowiedzi były warte 1/2 punktu. W pozostałych przypadkach uczeń nie otrzymywał punktów. Nieudzielenie odpowiedzi było traktowane jak udzielenie odpowiedzi błędnej.

Taki sposób przyznawania punktów stał się pretekstem do stosowania różnych strategii. Jedno z zadań testu brzmiało:

4. Towar X podrożał o 20%, a towar Y podrożał o 50%, w efekcie czego oba towary kosztują tyle samo. Wynika z tego, że przed podwyżką

- a) towar X był o 20% droższy od towaru Y ;
- b) towar X był o 25% droższy od towaru Y ;
- c) towar X był o 30% droższy od towaru Y .

W zadaniu tym, oczywiście, co najwyżej jedna odpowiedź jest poprawna. Nie mając pojęcia która, można strzelać — w dobrą odpowiedź trafimy wtedy z prawdopodobieństwem 1/3 (zakładając jednak, że układający test nie byli złośliwi i nie podali trzech błędnych wyników). Zatem lepsza w takiej sytuacji wydaje się strategia deterministyczna: zaznaczenie wszystkich odpowiedzi jako „Nie” gwarantuje otrzymanie co najmniej 1/2 punktu.

Nietrudno obliczyć, że wartość oczekiwana sumy uzyskanych punktów w teście równa się niecałe 5 punktów.

Średnia uzyskanych ocen w całym kraju wyniosła 6,2 punktów. Oznacza to, że test był dość trudny.

Najmniej poprawnych odpowiedzi (niecałe 24%) padło w podpunkcie b) następującego zadania:

11. Prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i żaden z punktów A, B, C, D nie leży na brzegu tego kwadratu. Wynika z tego, że

- a) $AB \cdot BC < 1$;
- b) $AB < 1$;
- c) $AC < \sqrt{2}$.

Z kolei w następującym zadaniu najmniej uczestników, bo niespełna 8%, otrzymało 1 punkt. W zadaniu tym także najwięcej uczniów (ponad 70%) uzyskało 0 punktów.

14. Liczba $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ jest

- a) całkowita;
- b) niewymierna;
- c) dodatnia.

Podczas gdy większość uczestników starała się uzyskać jak najwięcej punktów, nie brakowało też takich, którzy chcieli zdobyć ich jak najmniej. Jeden uczeń, który nie znosi zadań zamkniętych, chwalił się na Facebook'owym profilu OMG, że w ramach protestu odpowiadał na wszystkie pytania odwrotnie: tam, gdzie miało być „Tak” pisał „Nie” i na odwrót. Miało mu to zapewnić uzyskanie 0 punktów, przy jednoczesnym udzieleniu odpowiedzi na wszystkie pytania. Jednak nie do końca mu się ta sztuka udała. Przez nieuwagę dostał 1 punkt (dwa razy po 1/2 punktu). Sześciu innych zawodników było lepszych od niego w tej rywalizacji: pięciu otrzymało 1/2 punktu, a tylko jednej osobie udało się uzyskać 0 punktów, podając odpowiedzi do wszystkich pytań!

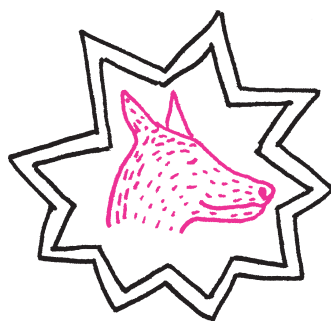
Na szczególne wyróżnienie zasługują jednak osoby, które uzyskały maksymalną liczbę punktów. Na ponad 14 000 było ich zaledwie 10. Są to:

Dominika BAKALARZ, Anna CZERWIŃSKA, Ewa ZIELIŃSKA, Tomasz KLEINER, Michał MADEJA, Jan MIRKIEWICZ, Konrad MAJEWSKI, Cyprian MATA CZYŃSKI, Piotr PAWLAK i Patryk SZCZEPAŃSKI.

Serdecznie gratulujemy i życzymy powodzenia na kolejnych etapach!

Waldemar POMPE

Luty



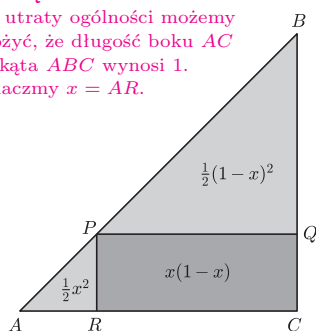
Zima w pełni, a długie noce zachęcają do obserwacji. Tuż po zachodzie Słońca możemy zobaczyć na południu, na granicy gwiazdozbiorów Barana, Ryb i Wieloryba, bardzo jasnego ($-2,3$ mag) Jowisza. Zachodzić będzie przed północą i z każdym dniem coraz wcześniej. Także Wenus ($-4,1$ mag) i Urana ($+5,9$ mag) mamy możliwość obserwować tuż po zachodzie nad południowo-zachodnim horyzontem. Obie planety zachodzić będą w pierwszej połowie nocy. Druga połowa nocy należeć będzie do dosyć jasnego ($-0,7$ mag) Marsa wschodzącego na wschodzie w Pannie oraz do leżącego niedaleko od niego Saturna ($+0,6$ mag). Obie planety będą z upływem dni wschodzić coraz wcześniej, by pod koniec miesiąca być widoczne przez całą noc. Neptuna i Merkurego nie zobaczymy na nocnym niebie.

Jeśli spojrzymy na południowy wschód wzdłuż pasa Oriona, wówczas zobaczymy Wielkiego Psa i znajdującego się w nim Syriusza, nazywanego Psią Gwiazdą. Przy swej jasności obserwowanej $-1,47$ mag jest on najjaśniejszą gwiazdą nocnego nieba. Nic dziwnego – Syriusz jest odległy od Ziemi zaledwie o 8,6 roku świetlnego (2,6 pc). Oglądać go można na niemal całej Ziemi, z wyjątkiem obszarów położonych na północ od równoleżnika 73°N . Wraz z Procyonem (α CMi) i Betelgezą (Betelgeuse, α Ori) tworzy Trójkąt Zimowy. Oglądany gołym okiem bądź przez lornetkę wygląda jak gwiazda pojedyncza, ale w rzeczywistości jest to układ podwójny złożony z karła ciągu głównego typu A1 (Syriusz A) i białego karła typu DA2 (Syriusz B). Odległość składników wynosi 20 jednostek astronomicznych ($3 \cdot 10^9$ km). Syriusz B obiega Syriusza A w ciągu 50,1 roku po orbicie o dużym mimośrodku. W 1994 roku znajdował się w minimalnej odległości od składnika głównego (był w peryastronie), kiedy to kątowa separacja składników wynosiła tylko $3''$. Od tego czasu odległość między nimi rośnie, a więc i łatwiej jest obserwować znajdującego się poza zasięgiem nieuzbrojonego oka Syriusza B ($+8,3$ mag). Syriusz B jest drugim odkrytym białym karłem, po 40 Eridani. W 1862 roku Alvan G. Clark rozseparował składniki Syriusza, który zgodnie z sugestiami Friedricha Bessela z 1844 roku, miał być gwiazdą podwójną. Z kolei w 1915 roku Walter S. Adams zaobserwował widmo Syriusza B. Na tej podstawie oszacowano jego temperaturę na około 25 000 K, podczas gdy Syriusz A jest o wiele chłodniejszy (około 9 000 K). Syriusz B powinien być więc dużo jaśniejszy, niż go obserwowano, w szczególności jaśniejszy od Syriusza A. Jedynym rozwiązaniem problemu było założenie, że jego promień jest kilkaset razy mniejszy niż promień „zwykłej” gwiazdy. Te przypuszczenia zostały potwierdzone w 2005 roku, kiedy to za pomocą Kosmicznego Teleskopu Hubble’a udało się zmierzyć średnicę Syriusza B; otrzymano wynik około 12 000 km, czyli troszkę mniej niż średnica Ziemi. Tak mała gwiazda ma jednak masę niemal równą masie Słońca, co oznacza, że musi być niezwykle gęsta (jeden centymetr sześcienny tej materii ważyłby na Ziemi prawie tonę!).



Rozwiązanie zadania M 1340.

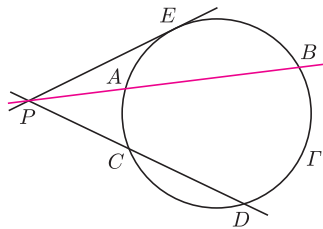
Bez utraty ogólności możemy założyć, że długość boku AC trójkąta ABC wynosi 1. Oznaczmy $x = AR$.



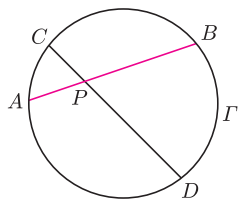
Wówczas trzeba wykazać, że któraś z liczb $[ARP] = \frac{1}{2}x^2$, $[PQB] = \frac{1}{2}(1-x)^2$, $[PRCQ] = x(1-x)$ jest niemniejsza od $\frac{1}{9} \cdot [ABC] = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$. Gdyby liczby $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}(1-x)^2$ były mniejsze od $\frac{2}{9}$, to byłoby $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Ale wówczas $x(1-x) > \frac{2}{9}$.

Pełnia Księżyca przypada 7 II, a now 21 II. W lutym będziemy mogli obserwować serię koniunkcji: Wenus i Uran zbliżą się na odległość $18'$ (10 II), Wenus i Księżyc na $3^\circ 7'$ (25 II) oraz Jowisz i Księżyc na $3^\circ 43'$. W lutym też swoje maksima ma pięć rojów meteorów (Delta Velidy, Alfa Centaurydy, Omikron Centaurydy, Theta Centaurydy i Lutowe Leonidy), z czego tylko Lutowe Leonidy mają średnią aktywność, lecz wytrzymały obserwator zawsze może liczyć na jakąś „spadającą gwiazdę”. Zatem czystego nieba.

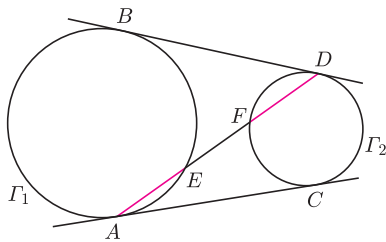
Agnieszka MAJCZYNA



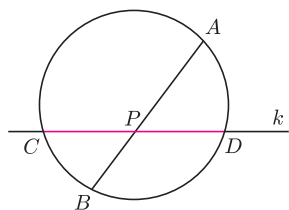
Rys. 1. $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$



Rys. 2. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

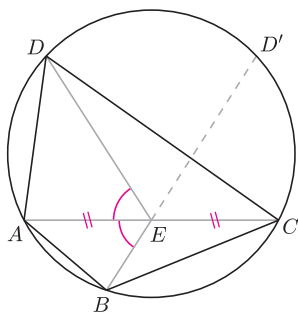


Rys. 3



Rys. 4

Jak skonstruować $\sqrt{PA \cdot PB}$?



Rys. 5

Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg Γ w punktach A i B (rys. 1 i 2). Wówczas wartość iloczynu $PA \cdot PB$ nie zależy od wyboru prostej.

Istotnie, w sytuacji z rysunku 1 mamy $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC$, więc $\triangle PDA \sim \triangle PBC$. Stąd $PA/PD = PC/PB$, czyli rzeczywiście $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Podobnie dla prostej stycznej do okręgu, $\sphericalangle PEA = \sphericalangle PBE$, więc $\triangle PEA \sim \triangle PBE$. Stąd $PA/PE = PE/PB$, czyli także w tym przypadku $PA \cdot PB = PE^2$.

Dowód, że $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ w sytuacji z rysunku 2 przebiega analogicznie. \square

Wobec powyższego, *potęgę punktu P względem okręgu Γ* określamy następująco: $\text{Pot}(P, \Gamma) = PA \cdot PB$ dla P na zewnątrz Γ , $\text{Pot}(P, \Gamma) = -PA \cdot PB$ dla P wewnątrz Γ oraz $\text{Pot}(P, \Gamma) = 0$ dla P na okręgu Γ .

1. Sprawdź, że jeśli $\Gamma = \mathcal{O}(O, r)$, to $\text{Pot}(P, \Gamma) = PO^2 - r^2$.

2. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P , przy czym $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Wykaż, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu (rys. 2).

Uwaga. Podobny fakt można udowodnić dla sytuacji z rysunku 1.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokość z wierzchołka A przecina okrąg o średnicy BC w punktach K i L , a wysokość z wierzchołka B przecina okrąg o średnicy AC w punktach M i N . Wykaż, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

4. Punkty P, A, B leżą w tej kolejności na prostej, punkt E – poza nią. Wykaż, że jeśli $PA \cdot PB = PE^2$, to prosta PE jest styczna do okręgu opisanego na $\triangle ABE$ (rys. 1).

5. Punkty P, A, B leżą w tej kolejności na prostej. Wyznacz zbiór punktów styczności prostych przechodzących przez P do okręgów przechodzących przez A i B .

6. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są rozłączne zewnętrznie. Wspólne styczne, nierozdzielające ich, są styczne do Γ_1 w punktach A i B , a do Γ_2 – odpowiednio w C i D (rys. 3). Odcinek AD przecina okręgi Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w E i F . Wykaż, że $AE = DF$.

7. Punkty A i B leżą po różnych stronach prostej k . Skonstruuj taki okrąg, przechodzący przez punkty A i B , aby długość jego cięciwy CD wyznaczonej przez prostą k była minimalna.

8. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest środkiem cięciwy AC oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. Wykaż, że $BE \cdot DE = AE^2$.

9. Na kartce narysowano łuk okręgu, którego środek jest poza kartką, oraz punkt P na zewnątrz tego okręgu. Skonstruuj punkty styczności okręgu z prostymi przechodzącymi przez P wiedząc, że punkty te mieszczą się na kartce.

Rozwiązania niektórych zadań

R2. Niech okrąg Γ opisany na trójkącie ABC przecina prostą CP w drugim punkcie D' . Wtedy $-\text{Pot}(P, \Gamma) = PC \cdot PD' = PA \cdot PB = PC \cdot PD$, zatem $PD' = PD$. Oba punkty D, D' leżą na prostej CP po tej samej stronie P , więc $D = D'$. \square

R5. Niech E będzie jednym z rozważanych punktów styczności, wtedy $PE^2 = PA \cdot PB$. Takie punkty leżą więc na okręgu $\mathcal{O}(P, \sqrt{PA \cdot PB})$. Z kolei z zadania 4, każdy punkt z tego okręgu i spoza prostej AB należy do szukanego zbioru. \square

R6. Jako że $AC = DB$, to $AF \cdot AD = \text{Pot}(A, \Gamma_2) = AC^2 = DB^2 = \text{Pot}(D, \Gamma_1) = DE \cdot DA$. Stąd $AF = DE$, więc też $AE = AF - EF = DE - EF = DF$. \square

Wskazówka 7. Niech P będzie punktem przecięcia prostej k i odcinka AB (rys. 4). Wartość $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ nie zależy od wyboru okręgu. Z nierówności średnich $CD = PC + PD \geq 2\sqrt{PC \cdot PD}$ i równość zachodzi (czyli długość CD jest minimalna), gdy $PC = PD$. Jak skonstruować taki okrąg?

Wskazówka 8. Niech D' będzie drugim punktem przecięcia prostej BE i okręgu (rys. 5). Wtedy $\sphericalangle CED' = \sphericalangle AED$ oraz $D'E = DE$ (dlaczego?).

Wskazówka 9. Narysuj prostą przez P , przecinającą dany łuk w dwóch punktach.

Pojęcie potęgi punktu, choć bardzo przydatne, jest tylko prostym wnioskiem z podobieństwa trójkątów. Okazuje się jednak, że pojęcie to prowadzi do ciekawych, trudniejszych twierdzeń – o tym w następnym *deltoidzie*.