






## SPIS TREŚCI NUMERU 6 (481)

Misja BRITE <i>Radosław Smolec</i>	str. 1
Gra Grim i twierdzenie Sprague'a–Grundy'ego <i>Martha Łącka, Mateusz Łącki</i>	str. 4
Gotowanie w kwantowej lodówce <i>Michał Krych</i>	str. 6
Fantazje i facecje naszych dziadków: teoria wydrążonej Ziemi <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 8
Pod prąd <i>Piotr Zalewski</i>	str.10
<b>Wyniki Olimpiad</b>	str.11
 W lustrzanym świecie cząsteczek <i>Magdalena Fikus</i>	str.15
 Ze świata USOS. Część 9 – USOS w badaniach socjologicznych <i>Mikołaj Jasiński, Tomasz Zajac</i>	str.16
 Laserowe gilosze <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
 Zadania	str.19
Informacyjny kącik olimpijski (73): Trasowanie <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Ménage à trois	str.24
Niebo w czerwcu <i>Magda Otulakowska-Hypka</i>	str.24
 Połowa równoległoboku <i>Joanna Jaszńska</i>	str.25

Jakie to proste?



o tym w następnym numerze

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T<sub>E</sub>X oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–18<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

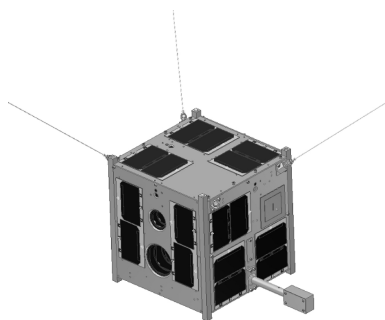
**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

# Misja BRITE

Radosław SMOLEC\*

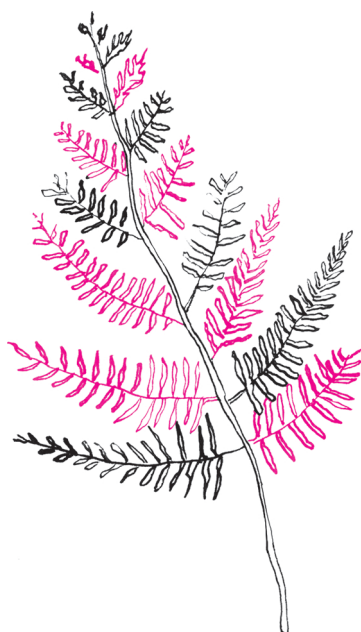


Schemat satelity Lem.  
Źródło: Centrum Badań Kosmicznych.

Parametry orbity satelitów BRITE:

okres obiegu	99,5 min
średnia wysokość	736,6 km
wysokość w perygeum	589,9 km
wysokość w apogeum	883,3 km
mimośród orbity	0,0206
nachylenie orbity	97,8°

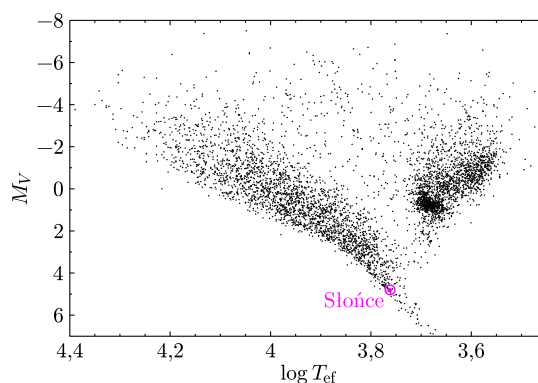
Pole widzenia Lema to aż 24°. Z łatwością pomieści całą konstelację Oriona, której najjaśniejsze gwiazdy są pierwszymi celami misji.



21 listopada 2013 roku rakieta nośna Dniepr umieściła na orbicie satelitę Lem. Jest to drugi polski satelita (pierwszym jest wystrzelony na początku 2012 roku PW-Sat) i pierwszy polski satelita naukowy. Lem dołączył do dwóch bliźniaczo podobnych austriackich satelitów znajdujących się na orbicie od lutego 2013 roku. Wkrótce dołączy do nich kolejny polski satelita Heweliusz oraz dwa kanadyjskie. Sześć bliźniaczych satelitów będzie realizować wspólny program badawczy, którego istota kryje się w akronimie BRITE – **BR**Ight **T**arget **E**xplorer – będą badały najjaśniejsze gwiazdy.

Lem należy do klasy nanosatelitów. Jest kostką o boku 20 cm ważącą niespełna 7 kg. Satelita został złożony w Centrum Badań Kosmicznych w Warszawie według projektu kanadyjskiego. Heweliusz, już gotowy do startu, zawiera więcej podzespołów polskiej konstrukcji, między innymi nieco zmodyfikowany teleskop. Warto podkreślić, że pomysłodawcą misji BRITE jest Polak, Sławomir Ruciński, astrofizyk od wielu lat pracujący w Kanadzie. Komunikacja z satelitą realizowana jest przez centrum kontroli lotu w Centrum Astronomicznym im. M. Kopernika w Warszawie.

Podstawowym narzędziem naukowym Lema jest teleskop o średnicy obiektywu zaledwie 3 cm, zaopatrzonego w filtr o barwie niebieskiej (obserwacje w zakresie 390–460 nm) oraz detektor CCD. Sprzęt, który pewnie wzbudziłby uśmiech politowania niejednego amatora obserwacji nocnego nieba, na orbicie ziemskiej staje się niezwykle cennym instrumentem. W obserwacjach naziemnych największym utrudnieniem są turbulentne ruchy powietrza, prowadzące do nieustannych zmian jasności i pozycji gwiazdy (tzw. migotanie gwiazd). Na orbicie problem nie istnieje i możliwe są precyzyjne pomiary jasności gwiazd (fotometria). Co ważne, będzie to fotometria dwubarwna, gdyż trzy satelity wyposażone są w filtr niebieski, a trzy w filtr czerwony (550–700 nm). Tak niewielki teleskop pozwoli na precyzyjne obserwacje jedynie najjaśniejszych gwiazd, jaśniejszych od około 4 mag. Jest ich mniej więcej 600. Możliwe też będą mniej precyzyjne obserwacje słabszych gwiazd do około 7 mag.



Gwiazdy BRITE na diagramie HR. Dane: Hipparcos/A. Pigulski

Co interesującego jest w tych kilkuset gwiazdach, które bez trudu dostrzegamy okiem nieuzbrojonym? Powyższy rysunek ilustruje położenie tych gwiazd na teoretycznym diagramie Hertzsprunga–Russella (HR), wykresie jasności absolutnej  $M_V$  w zależności od temperatury efektywnej  $T_{ef}$  w kelwinach. Na diagramie dostrzegamy dwa wyraźne zgrupowania. Wzdłuż przekątnej wykresu przebiega ciąg główny grupujący gwiazdy, w centrum których zachodzą reakcje jądrowe prowadzące do przemiany wodoru w hel (palenie wodoru). W zdecydowanej większości są to gwiazdy jaśniejsze od Słońca, a co za tym idzie, bardziej masywne (na ciągu głównym obowiązuje przybliżona zależność  $M \sim L^{3,5}$ , gdzie  $L$  to moc promieniowania). Druga grupa gwiazd (prawa część wykresu) to równie jasne, choć chłodniejsze czerwone olbrzymy palące hel w jądrze oraz ich ewolucyjne następczynie, gwiazdy asymptotycznej gałęzi olbrzymów (gwiazdy AGB), które po wyczerpaniu helu w centrum palą go w powłoce otaczającej węglowo-tlenowe jądro.

\*Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika w Warszawie



**Rozwiązanie zadania M 1425.**  
Pokażemy, że nie istnieje żądane kolorowanie liczb całkowitych, więc w szczególności nie da się pokolorować liczb rzeczywistych. (Jest to bardzo szczególny przypadek twierdzenia van der Waerdena o kolorowaniu.)

Załóżmy, że pokolorowaliśmy liczby całkowite nieujemne i liczba 6 jest biała. Jedną z liczb 8, 10, 12 też musi być biała. Nazwijmy ją  $x$ . Wówczas liczby  $2x - 6$  i  $2 \cdot 6 - x$  muszą być czarne. Zatem ich średnia  $3 + x/2$  musi być biała. Dostaliśmy więc trzy białe liczby  $6, x, 3 + x/2$ , co daje sprzeczność.



Gwiazdy AGB odpowiadają za wyprodukowanie niemal połowy węgla obecnego we Wszechświecie. Wyprodukowały też bogate w neutrony ciężkie pierwiastki, takie jak kadm czy ołów.



Oscylacje gwiazd są albo wymuszone przez turbulentne ruchy konwektywne w warstwach zewnętrznych (jak w dzwonku na wietrze), albo są samowzbudzone, gdy gwiazda pracuje jak silnik cieplny, magazynując ciepło w fazie maksymalnej kompresji.

Mod identyfikują trzy liczby:  $n$  – liczba powierzchni węzłowych wzdłuż promienia gwiazdy,  $l$  (stopień modu) – liczba linii węzłowych na powierzchni oraz  $m$  (rzęd modu) – liczba linii węzłowych przecinających równik. Powierzchnie i linie węzłowe składają się z punktów, w których amplituda fali stojącej jest równa zero.

Żeby zrozumieć ogromne znaczenie najjaśniejszych gwiazd, musimy cofnąć się w czasie o 13 miliardów lat, do początków Wszechświata. Według modelu standardowego w pierwszych minutach po Wielkim Wybuchu nastąpiła pierwotna nukleosynteza, w wyniku której powstały jądra helu i śladowe ilości najlżejszych pierwiastków. Ani śladu węgla, tlenu, krzemu, żelaza czy innych cięższych pierwiastków (astronomicznych „metali”), budujących Ziemię, nas czy przedmioty, które nas otaczają. Wszystkie cięższe pierwiastki powstały w gwiazdach, w wyniku zachodzących kolejno procesów syntezy lżejszych pierwiastków w cięższe.

W gwiazdach masywnych ( $M \gtrsim 8M_{\odot}$ ) procesy syntezy prowadzą do wytworzenia żelaznego jądra. Palenie żelaza wymaga dostarczenia energii z zewnątrz. Ciśnienie promieniowania i gazu w pozbawionej źródła energii jądrowej gwieździe nie jest w stanie zrównoważyć grawitacji. Następuje spadek materii na jądro gwiazdy, a następnie odrzucenie jej części w potężnym wybuchu. W trakcie takiej eksplozji supernowej powstają pierwiastki cięższe od żelaza. Eksplozja rozprasza je w przestrzeni razem z produktami gwiazdnej nukleosyntezy oraz inicjuje procesy gwiazdotwórcze w okolicznych, wzbogaconych w metale, obłokach materii międzygwiazdowej.

Żyjemy dzięki najmasywniejszym i najjaśniejszym gwiazdom. Im większa jasność gwiazdy, tym szybciej ona ewoluje. By wypalić centralne zapasy wodoru, gwiazda o masie Słońca potrzebuje 10 miliardów lat. Gwiazda dziesięciokrotnie masywniejsza potrzebuje na to zaledwie kilkunastu milionów lat. Od początku Wszechświata dziesiątki generacji najjaśniejszych i najmasywniejszych gwiazd pracowały, by wytworzyć materię budującą Układ Słoneczny.

Gwiazdy mniej masywne po opuszczeniu ciągu głównego i wypaleniu helu w centrum stają się gwiazdami AGB. Choć nigdy nie wybuchną jako supernowe, odgrywają równie ważną rolę we wzbogacaniu materii międzygwiazdowej w metale. Ciężkie pierwiastki powstają w nich w wyniku *procesu s* – wychwytu przez jądra atomów powolnych neutronów, które następnie przemieniają się w protony w wyniku rozpadu  $\beta^-$ . W zewnętrznych warstwach gwiazd AGB powstaje też pył pełniący ważną rolę w chłodzeniu ośrodka międzygwiazdowego – kluczowym procesie umożliwiającym jego fragmentację i tworzenie nowych gwiazd. Zewnętrzne warstwy gwiazd AGB są rozdmuchiwane przez silny wiatr gwiazdowy, a pod koniec życia odrzucane w przestrzeń jako piękna, lecz krótkotrwała mgławica planetarna.

Gwiazdy obserwowane przez BRITE, czyli masywne gwiazdy ciągu głównego oraz chłodne olbrzymy, są więc niezwykle ważne. Dominują one ekologię Wszechświata, są kluczowe w zrozumieniu obiegu materii w kosmosie. Tymczasem nasza wiedza o tych gwiazdach jest ciągle niepełna. Wynika to z niedoskonałości teorii budowy i ewolucji gwiazd, w szczególności niepewności w opisie konwekcji, mieszania materii wewnątrz gwiazd czy ich rotacji. Zbadanie tych procesów wymaga zajrzenia do wnętrza gwiazd, co potrafimy już zrobić! Podobnie jak sejsmologia pozwala nam poznać strukturę wnętrza Ziemi dzięki badaniu rozchodzenia się fal sejsmicznych, tak asterosejsmologia pozwala na zbadanie wnętrza gwiazd dzięki rozchodzącym się w nich falom dźwiękowym – oscylacjom gwiazd prowadzącym m.in. do zmian jasności.

O asterosejsmologii pisaliśmy obszernie w *Delcie* 6/2009, teraz jedynie krótkie przypomnienie. Oscylacje gwiazdy, przejawiające się zmianami jej kształtu, jasności i temperatury, mogą zachodzić w wielu różnych modach równocześnie. Geometrię modu określa liczba powierzchni węzłowych wewnątrz gwiazdy i liczba linii węzłowych na jej powierzchni (stopień modu). Częstotliwość modu określają warunki panujące wewnątrz gwiazdy wzdłuż trajektorii rozchodzenia się fali. Im niższy stopień modu, tym głębiej mod ten penetruje wnętrze gwiazdy. Konstruując model sejsmiczny gwiazdy, czyli próbując odtworzyć częstotliwości modów obserwowanych w danej gwieździe za pomocą modeli teoretycznych, badamy strukturę wewnętrzną gwiazdy oraz testujemy poprawność naszych modeli. Jest to istota asterosejsmologii.

By skonstruować dobry i wartościowy model sejsmiczny, mówiący nam jak najwięcej o gwieździe, potrzebujemy dobrych obserwacji: jak największej liczby modów, precyzyjnego zmierzenia ich częstotliwości i ich zidentyfikowania, czyli

Częstotliwość modu dla sferycznej nierotującej gwiazdy zależy tylko od  $n$  i  $\ell$ , nie zależy zaś od  $m$ . Rotacja znosi tę degenerację, rozszczepiając częstotliwość modu na  $2\ell + 1$  składników. Badając rozszczepienie dla modów o różnym  $\ell$ , badamy profil rotacji wewnątrz gwiazdy.



określenia geometrii (np. stopni modów). Częstotliwość można określić bardzo dokładnie, dysponując precyzyjną i pozbawioną przerw fotometrią. Regularnie powtarzające się przerwy w obserwacjach, trudne do uniknięcia w obserwacjach naziemnych (dzień!), prowadzą do aliasów – dodatkowych częstotliwości w widmie oscylacji, nieodpowiadających rzeczywistym zmianom, a wynikających ze sposobu próbkowania sygnału. Konstelacja satelitów BRITE pokazuje tu swoją siłę. Choć jeden satelita będzie mógł obserwować daną gwiazdę jedynie przez około 15 do 40 minut w ciągu trwającego 100 minut obiegu Ziemi, to równoczesna obserwacja obiektu przez kilka satelitów konstelacji zmniejszy problem aliasów. Obserwacje tej samej gwiazdy, trwające nieprzerwanie nawet do 90 dni, pozwolą na detekcję wielu modów, także o małych amplitudach zmian jasności (na poziomie mmag). Dużo trudniejszy jest problem identyfikacji modów – niezbędnej do poprawnego porównania mierzonych częstotliwości z wyliczonymi z modelu teoretycznego. Ułatwi to fotometria wielobarwna, gdyż stosunki amplitud i różnice fazy oscylacji w dwóch różnych zakresach długości fal są charakterystyczne dla danego modu oscylacji. Tę metodę opracowali i rozwinęli polscy astrofizycy, m.in. Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz, Wojciech Dziembowski i Aleksiej Pamiatnych. Duża jasność obserwowanych gwiazd pozwoli z kolei na łatwe i szybkie uzyskanie widm promieniowania tych gwiazd za pomocą łatwo dostępnych, dwu-, trzymetrowych teleskopów naziemnych. Obserwacje spektroskopowe pozwalają zmierzyć prędkość radialną powierzchni gwiazdy, pomocną w identyfikacji modów oraz dającą nam pełniejszy obraz pulsacji. Dodatkowo analiza widma promieniowania pozwala na umiejscowienie obserwowanej gwiazdy na teoretycznym diagramie HR, co jest istotnym ograniczeniem przy konstruowaniu modelu sejsmicznego.

Oscylacje nie są jedynym procesem prowadzącym do zmian jasności gwiazd. Silne wiatry gwiazdowe i wyrzuty materii z powierzchni, charakterystyczne dla najjaśniejszych gwiazd, również prowadzą do zmian jasności, podobnie jak niejednorodności powierzchni (plamy) połączone z rotacją. Mamy nadzieję, że BRITE znacząco przyczyni się do lepszego zrozumienia tych interesujących procesów. Choć podobne badania wykonywały już potężne (i wieloletnie) teleskopy kosmiczne CoRoT i Kepler, to najjaśniejsze gwiazdy były poza ich zasięgiem, ponieważ ich światło zbierane z dużej powierzchni zwierciadła błyskawicznie wysyca detektory CCD. BRITE, choć niewielki, pozwoli nam zgłębić tajemnice tych niezwykle ważnych gwiazd.



#### Rozwiązanie zadania F 857.

W następstwie zjawiska fotoelektrycznego na kulce zbiera się ładunek dodatni, który wytwarza pole hamujące fotoelekty. Wielkość potencjału kulki  $\phi$  można wyrazić poprzez jej ładunek  $q$  zależnością  $q = C\phi$ , gdzie  $C = 4\pi\epsilon_0 r$  jest pojemnością kulki. Maksymalny potencjał kulki  $\phi_{\max}$  zależy od początkowej energii kinetycznej elektronów. Ponieważ zmiana energii kinetycznej elektronów jest równa pracy sił pola wytwarzanego przez kulkę, to przyjmując, że w nieskończoności potencjał pola kulki i prędkość elektronu wynoszą zero i uwzględniając fakt, że ładunek elektronu jest ujemny, można napisać:

$$\Delta W_{\text{kin}} = -e\phi_{\max},$$

czyli

$$(1) \quad -\frac{mv_{\max}^2}{2} = -e\phi_{\max} \text{ i } \phi_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2e}.$$

Ze wzoru Einsteina dla zjawiska fotoelektrycznego mamy

$$(2) \quad \frac{mv_{\max}^2}{2} = h\nu - A,$$

gdzie  $h$  to stała Plancka,  $\nu$  – częstość światła. Podstawiając (2) do (1), dostajemy

$$\phi_{\max} = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{hc/\lambda - A}{e}.$$

W naszym przypadku

$$\phi_{\max} \approx 4,4 \text{ V}.$$



#### Rozwiązanie zadania F 858.

Dopóki wyłącznik jest zamknięty przez opór  $R_3$  i cewkę, płynie prąd

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_3}$$

(przez opory  $R_1$  i  $R_2$  prąd nie płynie, bo spadek napięcia na cewce jest równy zeru). Po otwarciu wyłącznika energia elektryczna zgromadzona w cewce wydzieli się w postaci ciepła

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_3^2}$$

na oporach  $R_1$  i  $R_2$  (przez opór  $R_3$  prąd nie płynie).

Opory  $R_1$  i  $R_2$  są połączone równolegle, więc spadki napięcia na nich są równe  $I_1 R_1 = I_2 R_2 = U$ . Ilość ciepła, jaka wydzieli się w każdym z nich w ciągu krótkiego czasu  $\Delta t$ , będzie równa odpowiednio

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1} \Delta t \quad \text{ i } \quad Q_2 = \frac{U^2}{R_2} \Delta t,$$

stąd  $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ . Równocześnie  $Q = Q_1 + Q_2$ . Ostatecznie więc

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + R_1/R_2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_3^2(1 + R_1/R_2)}.$$

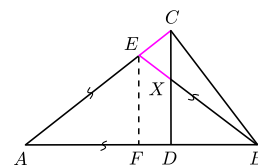
Podstawiając z warunków zadania  $R_1 = R_3 = R$ ,  $R_2 = 2R$ , otrzymujemy ostatecznie:

$$Q_1 = \frac{L\mathcal{E}^2}{3R^2}.$$



#### Rozwiązanie zadania M 1423.

Przyjmijmy, że  $AD = AE = EB = 1$  i oznaczmy punkt przecięcia odcinków  $CD$  i  $BE$  przez  $X$ . Niech  $F$  będzie rzutem prostokątnym punktu  $E$  na odcinek  $AB$ .



Zauważmy, że  $\angle ECX = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle ABE = \angle DXB = \angle EXC$ . W takim razie trójkąt  $CXE$  jest równoramienny, oznaczmy  $EC = EX = x$ . Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$BC = \sqrt{1 - x^2}$$

oraz

$$AB = \sqrt{(1+x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2(1+x)}.$$

Z twierdzenia Talesa mamy więc

$$1+x = \frac{CA}{EA} = \frac{DA}{FA} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2(1+x)}},$$

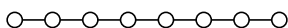
skąd  $1+x = \sqrt[3]{2}$ . Zatem

$$AC/AD = 1+x = \sqrt[3]{2}.$$

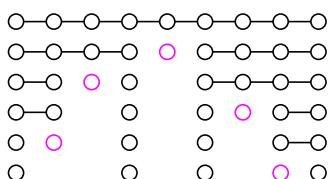
# Gra Grim i twierdzenie Sprague'a–Grundy'ego

Martha ŁĄCKA\*, Mateusz ŁĄCKI\*\*

Autorki Grima badały różne klasy grafów początkowych, część wyników zawarta jest w prezentacji <http://zimmer.csufresno.edu/~ovega/research/Shameless.pdf>.



Rys. 1. Graf, który określamy mianem „łańcucha”. W tym przypadku jest to łańcuch długości 8.



Rys. 2. Przykładowa rozgrywka dla nieparzystej liczby wierzchołków przy założeniu, że gracz pierwszy gra zgodnie z opisaną w artykule strategią wygrywającą.



Pewnie część czytelników *Delty* zna grę Nim – zarówno jej zasady, jak i właściwą dla niej strategię wygrywającą. W tym artykule chcemy przedstawić inną grę grafową. Grę o prostych zasadach, ale trudniejszą niż Nim do dokładnego przeanalizowania. Tą grą jest – stworzony przez Jamie Peabody i Karen Willis – Grim. Podamy efektywny sposób orzekania, który gracz ma strategię wygrywającą. Co najciekawsze, można go zastosować do szerokiej klasy tego typu gier dwuosobowych, zawierającej Grima i Nima.

W Grimie dwaj uczestnicy naprzemiennie wykonują ruchy. Na początku rozgrywki mają oni do dyspozycji pewien graf. W tym artykule będziemy rozważać jedynie grafy początkowe, które są „łańcuchami”, tzn. takie grafy spójne, w których dwa wierzchołki mają stopień 1, a reszta wierzchołków ma stopień 2 (taki graf pokazany jest na rysunku 1).

W każdym ruchu gracz wybiera dowolny *nieizolowany* wierzchołek grafu i usuwa go wraz ze wszystkimi krawędziami z niego wychodzącymi. Przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wykonać ruchu.

Jeśli liczba wierzchołków grafu jest nieparzysta (oczywiście, większa od 1), to istnieje strategia wygrywająca dla gracza pierwszego – wystarczy jako pierwszy wierzchołek wybrać wierzchołek będący środkiem symetrii, a następnie odbijać ruchy przeciwnika względem środka (rys. 2). Po każdym ruchu pierwszego gracza, postępującego zgodnie z opisanym tu algorytmem, pozostałe wierzchołki są ponownie symetryczne względem środka. Dopóki drugi gracz jest w stanie wykonać ruch, dopóty pierwszy gracz może rozpocząć następną kolejkę. Zatem drugi gracz nie może wykonać dozwolonego ruchu jako ostatni. Ponieważ wierzchołków jest skończenie wiele, gra musi zakończyć się jego przegraną.

Trudniejszy do rozważenia jest przypadek, gdy liczba wierzchołków jest parzysta. Gdy wynosi ona 2, to strategię wygrywającą ma gracz pierwszy – niezależnie od wykonanego ruchu, drugiemu graczowi pozostanie jedynie izolowany wierzchołek. Dla czterech wierzchołków strategię wygrywającą ma gracz drugi. Dla łańcucha długości 6, 8 lub 10 znów wygrywa gracz pierwszy, ale dla długości 12 – drugi. Można tego dowiedzieć, rozrysowując drzewo gry, niestety, o wykładniczej zależności liczby węzłów od długości łańcucha. Co dalej? Z pomocą przychodzi nam komputer i twierdzenie Sprague'a–Grundy'ego. Żeby je przedstawić, wprowadzimy najpierw kilka pojęć.

Grę nazwiemy *normalną*, jeśli przegrywa w niej ten z graczy, który jako pierwszy nie jest w stanie wykonać ruchu. Będziemy mówić, że gra jest *bezstronna*, jeśli obaj gracze mogą wykonać te same ruchy, mając do dyspozycji daną planszę. Przykładowo gra w kółko i krzyżyk bezstronna nie jest, gdyż gracz stawiający kółko nie może postawić krzyżyka. Grim i Nim zaliczają się do gier bezstronnych.

*Funkcja mex* (ang. *minimum excludant*) przyporządkowuje podzbiorkowi zbioru liczb naturalnych najmniejszą liczbę naturalną do niego nienależącą. Na przykład,

$$\text{mex}(\{0, 1, 2\}) = 3, \quad \text{mex}(\{1, 2\}) = 0, \quad \text{a} \quad \text{mex}(\{0, 2, 8\}) = 1.$$

*Funkcja Sprague'a–Grundy'ego*  $F$  określona jest rekurencyjnie dla poszczególnych pozycji w grze. Dla konfiguracji  $g$ , w której gracz nie jest w stanie wykonać ruchu, definiujemy  $F(g) = 0$ . Dla innych pozycji funkcja ta zwraca mex zbioru wartości  $F$  dla wszystkich pozycji  $g'$ , do których możemy dojść w jednym ruchu z  $g$ . Do poprawności definicji  $F$  wystarczy *acykliczność* gry, czyli brak możliwości powtórzenia konfiguracji w czasie rozgrywki, oraz założenie, że dla każdej konfiguracji początkowej gra może potrwać co najwyżej skończenie wiele tur.

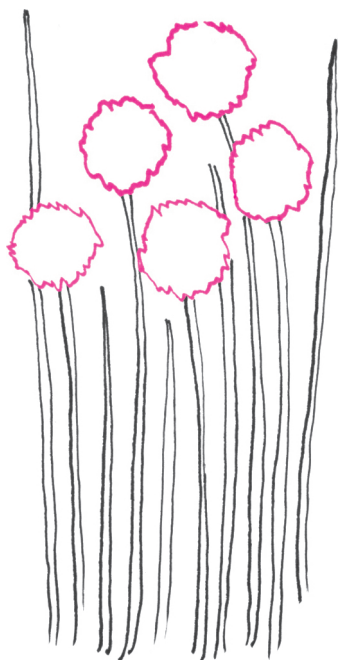
W grze Grim dla pozycji składającej się z jednego bądź kilku izolowanych wierzchołków nie ma możliwości wykonania ruchu, więc  $F$  przyjmuje wartość  $F(\circ) = F(\circ \circ) = \dots = 0$ . Łańcuchowi długości 2 funkcja  $F$  przyporządkowuje  $F(\circ-\circ)$  równe mex z wartości  $F$  dla wierzchołka izolowanego, który uzyskujemy niezależnie od tego, na który z dwóch możliwych ruchów się zdecydujemy. Zatem  $F(\circ-\circ) = \text{mex}(\{0\}) = 1$ . Wartość  $F(\circ-\circ-\circ)$  równa jest natomiast wartości funkcji mex dla zbioru zawierającego: wartość  $F$  dla dwóch izolowanych wierzchołków  $F(\circ \circ) = 0$  oraz dla łańcucha długości 2,  $F(\circ-\circ) = 1$ , a zatem  $F(\circ-\circ-\circ) = \text{mex}(\{0, 1\}) = 2$ .

\*studentka, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński  
\*\*doktorant, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński

Nim-suma to zwykła bitowa operacja xor.

$$\begin{array}{r} (0101)_2 = 5 \\ + (1100)_2 = 12 \\ \hline (\text{mod } 2) \quad 1201 \\ \hline (1001)_2 = 9 (= 5 \oplus 12) \end{array}$$

Rys. 3. Nim-suma liczb 5 i 12 to 9.



Nastąpiło tu pewne nadużycie oznaczeń. Graf będący łańcuchem długości  $k$  jest jednoznacznie scharakteryzowany przez  $k$ , utożsamiamy go też jednoznacznie z pozycją w grze. Zatem znaczenie zapisu  $F(k)$  nie powinno budzić wątpliwości.

Początkowe wartości ciągu  $F(n)$  to:  
 0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 0, 3, 4, 2, 1,  
 3, 2, 1, 0, 2, 1, 4, 5, 1, 4, 5, 1, 2, 0, 1, 2, 3,  
 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 1, 0, 2, 8, 4, 5,  
 3, 4, 5, 6, 2, 5, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2,  
 3, 4, 2, 3, 0, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 2,  
 3, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 0, 2, 3, 4,  
 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 5, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4,  
 2, 3, 4, 2, 3, 0, 2, 3, 4, ...

Nim-suma to pewne działanie  $\oplus$ , które dwóm liczbom naturalnym przyporządkowuje również liczbę naturalną. Aby obliczyć Nim-sumę, należy zapisać oba argumenty w systemie dwójkowym, dodać liczby stojące przy tych samych potęgach dwójki (a więc zera lub jedynki) modulo 2, a następnie wynik zinterpretować jako zapis dwójkowy szukanej liczby. Z powyższego przepisu wynika od razu, że  $x \oplus x = 0$ .

Twierdzenie Sprague’a–Grundy’ego pozwala wyznaczyć wartości funkcji  $F$  w sytuacji, gdy gracze grają w kilka normalnych i bezstronnych gier jednocześnie: w każdym ruchu wybierają jedną z plansz i wykonują na niej ruch zgodnie z zasadami odpowiadającej jej gry. Tak powstałą „multigrę” nazywamy *sumą gier*.

**Twierdzenie (Sprague–Grundy).** *Funkcja Sprague’a–Grundy’ego  $F$  dla sumy normalnych, bezstronnych gier jest równa Nim-sumie funkcji Sprague’a–Grundy’ego poszczególnych gier. Gracz wykonujący ruch ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy wartość funkcji  $F$  dla aktualnej pozycji gry jest niezerowa.*

W przypadku, gdy funkcja  $F$  dla pozycji gry  $g$  przyjmuje wartość  $F(g) \neq 0$ , możliwy jest ruch do takiej pozycji  $g'$ , by  $F(g') = 0$ , zgodnie z definicją funkcji mex. Pozycja  $g'$  może kończyć grę (dla takich  $g'$  z definicji  $F(g') = 0$ ), choć nie musi. Jeżeli  $F(g) = 0$ , to wówczas dla każdej pozycji  $g'$ , osiągalnej za pomocą jednego ruchu, mamy  $F(g') \neq 0$ . Strategia wygrywająca polega na takim wykonywaniu ruchów, by po każdym z nich trafić do takiej pozycji  $g'$ , że  $F(g') = 0$ .

Jako przykład zastosowania rozważmy sumę dwóch egzemplarzy pewnej gry bezstronnej i normalnej (gramy tymi samymi zasadami, rozpoczynamy z tą samą pozycją początkową  $g_0$  na obu planszach). Wygrywa ten z graczy, który jako ostatni jest w stanie wykonać ruch. Na mocy podanego twierdzenia wartość funkcji Sprague’a–Grundy’ego dla tak powstałej gry będzie równa

$$F((g_0, g_0)) = F(g_0) \oplus F(g_0) = 0,$$

a zatem nie istnieje strategia wygrywająca dla pierwszego gracza. Do takiego wniosku możemy też dojść bezpośrednio. Wystarczy zauważyć, że gracz drugi może zapewnić sobie zwycięstwo przez kopiowanie ruchów gracza pierwszego na planszy, na której ostatnio nie wykonał ruchu gracz pierwszy.

Jaki związek ma twierdzenie Sprague’a–Grundy’ego z grą Grim? Jeśli startując z łańcucha, usuniemy jeden wierzchołek, to otrzymamy dwa krótsze łańcuchy (być może jeden pusty, czyli długości 0), z których każdy od tej pory można traktować jako osobną grę. Chcąc wyznaczyć wartość funkcji Sprague’a–Grundy’ego dla łańcucha długości  $n$ , należy obliczyć mex z wartości  $F$  dla gier będących sumami łańcuchów długości  $k$  oraz  $n - k - 1$ , dla  $k$  ze zbioru  $\{0, \dots, n - 1\}$ . Wartość tej funkcji dla każdej takiej sumy łańcuchów otrzymujemy z twierdzenia Sprague’a–Grundy’ego – jest to  $F(k) \oplus F(n - k - 1)$ . Stąd otrzymujemy definicję rekurencyjną:

$$F(n) = \text{mex}(\{F(k) \oplus F(n - k - 1), 0 \leq k < n\}), \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 0.$$

Powyższy przepis można bardzo efektywnie (w porównaniu z przeszukiwaniem pełnego drzewa gry) wykorzystać do obliczenia wartości  $F(n)$  za pomocą komputera. Uproszczenie bierze się stąd, iż zamiast rozpatrywać wszystkie możliwe konfiguracje planszy, możemy, dzięki twierdzeniu, ograniczyć się do rozpatrywania konfiguracji będących łańcuchem lub sumą dwóch łańcuchów. Prosta implementacja ma pesymistyczną złożoność  $O(n^2)$  przy założeniu, że operację xor liczymy w czasie stałym.

Wykorzystując tę technikę, można sprawdzić, że jedynymi liczbami wierzchołków mniejszymi od  $10^8$ , przy których strategię wygrywającą ma gracz drugi, są dokładnie liczby ze zbioru:

$$\{1, 4, 12, 20, 30, 46, 72, 98, 124, 150, 176, 314, 408\}.$$

Pytanie, czy to jedyne liczby o tej własności, pozostaje otwarte.

Podanie jawnego wzoru na wartości funkcji Sprague’a–Grundy’ego dla różnych dwuosobowych gier bezstronnych w ogólności uchodzi za zadanie trudne. Obliczanie wartości tej funkcji za pomocą komputera (a nawet, przy odrobinie wytrwałości, na kartce papieru) zazwyczaj jest dużo prostsze, a pozwala określać, który z graczy ma strategię wygrywającą, dla konkretnych, także nietrywialnych sytuacji. Tak otrzymane wyniki mogą prowadzić do ciekawych hipotez dotyczących postaci funkcji  $F$ . Czytelnika Wnikliwego zachęcamy również do wyznaczenia jawnego wzoru funkcji Sprague’a–Grundy’ego dla gry Nim.



Toczą się obecnie dyskusje, czy dzieło firmy D-Wave, o którym pisaliśmy w *Delcie* 1/2014, jest prawdziwym komputerem kwantowym.



**Rozwiązanie zadania M 1424.** Będziemy korzystać z obserwacji, że kwadrat liczby parzystej przy dzieleniu przez 16 może dać tylko resztę 0 lub 4, a kwadrat liczby nieparzystej – resztę 1 lub 9.

Załóżmy, że trójka  $(x, y, z)$  jest niezerowym rozwiązaniem. Oczywiście,  $y$  musi być parzyste, powiedzmy  $y = 2w$ . Wtedy  $x^2 + 6w^2 = 5z^2$ . Możemy bez utraty ogólności założyć, że  $\text{NWD}(x, w, z) = 1$ . Ponieważ  $5z^2 - x^2 = 6w^2$  jest parzyste, to mamy dwa przypadki:

1)  $x, z$  są parzyste; wtedy  $w$  musi być nieparzyste (inaczej NWD byłoby co najmniej 2). Mamy  $x^2 \equiv 0$  lub  $4 \pmod{16}$ ,  $6w^2 \equiv 6 \pmod{16}$  oraz  $5z^2 \equiv 0$  lub  $4 \pmod{16}$ . Wtedy jednak liczby  $x, w, z$  nie mogą spełniać równania  $x^2 + 6w^2 = 5z^2$ .

2)  $x, z$  są nieparzyste; wtedy  $x^2 \equiv 1$  lub  $9 \pmod{16}$ ,  $5z^2 \equiv 5$  lub  $13 \pmod{16}$  oraz  $6w^2 \equiv 0, 6$  lub  $8 \pmod{16}$ . Nietrudno sprawdzić, że ponownie liczby  $x, w, z$  nie mogą spełniać równania  $x^2 + 6w^2 = 5z^2$ .



Kondensat Bosego–Einsteina to stan materii, w którym duża część cząstek układu fizycznego znajduje się w tym samym stanie – podstawowym – i zachowuje się wspólnie jak pojedyncza cząstka.

\*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

## Gotowanie w kwantowej lodówce, czyli co przeszkadza w zbudowaniu komputera kwantowego

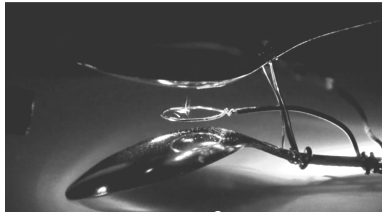
Michał KRYCH\*

Czy da się zagotować mrożoną kawę, umieszczając ją w zamrażalniku? Codzienne doświadczenie miłośników *frappé* podpowiada, że nie. Są jednak układy fizyczne, w których energia układu będącego w kontakcie z chłodnym otoczeniem potrafi wzrosnąć. Przykładem takiego zjawiska może być schwytyany w pułapkę pojedynczy jon, na przykład rubidu, baru czy iterbu, który w kontakcie z bardzo zimnym gazem może zwiększyć swoją energię kinetyczną tak bardzo, że jest w stanie ze swej pułapki uciec. Problem nie jest czysto akademicki – na odpowiednio „spułapkowanych” łańcuchach jonów uczeni są w stanie realizować obliczenia kwantowe. Jak dotąd funkcjonalność komputerów kwantowych jest ograniczona, ale udało się zademonstrować działanie algorytmu Shore’a, który służy do szybkiego rozkładu liczb na liczby pierwsze. Gdyby udało się tego dokonać dla odpowiednio dużych liczb, kryptosystem RSA, stosowany dziś powszechnie do szyfrowania transmisji danych, nie byłby już użyteczny.

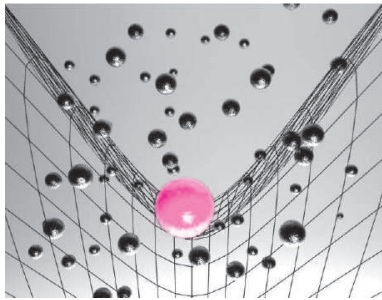
Zwykły komputer działa, realizując proste operacje logiczne na ciągach bitów: zer i jedynek. Komputer kwantowy korzysta z ich kwantowych odpowiedników, zwanych *kubitami*. Mogą one reprezentować zero, jedynkę lub pewną ich superpozycję, czyli równocześnie zero i jedynkę w pewnych proporcjach. Klasyczne bity realizuje się fizycznie poprzez przepływ prądu w procesorze, namagnesowanie fragmentów dysku twardego lub wypalone rowki w płytach CD. Kwantowe bity koduje się za pomocą układów fizycznych, w których w silny sposób przejawiają się efekty kwantowe. Mogą to być, na przykład, pętla z nadprzewodnika, kropki kwantowe, atomy w sieciach optycznych lub wspomniane łańcuchy jonów. Jednak układy takie mają zazwyczaj niewielką stabilność. Szumy (w tym szumy termiczne) powodują występowanie błędów, aż do całkowitego zniszczenia zakodowanej w komputerze kwantowym informacji. W związku z tym niweluje się, na ile jest to możliwe, wszelkie zewnętrzne źródła zaburzeń – ekranuje się zewnętrzne pola elektryczne i magnetyczne, a także chłodzi się układ do temperatur bliskich zera bezwzględnego.

Metod chłodzenia jest wiele. W przypadku atomów i jonów często korzysta się z chłodzenia dopplerowskiego. Klasyczny efekt Dopplera odpowiedzialny jest za zmianę częstości dźwięku w przypadku przybliżania się lub oddalania jego źródła. Podobne zjawisko obserwujemy dla fotonów. Jeżeli poruszamy się w stronę źródła światła, to widmo tego źródła przesunięte jest w stronę wyższych częstości (wyższych energii), odwrotnie przy oddalaniu się od źródła. Chłodzenie z wykorzystaniem zjawiska Dopplera polega na tym, że świecimy na jony laserem o długości fali światła nieco mniejszej niż odpowiadająca przejściu między stanem podstawowym jonu a stanem wzbudzonym. Jon w spoczynku nie byłby w stanie pochłonąć fotonu emitowanego przez laser, ale taki poruszający się w stronę źródła światła „widzi” wyższą energię fotonów, co pozwala, w przypadku dostrojenia energii takich fotonów do różnicy energii między stanami jonu, na pochłonięcie fotonu, a następnie jego spontaniczną emisję w dowolnym, na ogół zupełnie innym kierunku. Jeśli początkowa prędkość jonu jest dostatecznie duża, energia emitowanego fotonu będzie większa od energii fotonu absorbowanego, co prowadzi do obniżenia energii jonu, a więc następuje zmniejszenie temperatury próbki.

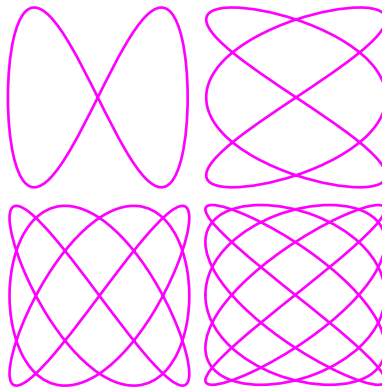
Metoda dopplerowska pozwala na znakomite schłodzenie i przygotowanie jonów do obliczeń kwantowych. Niestety, gdyby zastosować je w trakcie przeprowadzanych obliczeń, informacja zakodowana w układzie uległaby zniszczeniu. Nie jest to problem beznadziejny. Dobrym pomysłem wydaje się wykorzystanie chłodzenia *sympatycznego*, zwanego przez niektórych *współczulnym* (ang. *sympathetic*). Polega ono na zanurzeniu jonu w zimnym gazie buforowym lub kondensacie Bosego–Einsteina. Dowodzi się, że w przypadku chłodzenia sympatycznego stan wewnętrzny zderzających się cząstek powinien zostać zachowany. Wydawałoby się, że powinna nastąpić termalizacja – zanurzony układ po odpowiednio długim czasie osiągnie temperaturę ośrodka, w którym go zanurzono. Gdy wkładamy kawę do lodówki, możemy oczekiwać, że po kilkudziesięciu minutach wyjmemy przyjemnie zimny napój. Paradoksalnie, w przypadku jonów nie zawsze tak się dzieje: ich temperatura może znacznie



Rys. 1. Pułapka jonowa Paula składająca się z pętli drutu i dwóch łyżek stołowych. Wewnątrz pętli widoczne są złapane w pułapkę naelektryzowane drobinki kurzu.



Rys. 2. Wizualizacja jonu znajdującego się w pułapce Paula i zanurzonego w gazie atomów.



Rys. 3. Przykłady krzywych Lissajous – trajektorii ruchu sekularnego jonu.



#### Literatura:

Michał Krych, Zbigniew Idziaszek, *Quantum analysis of atom-ion sympathetic cooling in the presence of micromotion*, <http://arxiv.org/pdf/1312.0279v2.pdf>.

wzrosnąć, do tego stopnia, że wzrost energii kinetycznej jonów pozwala im na ucieczkę z układu doświadczalnego. Jak to się dzieje?

Aby utrzymać jon w konkretnym miejscu w przestrzeni, potrzebujemy pułapki. Jon ma ładunek elektryczny, zatem właściwym rozwiązaniem wydaje się stworzenie minimum potencjału elektrostatycznego, do którego cząstka dodatnio naładowana byłaby spychana przez zewnętrzne pole elektryczne. Niestety, z praw fizyki wynika, że takie minima nie mogą istnieć w pustej, tj. pozbawionej innych ładunków, przestrzeni, niezależnie od tego, jak wymyślnego kształtu elektrodami otoczylibyśmy jon. Istnieją wszakże pułapki, które moglibyśmy nazwać dynamicznymi. Za ich stworzenie Wolfgang Paul otrzymał w 1989 roku Nagrodę Nobla z fizyki. Jak wiele genialnych pomysłów, idea Paula była stosunkowo prosta; w zasadzie każdy może spróbować zbudować tego typu pułapkę w domu i wyciąć cząstki kurzu. Rozwiązanie to najłatwiej chyba wytłumaczyć za pomocą analogii mechanicznej. Wyobraźmy sobie siodło, na którym umieszczamy piłeczkę pingpongową. Nawet dla niewielkich wychyleń piłeczki z poziomego fragmentu siodła siła grawitacji będzie ją ściągać w dół, a więc piłeczka znajduje się w równowadze chwiejnej. Jeśli jednak zakręcimy siodłem z odpowiednią prędkością kątową, to w układzie związanym z siodłem oprócz siły grawitacji działać będą jeszcze siła odśrodkowa, powodująca dodatkową niestabilność piłeczki, oraz siła Coriolisa, zwracająca wyrzucaną piłeczkę. To ostatnie zjawisko będzie zapewniać utrzymanie piłeczki w takiej pułapce.

W prawdziwych pułapkach kręceniu układem odpowiada przyłożenie zmiennego napięcia. Trajektorie zakreślane przez jon w każdym z kierunków będą odpowiadały sinusoidom z pewnymi przesunięciami fazowymi, będą to zatem figury Lissajous. Ten główny ruch o dużej amplitudzie zwykle nazywa się ruchem sekularnym. Pojawia się także drobna modyfikacja trajektorii, zwana mikroruchem, czyli drobne drgania o dużej częstotliwości wynikające z zależnej od czasu rzeczywistej natury pułapki. Wydawałoby się, że skoro mikroruch ma małą amplitudę, to nie ma też większego znaczenia. Jest to prawda w miejscach, gdzie w ruchu sekularnym jon ma duże prędkości. Może się jednak zdarzyć, że w pewnych punktach na trajektorii jonu prędkość ruchu sekularnego jest bardzo mała i mikroruch dominuje. Co więcej, choć amplituda mikroruchu jest mała, odpowiada on drganiom o dużej częstotliwości, więc jego energia może być całkiem spora. Wyobraźmy sobie teraz zderzenie energetycznego jonu z powolnym atomem gazu wypełniającego chłodzarkę sympatyczną. Zazwyczaj po kolizji następuje znaczne obniżenie energii jonu i wzrost energii atomu. Może się jednak zdarzyć, że zderzenie nastąpi w punkcie zwrotnym trajektorii sekularnej tak nieszczęśliwie, że spowoduje zmianę fazy mikroruchu. Wtedy możliwe jest przejście na trajektorię sekularną o wyższej energii. Podobne obliczenia w ramach teorii kwantowej zostały przeprowadzone dopiero niedawno, ale i tutaj dla pewnych parametrów pułapki (takich jak częstotliwość części zależnej od czasu, głębokości potencjału, masy atomów) dopuszczalne jest zarówno chłodzenie, jak i podgrzewanie.

Nasuwa się pytanie, czy energia w układzie jest zachowana i czy nie naruszamy przypadkiem trzeciej zasady termodynamiki. Na pierwszy rzut oka sytuacja jest następująca – ciepły jon w zimnym gazie się ogrzewa, nie ma termalizacji i możliwy jest przepływ ciepła od układu chłodniejszego do cieplejszego. . . Czyżby zatem mechanika kwantowa pozwalała stworzyć *perpetuum mobile*? Jednak (niestety lub na szczęście, zależnie od punktu widzenia) prawa fizyki działają także tutaj. Energia przepływająca w opisywanym układzie nierównowagowym nie jest emitowana do dalszego wykorzystania, ale pompowana lub odbierana jest przez pułapkę w postaci kwantów energii proporcjonalnych do jej częstotliwości.

Wracając do analogii z kawą – stwierdzamy, że możliwe jest gotowanie w kwantowej lodówce, ale należy odpowiednio trząść kubkiem, w którym się ta kawa znajduje. Warto podkreślić, że bez obecności lodówki (ultrazimnego gazu) chłodzenie lub grzanie nie zachodzi, a średnia energia kawy (jonu) pozostaje na stałym poziomie. Zatem lodówka pełni tutaj rzeczywiście rolę piecyka. Znajomość parametrów pułapki i zderzających się cząstek, dla których zachodzi efektywne chłodzenie (grzanie jest zwykle procesem niepożądanym), jest niezmiernie ważna dla fizyków doświadczalnych, którzy pragną maksymalnie przedłużyć stabilność badanych układów i przeprowadzić obliczenia kwantowe. Świętym Graalem w tej dziedzinie wciąż pozostaje stworzenie skalowalnego i efektywnie działającego komputera kwantowego.



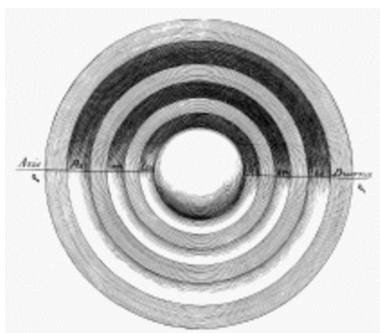


## Fantazje i facecje naszych dziadków: teoria wydrążonej Ziemi

Krzysztof REJMER

Jednym ze wspomnień mojego wczesnego dzieciństwa jest miesięcznik *Horyzonty Techniki* prenumerowany przez ojca. Niczym bohater Schultzwoskiego opowiadania *Księga*, pochłaniający historię Anny Csillag i jej cudownego środka na porost włosów, z wypiekami na twarzy czytywałem wtedy rubrykę *Fantazje i facecje naszych dziadków*. Do dziś pamiętam rysunki przedstawiające majestatyczne zeppelin-y i wielkie maszyny parowe albo panów w melonikach (jak gdyby wyjętych wprost z obrazów Magritte'a) pedałujących z jakąś dziwną zawziętością, by w ten sposób poruszać skrzydłami ornitopterów.

Do tego świata dawnych fantazji należą odrzucone i często naiwne teorie naukowe. Również i z nich można się wiele nauczyć, może nie tyle o otaczającym nas świecie, ile o nas samych. Jedną z przebrzmiałych dziś koncepcji, które mimo swej archaiczności nadal przyciągają wielu fantastów i maniaków, należy teoria pustej lub raczej wydrążonej Ziemi. W licznych plemiennych mitologiach, poczynając od Celtów, a kończąc na Inkach, z podziemnych światów wyleźli nasi przodkowie, albo też w podziemiach znajdują się zaświaty, do których trafiamy po śmierci. Kto wie, czy to nie jest jakiś potężny atawizm, czy te wyobrażenia nie zrodziły się w pradawnych czasach, gdy paleolityczni łowcy malowali wizerunki zwierząt na ścianach jaskiń? Jeszcze nie tak dawno (w tej skali czasu) prezydent USA, John Quincy Adams (1767–1848), zaaprobował organizację wyprawy na północny biegun, która miała poszukiwać wejścia do wnętrza Ziemi. Plany te zostały przekreślone przez jego następcę – Andrew Jacksona.



Ilustracja z pracy Halleya przedstawiająca hipotezę wydrążonej Ziemi.

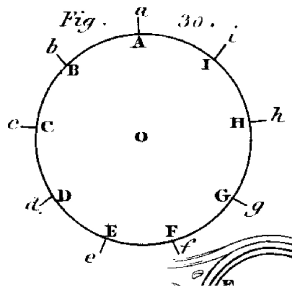
Idea wydrążonej Ziemi nie należy jednak wyłącznie do świata mitologii czy fantastyki. W 1692 roku Edmund Halley (który miał też wiele innych niezwykłych pomysłów) zaproponował teorię wewnętrznej budowy Ziemi, zgodnie z którą nasza planeta to sferyczna powłoka o grubości około 500 mil. W jej wnętrzu znajdować się miały kolejne dwie powłoki o rozmiarach Wenus i Marsa, a na samym końcu jądro wielkości Merkurego. Nie sposób nie dostrzec tu dalekiego echa keplerowskiej harmonii Wszechświata, czyli relacji pomiędzy platońskimi bryłami a orbitami pierwszych pięciu planet Układu Słonecznego. Wszystkie te obiekty miały wirować z własnymi prędkościami kątowymi i mieć własne pole magnetyczne. W ten pomysłowy sposób Halley usiłował wyjaśnić wędrowanie biegunów magnetycznych. Przerznięcie pomiędzy powłokami miały być wypełnione świecą atmosferą. Zdaniem Halleya zorza polarna to wyciek tego świecącego gazu do ziemskiej atmosfery. Amerykański pisarz Lyon Sprague de Camp i Willy Ley, również pisarz (amerykańsko-niemiecki) rozpowszechnili apokryf o rzekomej teorii Eulera dotyczącej wydrążonej Ziemi, w której środku świeci wewnętrzne słońce. To by rozwiązywało zagadkę ciepła płynącego z wnętrza Ziemi, ale o tym chyba nie pomyślano. Gdy Herschel odkrył pierwszą gwiazdę podwójną, szkocki fizyk John Leslie (1766–1832), bynajmniej nie żaden maniak, lecz raczej rzetelny uczyony z drugiego szeregu, zaproponował w miejsce jednego – dwa słońca wewnętrzne: Plutona i Prozerpinę. To prawdopodobnie on był twórcą przypisanego Eulerowi apokryfu. Trzeba mu jednak oddać honor; to również on jako pierwszy zauważył, że odpowiedź na pytanie o wewnętrzną strukturę Ziemi może dać sejsmologia. Zrobił to jednak w makabryczny sposób. *Niestety, dziś jeszcze nie jesteśmy w stanie w kontrolowany sposób wywołać trzęsienia Ziemi równie silnego, jak to, które w 1755 roku zniszczyło Lizbonę – ubolewał Leslie – a tylko takie może dać nam wiedzę o wewnętrznej strukturze naszego globu.*



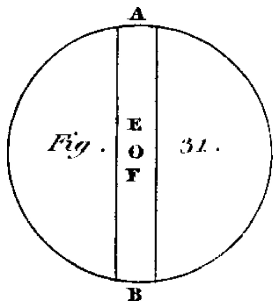
Warto też wspomnieć, że w 1750 roku poważnym problemem stało się zagadnienie precesji orbity Księżyca. Obliczenia wykonane przez Eulera, d'Alemberta oraz Clairauta dawały ledwie połowę obserwowanej wartości. Aby wyjaśnić rozbieżność teorii z doświadczeniem, uczeni spróbowali kilku rozwiązań. Pierwsze było drastyczne i rewolucyjne: modyfikacja prawa powszechnego ciężenia, polegająca na wprowadzeniu dodatkowego oddziaływania o mniejszym zasięgu. Siła grawitacji  $F_g$ , z jaką z odległości  $r$  przyciągają się dwie masy  $M$  i  $m$ , byłyby równa

$$F_g = mM \left( \frac{G}{r^2} + \frac{G'}{r^4} \right),$$

Euler opisał w *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (listy XLIV i L) eksperymenty myślowe polegające na przebieciu biegnącego pionowo w dół tunelu, który musiałby przebiegać przez środek Ziemi,



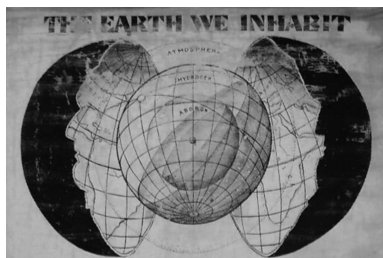
i wrzuceniu do tego tunelu kamienia.



I to wszystko. W rzeczywistości Euler uważał Ziemię za ogromną kroplę cieczy pokrytą dość cienką skórką.



Szaloną wizję wydrążonej Ziemi przedstawił na przełomie XIX i XX wieku Cyrus Reed Teed w dziele *Cellular Cosmogony*.



Wokół koncepcji Reeda uformował się ruch parareligijny, a jeden z jego członków, Ulysses Grant Morrow, niestrudzenie szukał dowodów empirycznych na jej słuszność. Oczywiście, znalazł je w wielu przeprowadzonych przez siebie pomiarach.

gdzie  $G'$  jest drugą obok  $G$  stałą grawitacji. Dodatkowa siła szybko maleje, więc nie ma ona istotnego wpływu na trajektorie planet oraz komet obiegających Słońce, co innego ze znajdującym się w pobliżu nas Księżycem. Druga hipoteza była fantastyczna: zakładała, że Księżyc ma większą masę niż wcześniej myślano i kształt hantli o takim akurat położeniu, iż jedna kula zasłania ziemskiemu obserwatorowi tę drugą. Hipoteza pustej Ziemi też mogłaby się przydać, ale Euler jej nie użył, co chyba dowodzi, że jej nie znał (w końcu wydrążona Ziemia to pomysł niemal realistyczny przy Księżycu o kształcie hantli), a jeśli znał, to nie uważał jej za godną uwagi. Ostatecznie Clairaut znalazł znacznie lepszy sposób sumowania szeregów, co poprawiło wyniki obliczeń, i teoria ugięła kark przed eksperymentem.

Tak naprawdę pojawiło się kilka różnych koncepcji pustej Ziemi. Francuski autor science fiction Pierre Versins (1923–2001) podzielił je na dwie podstawowe kategorie: *calebasse* (tykwa) i *gruyère* (szwajcarski ser). Do pierwszej kategorii należy model Halleya. Drugą (znacznie bliższą geofizycznej prawdzie) opisał już Platon: *Otóż cała ziemia tak wygląda i to, co naokoło niej. A krajin jest na niej mnóstwo, wedle tych jej zagłębień naokoło całej powierzchni; jedne głębsze i szersze niż ta zakłęśłość, którą my zamieszkujemy, drugie głębsze, a mają wejście mniejsze niż miejsce naszego pobytu, a są i płytsze od naszego, a szersze. Wszystkie te zapadliny otworami łączą się ze sobą pod ziemią w wielu różnych miejscach; są tak przejścia ciaśniejsze i szersze i są tam kanały...* (*Fedon*, tłum. W. Witwicki).

Pusta Ziemia stała się, oczywiście, atrakcyjną pożywką dla literatury. Nie sposób wyliczyć tu wszystkich powieści, lepszych lub gorszych (zwykle jednak gorszych) eksploatujących koncept wewnętrznych światów zamieszkałych przez inteligentne istoty, będące czymś odwrotnym do dzisiejszych Kosmitów. Najbardziej znanym z nich jest oczywiście *Podróż do wnętrza Ziemi* Juliusza Verne'a. Mało kto wie, że Giacomo Casanova, niesprawiedliwie postrzegany jedynie jako awanturnik i uwodziciel (przede wszystkim był wnikliwym obserwatorem świata), napisał obszernie dzieło *Icosameron* (czyli taki dwa razy dłuższy *Dekameron*) opisujące przygody brata i siostry w podziemnym, utopijnym świecie nazwanym Protokosmosem, zamieszkiwanym przez Megamikrów – kolorowe, androgyniczne karły, będące wegetarianami i pacyfistami, posługujące się muzycznym językiem. Książka ta pozostawała w zapomnieniu aż do 1822 roku, gdy w Niemczech ukazało się jej pierwsze wydanie.

Najciekawszym chyba literackim dziełem jest opublikowane w 1741 roku łacińskie (szybko jednak przetłumaczone na duński i angielski) dzieło *Nicolai Klimii iter Subterraneum* napisane przez, nazywanego Molierem Północy, Ludwiga Holberga (1684–1754). Opisuje ono guliwerskie przygody młodego Duńczyka, Nielsa Klimy, który trafił do wnętrza pustej Ziemi. Niels przez pewien czas przebywa w królestwie Potu, którego nazwa czytana wspaniale daję *utop* (wszak utopia oraz antyutopia były wtedy modnymi gatunkami literackimi), potem zaś odbywa misję na niewielką, wewnętrzną planetę Nazar. Młodzieniec jest też zdumiony, napotkawszy inteligentne formy życia zupełnie inne niż na powierzchni.

Ale powróćmy do naszych baranów. Czy pozostając na powierzchni Ziemi, możemy udowodnić, że nie jest (albo na odwrót, że jest) ona w środku pusta? Oczywiście tak, najprostszymi dowodów dostarcza sejsmologia. Mechaniczne fale inaczej rozchodzą się w sferycznej powłoce, a inaczej w pełnej, choć wyposażonej w wewnętrzną strukturę kuli. Poza tym skorupa wydrążonej Ziemi musiałaby mieć większą gęstość, niż ma w rzeczywistości, bo masę Ziemi przecież znamy. Nie wiadomo też, w jaki sposób taki dziwny twór miałby powstać, a przede wszystkim byłby on niestabilny i nawet gdyby jakoś już powstał, to szybko rozsypałby się.

Współczesna futurystyka stworzyła zamiennik pustej Ziemi z własnym słońcem w środku. Jego autorem jest wybitny fizyk Freeman Dyson. W 1959 roku opisał on w czasopiśmie *Science* hipotetyczny obiekt, który mogłaby zbudować wysoce rozwinięta cywilizacja. Sfera Dysona – bo tak nazwano ów obiekt – byłaby ogromną konstrukcją otaczającą gwiazdę, pozwalającą wykorzystać niemal całą wypromieniowaną przez tę gwiazdę energię.

W porównaniu z tymi pomysłami „dość realistycznie” wygląda projekt artystyczny *Globus Cassus* (łac. wydrążony lub bezużyteczny) szwajcarskiego architekta o poetycznym nazwisku, Christiana Waldvogela, zaproponowany w 2004 roku na Biennale Architektury w Wenecji. Cóż z tego, że Ziemia nie jest pusta?

Przekształćmy ją zgodnie z naszymi fantazjami, na miarę naszych potrzeb i aspiracji, i przenieśmy się na jej wewnętrzną powierzchnię!

## Pod prąd

Dożyliśmy czasów, w których ustawicznie należy podnosić swoje kompetencje, żeby nie pozostać w tyle.

Pod prąd temu pogładowi chciałbym pokazać, jak przerost wiedzy może uniemożliwić dostrzeżenie prostego rozwiązania zadania z olimpiady fizycznej z roku 1980 o następującej treści.

*Do jakiej maksymalnej temperatury można ogrzać litr czystej wody o temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  za pomocą litra brudnej wody o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$ , dysponując naczyniami o dowolnych kształtach i objętości, o ściankach idealnie izolujących lub idealnie przewodzących ciepło?*

Rozwiązanie można napisać od razu i to jednym zdaniem (jest ono podane na dole strony). Pomimo to chyba nikomu z olimpijczyków nie udało się udzielić poprawnej odpowiedzi.

Dużo było powołań na II zasadę termodynamiki, z której miałyby wynikać, że taką temperaturą jest  $50^{\circ}\text{C}$ . Wystarczy jednak rozlać czystą wodę do dwóch półlitrowek i ogrzać je kolejno brudną wodą, żeby uzyskać (po zmieszaniu) temperaturę  $\frac{5}{9}100^{\circ}\text{C}$ . Jak widać, sama wiedza o istnieniu II zasady termodynamiki nie pomaga. Wprost przeciwnie.

Żeby rozwiązać zadanie, należy wymyślić, jak wodę podzielić, żeby uzyskać jak najlepszy efekt. Łatwo przekonać się, że należy porcjować również brudną wodę. Efektywna jest zasada przeciwwątku. Można ją zilustrować następująco. Podzielmy każdą z wód np. na ćwiartki i ustawmy z nich przeciwbieżne pociągi. Najpierw zetkniemy butelki pierwsza z pierwszą. Po wyrównaniu temperatur przesuwamy pociągi o jedną butelkę. Wtedy pierwsza czysta zetknie się z drugą brudną oraz druga czysta z pierwszą brudną. Temperaturę zetkniętych butelek (po jej ustaleniu się w każdym kroku) oraz butelek, które mają się zetknąć w następnym kroku (lub ostatni raz były zetknięte w poprzednim), można przedstawić za pomocą poniższego schematu (liczby trzeba pomnożyć przez 100, żeby otrzymać temperaturę w skali Celsjusza).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & [1] & & (0) & & \\
 & & [1] & \frac{1}{2} & & & \\
 & [1] & \frac{3}{4} & & \frac{1}{4} & & (0) \\
 [1] & [1] & \frac{7}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & & (0) \\
 & \frac{15}{16} & \frac{11}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & & \\
 (\frac{15}{16}) & \frac{26}{32} & \frac{16}{32} & \frac{6}{32} & & & [\frac{1}{16}] \\
 & (\frac{26}{32}) & \frac{42}{64} & \frac{22}{64} & & & [\frac{6}{32}] \\
 & & (\frac{42}{64}) & \frac{64}{128} & & & [\frac{22}{64}] \\
 & & & (\frac{64}{128}) & & & [\frac{64}{128}]
 \end{array}$$

Wiersze przedstawiają kolejne etapy. W nawiasach kwadratowych jest woda brudna, natomiast w zwykłych czysta. Bez nawiasów przedstawiono temperaturę zetkniętych butelek. Oczywiście, każda liczba bez nawiasu jest średnią arytmetyczną dwóch liczb powyżej (można też sumować parami osobno mianowniki i osobno liczniki).

Po zlaniu osobno czystej oraz osobno brudnej wody (obliczeniu średniej ułamków w nawiasach zwykłych oraz

kwadratowych umieszczonych na dole schematu) otrzymujemy temperatury, odpowiednio,  $\frac{93}{128}100^{\circ}\text{C}$  oraz  $\frac{35}{128}100^{\circ}\text{C}$ . Przy początkowym podziale na półlitrowki otrzymalibyśmy  $\frac{5}{8}100^{\circ}\text{C}$  oraz  $\frac{3}{8}100^{\circ}\text{C}$ , natomiast po rozlaniu każdej z wód do ośmiu butelek uzyskalibyśmy... , no właśnie ile? Czy warto ten żmudny rachunek wykonywać? Chyba że jako wprawkę z programowania. A i tak trzeba by było obliczyć granicę przy rosnącej do nieskończoności krotności podziału. Nawet gdyby się udało (nie jestem wcale pewien, czy jest to wykonalne, może jest to jakieś wyzwanie?), to jak udowodnić, że nie ma jeszcze lepszego sposobu?

Rozterki te biorą się jednak wyłącznie z faktu dysponowania pojęciem granicy. Ale dla większości współczesnych maturzystów ta wiedza jest hermetyczna. I bardzo dobrze, bo nie o to tu chodzi. Pamiętajmy, że jest to uproszczony, ale jednak fizyczny problem. Właściwie jest to zadanie inżynierskie (i takie jest proste rozwiązanie zamieszczone na końcu).

Okazuje się, że jest lepszy sposób, będący banalną (choć istotną) modyfikacją już przedstawionego rozwiązania.

Nie musimy naraz używać całej objętości wody w procesie przekazywania energii. Moglibyśmy nadal używać czterech pojemników, ale np. o połowę mniejszej objętości. Po wykorzystaniu każdy pojemnik opróżniamy do naczynia, w którym ma się znaleźć czysta woda po ogrzaniu, a w kolejnym kroku (po napełnieniu nieogrzaną czystą wodą) przenosimy go na koniec pociągu (analogicznie postępujemy z brudną wodą). Wtedy uzyskamy taki sam końcowy rozkład temperatury, ale tylko dla połowy objętości, a druga połowa, (znajdująca się już w naczyniach odbiorczych) będzie miała temperatury  $\frac{15}{16}100^{\circ}\text{C}$  dla czystej oraz  $\frac{1}{16}100^{\circ}\text{C}$  dla brudnej wody. Po zlaniu całej wody każdego rodzaju do naczyń odbiorczych wynik będzie trochę gorszy:  $\frac{213}{256}100^{\circ}\text{C}$  oraz  $\frac{43}{256}100^{\circ}\text{C}$ .

Temperatury wody wlewanej do naczyń odbiorczych można dowolnie zbliżyć do początkowych temperatur drugiego rodzaju wody, zwiększając liczbę pojemników. Natomiast pogorszenie wyniku, ze względu na konieczność dolania wody pozostałej w pociągach, można zniwelować poprzez zminimalizowanie objętości pojemników. W ten sposób uzyskujemy dowolnie dokładną wzajemną zamianę temperatur dwóch używanych rodzajów wody.

Dlaczego to zadanie sprawia trudności?

Bo nie jest standardowe. W takim przypadku istotna jest tylko świadomość, co jest (dla mnie) niemożliwe, lub odkrycie, co trzeba odrzucić, żeby niemożliwe takim być przestało. To jest właściwa miara naszych kompetencji.

Piotr ZALEWSKI

Obiecane rozwiązanie jednym zdaniem:

Mozna osiągnąć dowolnie dokładną zamianę temperatur czystej i brudnej wody za pomocą wykorzystujących zasadę przeciwwątku wymiennika ciepła o odpowiednio małej objętości.



# Olimpiady 2013/2014

## LXIII Olimpiada Fizyczna

W dniach 4–8 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał LXIII Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 55 zawodników, w tym dwie panie. W sobotę 5 kwietnia zawodnicy w dwóch turach rozwiązywali zadanie doświadczalne, polegające na pomiarze stosunku grubości dwóch warstw opakowania wafelka produkowanego przez jedną z wiodących na polskim rynku cukierniczym firm.

W niedzielę 6 kwietnia zawodnicy zmierzli się z zadaniami teoretycznymi. W pierwszym z nich starali się wpłynąć, odpalając odpowiednio umieszczone ładunki jądrowe, na ruch planetoidy tak, by uniknęła ona katastrofalnego zderzenia z Ziemią. Rozwiązanie zawierało kilka elementów łatwych, zwłaszcza wyznaczenie dodatkowej prędkości uzyskanej przez planetoidę dzięki odrzutowi oraz stwierdzenie faktu zachowania energii całkowitej i momentu pędu. Także odgadnięcie właściwego miejsca wybuchu na planetoidzie i wybór czasu wybuchu były nietrudne. Trudniejsze było rozwiązanie układu równań wynikających z zasad zachowania, a najtrudniejsza – ilościowa ocena wpływu zmiany orbity na zmianę odległości perigeum. To ostatnie udało się tylko czterem uczestnikom finału. Autor wyróżnionego rozwiązania, **Jakub Supeł**, już na wczesnym etapie rachunków uwzględnił fakt, że zmiana orbity jest niewielka, a zatem wszystkie parametry zmienionej orbity

(w szczególności szukana odległość perigeum) różnią się od odpowiednich parametrów wyjściowych o wielkość w przybliżeniu proporcjonalną do początkowej „prędkości odrzutu”. Upraszcza to w znacznym stopniu obliczenia. Ta procedura nazywa się w fizyce i matematyce linearyzacją.

Drugie zadanie polegało na wyznaczeniu przyrostu rozmiarów dętki rowerowej po napompowaniu do ustalonego ciśnienia. Okazało się ono dość trudne, zapewne przez to, że poruszane w nim zagadnienie sił sprężystości w więcej niż jednym wymiarze wykracza poza szkolną praktykę. O bardzo podobnym problemie i zaskakujących wnioskach z jego rozwiązania pisał przed laty w *Delcie* Andrzej Szymacha w artykule „Jak pęcznieje wąż ogrodowy” (nr 2/1994).

W trzecim zadaniu należało określić tor ruchu naładowanej cząstki poruszającej się na zewnątrz skończonych rozmiarów solenoidu.

Treści zadań tegorocznej Olimpiady Fizycznej wraz z wzorcowymi rozwiązaniami można znaleźć na stronie Komitetu Głównego OF [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).

Laureatami LXIII Olimpiady Fizycznej zostali (w kolejności zajętych miejsc):

1. **Paweł Czajka**, Liceum Akademickie w Zespole Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu
2. **Jakub Supeł**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
3. **Adam Krasuski**, II LO im. Generałowej Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej w Poznaniu
4. **Filip Plata**, VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
5. **Andrzej Pisarek**, Zespół Szkół Ogólnokształcących im. M. Kopernika w Krośnie
6. **Andrzej Chlebnicki**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
7. **Maciej Głowacki**, Zespół Szkół Ogólnokształcących im. M. Kopernika w Krośnie
8. **Mateusz Michalewski**, Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie
9. **Jan Marucha**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie



# LVII Olimpiada Astronomiczna

## Wybór zadań

### Druga seria zadań zawodów I stopnia

1. Satelita obiega Ziemię z okresem równym dobie gwiazdowej, w kierunku zgodnym z ruchem obrotowym planety. Przyjmując, że orbita satelity jest okręgiem nachylonym do płaszczyzny równika pod kątem  $i = 50^\circ$ , opisz linię, jaką tworzy na powierzchni Ziemi zbiór punktów podsatelitarnych oraz oblicz kąt, pod jakim linia ta przecina ziemski równik. Załóż, że Ziemia ma kształt kuli oraz pominiń wpływ oddziaływań perturbacyjnych.

upadł na powierzchnię Srebrnego Globu po czasie  $\Delta t = 4512$  sekund od momentu wystrzelenia, oblicz:

- do jakiej szerokości selenograficznej pocisk dotarł,
- na jaką maksymalną wysokość wznosił się pocisk ponad grunt księżycowy,
- pod jakim kątem do kierunku pionu pocisk został wystrzelony.

Przedyskutuj, jak długo mógłby trwać lot tego pocisku (aż do momentu jego upadku), gdyby wystrzelono go z tą samą prędkością, lecz pod innym kątem.

W rozwiązaniu pominiń wpływ zaburzeń perturbacyjnych oraz przyjmij, że gęstość materii wewnątrz Księżyca jest funkcją jedynie odległości od jego środka.

2. We współczesnej kosmologii przyjmuje się, że Wszechświat spełnia tzw. zasadę kopernikańską albo kosmologiczną, w myśl której Wszechświat w dostatecznie dużej skali jest jednorodny i izotropowy, co potocznie oznacza, że jego własności nie zależą od miejsca obserwacji. W latach 40. i 50. ubiegłego wieku rozważano model stanu stacjonarnego, w którym Wszechświat spełnia doskonałą zasadę kopernikańską, tj. jego „wygląd” nie zależy od miejsca obserwacji i od czasu. W modelu takim wszystkie średnie parametry fizyczne Wszechświata pozostają stałe. W szczególności dotyczy to średniej gęstości materii i tempa ekspansji. Jednakże w wyniku tej ekspansji galaktyki oddalają się od siebie. Aby nie prowadziło to do spadku średniej gęstości materii we Wszechświecie, w modelu stanu stacjonarnego postulowano nieustanną kreację materii, która dokładnie kompensowała spadek gęstości spowodowany ucieczką galaktyk.

Zakładając dla uproszczenia, że powstająca z niczego materia to wodór, oblicz, ile atomów wodoru powinno powstawać w jednym kilometrze sześciennym w ciągu roku, aby spełnione były założenia tego modelu.

W obliczeniach przyjmij, że średnia gęstość materii we Wszechświecie to  $\rho = 2,30 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ .

### Zadania zawodów II stopnia

1. Przyjmując, że dzień trwa od momentu wschodu do momentu zachodu górnego brzegu tarczy Słońca, oszacuj długość dnia w Katowicach (szerokość geograficzna  $\phi = 50^\circ 16'$ ), w dniu równonocy wiosennej. Załóż, że w tym dniu środek tarczy Słońca osiągnął deklinację  $\delta = 0^\circ$  w momencie zaobserwowanego wschodu Słońca. Uwaga. W obliczeniach załóż kołowość orbity ziemskiej i uwzględnij refrakcję. Możesz również skorzystać z faktu, że zarówno rozpatrywane zjawisko wschodu, jak i zjawisko zachodu Słońca, zachodzą na bardzo małych obszarach sfery niebieskiej.

2. O źródle promieniowania rentgenowskiego M101 ULX-1 wiadomo, że emituje promieniowanie o wyjątkowo dużej mocy:  $3 \cdot 10^{32} \text{ W}$  i tworzy układ podwójny. Widmo wykazuje dopplerowskie przesunięcie linii pochodzących od bardziej masywnego składnika, o amplitudzie  $\pm 60 \text{ km/s}$  i okresie około 8,2 doby. Jednym z ciał tego układu jest gwiazda Wolfa-Rayeta, poruszająca się po orbicie o bardzo małym mimośrodku, której wiatr gwiazdowy zasila dysk akrecyjny drugiego ciała, a masa tej gwiazdy jest równa 19 masom Słońca. Oszacuj parametry tego układu, a w szczególności oszacuj masę drugiego ciała, promienie orbit składników oraz kąt nachylenia płaszczyzny orbit składników do kierunku obserwacji. Przedyskutuj, czym może być to drugie ciało.

Uwaga. Przyjmij założenie, że obiekt emituje promieniowanie na poziomie jednej trzeciej tzw. jasności Eddingtona. Przyjmij też, że skład chemiczny materii źródła jest zbliżony do słonecznego, a wówczas jasność Eddingtona, dla źródła o masie  $M$ , jest określona wzorem:  $L_E = L_S \cdot 3,2 \cdot 10^4 \Delta M / M_S$ , gdzie  $L_S$  i  $M_S$  oznaczają, odpowiednio, moc promieniowania i masę Słońca.

### Zadania zawodów III stopnia

1. Z północnego bieguna księżycowego wystrzelono pocisk, nadając mu prędkość początkową równą lokalnej pierwszej prędkości kosmicznej. Wiedząc, że pocisk

### Końcowa klasyfikacja zawodów finałowych (i–ix: laureaci, xii–xvi: finaliści)

- |                                    |                                    |                                   |
|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| i. Paweł Zalecki (Kraków)          | vii. Piotr Staroń (Kraków)         | xii. Marcin Witkowski (Radom)     |
| ii. Tomasz Różański (Kalisz)       | ix. Jakub Morawski (Bielsko-Biała) | xvi. Tomasz Kurek (Rybnik)        |
| iii. Maciej Głowacki (Krosno)      | x. Grzegorz Czelusta (Kalisz)      | xvii. Katarzyna Budzik (Kraków)   |
| iv. Mateusz Bronikowski (Rybnik)   | x. Mateusz Windak (Kraków)         | xvii. Bartosz Dziecioł (Szczecin) |
| iv. Michał Grendysz (Lublin)       | xii. Aleksander Łyczek (Końskie)   | xvii. Jan Życzkowski (Kraków)     |
| vi. Tomasz Świerczewski (Warszawa) | xii. Martyna Siejba (Wrocław)      |                                   |
| vii. Piotr Łubis (Łódź)            | xii. Krzysztof Szyszka (Koszalin)  |                                   |



# XXI Olimpiada Informatyczna

W dniach 1–4 kwietnia 2014 r. w Warszawie odbyły się zawody III stopnia XXI Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 100 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów finałowych zawodnicy mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zawodnikom, którzy w zawodach finałowych uzyskali, odpowiednio, co najmniej 400, 300 i 200 punktów, i wyróżnił zawodników, którzy w finale uzyskali co najmniej 170 punktów. Poniżej publikujemy listę laureatów i wyróżnionych finalistów (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Lista wszystkich finalistów jest dostępna w witrynie Olimpiady: <http://www.oi.edu.pl>.



## laureaci I miejsca

1. **Jarosław Kwiecień** (450, Zespół Szkół nr 14, Wrocław)
2. **Stanisław Barzowski** (420, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)

## laureaci II miejsca

3. **Michał Głapa** (380, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
4. **Albert Citko** (378, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
5. **Maciej Hołubowicz** (364, I Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza, Białystok)
6. **Wojciech Jabłoński** (358, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
7. **Jan Tabaszewski** (357, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
8. **Szymon Łukasz** (350, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
9. **Tomasz Garbus** (320, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
10. **Paweł Burzyński** (317, Gimnazjum nr 24 w Zespole Szkół Ogólnokształcących nr 1, Gdynia)
11. **Albert Gutowski** (312, I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Lublin)
- 12.–13. **Jakub Cisło** (300, II Liceum Ogólnokształcące, Mielec)

**Sebastian Jaszczur** (300, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 6, Bydgoszcz)

## laureaci III miejsca

14. **Konrad Paluszek** (296, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
  15. **Marek Zbysiński** (292, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
  - 16.–17. **Jan Gwinner** (278, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
- Marek Sokołowski** (278, I Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki, Łomża)
18. **Karol Kaszuba** (270, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
  19. **Michał Zawalski** (250, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
  20. **Katarzyna Kowalska** (243, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)

21. **Michał Zieliński** (242, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)

22.–23. **Michał Łuszczczyk** (240, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 1, Tarnów)

**Paweł Wegner** (240, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)

24. **Franciszek Stokowacki** (239, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)

25. **Bartosz Łukasiewicz** (235, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)

26. **Przemysław Jakub Kozłowski** (232, I Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza, Białystok)

27.–28. **Jakub Skorupski** (223, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)

**Adam Trzaskowski** (223, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)

29. **Tomasz Kościuszko** (220, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)

30. **Jakub Boguta** (215, Gimnazjum im. św. Stanisława Kostki, Lublin)

31. **Filip Czaplicki** (211, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)

32. **Jakub Staroń** (208, V Liceum Ogólnokształcące, Bielsko-Biała)

33. **Weronika Grzybowska** (204, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)

## finaliści z wyróżnieniem

Jarosław Dzikowski (198, ZS nr 14 Wrocław),  
Adam Kuczaj (194, ZS nr 14 Wrocław),  
Marcin Karpiński (190, I LO Jasło),  
Jakub Łabaj (190, V LO Kraków),  
Krzysztof Piesiewicz (190, VIII LO Warszawa),  
Mateusz Wytrwał (186, ZSO nr 2 Tarnów),  
Paweł Solecki (185, XIV LO Warszawa),  
Maciej Kucharski (184, ZS nr 14 Wrocław),  
Kasper Radek (184, XIV LO Warszawa),  
Maciej Sypetkowski (184, I LO Krasnystaw),  
Michał Tepper (179, ZSO nr 6 Bydgoszcz),  
Zuzanna Pilat (176, XIV LO Warszawa),  
Magdalena Szarkowska (176, I LO Białystok),  
Kamil Rychlewicz (175, I LO Łódź),  
Adrian Naruszko (170, VI LO Radom),  
Martyna Siejba (170, ZS nr 14 Wrocław)



## LXV Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1167 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 507 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 138 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 10 kwietnia br. postanowił przyznać 29 osobom tytuł laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):



### Nagrody stopnia pierwszego

**Karol Kaszuba** (35) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

### Nagrody stopnia drugiego

**Łukasz Bożyk** (30) – VI Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Reytana w Warszawie

**Jan Gwinner** (30) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Adam Klukowski** (30) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Mikołaj Leonarski** (30) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Piotr Pawlak** (30) – Ogólnokształcząca Szkoła Muzyczna I i II stopnia im. Feliksa Nowowiejskiego w Gdańsku

**Kamil Rychlewicz** (30) – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi

**Konrad Jan Paluszek** (29) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Jakub Skorupski** (29) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

### Nagrody stopnia trzeciego

**Michał Wiatrowski** (26) – V Liceum Ogólnokształcące w Bielsko-Białej

**Mateusz Kobak** (25) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

**Grzegorz Adamski** (24) – I Liceum Ogólnokształcące w Szamotulach

**Michał Figlus** (24) – I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim

**Damian Głodkowski** (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Krzysztof Zakrzewski** (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Mariusz Trela** (23) – Publiczne Gimnazjum nr 52 Ojców Pijarów w Krakowie

**Stanisław Frejlik** (22) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Michał Głapa** (22) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

### Nagrody stopnia czwartego

**Konrad Deka** (20) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Grzegorz Dłużewski** (20) – VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy

**Wojciech Klemens** (20) – V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej

**Krzysztof Maziarz** (20) – Zespół Szkół Ogólnokształcących w Krośnie

**Marcin Michorzewski** (20) – 13 Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie

**Tomasz Przybyłowski** (20) – Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu

**Michał Kotwica** (19) – I Społecznego Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Tarnowskiego w Tarnobrzegu

**Daniel Oklesiński** (19) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Paweł Piwek** (19) – Liceum Ogólnokształcące im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach

**Marek Sokołowski** (19) – I Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki w Łomży

**Leszek Sołdan** (19) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Michał Zawalski** (19) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali laureatom i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów.

## IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 13288 uczniów z 1089 szkół, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 1421 uczniów z 591 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego – 259 uczniów ze 138 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów na posiedzeniu w dniu 15 marca br. postanowił przyznać 151 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia.

Tytuł laureata pierwszego stopnia otrzymali:

**Radomił Baran** – Gimnazjum im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

**Jakub Boguta** – Gimnazjum im. św. Stanisława Kostki w Lublinie

**Jakub Marcin Brojacz** – Gimnazjum nr 12 w Rudzie Śląskiej

**Paweł Burzyński** – Gimnazjum nr 24 w Gdyni

**Tomasz Jan Grześkiewicz** – Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Adrian Koźluk** – Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7, Gimnazjum nr 16 w Szczecinie

**Jan Tomasz Lebioda** – Publiczne Gimnazjum nr 1 w Pszczynie

**Maciej Jaromir Maruszcak** – Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7, Gimnazjum nr 16 w Szczecinie

**Juliusz Pham** – Gimnazjum nr 24 w Gdyni

**Paweł Poczobut** – Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7, Gimnazjum nr 16 w Szczecinie

**Tomasz Przybyłowski** – Gimnazjum Akademickie w Toruniu

**Artur Piotr Puzio** – Gimnazjum Dwujęzyczne nr 42 w Warszawie

**Jakub Różycki** – Zespół Szkolno-Przedszkolny, Gimnazjum w Brzeźnicy

**Paweł Sawicki** – Gimnazjum nr 24 w Gdyni

**Philip Smolenski-Jensen** – Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7, Gimnazjum nr 16 w Szczecinie

**Szymon Stolarczyk** – Gimnazjum nr 2 im. Danuty Siedzikówny „Inki” w Ostrołęce

**Magdalena Maria Szybka** – 58 Gimnazjum im. Króla Władysława IV w Warszawie

**Mariusz Trela** – Publiczne Gimnazjum nr 52 Ojców Pijarów w Krakowie

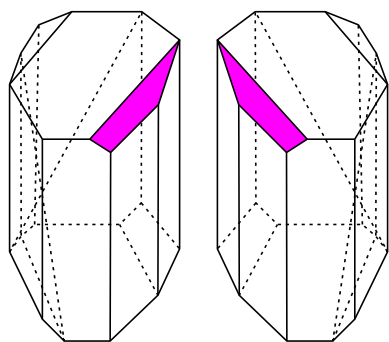


Zadania oraz pełne wersje komunikatów z obu olimpiad można znaleźć na stronach [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl) oraz [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).

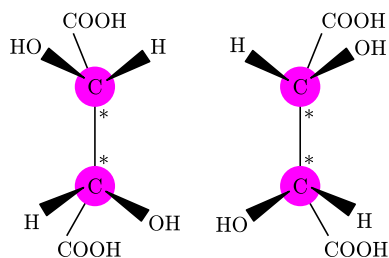
## W lustrzanym świecie cząsteczek

Badania kryształów otrzymanych z osadu pofermentacyjnego wina, prowadzone przez 26-letniego Ludwika Pasteura (1849), ujawniły istnienie ich dwu rodzajów, a Pasteur rozdzielił je pod mikroskopem igłą. Wykazywały lustrzaną symetrię, choć tworzył je ten sam związek, kwas winowy, którego cząsteczki mogły występować w dwu przestrzennych, lustrzanych formach. To była jedyna między nimi różnica. Roztwory rozseparowanych kryształów różnie skręcały spolaryzowane światło – w „prawo” (D) lub „lewo” (L). Takie cząsteczki często porównujemy do rękawiczek – jakkolwiek byśmy ich nie przekręcali, nie można nałożyć lewej rękawiczki na prawą rękę.

Dalsze badania ujawniły istnienie ogromnej liczby tego typu związków. Aby tworzyły się stereoisomery, wystarcza choć jeden tzw. asymetryczny atom węgla w cząsteczce (termin *asymetryczny* oznacza, że wiąże się on z czterema różnymi podstawnikami – omawiany kwas winowy ma dwa węgle asymetryczne).



Kryształy (rys.: Wikipedia) . . .



. . . i stereoisomery kwasu winowego (z lewej L, z prawej D).

Jeżeli prowadzić syntezę chemiczną związku mogącego tworzyć stereoisomery, powstaje po 50% każdego izomeru; taką mieszaninę nazywa się racematem, a proces przechodzenia jednej formy w drugą – racemizacją. Natomiast w żywych organizmach często występuje tylko jeden stereoisomer – klasycznym przykładem są białka, duże cząsteczki zbudowane z dwudziestu kilku aminokwasów, z których wszystkie (poza najmniejszym, glicyną), mogą tworzyć stereoisomery. Białka jednakże zbudowane są z L-aminokwasów, D-aminokwasy znajdujemy tylko pojedynczo w ścianach bakteryjnych i niektórych antybiotykach.

Dramatyczny przykład już ze współczesnych czasów to talidomid, lek, którego zażywanie przez ciężarne kobiety w USA, Niemczech, w latach 60. XX wieku wywoływało poważne zniekształcenia układu kostnego płodu. Talidomid uzyskiwany w syntezie chemicznej był racematem dwu form. Jedna z nich, jak się później okazało w badaniach na zwierzętach, powoduje zniekształcenia kończyn, druga – uśmierza ból. W kolejnych badaniach ustalono, że w lokalnych kwaśnych obszarach ludzkiego organizmu następuje racemizacja każdej z form, co ostatecznie wykluczyło talidomid z listy potencjalnych farmaceutyków stosowanych w czasie ciąży. Jak na ironię, talidomid jest użyteczny w leczeniu trądu i niektórych nowotworów.

Pytaniem oczywistym jest, dlaczego tylko L-aminokwasy budują białka, a D-aminokwasy dla nie-bakteryjnej komórki są wręcz truciznami. D-aminokwasy powstające po racemizacji rozkładającej się organicznej materii w glebie byłyby trujące dla roślin i zwierząt, gdyby nie trawiły ich bakterie. Wykazano to w laboratoryjnych i polowych doświadczeniach w różnych środowiskach, nawet pustynnych. W bakteriach do głosu dochodzi enzym, racemaza. O enzymie tym sądzi się, że pojawił się ewolucyjnie jako enzym odtruwający we wczesnym etapie życia na Ziemi. Racemizacji spontanicznej podlegają powoli wszystkie pozostałości organizmów po ich śmierci. Sądzono, że można by stosunek D/L form aminokwasów w paleobiologicznych próbkach użyć jako znacznika czasu, który upłynął od śmierci danego organizmu. Okazało się jednak, że prędkość racemizacji zależy od wielu czynników, z których najbardziej istotnym jest temperatura. Jej wysokość w historii znaleziska nie może być wiarygodnie oceniona – i tak pomysł ten zarzucono.

Najciekawszym, być może, pytaniem jest to, dlaczego tylko L-aminokwasy zostały użyte przez żywe organizmy we wczesnym okresie powstawania życia na Ziemi. W meteorytach przybyłych z Kosmosu znajdują się L- i D-aminokwasy w formie racematu. A gdyby tak stworzyć świat w odmierzonej stereofornie?

W 2001 roku William Knowles, Ryōji Noyori i Barry Sharpless otrzymali Nagrodę Nobla za syntezę asymetryczną, czyli sposób otrzymywania za pomocą katalizy optycznej substancji czystych enancjomerycznie, czyli składających się z cząsteczek o jednakowej orientacji (terminy: enancjomeryczność, chiralność, orientacja są bliskoznaczne – powstały niezależnie w różnych dyscyplinach). Znaczenia tego osiągnięcia choćby dla produkcji leków nie sposób przecenić.

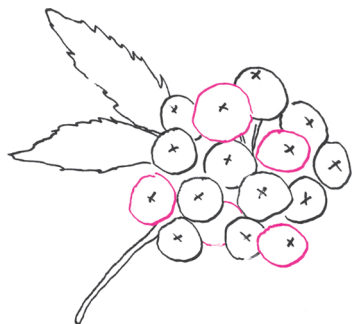
Magdalena FIKUS



## Ze świata USOS. Część 9 – USOS w badaniach socjologicznych

Mikołaj JASIŃSKI, Tomasz ZAJĄC

Instytut Socjologii, Uniwersytet Warszawski



Obok metod ilościowych występują także metody jakościowe, których celem jest dokładniejsze zrozumienie zachodzących zjawisk na podstawie badań dotyczących mniejszych zbiorowości.

Badania socjologiczne niesocjologom najczęściej kojarzą się zapewne z ankietami, czyli badaniami sondażowymi. USOS dzięki aplikacji *Ankieter* stanowi bardzo użyteczne narzędzie w prowadzeniu badań sondażowych wśród studentów. Pozwala na łatwe i efektywne dotarcie z zaproszeniem do badania (przez wyświetlenie go po zalogowaniu się do USOSweb) do dokładnie określonej zbiorowości studentów (np. studentów określonego wydziału, roku itp.). Poprawia to poziom realizacji badania (czyli zwiększa odsetek osób z zakładanej próby/populacji, które biorą udział w badaniu) i jednocześnie nie dopuszcza do badania osób spoza grupy, do której kierowana jest ankieta. Dodatkowo sposób anonimizacji wyników ankiety daje badanym gwarancję, iż ich odpowiedzi nie zostaną przypisane do ich osoby.

Badania sondażowe są jednak tylko jedną z wielu dostępnych metod badań ilościowych, których celem, ogólnie rzecz biorąc, jest pokazanie skali rozmaitych zjawisk społecznych. Zdecydowanie ciekawszym, a jednocześnie mniej znanym sposobem wykorzystania USOS w badaniach społecznych, jest wykorzystanie informacji zgromadzonych w jego rejestrach.

USOS oraz stowarzyszone z nim serwisy, takie jak Internetowa Rejestracja Kandydatów czy Archiwum Prac Dyplomowych, zawierają pełną informację na temat trajektorii studiowania, tj. ścieżki edukacyjnej każdego ze studentów – od wyników maturalnych kandydata, przez zachowania w czasie rekrutacji (rejestracja na studia, ostateczny wybór kierunku studiów po zakwalifikowaniu się), dalej przez oceny z egzaminów, urlopy, stypendia, wyjazdy zagraniczne aż po dyplom. Dzięki danym z USOS można odtworzyć pełne trajektorie studiowania. Oparcie badań na danych zawartych w rejestrach wiąże się z wieloma korzyściami.

Jedną z najoczywistszych, choć niekoniecznie najważniejszą, jest znaczna redukcja kosztów badania. Dane w rejestrach, w tym w USOS, zbierane są przez administrację w ramach jej obowiązków statutowych, niezależnie od prowadzonych badań. Badacz nie musi zatem ponosić kosztów ich zbierania. Nie oznacza to, że korzystanie z danych pochodzących z rejestrów administracyjnych nie wiąże się z żadnymi kosztami. Dane gromadzone przez administrację muszą zostać przetworzone tak, aby bardziej odpowiadały potrzebom badaczy. Na podstawie spisu ocen trzeba stworzyć spis studentów, których atrybutami są oceny z poszczególnych przedmiotów. USOS bowiem nie jest zwykłą prostokątną tablicą z danymi, ale serią powiązanych ze sobą tablic zawierających różne spisy (ocen, osób, zdarzeń itp.). Zmienne statystyczne, nadające się do analiz, muszą zostać wpierw wyliczone na podstawie tych spisów.

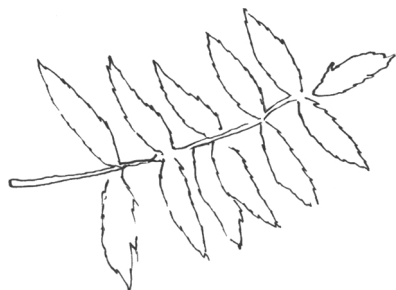
Kolejną zaletą badań opartych na rejestrach jest brak konieczności prowadzenia badań reprezentacyjnych, tj. takich, w których badana jest tylko próba wylosowana z interesującej badacza populacji. Ze względu na koszty badania sondażowe prawie zawsze prowadzone są na próbach, a nie na całych populacjach. W rejestrach gromadzone są informacje o wszystkich obiektach, więc jest możliwe objęcie ich badaniem. Ma to bardzo poważne konsekwencje dla badań.

Wyniki badań reprezentacyjnych obarczone są z zasady pewnymi błędami losowymi, przez co wyniki odbiegają od rzeczywistości. W badaniach wyczerpujących (czyli obejmujących wszystkie obiekty badanej populacji) ten problem nie występuje.

Dysponując danymi na temat populacji, można badać także małe podgrupy. Na Uniwersytecie Warszawskim przykładem byłiby studenci kierunków takich jak muzykologia lub hungarystyka, na które rocznie przyjmowanych jest nie więcej niż kilkanaście osób. Gdyby losowana była próba z ogółu studentów, to szansa znalezienia się w niej studentów ze wspomnianych kierunków byłaby niewielka.

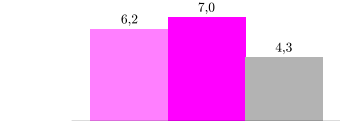
Równie ważnym argumentem za wykorzystaniem danych pochodzących z rejestrów jest rzetelność danych. W badaniach sondażowych poważnym problemem może być niechęć badanych do udzielania informacji lub niepamięć. Bardzo trudno sobie wyobrazić absolwenta, który potrafiłby wymienić wszystkie oceny, jakie uzyskał w trakcie nauki na UW. Można się też spodziewać, że niektórzy będą próbowali zataić pewne wydarzenia z okresu studiów.

Naturalnie, wykorzystanie danych z rejestrów w badaniach społecznych ma także wady. Poza wcześniej wspomnianą koniecznością obróbki danych należy wymienić brak możliwości zbadania opinii. Możemy sprawdzić, że student dostał 5 ze statystyki, ale nie dowiemy się, czy uważa statystykę za przedmiot ciekawy, trudny itd. Opierając się na rejestrach, badacz w praktyce skazany jest na wykorzystanie wyłącznie informacji zawartych w rejestrze. Z rejestrów uczelni dowiemy się, na przykład, do jakiego liceum chodził student, ale nie dotrzemy już do informacji dotyczących wykształcenia rodziców, czy jego sytuacji materialnej, które mogłyby być przydatne w badaniach ruchliwości społecznej.

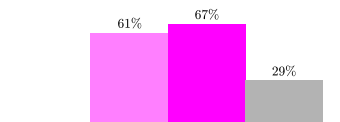


Oto dwa zestawienia dotyczące kierunków  
 bezpieczeństwo wewnętrzne  
 samorząd terytorialny  
 i polityka regionalna  
 prawo

#### PREFERENCJE



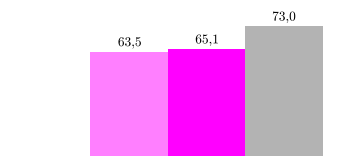
liczba kandydatów na miejsce



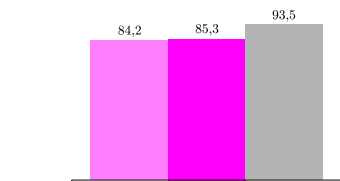
odsetek zakwalifikowanych kandydatów

#### MATURA

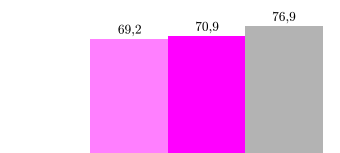
trzy podstawowe przedmioty  
 poziom podstawowy



język polski



język angielski



matematyka

Badania oparte na rejestrach nie muszą ograniczać się do wykorzystania informacji pochodzących tylko z jednej instytucji. Połączenie informacji z różnych rejestrów stwarza zdecydowanie większe możliwości. Pracownia prowadzi obecnie prace nad metodą łączenia informacji na temat przebiegu studiów pochodzących z USOS z informacjami na temat karier zawodowych, które pochodzą z rejestrów Zakładu Ubezpieczeń Społecznych. Chodzi o to, aby w sposób bezpieczny i gwarantujący anonimowość móc prowadzić badania nad związkiem sukcesu edukacyjnego z sukcesem na rynku pracy.

Dzięki tego typu badaniom można by uzyskać rzetelne odpowiedzi na pytania takie jak:

- Po których studiach absolwenci znajdują zatrudnienie?
- Jak długo absolwenci muszą szukać pracy?
- Jak dużo się zarabia po różnych kierunkach studiów?
- Jakie przedmioty na studiach są najsilniej powiązane z sukcesem na rynku pracy?

Odpowiedzi na te pytania będą stanowiły ważny element

Pierwsze badania oparte na rejestrach prowadzone przez Pracownię Ewaluacji Jakości Kształcenia UW dotyczyły rekrutacji na studia. Z badań tych płyną wnioski istotne z punktu widzenia osób ubiegających się o przyjęcie na studia. Powszechnie jako wskaźnik popularności kierunku oraz trudności dostania się na studia wykorzystuje się liczbę kandydatów przypadających na jedno miejsce. Miernik ten nie uwzględnia zupełnie intencji podjęcia studiów. Większość kandydatów dokonuje rejestracji na więcej niż jeden kierunek. Druga rejestracja ma być zabezpieczeniem na wypadek niepowodzenia w rekrutacji na najbardziej preferowany kierunek. W efekcie na wielu kierunkach, które często były wybierane jako awaryjne, znaczna część osób zakwalifikowanych nie podejmuje studiów. Na zwolnione przez nich miejsca mogą zostać zakwalifikowane osoby z niższych miejsc na listach rankingowych. Okazuje się, że na kierunkach o wysokiej liczbie kandydatów przypadających na miejsce odsetek zakwalifikowanych kandydatów, czyli stosunek liczby zakwalifikowanych do liczby kandydatów, jest większy niż na niektórych kierunkach, gdzie liczba kandydatów nie przewyższała znacząco liczby miejsc.

Dokładniejsza analiza zachowań kandydatów pokazuje, że w czasie rekrutacji na studia pierwszego stopnia i jednolite magisterskie zachodzą zjawiska autoselekcji kandydatów. Kandydaci na studia na UW to osoby o ponadprzeciętnych wynikach maturalnych. Osoby o niższych wynikach maturalnych rzadko próbują ubiegać się o przyjęcie na studia na UW, a jeśli się już na to zdecydują, to wyraźnie częściej niż pozostali kandydaci decydują się na mniej oblegane studia. Można także obserwować bardzo wyraźne różnice między wynikami maturalnymi kandydatów na różne kierunki. Nie chodzi tylko o to, że kandydaci na informatykę uzyskali wyższe wyniki z matury z matematyki niż osoby ubiegające się o przyjęcie na polonistykę. Różnice można obserwować także między kierunkami należącymi do tej samej dyscypliny. Okazuje się przy tym, że kierunki, na które kandydują najlepsi kandydaci, niekoniecznie są najbardziej oblegane w sensie liczby kandydatów na jedno miejsce. Doskonałym przykładem na UW jest kierunek prawo. Jest to kierunek o dość przeciętnej liczbie kandydatów przypadających na jedno miejsce. Przeciętne wyniki maturalne kandydatów są jednak dużo wyższe niż wśród kandydatów na kierunki o podobnych wymaganiach rekrutacyjnych. Większość zakwalifikowanych na kierunek prawo podejmuje studia, w związku z czym nie ma potrzeby zakwalifikowywania dodatkowych osób. Szansa zostania zakwalifikowanym jest więc mała. Dodatkowo o wysokiej pozycji kierunku prawo na liście preferencji kandydatów na studia świadczy fakt, że jeśli kandydat dostanie się na dwa kierunki na UW, to prawie zawsze wybiera kierunek prawo.

Korzyścią płynącą dla uczelni z analiz rejestrów jest m.in. możliwość oceny wartości prognostycznej procedur rekrutacyjnych. Łącząc informacje na temat wyników rekrutacyjnych oraz wyników na studiach, można zbadać, czy wynik z rekrutacji dobrze przewiduje oceny na studiach, a więc czy selekcjonując kandydatów, uczelnia faktycznie wybiera osoby, które mają największą szansę odniesienia sukcesu w studiowaniu.

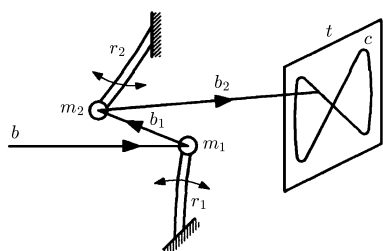
ewaluacji jakości kształcenia na uczelni. Kandydatom i studentom pomogą w wyborze ścieżki edukacyjnej.

Potencjał badań opartych na informacjach z rejestrów nie ogranicza się tylko do, skądinąd ważnych, badań losów absolwentów szkół wyższych. Na podstawie informacji zbieranych przez różne instytucje w Polsce można także prowadzić wiele innych badań, np.

- bardzo precyzyjne analizy pełnych ścieżek edukacyjnych i uwarunkowań doświadczeń edukacyjnych i zawodowych,
- badania kosztów i skuteczności różnych terapii,
- analizy ruchliwości społecznej,
- badania uwarunkowań losów bezrobotnych.

Badania opierające się na informacjach z rejestrów są powszechnie prowadzone w krajach skandynawskich, będących w ścisłej światowej czołówce pod względem innowacyjności. Warto również w Polsce stworzyć możliwości badań wykorzystujących to cenne źródło informacji. Projekt Uniwersytetu Warszawskiego jest ku temu pierwszym krokiem.

Potrzebne przyrządy i materiały: wskaźnik laserowy, dwa brzeszczoty piłki do metalu, kawałki płaskiego zwierciadła na plastikowym podłożu lub folii zwierciadlanej, klej poxipol, plastelina, dwa małe imadła, dwa głośniki elektrodynamiczne niskotonowe o średnicy ok. 20 cm i mocy ok. 50 W, kawałek sprężystej folii poliesterowej, cztery korki do butelek, przewody połączeniowe, cztery gniazdka radiowe, dwa kawałki płyty meblowej lub skleiki o rozmiarach ok. 35×20 cm, kilka wkrętów do drewna, metalowa tarcza, śruba z nakrętką motylkową, kawałek drewnianego pręta, krótką plastikową rurką, zacisk krokodylkowy, nożyczki, nóż, wiertarka z wiertłami, lutownica i cyna oraz dostęp do dwóch generatorów elektronicznych (można wypożyczyć ze szkolnej pracowni fizycznej) i aparatu fotograficznego.



Rys. 1. Schemat najprostszego układu do badania figur Lissajous;  $r_1, r_2$  – brzeszczoty piłek do metalu,  $m_1, m_2$  – zwierciadła,  $b$  – wiązka światła ze wskaźnika laserowego,  $b_1, b_2$  – wiązki światła odbite odpowiednio od pierwszego i drugiego zwierciadła,  $t$  – ekran,  $c$  – figura Lissajous.

Celem naszych doświadczeń jest zbadanie torów, po których porusza się obiekt (lub jego obraz) biorący udział jednocześnie w dwóch ruchach drgających, wykonywanych wzdłuż różnych kierunków. Gdy kierunki niezależnych ruchów są prostopadłe, tory te nazywa się figurami Lissajous.

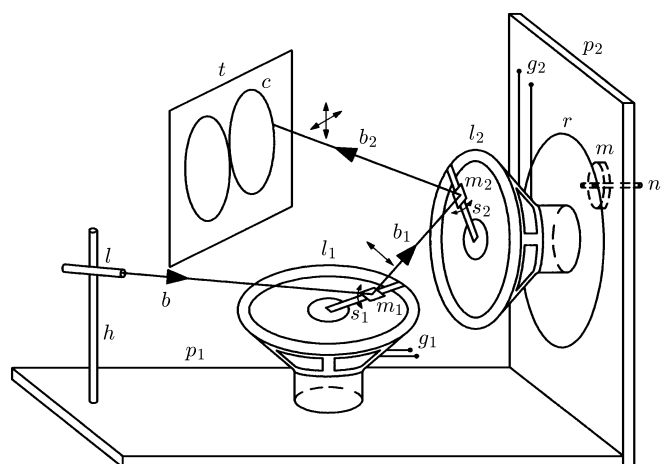
Najprostszy układ do badania figur Lissajous przedstawia rysunek 1. Dwa zwierciadła (lub kawałki folii zwierciadlanej) o rozmiarach około 2×2 cm przyklejamy na końcach brzeszczotów piłki do metalu. Pozostałe końce brzeszczotów mocujemy w imadłach tak, żeby powierzchnie odbijające zwierciadeł były zwrócone ku sobie i znajdowały się w odległości kilku centymetrów. Jeden brzeszczot powinien być ustawiony pionowo, a drugi poziomo. Na pierwsze zwierciadło kierujemy wiązkę światła ze wskaźnika laserowego, która po odbiciu powinna paść na drugie zwierciadło i po następnym odbiciu dać plamkę na ścianie odległej o 2–3 m od układu. W miejscu, gdzie pojawiła się plamka, możemy przymocować na ścianie arkusz białego papieru, który będzie stanowił ekran.

Żeby zaobserwować figury Lissajous, wprawiamy w drgania zwierciadła przez odchylenie końców brzeszczotów od położenia równowagi i puszczenie ich swobodnie. Na ekranie możemy zaobserwować bardzo różne linie, których kształt w istotny sposób zależy od wzajemnego stosunku amplitud, częstotliwości i faz początkowych obu drgań. Amplitudy możemy zmieniać przez różne odchylenia początkowe końców brzeszczotów, częstotliwości – przez zmianę długości części brzeszczotów, wystających ze szczęk imadełek lub dodatkowe obciążenie tych części plasteliną, a fazy – przez puszczenie drugiego brzeszczotu w innym momencie niż pierwszego.

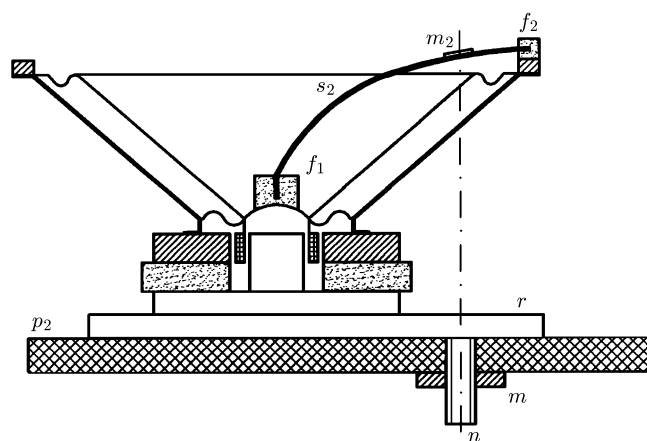
Opisany układ doświadczalny jest bardzo prosty, tani, można go szybko i łatwo zbudować, ale ma również wady. Drgania w krótkim czasie zanikają, trudno jest też sfotografować otrzymane figury, gdyż przy dłuższym czasie ekspozycji obraz staje się nieostry. Znacznie większe możliwości eksperymentowania i lepsze wyniki zapewnia przyrząd z dwoma głośnikami, przedstawiony na rysunku 2. W tym przyrządzie zwierciadła wprawiane są w drgania przez membrany głośników zasilanych z generatorów elektronicznych, co pozwala na precyzyjną regulację częstotliwości, amplitud i utrzymanie stałej różnicy faz. Ponadto, generatory oprócz drgań sinusoidalnych wytwarzają też inne – o przebiegu trójkątnym, prostokątnym lub trapezowym.

W celu zbudowania przyrządu najpierw łączymy dwa kawałki płyty meblowej, otrzymując ramę przyrządu. Przycinamy dwa paski sprężystej folii o szerokości 1 cm i długości równej około 4/3 promienia membrany głośników.

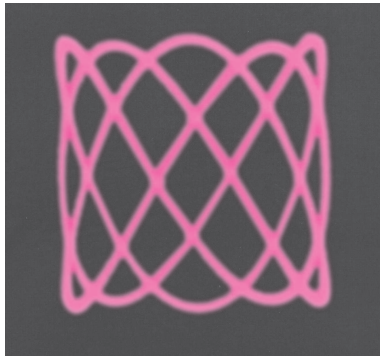
Przygotowujemy cztery kawałki korka z nacięciami do wsunięcia końców folii i dopasowujemy kształt dwóch z nich do środkowej części głośnika (tzw. kopolki),



Rys. 2. Budowa przyrządu z dwoma głośnikami do badania figur Lissajous;  $p_1, p_2$  – płyty (pozioma i pionowa),  $l_1, l_2$  – głośniki (leżący i pionowy),  $s_1, s_2$  – paski sprężystej folii,  $h$  – wspornik,  $l$  – wskaźnik laserowy,  $r$  – tarcza,  $n$  – śruba,  $m$  – nakrętka,  $g_1, g_2$  – wyprowadzenia końcówek głośników; pozostałe oznaczenia jak na rysunku 1.



Rys. 3. Sposób przygotowania głośnika;  $f_1, f_2$  – kawałki korka; pozostałe oznaczenia jak na rysunku 2.



Przykład figury Lissajous otrzymanej za pomocą przyrządu z dwoma głośnikami.

a dwóch pozostałych do brzegu głośnika (rys. 3). Przyklejamy po jednym kawałku korka do kopułki i brzegu obu głośników, a następnie wsuwamy końce pasków z folii w nacięcia korków i przyklejamy do pasków zwierciadełka. Do metalowej tarczy, najlepiej okrągłej, przyklejamy w pobliżu jej brzegu łeb śruby, tarczę przyklejamy zaś do tylnej powierzchni jednego z głośników, ustawiając ją mimośrodowo, tak by oś śruby przechodziła przez środek zwierciadełka umieszczonego na pasku folii. W środku pionowej płyty wierzimy otwór do przełożenia śruby i przykręcamy głośnik do tej płyty za pomocą nakrętki. Na poziomej płycie przyrządu kładziemy drugi głośnik, tak by środki obu zwierciadełek wyznaczały prostą pionową. Ze wskaźnika laserowego trzymanego nad brzegiem leżącego głośnika kierujemy wiązkę światła, tak by uległa odbiciu od obu zwierciadełek i dała plamkę na ekranie. Następnie leżący głośnik przyklejamy do poziomej płyty, zachowując jego położenie. Na wsporniku zrobionym z pręta sklejonego z kawałkiem plastikowej rurki umieszczamy wskaźnik laserowy. Do końcówek głośników przylutujemy przewody i łączymy je z gniazdkami radiowymi, osadzonymi w ramie przyrządu.

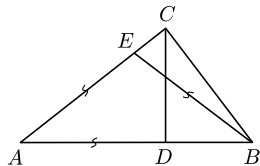
W celu przeprowadzenia doświadczeń głośniki przyłączamy do generatorów, a wskaźnik laserowy trwale włączamy, np. za pomocą krokodyłka naciskającego na przycisk wskaźnika. Zmieniając amplitudy, częstotliwości, kształty sygnałów i ich fazy, możemy w wygodny sposób badać bardzo różne przypadki składania drgań. Obrócenie głośnika pionowego o pewien kąt pozwala też badać efekty składania drgań zachodzących w płaszczyznach ukośnych. Warto zauważyć, że niektóre skomplikowane figury podobne do uzyskanych w tym doświadczeniu, zwane *głoszami*, znajdują się na banknotach i ważnych dokumentach jako trudne do podrobienia elementy zabezpieczające.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1423.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  o przeciwprostokątnej  $AB$  punkt  $D$  jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka  $C$  (rys. 1). Wyznaczyć stosunek  $AC/AD$ , jeśli wiadomo, że okrąg o środku  $A$  i promieniu  $AD$  oraz okrąg o środku  $B$  i tym samym promieniu przecinają się w punkcie  $E$  na przyprostokątnej  $CA$ .



Rys. 1

Rozwiązanie na str. 3

**M 1424.** Udowodnić, że jedynym rozwiązaniem równania  $2x^2 + 3y^2 = 10z^2$  w zbiorze liczb całkowitych jest  $x = y = z = 0$ .

Rozwiązanie na str. 6

**M 1425.** Czy można pokolorować każdą nieujemną liczbę rzeczywistą na czarno lub biało tak, aby żadne trzy różne liczby  $a, b, c$ , spełniające  $a + b = 2c$ , nie były tego samego koloru? Czy można pokolorować w taki sposób zbiór liczb całkowitych nieujemnych?

Rozwiązanie na str. 2

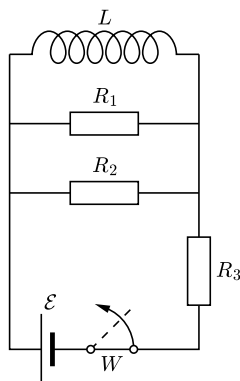
Przygotował Michał NAWROCKI

**F 857.** Znaleźć maksymalny potencjał  $\phi_{\max}$ , do jakiego może naładować się oddalona od innych ciał miedziana kulka oświetlona światłem ultrafioletowym o długości fali  $\lambda = 140$  nm. Praca wyjścia dla miedzi wynosi  $A = 4,47$  eV.

Rozwiązanie na str. 3

**F 858.** W chwili początkowej w przedstawionym na rysunku 2 obwodzie wyłącznik  $W$  jest zamknięty i płynie prąd stały. Jaka ilość ciepła wydzieli się w oporze  $R_1$  po otwarciu wyłącznika? Indukcyjność cewki wynosi  $L$ ,  $R_1 = R_3 = R$ ,  $R_2 = 2R$ , siła elektromotoryczna źródła wynosi  $\mathcal{E}$ . Oporność cewki oraz oporność wewnętrzna źródła są zaniedbywalne.

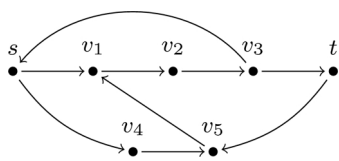
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2

## Informatyczny kącik olimpijski (73): Trasowanie

Tym razem zajmiemy się zadaniem *Routing* z finałów Akademickich Mistrzostw Świata w Programowaniu Zespołowym z 2006 roku. Po przetłumaczeniu historyjki o sieci komputerowej na język teorii grafów brzmi ono następująco. Dany jest skierowany graf  $G = (V, E)$ , mający  $n$  wierzchołków, z których wyróżniamy początkowy  $s$  i końcowy  $t$ . Chcemy znaleźć w grafie  $G$  dwie skierowane ścieżki  $p$  i  $q$  (pierwszą z  $s$  do  $t$ , a drugą z  $t$  do  $s$ ) tak, by łączna liczba wierzchołków, przez które przechodzą te ścieżki, była jak najmniejsza (rys. 1).



Rys. 1. Optymalne rozwiązanie dla powyższego grafu to  $p = (s, v_1, v_2, v_3, t)$  i  $q = (t, v_5, v_1, v_2, v_3, s)$ . Ścieżki przechodzą łącznie przez 6 wierzchołków.

Dla zdania logicznego  $P$  nawias Iwersona  $[P]$  jest zdefiniowany następująco:  
 $[P] = 1$ , jeżeli zdanie  $P$  jest prawdziwe,  
 $[P] = 0$  jeżeli jest fałszywe.

W rozwiązaniu będziemy konstruowali obie ścieżki, poruszając się od wierzchołka  $s$ , dla pierwszej z nich zgodnie ze skierowaniem krawędzi, a dla drugiej – przeciwnie. Zdefiniujemy w tym celu ważony graf skierowany  $G_2 = (V \times V, E_2)$ , w którym z wierzchołka  $(u, v)$  wychodzą krawędzie:

- (1) do  $(\bar{u}, v)$  o wadze  $[\bar{u} \neq v]$ , jeśli  $(u, \bar{u}) \in E$ ,
- (2) do  $(u, \bar{v})$  o wadze  $[\bar{v} \neq u]$ , jeśli  $(\bar{v}, v) \in E$ ,
- (3) do  $(v, u)$  o wadze  $l - 1$ , jeśli w  $G$  istnieje skierowana ścieżka z  $u$  do  $v$  i najkrótsza taka ścieżka zawiera  $l$  krawędzi.

Krawędzie (1) i (2) w  $G_2$  odpowiadają przesuwaniu się ścieżką  $p$  w  $G$  zgodnie ze skierowaniem krawędzi i ścieżką  $q$  przeciwnie do skierowania krawędzi. Natomiast krawędź (3) w  $G_2$  odpowiada przesunięciu się obiema ścieżkami po tych samych krawędziach w  $G$ . Łatwo się więc przekonać, że jeżeli w  $G_2$  istnieje ścieżka z  $(u, v)$  do  $(\bar{u}, \bar{v})$  o wadze  $w$ , to oznacza, że w  $G$  istnieją dwie ścieżki, pierwsza z  $u$  do  $\bar{u}$  i druga z  $\bar{v}$  do  $v$ , takie że sumaryczna liczba wierzchołków, przez jakie przechodzą (nie licząc  $u$  i  $v$ ), jest równa co najwyżej  $w$ . W szczególności, ścieżka w  $G_2$  z  $(s, s)$  do  $(t, t)$  o wadze  $w - 1$  implikuje istnienie rozwiązania zadania o koszcie  $w$ .

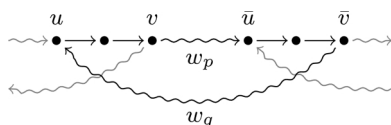
Pozostaje nam wykazać, że jeśli w optymalnym rozwiązaniu ścieżki  $p$  i  $q$  przechodzą przez  $w$  wierzchołków, to w grafie  $G_2$  istnieje ścieżka z  $(s, s)$  do  $(t, t)$  o wadze  $w - 1$ . Niech  $A = (s = a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} = t)$  będzie listą wierzchołków wspólnych dla obu ścieżek w kolejności, w jakiej te wierzchołki występują na ścieżce  $p$ . Powiemy, że wierzchołki  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  tworzą blok, jeśli są one odwiedzane w tej kolejności również przez ścieżkę  $q$  (oznaczymy to przez  $\langle a_i, a_j \rangle$ ). Zauważmy, że z optymalności ścieżek  $p$  i  $q$  wynika, że na każdej ze ścieżek między wierzchołkami należącymi do tego samego bloku nie występują wierzchołki spoza  $A$ . Podobny argument dowodzi tego, że jeśli ścieżka  $q$  odwiedza wierzchołek  $a_j$  jako najbliższy wierzchołek z  $A$  po wierzchołku  $a_i$ , to  $j \leq i + 1$ . Jeśli więc  $A$  podzielimy na maksymalne bloki w kolejności ich odwiedzania przez ścieżkę  $p$ , to ścieżka  $q$  będzie je odwiedzać w odwrotnej kolejności. Ponadto pierwszy i ostatni blok podziału będą to odpowiednio  $\langle s, s \rangle$  i  $\langle t, t \rangle$ .

Pokażemy (rys. 2), że dla kolejnych dwóch bloków  $\langle u, v \rangle$  i  $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  tego podziału istnieje ścieżka w grafie  $G_2$  z  $(v, u)$  do  $(\bar{v}, \bar{u})$  o wadze  $w_p + w_q + l$ , gdzie  $w_p, w_q$  to odpowiednio liczby wierzchołków spoza  $A$  odwiedzanych przez ścieżkę  $p$  od  $v$  do  $\bar{u}$  oraz przez ścieżkę  $q$  od  $\bar{v}$  do  $u$ , natomiast  $l$  to rozmiar bloku  $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ . Istotnie, z  $(v, u)$  do  $(\bar{u}, \bar{u})$  przechodzimy  $w_p + 1$  krawędziami (1), następnie z  $(\bar{u}, \bar{u})$  do  $(\bar{u}, \bar{v})$  przechodzimy  $w_q + 1$  krawędziami (2) o łącznej wadze  $w_q + [\bar{u} \neq \bar{v}]$  i ostatecznie (jeśli  $\bar{u} \neq \bar{v}$ ) używamy krawędzi (3) o wadze  $l - 2$ , aby dostać się z  $(\bar{u}, \bar{v})$  do  $(\bar{v}, \bar{u})$ . W ten sposób konstruujemy ścieżkę w  $G_2$ , która odwiedza wszystkie bloki i ma wagę równą  $w - 1$ .

Tak więc dowiedliśmy, że aby znaleźć rozwiązanie, wystarczy, że wyznaczymy najlżejszą ścieżkę z  $(s, s)$  do  $(t, t)$  w grafie  $G_2$ . Możemy to zrobić algorytmem Dijkstry, na bieżąco konstruując graf  $G_2$ . Za każdym razem, gdy z kolejki priorytetowej wyciągamy wierzchołek  $(u, v)$ , przechodzimy po liście sąsiedztwa  $u$  w  $G$  i relaksujemy krawędzie (1), następnie przechodzimy po liście sąsiedztwa  $v$  w grafie transponowanym  $G^T$  i relaksujemy krawędzie (2); w końcu sprawdzamy, czy  $u \neq v$  i jeśli tak, relaksujemy krawędź (3).

Graf  $G_2$  ma  $O(n^2)$  wierzchołków. Każdy z nich jest początkiem  $O(n)$  krawędzi (1) i (2) i co najwyżej jednej krawędzi (3), zatem w  $G_2$  mamy  $O(n^3)$  krawędzi. Ponadto uaktualnienie wagi wierzchołka podczas relaksacji będzie wykonywane tylko  $O(n^2)$  razy, gdyż krawędzie wchodzące do każdego wierzchołka w  $G_2$  mają co najwyżej trzy różne wagi. Zatem złożoność czasowa rozwiązania wyniesie  $O(n^3)$ . Tyle też będzie trwało obliczenie długości najkrótszych ścieżek pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków w  $G$ , jeśli użyjemy do tego algorytmu Floyd–Warshalla.

Tomasz IDZIASZEK



Rys. 2



## Metamateriał znaleziony w łazience

Metamateriały wykazują cechy, które zależą od ich struktury w skali większej niż cząsteczkowa. Najczęściej chodzi o zaskakujące możliwości ich interakcji z falami elektromagnetycznymi, ale równie dobrze może chodzić o wpływanie na fale akustyczne.

I tu właśnie dowiedziano się [1] zaskakującej rzeczy o materiale, którego znacząca część brzydszej połowy cywilizowanej ludzkości używa niemal co dzień rano. Tak, chodzi o piankę do golenia.

Żeby uniezależnić się od receptur poszczególnych firm specjalizujących się w wytwarzaniu tejże, badano pianę utworzoną z wodnego roztworu zawierającego  $10 \text{ g/dm}^3$  dodecylosiarczanu sodu ( $\text{C}_{12}\text{H}_{25}\text{SO}_4\text{Na}$ , tzw. substancji powierzchniowo czynnej, mówiąc po prostu – mydła) oraz  $0,5 \text{ g/dm}^3$  gumy ksantenowej (polisacharydu, stosowanego również jako dodatek do żywności o symbolu E415; tu dodawanego w celu ograniczenia odwadniania się piany) oraz powietrza nasyconego perfluorowęglowodorem  $\text{C}_6\text{F}_{14}$ , nierozpuszczalnym gazem spowalniającym starzenie się piany polegające na powiększaniu się pęcherzyków kosztem ich liczby (ciśnienie w pęcherzykach jest odwrotnie skorelowane z ich wielkością, więc wypełniający je gaz dyfunduje z zanikających mniejszych do rosnących większych).

Pianę tworzą za pomocą tzw. metody dwustrzykawkowej, polegającej na umieszczeniu odpowiedniej ilości roztworu w jednej strzykawce (od 3% do 22% objętościowo), natomiast w połączonej z nią drugiej, odpowiedniej ilości gazu, a następnie wielokrotnego przetłaczania powstającej piany z jednej strzykawki do drugiej.

Wielkość pęcherzyków (oraz jej zmianę w wyniku starzenia) oceniano, badając utworzoną z małej ich próbki tratwę, umieszczaną na powierzchni takiego samego roztworu. Promień pęcherzyków zmieniał się powoli (w ciągu kilkudziesięciu minut) od około  $15 \mu\text{m}$  do około  $50 \mu\text{m}$ , wykazując bardzo małe zróżnicowanie wielkości (w danym momencie).

Badanie polegało na sprawdzeniu, jak przez pianę transmitują się fale ultradźwiękowe w celu zaproponowania metody badania jakości piany, której różne rodzaje używane są w wielu zastosowaniach praktycznych.

Okazuje się, że wyniki podobnych badań są zadziwiająco fragmentaryczne i niespójne.

Mierzono zarówno transmisję (prędkość fazową), jak i tłumienie. W tym celu umieszczano pianę między dwiema cienkimi plastikowymi błonami oddalonymi o  $500 \text{ mikrometrów}$ .

Dla częstości do kilkudziesięciu kHz zmierzono prędkość fazową lekko powyżej  $32 \text{ m/s}$ , natomiast dla częstości powyżej dwustu kHz prędkość około  $220 \text{ m/s}$ . Dla częstości pośrednich zaobserwowano bardzo dużą dyspersję i atenuację, z maksymalnym tłumieniem dla (zależnej od gęstości) wartości około  $150 \text{ kHz}$ .

W pracy [1] zaproponowano również prosty model dobrze opisujący własności badanej piany. W pierwszym przybliżeniu pianę można sprowadzić do jednowymiarowej struktury, składającej się z błon o promieniu odpowiadającym rozmiarowi pęcherzyków rozpiętych na obręczach, w których znajduje się większość płynu.

Dla małych częstości zarówno obręcze, jak i rozpięte na nich błony oscylują w sposób zgodny w fazie z oscylacjami fali ciśnienia. Dla dużych częstości amplituda oscylacji obręczy jest bardzo mała. Tylko błony oscylują zgodnie w fazie. Natomiast dla częstości pośrednich zgodna w fazie oscylacja obręczy jest więcej niż kompensowana przez niezgodną w fazie oscylację błon, generowaną przede wszystkim przez reakcję napięcia powierzchniowego na siłę wymuszającą. W efekcie średnia gęstość rezonansowo oscyluje w fazie przeciwnej do fali ciśnienia (ujemna gęstość efektywna), co daje możliwość całkowitego wytłumienia dźwięku w dość szerokim zakresie częstości.

Ujemna efektywna gęstość jest cechą tytułowych metamateriałów (akustycznych).

Ta własność piany została zaobserwowana (i wyjaśniona) po raz pierwszy.

W dodatku pojawia się ona naturalnie (bez potrzeby sztucznej modyfikacji struktury) oraz pomimo jej regularności. Może to dać zupełnie nowe spojrzenie na projektowanie akustycznych metastruktur.

Piotr ZALEWSKI

### Interesują Cię nauki ścisłe?

Chcesz odkryć tajniki nauki, które nauczyciele ukrywają przed Tobą w szkole i poznać innych pasjonatów?

### WWW to coś dla Ciebie!

Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne to coroczna impreza organizowana przez studentów Uniwersytetu Warszawskiego. Składa się z 10 dni zajęć dla licealistów zainteresowanych matematyką, fizyką i informatyką. W tym roku Warsztaty odbędą się

w Głogowie

w dniach 18–29 sierpnia.

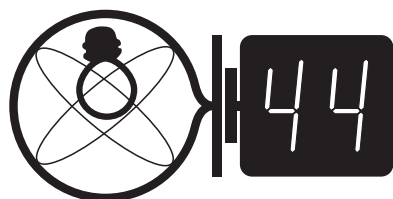
Do wyboru jest wiele kilkudniowych bloków zajęć, na których słuchacze samodzielnie piszą programy, czy robią doświadczenia.

Natomiast wieczorami możesz liczyć na dobrą zabawę przy grach planszowych, go i innych, na inspirujące rozmowy i luźne wykłady. Szczegóły na temat programu i zasad kwalifikacji znajdziesz na naszej stronie

<http://warsztatywww.wikidot.com>

[1] J. Pierre, B. Dollet, V. Leroy, *Resonant acoustic propagation and negative density in liquid foams*, Phys. Rev. Lett. **112**, 148307 (2014), DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.148307.

# Klub 44

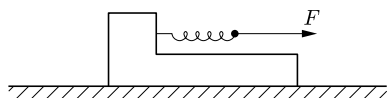


Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VIII 2014

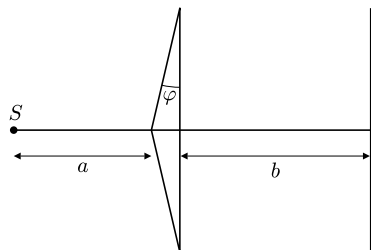
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 566 ( $WT = 1,97$ ), 567 ( $WT = 2,50$ ), 568 ( $WT = 1,20$ ) i 569 ( $WT = 2,55$ ) z numerów 11/2013 i 12/2013

Krzysztof Magiera	Łosiów	47,36
Michał Koźlik	Gliwice	43,14
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	22,15

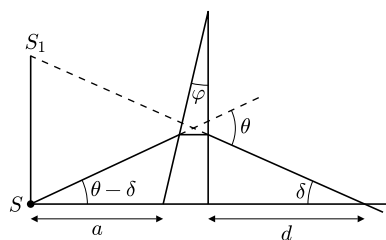
Liczbę 44 punktów po raz trzeci przekroczył pan Krzysztof Magiera. Gratulujemy!



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**573.** Rozważmy dowolny promień przechodzący przez pryzmat. Oznaczmy jego kąt odchylenia w pryzmacie przez  $\theta$ , a kąt przecięcia promienia wychodzącego z pryzmatu z osią optyczną przez  $\delta$  (rys. 3). Dla małych kątów  $\theta = \varphi(n - 1)$ . Niech punkt  $S_1$  będzie przecięciem przedłużenia promienia wychodzącego z pryzmatu z prostą prostopadłą do osi optycznej przechodzącą przez  $S$ . Mamy związki:  $y = a \operatorname{tg}(\theta - \delta) \approx (\theta - \delta)a$ ,  $d = y/\delta = a(\theta - \delta)/\delta$ . Długość odcinka  $|SS_1|$  wynosi  $H = (a + d)\delta = a\theta = a\varphi(n - 1)$  i nie zależy

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z fizyki nr 580, 581

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**580.** Do powierzchni nieważkiej sfery przymocowany jest mały koralik, który możemy traktować jak punkt materialny. Sfera leży na poziomej podstawie, w chwili początkowej koralik znajduje się w najwyższym położeniu. Zakładamy, że sfera nie ślizga się po podstawie, dopóki wywiera na nią siłę nacisku. Na jakiej wysokości nad podstawką znajdzie się koralik po wytrąceniu z położenia równowagi, gdy sfera zacznie ślizgać się po podstawie?

**581.** Przez płaski kondensator, wypełniony dielektrykiem o stałej dielektrycznej  $\varepsilon$  i oporze właściwym  $\rho$ , płynie prąd  $I(t) = I_0 \sin \omega t$ . Znaleźć amplitudę napięcia na kondensatorze. Powierzchnia okładek kondensatora wynosi  $S$ , odległość między okładkami jest równa  $d$ .

### Rozwiązania zadań z numeru 2/2014

Przypominamy treść zadań:

**572.** Dynamometr ciągnięty jest po gładkim poziomym stole siłą  $F = 4\text{ N}$  (rys. 1). Co wskazuje dynamometr, jeżeli masa sprężyny równa jest masie obudowy? Dynamometr został wyskalowany w położeniu poziomym.

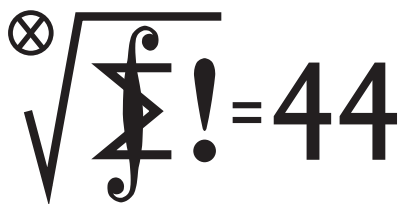
**573.** Na bipryzmat przedstawiony na rysunku 2 pada światło monochromatyczne ze źródła punktowego  $S$ . Na ekranie powstaje obraz interferencyjny. Znaleźć odległość pierwszego maksimum interferencyjnego od środka ekranu. Dane są:  $a$  – odległość źródła od bipryzmatu,  $b$  – odległość bipryzmatu od ekranu,  $\varphi$  – kąt łamiący każdego z pryzmatów, który jest bardzo mały,  $n$  – współczynnik załamania szkła, z którego wykonany jest bipryzmat,  $\lambda$  – długość fali światła emitowanego przez źródło. Promienie interferujące padają na ekran prawie prostopadle.

**572.** Wskazanie dynamometru to  $T = k\Delta l$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem sprężystości sprężyny, a  $\Delta l$  jej wydłużeniem. Gdy dynamometr jest nieruchomy, siła rozciągająca sprężynę jest taka sama wzdłuż całej sprężyny, a dowolne jednakowe odcinki sprężyny rozciągnięte są o taką samą wielkość. Gdy dynamometr porusza się z przyspieszeniem  $a = F/(2M)$ , gdzie  $M$  jest masą sprężyny, siła rozciągająca sprężynę w odległości  $x$  od jej końca przymocowanego do obudowy wynosi  $T(x) = \frac{M + Mx/l}{a} = \frac{(1 + x/l)F}{2}$ , czyli zmienia się liniowo od wartości  $F/2$  do  $F$ . Podzielmy myślowo nierozciągniętą sprężynę na  $n$  jednakowych części na tyle małych, że po rozciągnięciu siłę sprężystości  $T_i$  wzdłuż każdej części możemy uznać za stałą. Współczynnik sprężystości każdej takiej części to  $k_n = nk$ , bo wydłużenie całej nieruchomej sprężyny jest  $n$  razy większe niż wydłużenie pojedynczej części:  $\Delta l_0 = F/k = nF/k_n$ . Gdy dynamometr porusza się z przyspieszeniem  $a$ , wydłużenie sprężyny wynosi  $\Delta l = \sum_1^n T_i/(nk)$ . Ponieważ siła  $T(x)$  jest liniową funkcją  $x$ ,  $\sum_1^n T_i$  jest sumą szeregu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz równy jest  $F/2$ , a ostatni  $F$ , równą  $\frac{n(F + F/2)}{2}$ . Wskazanie poruszającego się z przyspieszeniem dynamometru wynosi:

$$k\Delta l = \frac{F + F/2}{2} = \frac{3}{4}F = 3\text{ N.}$$

od kąta padania światła na pryzmat, zatem przedłużenia wszystkich promieni wychodzących z pryzmatu przecinają się w tym samym punkcie. Promienie wychodzące z dwóch źródeł  $S_1$  i  $S_2$  (od dolnego pryzmatu) odległych od siebie o  $2H$ . Wzór na pierwsze maksimum interferencyjne ma postać:  $2H \sin \alpha = \lambda$ . Szukana odległość między maksimami wynosi:  $x = (a + b)\alpha = \frac{(a + b)\lambda}{2a\varphi(n - 1)}$ .

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VIII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
669 ( $WT = 1,38$ ) i 670 ( $WT = 2,44$ )  
z numeru 11/2013

Jędrzej Garnek	Poznań	40,03
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,87
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Olszewski	Warszawa	38,48
Wojciech Maciak	Warszawa	38,32
Paweł Duch	Bielawa	36,83
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,72

## Zadania z matematyki nr 683, 684

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**683.** Dane są dwa przystające okręgi, przecinające się w punktach  $A$  i  $B$ . Punkt  $X$  leży na jednym z tych okręgów, punkt  $Y$  na drugim, przy czym prosta  $XY$  nie przechodzi ani przez  $A$ , ani przez  $B$ , ani przez środek odcinka  $AB$ . Punkt  $Z$  jest wierzchołkiem równoległoboku  $XYZ$ . Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach  $AXZ$ ,  $AYZ$  są przystające do dwóch danych okręgów.

**684.** Wykazać, że dla żadnej pary różnych liczb pierwszych  $p, q$  układ równań

$$a^2 + b^2 = p, \quad x^2 + y^2 = q, \quad (a-x)^2 + (b-y)^2 = |p-q|$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych  $a, b, x, y$ .

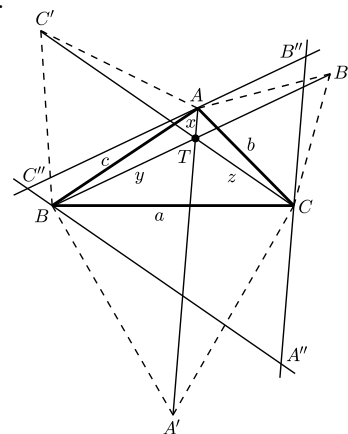
Zadanie 684 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

## Rozwiązania zadań z numeru 2/2014

Przypominamy treść zadań:

**675.** Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości  $n$  wybieramy losowo jedno. Wyznaczmy najmniejszą liczbę naturalną  $n$ , dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

**676.** W trójkącie o bokach długości  $a, b, c$ , o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od  $120^\circ$ , znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi  $d$ . Dowieść, że zachodzi równość  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$ .



**675.** Niech  $p_n$  będzie prawdopodobieństwem wylosowania słowa *dobrego*, tj. takiego, w którym dwie wyróżnione litery nie sąsiadują, zaś  $q_n = 1 - p_n$  prawdopodobieństwem wylosowania słowa *złego*. Zapiszmy te wartości jako sumy  $p_n = p'_n + p''_n$ ,  $q_n = q'_n + q''_n$ , gdzie pojedynczy prim odpowiada sytuacji, gdy ostatnia litera słowa jest niewyróżniona, a podwójny prim – sytuacji, gdy ostatnia litera jest wyróżniona. Mamy zależności rekurencyjne

$$p'_n = p_{n-1} \cdot \frac{22}{24}, \quad q'_n = q_{n-1} \cdot \frac{22}{24}, \\ p''_n = p'_{n-1} \cdot \frac{2}{24} + p''_{n-1} \cdot \frac{1}{24}, \quad q''_n = q'_{n-1} \cdot \frac{2}{24} + q''_{n-1} \cdot \frac{1}{24};$$

wyjaśnienie ostatniej z nich: zle  $n$ -słowo, zakończone jedną z wyróżnionych liter, można uzyskać z dowolnego złego  $(n-1)$ -słowa (dopisując na końcu jedną z tych dwóch liter), bądź z dobrego  $(n-1)$ -słowa, zakończonego wyróżnioną literą (dopisując drugą wyróżnioną literę); uzasadnienie pozostałych zależności jest podobne. Odejmując dwie ostatnie równości otrzymujemy

$$p''_n - q''_n = \frac{1}{12}(p'_{n-1} - q_{n-1}) = \frac{1}{12}(p_{n-2} \cdot \frac{22}{24} - (1 - p_{n-1})) \\ = \frac{1}{12}p_{n-1} + \frac{11}{144}p_{n-2} - \frac{1}{12}.$$

Jednocześnie ta sama różnica daje się zapisać jako

$$p''_n - q''_n = (p_n - p'_n) - (q_n - q'_n) \\ = (p_n - q_n) - (p_{n-1} \cdot \frac{22}{24} - q_{n-1} \cdot \frac{22}{24}) \\ = (2p_n - 1) - \frac{11}{12}(2p_{n-1} - 1).$$

Przyrównanie prawych stron uzyskanych równości daje jednorodną rekurencję liniową drugiego rzędu

$$p_n = \frac{23}{24}p_{n-1} + \frac{11}{288}p_{n-2}.$$

Wraz z wartościami początkowymi  $p_0 = p_1 = 1$  wyznacza ona cały ciąg  $(p_n)$ . Numerycznie można się przekonać, że  $p_{207} > 0,5014$ ,  $p_{208} < 0,4999$ , a zatem liczba, o którą pyta zadanie, wynosi 208.

Oczywiście można też uzyskać zwykłą metodą rozwiązanie tej ostatniej rekurencji w postaci

$$p_n = A\alpha^n + B\beta^n; \quad \alpha = \frac{23 + \delta}{48}, \quad \beta = \frac{23 - \delta}{48}, \\ A = \frac{1}{2} + \frac{25}{2\delta}, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{25}{2\delta} \quad (\delta = \sqrt{617})$$

i zauważyć, że  $p_n > A\alpha^n$  dla  $n$  nieparzystych,  $p_n < A\alpha^n$  dla  $n$  parzystych. Wystarczy więc sprawdzić, że  $A\alpha^{207} > 0,5 > A\alpha^{208}$ , czyli że liczba  $(\ln 2A)/(-\ln \alpha)$  leży pomiędzy 207 i 208. Tak w istocie jest; jej przybliżona wartość wynosi 207,89.

**676.** Wzór dany do udowodnienia przedziwnie przypomina wzór z zadania 658 (nr 3/2013) – to nie przypadek. Tam była mowa o czworokątach; ale w omówieniu rocznym (nr 2/2014) był dyskutowany przypadek dowolnego wymiaru: jeśli w przestrzeni  $\mathbb{R}^{n-1}$  umieścimy sympleks foremny o krawędzi  $k$ , to dla dowolnego punktu tej przestrzeni, leżącego w odległościach  $d_1, \dots, d_n$  od jego wierzchołków, zachodzi równość

$$(k^2 + d_1^2 + \dots + d_n^2)^2 = n(k^4 + d_1^4 + \dots + d_n^4).$$

Tu zastosujemy skromniutki jego wariant:  $n = 3$ .

Niech  $ABC$  będzie trójkątem rozważanym obecnie, o bokach  $a, b, c$ . Punkt, o którym mowa, to *punkt Toricellego* (lub *punkt Fermata*)  $T$ ; założenie o kątach  $< 120^\circ$  gwarantuje, że  $T$  leży wewnątrz trójkąta, na przecięciu odcinków  $AA', BB', CC'$  – gdzie litery z primami oznaczają wierzchołki trójkątów równobocznych  $BCA', CAB', ABC'$ , zbudowanych na zewnątrz trójkąta  $ABC$  – to własność dobrze znana (wyprowadzenie i komentarze można znaleźć w wielu miejscach; choćby [http://pl.wikipedia.org/wiki/Punkt\\_Fermata](http://pl.wikipedia.org/wiki/Punkt_Fermata)).

Przez punkty  $C, A, B$  prowadzimy proste równoległe odpowiednio do  $AA', BB', CC'$ ; przecinając się, tworzą one trójkąt równoboczny  $A''B''C''$  (oznaczenia jak na rysunku). W trapezach równoramiennych (o kątach  $60^\circ, 120^\circ$ )  $CTBA'', ATCB'', BTAC''$  zachodzą równości

$$|A''T| = |BC| = a, \quad |B''T| = |CA| = b, \quad |C''T| = |AB| = c.$$

Z rysunku widać ponadto, że trójkąt  $A''B''C''$  ma bok długości  $|TA| + |TB| + |TC|$ , czyli  $d$ .

Wzór przytoczony na wstępie stosujemy (w wersji  $n = 3$ ) do trójkąta  $A''B''C''$  oraz punktu  $T$ , leżącego w odległościach  $d_1 = a, d_2 = b, d_3 = c$  od  $A'', B'', C''$ ; teraz  $k = d$ , i mamy tezę zadania.

Takie rozwiązanie jest zgodne z intencją pana Tomasza Ordowskiego (który zaproponował oba te zadania, 658 i 676). Możliwe jest też rozwiązanie znacznie bardziej bezpośrednie (choć i bardziej rachunkowe). Odcinki  $TA, TB, TC$  tworzą kąty po  $120^\circ$ . Oznaczając ich długości przez  $x, y, z$ , mamy  $a^2 = y^2 + z^2 + yz$  (i podobnie  $b^2, c^2$ ). Podstawiając te wyrażenia do wzoru z tezy zadania dostajemy po obu stronach wielomiany symetryczne zmiennych  $x, y, z$ , dające się wyrazić przez podstawowe formy symetryczne  $d = x + y + z, e = yz + zx + xy, f = xyz$  (to kilka linijek prostych przekształceń). Zarówno po lewej, jak i po prawej stronie, wyrazy zawierające  $f$  ulegają redukcji; i jedna, i druga strona sprowadza się do wyrażenia  $(3d^2 - 3e)^2$ .



## Prosto z nieba: Ménage à trois

Według szacunków wynikających z obserwacji bliskiego sąsiedztwa Słońca około 60% gwiazd ma towarzysza.

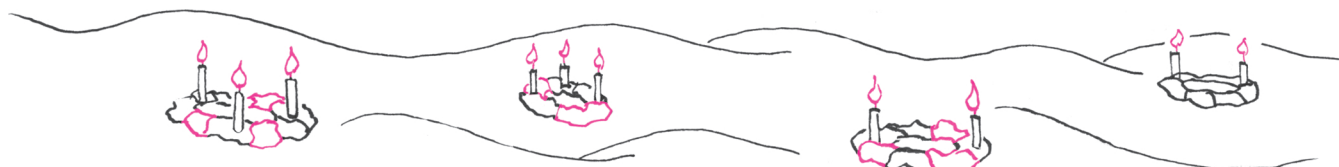
Niektóre pulsary milisekundowe (takie, które rotują z częstością większą niż 100 Hz) spowalniają swój bieg niesłychanie powoli, w tempie mniejszym niż  $10^{-20}$  s/s.

Jeśli teoria względności poprawnie opisuje oddziaływanie grawitacyjne w tym reżimie mas i prędkości, przyciąganie zewnętrznego białego karła będzie jakościowo takie samo dla obu wewnętrznych obiektów, a energia wiązania relatywistycznej gwiazdy neutronowej będzie „dokładać się” do bilansu sił jak zwykła masa.

Większość gwiazd, które widzimy na niebie jako pojedyncze punkty, jest w rzeczywistości układami podwójnymi, a czasem nawet wielokrotnymi. Układy podwójne cieszą astronomów, ponieważ grawitacyjny związek dwóch gwiazd umożliwia dowiedzenie się czegoś na temat składników układu. Za pomocą obserwacji krzywych blasku oraz przesuwania się linii widmowych dowiadujemy się, na przykład, o rozmiarach orbit i masach gwiazd. Szczególnie interesującą klasą układów wielokrotnych są takie, w których jednym ze składników jest pulsar – bardzo gęsta i stabilnie rotująca gwiazda neutronowa wyposażona w silne pole magnetyczne. Pulsar na orbicie to skarb, ponieważ zachowuje się niczym niezwykle precyzyjny, stabilny zegarek podobny do GPS, umożliwiając bardzo dokładne pomiary położenia i prędkości. Jednym z niedawno odkrytych interesujących układów wielokrotnych jest PSR J0337+1715, pierwszy pulsar w towarzystwie dwóch białych karłów. Gwiazda neutronowa o masie  $1,44 M_{\odot}$  obraca się wokół swojej osi z częstością 366 Hz – jest zatem najprawdopodobniej pulsarem z odzysku, „rozkreconym” podczas akrecji materii z towarzysza. Towarzysz natomiast to obecnie biały karzeł o masie  $0,2 M_{\odot}$ , znajdujący się na orbicie o okresie 39 godzin. Drugi biały karzeł o masie  $0,41 M_{\odot}$  znajduje się o wiele dalej; obiega wewnętrzny układ z okresem 327 dni. Obie orbity są praktycznie kołowe, a ich płaszczyzny prawie pokrywają się. Jest to dość zaskakujące i ciekawe dla studiujących ewolucję gwiazd, ponieważ zwykle zewnętrzna gwiazda układu potrójnego znajduje się na eliptycznym, nachylonym do wewnętrznej orbity torze, co interpretuje się jako przechwycenie trzeciej gwiazdy przez pole grawitacyjne układu podwójnego.

Badający układ radioastronomowie planują wykorzystać fortunne ułożenie gwiazd do testów ogólnej teorii względności – sprawdzenia *pełnej zasady równowagi* w oddziaływaniu siły grawitacyjnej zewnętrznego białego karła na składniki wewnętrznego układu, słabo związanej grawitacyjnie białego karła i zwartą, relatywistyczną gwiazdę neutronową.

Michał BEJGER



## Niebo w czerwcu

W tym miesiącu dojdzie do ciekawych spotkań na nocnym niebie. Dwa razy będziemy mogli podziwiać interesujące koniunkcje, czyli sytuacje, gdy ciała niebieskie zbliżają się na niewielkie odległości na tle nieba. Jeżeli pogoda dopisze i niebo będzie bezchmurne, 7 VI będziemy mogli zobaczyć koniunkcję Księżyca z Marsem. Księżyc przejdzie w odległości zaledwie 1,5 stopnia od Czerwonej Planety na wieczornym niebie. Łatwo będzie odnaleźć oba ciała niebieskie już po zachodzie Słońca nad południowym horyzontem na tle gwiazdozbioru Panny, ponieważ będą bardzo jasne: Księżyc w okolicy pierwszej kwadry osiągnie jasność około  $-12$ , natomiast Mars około  $-0,8$  wielkości gwiazdowej. Do obserwacji najlepiej będzie użyć lornetki lub wykonać obserwacje „gołym okiem”.

Trzy dni później, 10 VI, dojdzie do kolejnej ciekawej koniunkcji, tym razem pomiędzy Księżycem a Saturnem (o jasności około 0,8 wielkości gwiazdowej), które zbliżą się do siebie na odległość około 30 minut łuku w samym

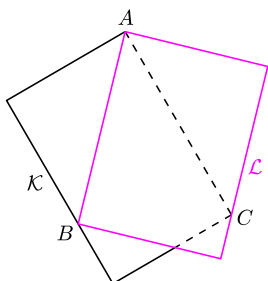
centrum gwiazdozbioru Wagi. Zjawisko to będzie widoczne przez większą część nocy: nad południowym horyzontem we wczesnych godzinach wieczornych oraz nad zachodnim horyzontem przed świtem. Najlepsze do obserwacji tej koniunkcji będzie znów nieuzbrojone oko lub lornetka.

Z kolei 21 VI rozpocznie się długo wyczekiwane astronomiczne lato. Oczywiście, tylko dla północnej półkuli naszej planety, bo dla południowej – zima. Przesilenie letnie oznacza moment maksymalnego wychylenia osi obrotu Ziemi w kierunku Słońca, gdy biegun północny jest bliżej Słońca niż południowy. W rezultacie na półkuli północnej będziemy mieć najdłuższy dzień i najkrótszą noc roku, a na półkuli południowej odwrotnie: najkrótszy dzień i najdłuższą noc. W dniu przesilenia Słońce znajduje się w południe dokładnie w zenicie dla obserwatorów znajdujących się na Zwrotniku Raka, na szerokości geograficznej  $23^{\circ}26'16''$  N.

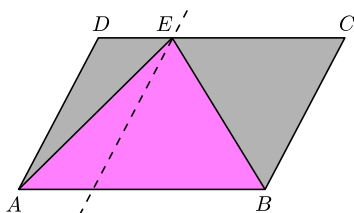
Magda OTULAKOWSKA-HYPKA



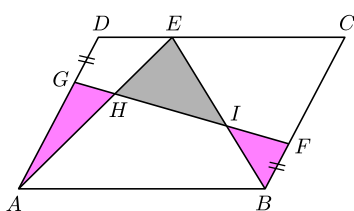
[ $\mathcal{F}$ ] oznacza pole figury  $\mathcal{F}$ .



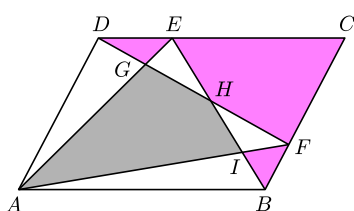
Rys. 1



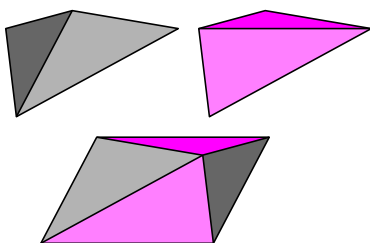
Rys. 2. Kolorowe = szare.



Rys. 3. Kolorowe = szare.



Rys. 4. Kolorowe = szare.



Rys. 5. Kolorowe = szare.

Zadanie 4 pochodzi z IV Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, a rysunek 5 z książki *When Less is More*, C. Alsina i R. Nelsen, MAA 2009.

## Połowa równoległoboku

Joanna JASZUŃSKA

Prostokątne kartki  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{L}$ , niekoniecznie o tych samych wymiarach, położono jak na rysunku 1. Czy kartka  $\mathcal{L}$  przykrywa ponad połowę kartki  $\mathcal{K}$ ?

W rozwiązaniu tej zagadki pomocna jest następująca obserwacja.

**Twierdzenie (\*).** *Jeśli punkt  $E$  należy do boku  $CD$  równoległoboku  $ABCD$ , to  $[ABE] = \frac{1}{2}[ABCD]$ .*

**Dowód.** Prosta przez punkt  $E$ , równoległa do odcinka  $AD$ , dzieli  $ABCD$  na dwa równoległoboki (rys. 2). Trójkąt  $ABE$  utworzony jest z ich połówek.  $\square$

W zagadce o kartkach wystarczy teraz połączyć punkty  $B$  i  $C$ . Kartka  $\mathcal{L}$  przykrywa cały trójkąt  $ABC$  i jeszcze kawałek kartki  $\mathcal{K}$  – łącznie ponad połowę.  $\square$

**1.** Punkty  $E, F$  i  $G$  należą odpowiednio do boków  $CD, BC$  i  $DA$  równoległoboku  $ABCD$ , przy czym  $BF = DG$  (rys. 3). Odcinek  $FG$  przecina odcinki  $AE$  i  $BE$  odpowiednio w punktach  $H$  i  $I$ . Wykaż, że  $[AHG] + [BFI] = [EHI]$ .

**2.** Punkt  $E$  należy do boku  $CD$  równoległoboku  $ABCD$ , punkt  $F$  – do boku  $BC$ . Odcinek  $DF$  przecina odcinki  $AE$  i  $BE$  odpowiednio w punktach  $G$  i  $H$ . Odcinki  $BE$  i  $AF$  przecinają się w punkcie  $I$  (rys. 4). Wykaż, że  $[BFI] + [CEHF] + [DGE] = [AIHG]$ .

**Twierdzenie (\*\*).** *Jeśli punkt  $E$  leży wewnątrz równoległoboku  $ABCD$ , to  $[ABE] + [CDE] = [BCE] + [DAE]$ .*

**Dowód.** Dzielimy  $ABCD$  na dwa równoległoboki prostą przechodzącą przez punkt  $E$ , równoległą do boku  $AB$ , i dla każdego z nich korzystamy z twierdzenia (\*).  $\square$

**3.** Wykaż, że pole dowolnego czworokąta wypukłego równe jest połowie pola równoległoboku wyznaczonego przez jego przekątnie.

### Rozwiązania

**R1.** Odcinek  $FG$  dzieli równoległobok  $ABCD$  na dwie figury przystające. Wobec tego i na mocy twierdzenia (\*), mamy

$$[AHG] + [BFI] + [ABIH] = [ABFG] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ABE] = [EHI] + [ABIH],$$

co po odjęciu od obu stron  $[ABIH]$  daje tezę.  $\square$

**R2.** Korzystając dwukrotnie z twierdzenia (\*), otrzymujemy

$$[BFI] + [CEHF] + [DGE] + ([ABI] + [EGH]) = [ABCD] - [DAF] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ABE] = [AIHG] + ([ABI] + [EGH]),$$

co po odjęciu od obu stron  $[ABI] + [EGH]$  daje tezę.  $\square$

**R3.** Rozwiązanie, a przy okazji inny dowód twierdzenia (\*\*), na rysunku 5.  $\square$

### Zadania domowe

**4.** Dany jest równoległobok  $ABCD$  oraz punkt  $E$  należący do boku  $BC$ . Przez punkt  $D$  prowadzimy prostą  $k$  równoległą do prostej  $AE$ . Na prostej  $k$  obieramy takie punkty  $K, L$ , że czworokąt  $AEKL$  jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki  $ABCD$  i  $AEKL$  mają równe pola.

**5.** W sytuacji z zadania 2 (rys. 4), wykaż, że  $[ABI] + [EGH] = [DAG] + [FHI]$ .

**6.** Punkt  $E$  należy do boku  $AB$  równoległoboku  $ABCD$ , punkt  $F$  – do boku  $CD$ . Odcinki  $AF$  i  $DE$  przecinają się w punkcie  $G$ , odcinki  $BF$  i  $CE$  przecinają się w punkcie  $H$ . Wykaż, że

- $[DAG] + [BCH] = [EHFG]$ ,
- $[AEG] + [BHE] = [CFH] + [DGF]$ .