





SPIS TREŚCI NUMERU 8 (483)

Modelowanie rzeczywistości i mechanika nieba <i>Szymon Charzyński</i>	str. 1
Analiza, Dedekind i Cantor <i>Piotr Mankiewicz</i>	str. 4
Modele, modelki, modeliki	str. 6
Zasada antropiczna <i>Roman Juszkiewicz</i>	str. 6
Wieloświat i nowe życie zasady antropicznej	str. 8
Matematyka małżeństwa <i>Marek Bodnar</i>	str. 9
O pewnym ciekawym zastosowaniu modelu drapieżnik-ofiara <i>Urszula Forys, Paweł Matejek</i>	str.12
Abstrakcyjne modele w informatyce <i>Szymon Gut</i>	str.16
Wenus i pszczoły <i>Michał Bejger</i>	str.18
 Zadania	str.18
 Ratujmy zdrowie króla! <i>Piotr Chrzastowski-Wachtel</i>	str.19
 Najeźdźcy <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Skaliste otoczenie pulsarów	str.24
Niebo w sierpniu	str.24
 Dwa w jednym <i>Joanna Jaszuńska</i>	str.25



jak zonglują matematycy

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T_EX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

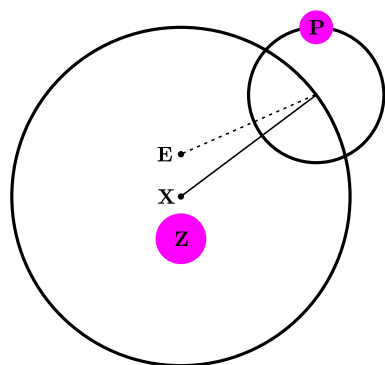
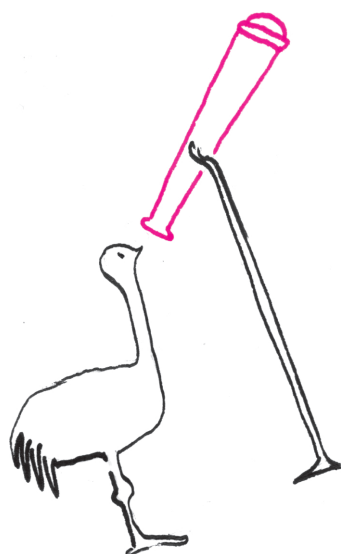
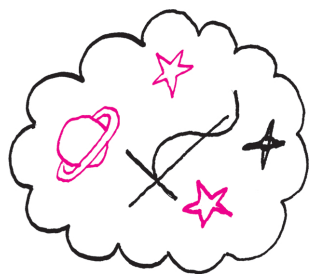
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Modelowanie rzeczywistości i mechanika nieba

Szymon CHARZYŃSKI*



Model ruchu planety P wokół Ziemi Z w systemie Ptolemeusza. Większy okrąg to *deferent*, mniejszy to *epicykl*. Punkt X oznacza *ekscentryk*, czyli środek deferentu, który nie pokrywa się z położeniem Ziemi. Punkt E oznacza *ekwant*. Deferent nie obraca się jednostajnie, lecz w taki sposób, że prędkość kątowna ruchu środka epicyklu względem ekwantu jest stała. Epicykl obraca się jednostajnie wokół swojego środka.

Kiedy znajdujemy się w nowym, nieznanym towarzystwie, często przychodzi nam odpowiadać na pytanie „Czym się zajmujesz?”. Pierwsza spontaniczna reakcja na odpowiedź autora „Jestem fizykiem teoretykiem” najczęściej brzmi „Nienawidziłam fizyki w szkole i nigdy jej nie rozumiałam”, ale dla podtrzymania rozmowy pada często pytanie „A na czym polega twoja praca?”. Odpowiedź techniczno-operacyjna brzmi: „Czytam artykuły i książki, uczestniczę w seminariach i konferencjach, robię obliczenia na kartce i komputerze i piszę artykuły do czasopism naukowych”. Poza tym, że ten opis przemilcza, jak wiele wysiłku współczesnego badacza jest marnotrawione na zmaganie się z biurokracją, to jest on w zasadzie prawdziwy, ale nie wyjaśnia, czemu ta aktywność fizyka teoretyka właściwie służy. Spróbujmy zatem zastanowić się głębiej nad tym, czym właściwie zajmuje się fizyka teoretyczna, w razie gdybyśmy musieli odpowiedzieć na pytania bardziej docieklivego rozmówcy.

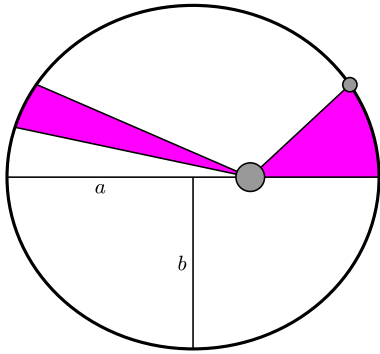
Historycznie fizyka wywodzi się, jak wszystkie dziedziny nauki, z filozofii, czyli próby zrozumienia świata, w którym żyjemy. Na ten świat składają się obiekty o bardzo różnym stopniu złożoności. Można zaryzykować stwierdzenie, że fizyka (w odróżnieniu od innych nauk przyrodniczych, takich jak chemia czy biologia) zajmuje się obiektami najmniej skomplikowanymi. Metodologia fizyki opiera się na dwóch fundamentach: przeprowadzaniu powtarzalnych doświadczeń i tworzeniu matematycznych modeli służących do zwięzłego i ilościowego opisywania wyników tych doświadczeń. Fakt, że te fundamenty są dwa, jest źródłem podziału środowiska fizyków na dwie grupy: doświadczalników i teoretyków. O ile przeciętnemu człowiekowi łatwiej jest wyobrazić sobie pracę doświadczalnika, który w białym kitlu wykonuje w wielkim laboratorium eksperymenty za pomocą skomplikowanych urządzeń, to trudniej jest chyba uchwycić istotę pracy fizyka teoretyka.

Teoretyk tworzy modele matematyczne zjawisk, ale jak on to robi? Skąd one się biorą? Skoro już mamy dobry model, to po co nieustannie kształci się za publiczne pieniądze nowe zastępy fizyków teoretyków, a potem ich utrzymuje? Po co tworzyć wciąż nowe modele? Otóż fizyka nie jest nauką skończoną. To, jak się rozwija i jak dokonuje się postęp w modelowaniu rzeczywistości, prześledzimy na przykładzie ewolucji poglądu ludzkości na mechanikę nieba i budowę Układu Słonecznego.

Starożytni Grecy przez stulecia rozwijali metody modelowania obserwowanego nieregularnego ruchu planet na niebie. Eudoksos z Knidos w IV wieku p.n.e. wprowadził pojęcie *sfer niebieskich* obracających się wokół Ziemi wraz z przyczepionymi do nich planetami. Hipparch z Nikei wprowadził pojęcie epicykli i deferentów. Ptolemeusz rozwinął i udoskonalił ten model w II wieku n.e., dodając między innymi pojęcie ekwantu. Nie wiadomo, jak bardzo badacze ci wierzyli w to, że ich model opisuje *jak jest naprawdę*, a na ile traktowali go tylko jako narzędzie pozwalające obliczać z wyprzedzeniem zjawiska astronomiczne. Wydaje się jednak, że twórcy modelu geocentrycznego, zwanego również modelem Ptolemeusza, który to model został w Europie na wiele stuleci oficjalnie obowiązującym dogmatem, zdawali sobie dobrze sprawę z jego niedoskonałości i mieli z pewnością mniej nabożny do niego stosunek niż ci, którzy wiele wieków później byli gotowi surowo karać próbujących wprowadzać do tego modelu pewne modyfikacje.

Tutaj na scenę wkroczył Mikołaj Kopernik, który się odważył pomyśleć inaczej. Jego praca *O obrotach sfer niebieskich* była niewątpliwie wielkim przełomem, ale co właściwie Kopernik zrobił? Znana powszechnie rymowanka, że „wstrzymał Słońce, ruszył Ziemię, polskie wydało go plemię” więcej właściwie zaciemnia, niż wyjaśnia. Zarówno przed, jak i po publikacji dzieła Kopernika Słońce i planety poruszały się według tych samych reguł, których wyjaśnienia choćby zbliżonego do współczesnego rozumienia mechaniki nieba nie zawierało ani dzieło Kopernika, ani Ptolemeusza. W dodatku Kopernik nie odrzucił całkowicie modelu Ptolemeusza, a jedynie go zmodyfikował. Pojęciowo oba modele są bardzo podobne. W obu występują sfery, deferenty, epicykle, czyli w obu modelach próbuje się składać nieregularne ruchy ciał niebieskich z ruchów po okręgach. Różnica polega na tym, że w modelu Kopernika środek układu znajduje się w Słońcu, a nie w Ziemi, jak w modelu Ptolemeusza. Zaletą modelu Kopernika było to, że był on mniej złożony, składał się z mniejszej liczby epicykli. Aby obliczyć przyszłe położenie planety na niebie z podobną precyzją, jak przy użyciu modelu Ptolemeusza, wystarczyło wykonać mniej rachunków. Był to

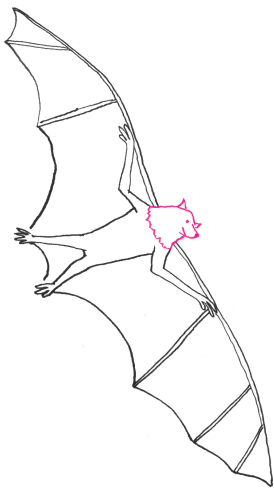
*Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego



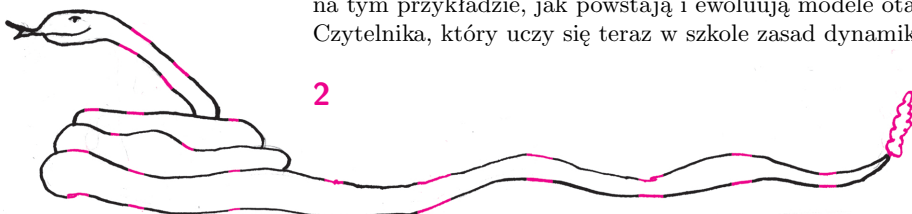
Prawa Keplera:

1. Planeta obiega Słońce po orbicie w kształcie elipsy. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.
2. W równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola.
3. Stosunek T^2/a^3 , gdzie T jest okresem obiegu, natomiast a jest długością wielkiej półosi elipsy (patrz rysunek), jest taki sam dla wszystkich planet Układu Słonecznego.

Wyprowadzenie prawa powszechnego ciążenia z praw Keplera można znaleźć w *Wykładach z historii matematyki*, M. Kordosa, rozdz. XIII, str. 154, Script, 2010.



Obserwowana aktualnie precesja perihelium orbity Merkurego wynosi $574,10 \pm 0,65$ sekund łuku na stulecie. Przewidywania teoretyczne dają w sumie wielkość $574,64 \pm 0,69$ sekund łuku na stulecie. Na te przewidywania składają się dwa główne efekty (wszystkie wielkości w sekundach łuku na stulecie): oddziaływanie grawitacyjne innych planet ($531,63 \pm 0,69$), poprawki relatywistyczne ($42,98 \pm 0,04$).



niewątpliwie postęp w modelowaniu. Dzieło Kopernika wzbudzało jednak wielkie kontrowersje, ponieważ godziło w światopogląd wielu wpływowych osób i, co gorsza, obrażało ich, jak byśmy dziś powiedzieli, uczucia religijne. W efekcie zamieszania, jakie wywołał Kopernik, dokonał się pewien przełom w filozofii, kulturze, religii i temu głównie Kopernik zawdzięcza swą sławę, a nie temu, że uprościł jakieś metody rachunkowe.

Empirycznych dowodów obalających dogmat, że wszystko musi krążyć wokół Ziemi, dostarczył Galileusz, dokonując pierwszych obserwacji astronomicznych za pomocą teleskopu, w którym zobaczył cztery plamki poruszające się po odcinku w pobliżu Jowisza. Były to księżycy Jowisza. Trudno było dalej udawać, że krążą one wokół Ziemi, ale jakoś przypadkiem wyglądało, jakby krążyły wokół Jowisza. Galileusz zaobserwował również fazy Wenus (analogiczne do faz Księżyca), co jednoznacznie pokazywało, że Wenus czasem jest bliżej (kiedy oświetlona jest niewielka część jej tarczy), a czasem dalej od Ziemi niż Słońce (większość tarczy jest wtedy oświetlona).

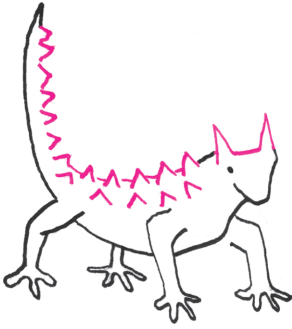
Postęp w modelowaniu trwał dalej. Kepler, opierając się na bardzo dokładnych obserwacjach Tycho Brahego, zauważył, że dużo lepszym modelem orbity planety niż hierarchia okręgów poprzyczepianych jeden do drugiego jest elipsa, z centrum przyciągania umiejscowionym w jednym z jej ognisk. Dostrzegł prostą zależność między odległością planety od centrum a okresem obiegu. Zauważył, że planeta zbliżając się do centrum, przyspiesza, a oddalając się, zwalnia. Swoje obserwacje zamknął w formie bardzo prostych matematycznych praw, których wszyscy uczymy się do dziś w szkole.

Żaden ze wspomnianych do tej pory modeli nieba nie zawierał sensownej odpowiedzi na pytanie, *dlaczego* orbity planet wyglądają tak, a nie inaczej. Isaac Newton wprowadził do tych rozważań zupełnie nową jakość. Odpowiedział na to pytanie: planety krążą po orbitach eliptycznych dlatego, że przyciągają się z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. Wyprowadził prawa Keplera ze swojego prawa powszechnego ciążenia. Potrafił również przeprowadzić rozumowanie w przeciwną stronę: wyprowadzić prawo powszechnego ciążenia z praw Keplera. Wydawać by się mogło, że skoro prawa Keplera i tak już były znane, to matematyczne sztuczki Newtona nie wnoszą niczego nowego. Nic bardziej mylnego. Dzięki Newtonowi zrozumienie mechaniki nieba (i nie tylko nieba) przeniosło się na zupełnie inny poziom. Newton pokazał, że siła, która powoduje, iż przysłowiowe jabłko spada z drzewa na glebę, jest w swojej istocie tą samą siłą, która utrzymuje Księżyc na orbicie wokół Ziemi (o unifikacji, jaką wykonał Newton, pisaliśmy w artykule *Spadający Księżyc* w poprzednim numerze). Zrozumienie, że nie ma innych praw w niebie, a innych na Ziemi, stanowiło wielki przełom myślowy. Wgląd, jaki daje teoria Newtona, wykracza daleko poza prawa Keplera, również w wymiarze praktycznym. Pozwala, na przykład, planować skomplikowane orbity sond kosmicznych przelatujących w pobliżu wielu ciał niebieskich (patrz artykuł z poprzedniego numeru, *Proca grawitacyjna*).

Można by się zastanawiać, że skoro Newton już wszystko zrozumiał, przeliczył w tę i w tę, to po co dalej zajmować się mechaniką i grawitacją? Znaleźli się tacy, co się zastanawiali i tworzyli ciągle nowe matematyczne modele. Z jednej strony za sprawą np. Lagrange'a i Hamiltona powstały nowe matematyczne sformułowania tej samej teorii, które później legły u podstaw innych teorii (mechaniki kwantowej, teorii pola, geometrii symplektycznej), z drugiej strony teoria Newtona została już dosyć dawno obalona i znaleziono lepszą teorię dynamiki i grawitacji. Dokonał tego Albert Einstein.

Bardzo dokładne pomiary pod koniec dziewiętnastego wieku wykazały, że obserwowana orbita Merkurego minimalnie się różni od przewidywań modelu opartego na teorii Newtona. Oś symetrii elipsy, po której krąży Merkury, minimalnie się obraca. Ruch ten daje się częściowo wyjaśnić oddziaływaniem z innymi elementami Układu Słonecznego w ramach teorii Newtona, ale pozostaje drobna niezgodność. Ogólna Teoria Względności Einsteina (OTW) wypełnia tę lukę i dostarcza ostatniego elementu układanki, potrzebnego do zbudowania modelu Układu Słonecznego. Przy precyzji, jaką dysponujemy, nie obserwuje się aktualnie w Układzie Słonecznym odstępstw od przewidywań OTW. Żaden fizyk teoretyk nie powie jednak, że OTW jest teorią ostateczną, a mechanika nieba nie ma już przed nami tajemnic. Wręcz przeciwnie, ciągle trwają intensywne prace nad jej modyfikowaniem, uogólnianiem, unifikacją z teorią kwantów itp.

Zakończyliśmy zatem przegląd historyczny na temat mechaniki nieba, pokazujący na tym przykładzie, jak powstają i ewoluują modele otaczającej nas rzeczywistości. Czytelnika, który uczy się teraz w szkole zasad dynamiki Newtona, może niepokoić



Prędkość protonu rozpędzonego w LHC do energii 7 TeV jest równa $0,999999991 c$, gdzie c oznacza prędkość światła. Do prędkości światła brakuje mu zatem jedynie około 3 m/s. Zastosowanie newtonowskiego wzoru na energię kinetyczną $\frac{1}{2}mv^2$ do protonu poruszającego się z tą prędkością daje błędny wynik – ponad 7000 razy za mały.

Relatywistyczny wzór na energię cząstki ma postać:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Rozwijając go w szereg potęgowy względem parametru $(v/c)^2$, otrzymujemy:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \dots$$

gdzie pierwszy wyraz jest stałą trudną do wykrycia przy małych energiach, drugi jest klasycznym wzorem na energię kinetyczną, a począwszy od trzeciego wyrazu kolejne składniki sumy są proporcjonalne do coraz wyższych potęg parametru $(v/c)^2$. Zaniedbując wyrazy szeregu, począwszy od trzeciego, otrzymujemy w granicy $v/c \rightarrow 0$ newtonowski wzór na energię kinetyczną ze wzoru relatywistycznego, z dokładnością do nieistotnej stałej. Przykład ten ilustruje, jak z ogólniejszego modelu otrzymuje się równania modelu uproszczonego poprzez zaniedbanie pewnych efektów – w tym przypadku stosując przybliżenie małych prędkości.

Dla protonów w LHC stosunek v/c jest bliski 1 i wyrazów proporcjonalnych do jego wysokich potęg nie można zaniedbać, tak jak można to robić dla roweru czy samochodu.



stwierdzenie, że teoria Newtona została obalona, a dalej uczą jej w szkole. Użycie tego sformułowania przez autora jest pewnym nadużyciem, które wymaga wyjaśnienia i pozwoli podkreślić bardzo istotną kwestię dotyczącą zależności między różnymi modelami czy teoriami.

Astronomowie obserwują zjawiska sprzeczne z teorią grawitacji Newtona i zgodne z przewidywaniami OTW, takie jak wspomniana precesja orbity Merkurego, zacieśnianie się orbit par pulsarów itp. Nie tylko w odległym kosmosie zachodzą zjawiska sprzeczne z teorią Newtona. Na Ziemi również. Protony rozpędzane w akceleratorze w LHC nie stosują się do zasad dynamiki Newtona. Przyspieszenie protonu lecącego z prędkością bliską prędkości światła nie jest proporcjonalne do przyłożonej siły. Jego energia kinetyczna nie jest proporcjonalna do kwadratu prędkości. Żeby właściwie modelować ruch tych protonów, trzeba używać dynamiki relatywistycznej, którą zawdzięczamy Einsteinowi. Dlaczego więc ciągle w szkole uczy się zasad dynamiki Newtona i praw Keplera, skoro wiadomo, że te teorie nie zawsze dają właściwe przewidywania? Odpowiedź tkwi w sformułowaniu *nie zawsze*. Co oznacza, że teoria Newtona nie została obalona, a jedynie ograniczony został zakres jej stosowalności. Czasem działa. Modele oparte na zasadach dynamiki Newtona bardzo dobrze sprawdzają się do opisu ruchu samochodów, rowerów czy samolotów. Opis takich zjawisk za pomocą mechaniki relatywistycznej dałby w bardzo dobrym przybliżeniu te same przewidywania ilościowe – w praktyce nierozróżnialne, byłby jednak dużo bardziej skomplikowany rachunkowo. A skoro można to samo obliczyć prościej, to po co się męczyć? W granicy prędkości małych w porównaniu z prędkością światła i słabych pól grawitacyjnych OTW daje przewidywania praktycznie nieodróżnialne od teorii Newtona. Dlatego anomalne zachowanie odkryto w przypadku Merkurego, który krąży najbliżej Słońca, gdzie pole grawitacyjne jest najsilniejsze.

Widzimy zatem, że postęp w fizyce, polegający na odkryciu lepszego modelu, nie zawsze oznacza odrzucenie starego. Zwykle oznacza wyznaczenie granic jego stosowalności. Nawet gdybyśmy zaobserwowali zjawiska sprzeczne z OTW, to nie oznaczałoby to wymazywania jej z podręczników fizyki, tak jak istnienie eksperymentów sprzecznych z teorią Newtona nie przeszkadza uczyć jej kolejne pokolenia uczniów gimnazjum. Ewentualne wykrycie cząstek nadświatlnych również nie doprowadziłyby do wyrzucenia teorii względności na śmietnik, jak sugerują od czasu do czasu nagłówki gazet (pisał o tym A. Dragan w numerze 8/2013). Wręcz przeciwnie, gdyby udało się zaobserwować odstępstwa od OTW, to środowisko fizyków przyjąłoby to z radością. Zwłaszcza tych fizyków teoretyków, którzy od lat zajmują się teorią kwantowej grawitacji, ponieważ próbują tworzyć model, który w zasadzie żadnego obserwowanego zjawiska nie modeluje (można by zapytać: po co to robią?).

Jak widać na przytoczonych przykładach, fizyka jest zbiorem wielu teorii modelujących różne fragmenty otaczającej nas rzeczywistości. Fizyk próbujący stworzyć model jakiegoś konkretnego procesu czy zjawiska musi często dokonywać niełatwego wyboru, jaki rodzaj modelowania zastosować, które efekty można zaniedbać, a których nie. Musi szukać opisu wystarczająco dokładnego, a jednocześnie nie nazbyt skomplikowanego, tak aby dało się go w ogóle stosować. Nieuniknione jest stosowanie przybliżeń i kompromisów między tym, co byśmy *chcieli* obliczyć, a tym, co się *da* obliczyć. Te przybliżenia i kompromisy są często przedmiotem sporów i po to są seminaria i konferencje, tworzone modele są w najlepszym przypadku tylko przybliżonym opisem jakiegoś wycinka rzeczywistości, a każdy modelik wymaga publikacji w oddzielnym artykule. Jednak to, co teoretyków „kręci” najbardziej, to poszukiwanie prostych, unifikujących wiele zjawisk reguł, przenoszących nasze *zrozumienie* podstawowych praw przyrody na wyższy poziom, tak jak uczynili to Newton i Einstein. To dlatego tylu ludzi ślęczy nad kwantową grawitacją, bo tam, między innymi, takiego głębszego zrozumienia ciągle nam brakuje.

Siłą napędową fizyków jest ciekawość i chęć zrozumienia. Skutkiem ubocznym tworzenia coraz lepszych modeli fragmentów rzeczywistości jest postęp techniczny, jaki się dokonuje na naszych oczach. To, co widać, jest prawdopodobnie dopiero początkiem rozwoju naszej cywilizacji. Warto więc, aby fizycy teoretycy dalej tworzyli swoje modele (nawet nieobserwowanych jeszcze zjawisk). Natomiast współcześni uczniowie powinni się cieszyć, że uczą się prostych zasad dynamiki Newtona, ponieważ niewykluczone, że po którejś z kolei reformie edukacji (gdy bezrobotny fizyk teoretyk trafi do Ministerstwa Edukacji) fizyka w gimnazjum będzie się zaczynała od szybkiego kursu geometrii różniczkowej i równań pola Einsteina, a teoria Newtona będzie wprowadzona jako szczególny przypadek graniczny słabych pól grawitacyjnych i małych prędkości.

Prolog. Rzecz dotyczy pytania: na ile Dedekind jest potrzebny Analizie?

Akt I. Zawiazanie akcji, czyli co to jest Analiza

i co ma z tym wspólnego Dedekind; pojawienie się Cantora.



Kresem górnym zbioru A nazywamy taką najmniejszą liczbę rzeczywistą x , że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leq x$. Kres górny zbioru A oznaczamy zwykle przez $\sup A$.



Zbiór nieskończony A nazywa się przeliczalnym, jeżeli istnieje funkcja przekształcająca zbiór liczb naturalnych na ten zbiór.

Przykład podciała, w którym nie każdy ograniczony podzbiór ma kres górny, tworzą liczby wymierne.



Ciało \mathbb{R} liczb rzeczywistych, które poznajemy (a raczej powinniśmy poznać) w szkole średniej, jest opisane pewnym układem aksjomatów. Aksjomaty te można podzielić na dwie klasy; pierwszą klasę stanowią wszystkie aksjomaty z wyjątkiem jednego – tzw. *Aksjomatu Dedekinda*. Aksjomaty pierwszej klasy mają charakter arytmetyczno-porządkowy. Mówią one m.in., że działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych są łączne, przemienne, że odejmowanie jest wykonalne zawsze, a dzielenie – tylko przez liczby różne od 0; że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania; że dodawanie i mnożenie przez liczby dodatnie zachowują porządek (tzn. nierówności) itd. Cechą wspólną tych aksjomatów jest to, że mówią one o własnościach liczb rzeczywistych. Zupełnie inny charakter ma Aksjomat Dedekinda. Opisuje on pewną własność podzbiorów liczb rzeczywistych.

Mianowicie:

Aksjomat Dedekinda. *Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.*

Nieco trudniej jest powiedzieć, co to jest Analiza. Najlepsze określenie, jakie potrafię wymyślić, jest następujące: Analiza jest to zbiór twierdzeń, dających się wyprowadzić z aksjomatów ciała liczb rzeczywistych, opisujących pewne własności funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na podzbiorach liczb rzeczywistych.

Najłatwiej wyjaśnić, o jakie własności tutaj chodzi, na przykładzie dwóch podstawowych twierdzeń Analizy.

Twierdzenie 1 (Darboux). *Jeżeli funkcja ciągła $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje na końcach przedziału $\langle a, b \rangle$ wartości różnych znaków, to wewnątrz przedziału istnieje taka liczba c , że $f(c) = 0$.*

Twierdzenie 2 (Lagrange). *Jeżeli funkcja ciągła $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$, to wewnątrz tego przedziału istnieje taki punkt c , że $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.*

Zanotujmy jeszcze jedno twierdzenie Analizy.

Twierdzenie 3 (Cantor). *Ciało liczb rzeczywistych nie jest przeliczalne.*

Akt II. *Czy wszystkie liczby rzeczywiste są rzeczywiście potrzebne, czyli tragiczny koniec Analizy.*

Żeby zobaczyć, co się stanie z Analizą, kiedy zabraknie Aksjomatu Dedekinda, weźmy dowolne mniejsze podciało \mathbb{P} ciała liczb rzeczywistych, tzn. taki zbiór liczb, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy. Ponieważ $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, więc istnieje $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{P}$. Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi należącymi do \mathbb{P} , że $a < x_0 < b$ (takie liczby muszą istnieć!). Niech $A = \{x \in \mathbb{P} : a < x < x_0\}$. A jest zbiorem ograniczonym. W ciele \mathbb{P} nie jest spełniony Aksjomat Dedekinda, gdyż z tego, że $\sup A = x_0$ i $x_0 \notin \mathbb{P}$, wynika, iż w ciele \mathbb{P} zbiór A nie ma kresu górnego. Gdyby Twierdzenia Analizy nie zależały od Aksjomatu Dedekinda, tzn. dawały się wyprowadzić z aksjomatów należących do pierwszej klasy, to ponieważ \mathbb{P} spełnia wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy, byłyby one prawdziwe dla funkcji określonych na podzbiorach \mathbb{P} o wartościach w \mathbb{P} . Tak jednak nie jest. Np. określmy funkcję $f : \langle a, b \rangle_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}$, gdzie $\langle a, b \rangle_{\mathbb{P}}$ oznacza odcinek domknięty w \mathbb{P} , tzn. $\langle a, b \rangle_{\mathbb{P}} = \{x \in \mathbb{P} : a \leq x \leq b\}$, wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } a \leq x < x_0, \\ 1 & \text{dla } x_0 < x \leq b. \end{cases}$$

Łatwo można zauważyć, że spełnia ona założenia twierdzeń 1 i 2, natomiast tezy tych twierdzeń nie zachodzą. Z definicji f wynika, że $f(c) \neq 0$ dla każdego $c \in \langle a, b \rangle_{\mathbb{P}}$, także teza twierdzenia 2 nie może zachodzić, gdyż $f'(c) = 0$ dla każdego $c \in \langle a, b \rangle_{\mathbb{P}}$ i $f(b) - f(a) = 2$.

Ponieważ cała nasza konstrukcja wynikła z faktu, że istnieje $x_0 \notin \mathbb{P}$, z rozważań powyższych można wyciągnąć

Wniosek 1. *Każda liczba rzeczywista jest rzeczywiście potrzebna Analizie.*

Z drugiej strony można pokazać, że rezygnacja z Aksjomatu Dedekinda spowoduje nie tylko „zawalenie się” twierdzeń 1 i 2. Rezygnacja taka spowoduje tragiczny koniec Analizy – zawali się w niej praktycznie wszystko. Zostaną tylko nieciekawe ruiny.



Każda z tych „konkretnych” definicji jest zdaniem zbudowanym ze skończonej ilości znaczków, a do dyspozycji mamy w ogóle skończoną ich ilość. Ciągów skończonych o wyrazach ze skończonego zbioru – a zatem i „konkretnych” definicji jest przeliczalna ilość.



Zbiór funkcji w Analizie Definiowalnej jest wystarczająco obszerny. Funkcji tych wystarczy inżynierom, by mogli budować domy, mosty, a nawet pojazdy kosmiczne. Wystarczy ich także matematykom. Tak naprawdę to funkcji tych wystarczy wszystkim. Nikt z nas nie ma żadnej szansy spotkać się z funkcją niedefiniowalną w praktyce. Dlaczego?

Akt III. Cudowne ocalenie Analizy, czyli liczby i funkcje definiowalne.

Całe nieszczęście wyniknęło z tego, że chcieliśmy z jednej strony zmniejszyć zbiór liczb w Analizie, a z drugiej strony – pozostawić zbiór funkcji praktycznie bez zmian. Zawaleni się Analizy można uniknąć, jeżeli odpowiedniemu zmniejszeniu zbioru liczb towarzyszy odpowiednie zmniejszenie zbioru funkcji. Oto jeden z takich sposobów. Niech \mathbb{D} będzie podzbiorem liczb rzeczywistych, złożonym z liczb definiowalnych za pomocą działań arytmetycznych, liczb naturalnych, zbioru liczb naturalnych, indukcji i kresu górnego (tzn. z liczb, które można „konkretnie” zdefiniować za pomocą tych pojęć).

Łatwo można wykazać, że \mathbb{D} jest podciałem ciała liczb rzeczywistych. Np. żeby wykazać, że jeżeli $x \in \mathbb{D}$, to $z = 1/x \in \mathbb{D}$, wystarczy zauważyć, iż liczbę z można zdefiniować następująco:

„ z jest jedyną liczbą, taką że $z \cdot x = 1$, gdzie x jest zdefiniowane przez ...”

Ponieważ zbiór wszystkich „konkretnych” definicji jest przeliczalny, zatem ciało \mathbb{D} jest przeliczalne; a więc \mathbb{D} jest istotnie mniejsze niż ciało liczb rzeczywistych (por. twierdzenie 3).

Umówmy się, że przez podzbiór ciała \mathbb{D} będziemy rozumieli podzbiór \mathbb{D} definiowalny za pomocą pojęcia „liczby definiowalne” i pojęć wymienionych wyżej. Można udowodnić, że dla ciała \mathbb{D} i jego podzbiorów (definiowalnych) spełniony jest Aksjomat Dedekinda, tj. każdy ograniczony podzbiór definiowalny w \mathbb{D} ma kres górny należący do \mathbb{D} .

Wniosek 2. Ciało \mathbb{D} spełnia wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych (przy interpretacji: podzbiór = podzbiór definiowalny).

Rozważmy wszystkie funkcje definiowalne z \mathbb{R} w \mathbb{R} .

Twierdzenie 4. Każda funkcja definiowalna przeprowadza liczby definiowalne w liczby definiowalne.

Dowód. Jeżeli x jest liczbą definiowalną, a f jest funkcją definiowalną, to definicja $z = f(x)$ wygląda następująco:

„ z jest jedyną liczbą rzeczywistą, taką że $z = f(x)$, gdzie f jest zdefiniowane przez ..., a x jest zdefiniowane przez ...”.

Zatem jeżeli ograniczymy się do liczb, podzbiorów i funkcji definiowalnych, to w otrzymanym modelu spełnione będą wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych, a więc prawdziwe będą wszystkie twierdzenia Analizy (bo można je z tych aksjomatów wyprowadzić). Nazwijmy sobie tę teorię Analizą Definiowalną.

Wniosek 3. Mimo zmniejszenia ciała liczb rzeczywistych Analizę udało się jednak uratować.

Wniosek 4. W obrębie Analizy Definiowalnej wszystkie twierdzenia Analizy są prawdziwe przy następującej interpretacji:

liczby rzeczywiste	–	liczby rzeczywiste definiowalne
podzbiory liczb rzeczywistych	–	definiowalne podzbiory liczb definiowalnych
funkcje	–	funkcje definiowalne
itd ...		

W szczególności, w obrębie Analizy Definiowalnej prawdziwe jest twierdzenie 3 (porównaj definicję zbioru przeliczalnego). To znaczy, że zachodzi

Twierdzenie 5 (Cantora dla Analizy Definiowalnej). Ciało \mathbb{D} nie jest przeliczalne.

Epilog. Zaskakujące konsekwencje, czyli jak przeliczalność zbioru (i nie tylko ona) może zależeć od naszego obrazu świata.

Na początku aktu III stwierdziliśmy, że ciało \mathbb{D} jest przeliczalne, na końcu zaś tego samego aktu podaliśmy twierdzenie Cantora mówiące, że ciało \mathbb{D} nie jest przeliczalne. Sprzeczność! Chcieliśmy ocalić Analizę, a w efekcie utopiliśmy Matematykę. Sprawa domaga się wyjaśnienia!

Wyjaśnienie takie jest stosunkowo proste. To, czy pewien zbiór A jest przeliczalny, czy nie, nie jest własnością absolutną tego zbioru. Może to w pewnych przypadkach zależeć od przyjętego obrazu (modelu) „świata”. Mianowicie, w naszym przykładzie

- 1° w przypadku Analizy model zawierał dużo elementów i dużo funkcji – a więc nic dziwnego, że wśród nich znalazła się funkcja f odwzorowująca zbiór liczb naturalnych na zbiór \mathbb{D} , co spowodowało, że zbiór \mathbb{D} z punktu widzenia Analizy jest przeliczalny (porównaj definicję zbioru przeliczalnego),
- 2° w przypadku Analizy Definiowalnej model zawierał mniej elementów i mniej funkcji; twierdzenie Cantora dla

Analizy Definiowalnej orzeka, iż tych funkcji jest tak mało, że nie znajduje się wśród nich żadna funkcja odwzorowująca liczby naturalne na \mathbb{D} .

Ponieważ dodawanie jest „efektywnie” wykonalne, więc w każdym modelu analizy $2 + 2$ musi się równać 4. Natomiast przeliczalność zbioru nie jest efektywnie sprawdzalna. To znaczy – nie istnieje skończony algorytm pozwalający rozstrzygnąć, czy dany zbiór jest przeliczalny, czy nie. Zdarza się, że w przypadku takich nieefektywnych pojęć odpowiedź na pytanie zależy od przyjętego modelu świata. I tak właśnie jest z przeliczalnością zbioru \mathbb{D} . Podobnie nieefektywnym postulatem jest używany w Geometrii Aksjomat Archimidesa:

Odkładając wielokrotnie na prostej dany odcinek a , możemy uzyskać odcinek większy od danego odcinka b .

I w tym przypadku odpowiedź na pytanie, czy tak jest naprawdę, zależy od przyjętego modelu Geometrii.

Podane tutaj rozróżnienia i przykłady inspirowane są blogiem Sabine Hossenfelder *Backreaction*, gdzie władający językiem angielskim Czytelnik znajdzie m.in. znacznie obszerniejszą dyskusję tego i pokrewnych tematów.

Modele, modelki, modeliki

Zdarza się, niestety, że odznaczające się lenistwem intelektualnym osoby, niekiedy nawet w randze podsekretarza stanu, potrafią piękną koncepcję naukową, na przykład ewolucję biologiczną, zbyć lekceważącym „to tylko teoria”. Nie od rzeczy będzie zatem przypomnieć, co przyrodnik ma na myśli, kiedy używa słów takich jak „teoria” i „model”.

Można powiedzieć, że zadaniem nauk przyrodniczych jest budowanie modeli dla obiektów lub układów obiektów występujących w rzeczywistości. Modele te pozwalają zrozumieć – i przewidzieć! – zmiany zachodzące w rzeczywistości. Jest to możliwe dzięki istnieniu teorii, czyli zbioru ogólnych reguł określających zachowanie elementów modelu oraz wiążących te elementy z obiektami występującymi w rzeczywistości.

Sztandarowym przykładem modelu fizycznego jest Model Standardowy cząstek elementarnych. Określenie tego modelu polega na podaniu listy cząstek wraz z ich własnościami takimi jak spin, ładunki oraz – jeśli ładunki kilku cząstek pozwalają na oddziaływanie między nimi – „siły” tego oddziaływania. Resztą, czyli na przykład tym, jaki jest rozkład kątowy fotonów rozpraszanych na elektronach, czy mechanizmem wiążącym kwarki w bariony i mezony, zajmuje się lub zajmować się powinna odpowiednia teoria – w tym przypadku jest to kwantowa teoria pola. Teoria ta mogłaby także określać zachowanie jakiegoś zupełnie innego modelu, model taki nie miałby jednak wiele wspólnego z rzeczywistością. Innym przykładem modelu jest standardowy model kosmologiczny, zadany przez podanie czasoprzestrzeni o określonej, choć nieco naruszonej symetrii i listy składników czasoprzestrzeni tę wypełniających. Ewolucją takiego modelu zajmuje się teoria – tutaj ogólna teoria względności wspomaganą gdzieś tam przez kwantową teorię pola.

Uczone przykłady można by mnożyć. Nauka ma jednak to do siebie, że czasem rozsada ramy, w których filozofujący naukowcy chcieliby ją zamknąć. Klasycznym – i wciąż aktualnym – przykładem są losy pomysłu nazwanego *zasadą antropiczną* oraz późniejszych inspirowanych nią idei. W *Delcie* już ponad trzydzieści lat temu przedstawiliśmy Czytelnikom artykuł objaśniający zasadę antropiczną, pozostaje więc, zwłaszcza ku zbudowaniu Czytelników od artykułu tego młodszego, przypomnieć nieco skróconą wersję, opatrując ją refleksjami „późnego wnuka” autora.

K.T.

Zasada antropiczna

lub o tym, co zdaniem niektórych wynika z faktu istnienia życia na Ziemi oraz o braku dowodów na istnienie życia na Marsie i innych ciekawostkach przyrodniczych

Roman JUSZKIEWICZ

Delta 5/1983

Historia pewnego pomysłu. Pół wieku temu Robert Dicke z Uniwersytetu w Princeton, zastanawiając się nad pytaniem, dlaczego Wszechświat jest taki stary, doszedł do dość nieoczekiwane wniosku (nazwanego później *zasadą antropiczną*), że jest tak dlatego, ponieważ... my istniejemy! Rzeczywiście, pierwiastki ciężkie produkowane są we wnętrzach gwiazd, które po upływie czasu rzędu kilku miliardów lat (a więc porównywalnego z wiekiem Wszechświata) eksplodują jako supernowe, rozsiewając wkoło tlen, azot i węgiel. Zatem, gdyby wiek Wszechświata był znacznie mniejszy – nie byłoby pierwiastków ciężkich, bez których powstanie życia byłoby niemożliwe. Gdyby natomiast Wszechświat był znacznie starszy, cała materia zostałaby zamieniona w bezużyteczny żużel i trudno byłoby wykrzesać życie z kosmicznego śmietnika, zawierającego jedynie gwiazdy neutronowe, białe karły i czarne dziury.

Dicke zauważył również, że w podobny sposób można „wytłumaczyć” płaskość (lub inaczej: stosunek efektywnej energii potencjalnej do energii kinetycznej ekspansji równy jedności) oraz izotropię i jednorodność Wszechświata. Okazuje się przy tym, że gdyby po pierwszej sekundzie życia Wszechświata energia kinetyczna była zaledwie o jedną milionową większa od potencjalnej, to później energia kinetyczna ekspansji zdominowałaby energię potencjalną tak dalece, iż uniemożliwiłoby to powstanie galaktyk, ponieważ całkowita energia obłoków będących „zarodkami” galaktyk byłaby dodatnia. W takim modelu również gwiazdy nigdy nie mogłyby powstać i nie zostałyby wytworzone pierwiastki ciężkie, bez których nie jesteśmy w stanie wyobrazić sobie życia.

Gdyby natomiast po owej pierwszej sekundzie stosunek energii potencjalnej i kinetycznej był większy od 1 zaledwie o jedną milionową, to Wszechświat zacząłby się kurczyć już po upływie 100 tysięcy lat od wielkiego wybuchu. Ekspansja zostałaby zatrzymana przy temperaturze rzędu 10^4 K, po czym rozpocząłby się etap kurczenia

Zasadę antropiczną można również zastosować do stałej kosmologicznej, by „wytłumaczyć”, dlaczego jej wartość jest o ponad 120 rzędów wielkości niższa od sugerowanej przez kwantową teorię pola. Rozumowanie takie przedstawił w 1987 roku Steven Weinberg, argumentując, że gdyby wartość stałej kosmologicznej była większa, przyspieszone rozszerzanie się Wszechświata nastąpiłoby wcześniej i uniemożliwiłoby skupianie się materii w galaktyki i gwiazdy. Daje to ograniczenie na stałą kosmologiczną „tylko” o 3 rzędy wielkości większe od wartości wyznaczonej z obserwacji. Wydaje się, że posłużenie się zasadą antropiczną przez laureata Nagrody Nobla z fizyki skłoniło wielu badaczy do prowadzenia tego typu rozważań. (K.T.)

Coś się zmieniło, kiedy odkryto zasadę antropiczną. Okazało się mianowicie, że aby we Wszechświecie mogły zaistnieć twory mające cechy ludzkie, a więc istoty inteligentne, mające pasję badawczą i do tego materialne (nie jacyś aniołowie!), muszą być spełnione określone warunki. W miarę postępu badań przekonano się, że są to bardzo ściśle warunki określające wszystkie prawa fizyki, a nawet stałe fizyczne. Dalo się to sformułować w paradoksalnej wypowiedzi, że dokładną wartość stałej grawitacji można wyprowadzić z faktu, iż ją znamy. Stało się wtedy jasne, że istnienie człowieka z jego psychicznym zamilowaniem do badania rzeczywistości ma jakiś (nadający się do różnej interpretacji) związek z tej rzeczywistości istnieniem.

K. Rudnicki, *Po co puźoniście znać paradoks Olbersa?*, Delta 8/1995

To właśnie Carter jako pierwszy zaproponował nazwę *zasada antropiczna*. Miało to miejsce w 1973 roku w Krakowie podczas sympozjum z okazji pięćsetnej rocznicy urodzin Kopernika. (K.T.)

Jest wielu specjalistów od kosmologii, którzy już teraz na poważnie traktują tego typu analizę. W 1986 roku ukazała się poważna monografia astronoma Johna Barrowa i fizyka Franka Tiplera pt. Antropiczna Zasada Kosmologiczna. Sformulowana jest w niej tak zwana silna i tak zwana słaba zasada antropiczna. W formie silnej twierdzi ona: Wszechświat musi mieć takie właściwości, aby na pewnym stopniu rozwoju mogło powstać życie. Oto do jakich wniosków może doprowadzić dziwienie się własnemu istnieniu. Ale nie koniec na tym. Jeżeli powiążemy tę zasadę z wnioskami dotyczącymi pomiarów w mechanice kwantowej, to możemy dojść do następującej konkluzji: Na początku było tylko prawdopodobieństwo zaobserwowania. Wszechświat mógł więc powstać tylko wtedy, gdy znalazł się ktoś, kto go obserwuje. I to nieważne, że obserwator pojawił się szereg miliardów lat później. Wszechświat istnieje, ponieważ jesteśmy.

T. Hofmkl, *Wbrew zdrowemu rozsądkowi*, Delta 10/1994

Z uwagi na skończony wiek Wszechświata możemy obserwować tylko jego skończoną część. Jeżeli zaś przestrzeń jest nieskończona, poza granicami naszych obserwacji mogą istnieć inne wszechświaty z – być może – innymi prawami fizyki. Uzasadnia to do pewnego stopnia posługiwanie się pojęciem zespołu statystycznego różnych wszechświatów. (K.T.)

i ponownego wzrostu temperatury. W takim Wszechświecie byłoby nam zdecydowanie za gorąco, a poza tym również nie mogłyby w nim powstać gwiazdy i pierwiastki ciężkie.

Wszechświat silnie niejednorodny i anizotropowy byłby również nieprzyjazny życiu: w okolicy roiliby się od czarnych dziur o wielkich masach, fal uderzeniowych i strumieni twardego promieniowania gamma.

Problem wyboru warunków początkowych zbliżony jest do problemu wyboru odpowiednich wartości dla stałych fizycznych. W obu przypadkach znane obecnie prawa fizyki nie dostarczają kryteriów wyboru. Nie wiadomo na przykład, dlaczego stała struktury subtelnej $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ (gdzie e oznacza ładunek elektronu, a \hbar stałą Plancka), określająca siłę oddziaływań elektromagnetycznych, jest rzędu 10^{-2} . Oddziaływania grawitacyjne opisać można za pomocą analogicznej „stałej sprzężenia” $\alpha_G = \frac{Gm_p^2}{\hbar c}$ (gdzie m_p oznacza masę protonu, a G stałą grawitacyjną) równej 10^{-38} . Oddziaływania grawitacyjne są znacznie słabsze od elektromagnetycznych: stosunek siły kulombowskiej do siły grawitacji działającej między dwoma protonami wynosi $\frac{\alpha}{\alpha_G} \sim 10^{36}$. Czy można to „wyjaśnić”, posługując się zasadą antropiczną? Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Wykazał to na początku lat siedemdziesiątych XX wieku Brandon Carter z Uniwersytetu w Cambridge (Wielka Brytania). Otóż nasze Słońce zajmuje na diagramie Hertzsprunga–Russella położenie między błękitnymi olbrzymami (które żyją krócej) a czerwonymi karłami (żyjącymi dłużej). Jedynie gwiazdy typu Słońca spełniają jednocześnie dwa warunki, które wydają nam się niezbędne do tego, aby w ich otoczeniu mogło rozwinąć się życie: mają tempo ewolucji bardziej powolne od tempa ewolucji biologicznej (przynajmniej nam znanej) i świecą dostatecznie jasno, aby planeta znajdująca się na stabilnej (a więc dostatecznie odległej) orbicie mogła być ogrzana na tyle, aby umożliwić spontaniczne tworzenie się cząsteczek organicznych.

Carter zauważył, że gdyby wartość α była o 1% większa od wartości obserwowanej, wszystkie gwiazdy byłyby czerwonymi karłami, gdyby natomiast była o tyle mniejsza – Wszechświat wypełniony byłby jedynie błękitnymi olbrzymami. Podobny efekt wystąpiłby, gdyby wartość α była równa obserwowanej, natomiast α_G byłaby odpowiednio mniejsza o rząd wielkości od wartości obserwowanej (czerwone karły) lub większa (błękitne olbrzymy).

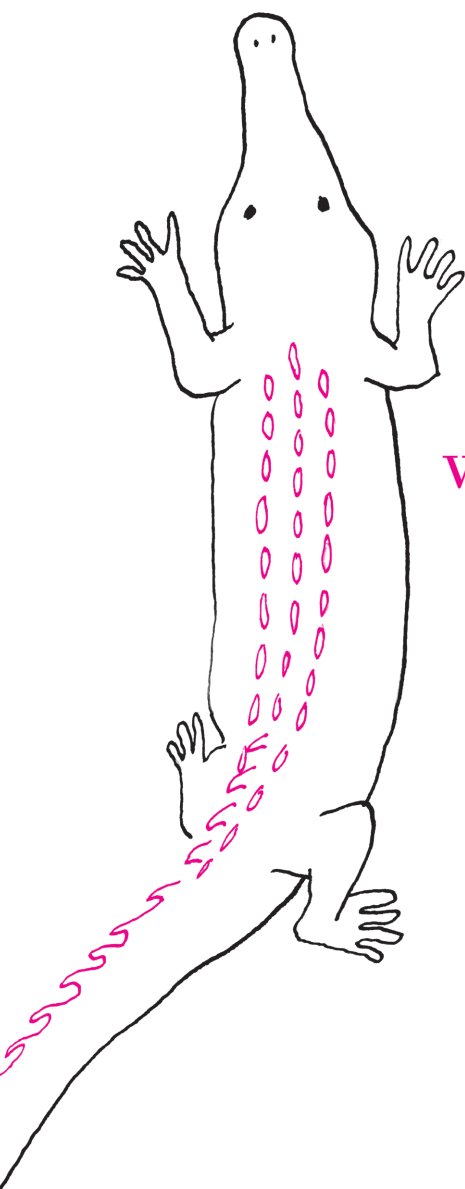
Szczęśliwych koincydencji, takich jak obserwowany stosunek α/α_G , jest więcej. Na przykład, gdyby stała sprzężenia dla oddziaływań jądrowych była nieco mniejsza od obserwowanej, okazałaby się niewystarczająca do tego, aby związać protony i neutrony. Istnienie pierwiastków cięższych od wodoru byłoby wówczas niemożliwe. Stabilne pierwiastki ciężkie nie istniałyby również, gdyby różnica mas neutronu i protonu nie była w przybliżeniu równa podwojonej masie elektronu. Tak precyzyjne dostrojenie warunków początkowych oraz stałych fizycznych, umożliwiające powstanie życia, stwarzają poczucie celowego działania. Z wrażeniem tym Carter poradził sobie tak, jak Darwin poradził sobie z koncepcjami Lamarcka. Wprowadził on pojęcie „zespołu statystycznego” wszechświatów, które Dicke i Peebles interpretują następująco:

Proszę sobie wyobrazić zabawę w rosyjską ruletkę, w której bierze udział bardzo duża liczba osób używających losowo rozdanych nabitych i nienabitych rewolwerów. Pod koniec tej morderczej zabawy znakomity probabilista po dokonaniu wyczerpującej analizy statystycznej dojdzie do wniosku, że prawdopodobieństwo przypadkowego wyciągnięcia nienabitych rewolwerów przez pozostałych przy życiu graczy jest bardzo wysokie. A teraz proszę sobie wyobrazić zespół wszechświatów wszystkich rodzajów. Nie powinno nas dziwić, że nasz Wszechświat nie jest „typowy”, ponieważ uśrednione po zespole cechy takiego wszechświata z powodzeniem mogą okazać się wrogie życiu. Możemy być obecni jedynie w takim wszechświecie, który czyni zadość naszym potrzebom.

Inaczej mówiąc, gdyby warunki początkowe i stałe fizyczne nie były dobrane w sposób właściwy, to nie miałby kto zadać pytania, dlaczego Wszechświat jest taki, jakim go widzimy.

Wygląda na to, że posługując się zasadą antropiczną, można udzielić odpowiedzi na wszystkie kłopotliwe pytania. Czy rzeczywiście? Wróćmy do rozumowania Dickego, przedstawionego na początku. Z rozumowania tego wynika, że wiek Wszechświata nie może być dowolny. Zmniejszanie stopnia dowolności w wyjaśnianiu zjawisk przyrody zawsze było celem nauki i w tym sensie w takim rozumowaniu nie ma nic niezwykłego; tym, co odróżnia jego sposób myślenia od konwencjonalnego, jest struktura logiczna jego argumentów.

Można zastanawiać się, czy zasada antropiczna jest elementem modelu kosmologicznego. Jest to dość trudne, jako że model powinien nie tylko wyjaśniać fakty *ex post*, ale także formułować przewidywania co do zachowania układu fizycznego w przyszłości. Z tego względu niektórzy badacze określają zasadę antropiczną ukutą przez Fermiego inwektywą – że nie jest nawet błędna. (K.T.)



Dicke nie wyprowadza swoich wniosków z żadnej fundamentalnej teorii ani nie przewiduje wyników przyszłych doświadczeń, lecz przeciwnie, „odwraca kota ogonem”, używając naszej wiedzy o obecnym stanie Wszechświata (istnienie życia) jako wyjaśnienia faktów związanych z jego przeszłością. Jest to zatem rodzaj przewidywania przeszłości opartego na przyszłości tej przeszłości. Wygląda to bardziej na błędne koło niż na wyjaśnienie czegokolwiek. Zamiast powiedzieć „rzeczy są takie, jakie są, ponieważ były takie, jakie były”, mówimy, że „rzeczy są takie, jakie są”. Czy zatem nie są to po prostu, jak mawiał Kubuś Puchatek...

Wielkie myśli o niczym? Liczba zarzutów, które można skierować pod adresem zasady antropicznej, jest doprawdy imponująca. Po pierwsze, są to zarzuty, o których była mowa przed chwilą (metodologiczne). Po drugie, lwia część argumentów, którymi posługują się zwolennicy zasady antropicznej, oparta jest na wątpliwym założeniu, iż znamy ogólne warunki niezbędne do powstania życia, podczas gdy w rzeczywistości cała nasza (bardzo skromna!) wiedza na ten temat dotyczy jedynie możliwości powstania życia tu, na Ziemi. Wreszcie, po trzecie, zasada antropiczna (a zwłaszcza jej najbardziej radykalne wersje) oparta jest na założeniu, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między istnieniem świadomych obserwatorów a warunkami początkowymi oraz stałymi fizycznymi. O tym, że tak nie jest, można się przekonać, wymyślając wszechświaty, które powinny wyprodukować takich samych obserwatorów, mimo iż różnią się pod względem warunków początkowych lub stałych fizycznych. Jeden z takich modeli został zaproponowany przez Peeblesa i Dickego, którzy doszli do wniosku, że jak na wymagania zasady antropicznej *Wszechświat jest przesadnie rozbudowany; właściwie pojedyncza galaktyka zanurzona w asymptotycznie płaskiej przestrzeni powinna wystarczyć.*

Mimo tych wszystkich zarzutów trudno jest uznać rozważania oparte na zasadzie antropicznej za całkowicie jałowe. Nawet gdyby cała „ideologia” dorabiana do tej zasady okazała się w końcu fałszywa, pozostaną zagadkowe koincydencje, na które jej zwolennicy zwrócili uwagę, i które tak czy owak wymagają uzasadnienia. Dalsze losy zasady antropicznej będą zależały od tego, czy i w jakim stopniu koincydencje te uda się wytłumaczyć, wychodząc od „pierwszych zasad” jakiejś (nieznanej obecnie) fundamentalnej teorii. Jeżeli program taki się powiedzie, to udziałem zasady antropicznej będzie to samo, co stało się udziałem koncepcji *vis vitalis*, eteru, flogistonu, ciepłaka itd.

Skrót i redakcja: K.T.

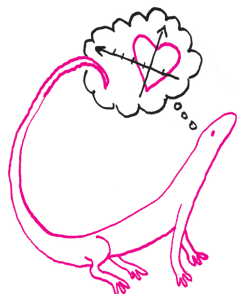
Wieloświat i nowe życie zasady antropicznej

Pewna wersja modelu inflacji, zwana *wieczną inflacją*, postuluje, że w przeszłości na wielkich skalach Wszechświat wcale nie był jednorodny i izotropowy, gdyż kwantowe fluktuacje doprowadziły do tego, że różne jego obszary charakteryzowały się różnymi gęstościami energii i ewoluowały w różny sposób. Wszechświat, jaki widzimy, byłby więc tylko jednym z takich lokalnie jednorodnych i izotropowych obszarów, inne – zasadniczo różne od naszego – kryłyby się zaś poza granicami naszych obserwacji. Tę wizję kosmosu można nazwać *wieloświatem* (ang. *multiverse*).

Rozwój teorii strun – uznawanej przez wielu za kandydatkę do miana teorii fundamentalnej – pozwala wątpić w rychłe odłożenie zasady antropicznej do lamusa. Okazuje się, że wśród niewyobraźalnie wielkiej i trudnej do nazwania – kilkusetcyfrowej – liczby rozwiązań tej teorii istnieje wiele rozwiązań w miarę stabilnych, ale opisujących światy zasadniczo różne od naszego. Można przypuszczać, że Wszechświat mógłby dzięki tunelowaniu kwantowemu „przeskakiwać” między różnymi takimi stanami. Ponieważ jednak w obserwowanym Wszechświecie wydaje się obowiązywać zasada kopernikańska – jedność praw fizyki we wszystkich miejscach – te inne światy musiałyby leżeć poza granicą naszych obserwacji, co elegancko uzupełnia zarysowaną wyżej wizję wieloświata. Można mieć nadzieję – motywującą wielu świetnych naukowców do wyteżonej pracy – że choć teoria strun nie podaje jednego rozwiązania odpowiadającego naszemu Wszechświatowi, pozwoli ona określić prawdopodobieństwo różnych rozwiązań, uzupełniając zasadę antropiczną o możliwość czynienia przewidywań, jakiej na ogół wymaga się od modelu rzeczywistości.

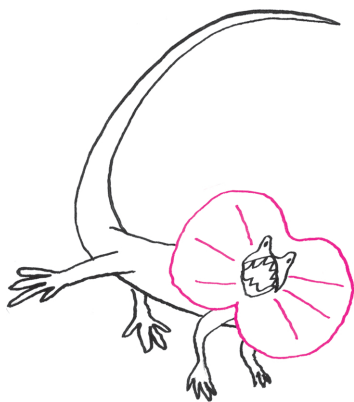
Czy jest to działalność sensowna i czy prowadzi ona do jakichkolwiek konstruktywnych wniosków? Na ten temat trwa – przede wszystkim w środowisku fizyków amerykańskich – zażarta dyskusja, zarówno w czasopiśmie naukowych, jak i na blogach czy na rynku książek popularnonaukowych. Pozostaje mieć nadzieję, że gdy opadnie bitewny pył, pozostaną jeszcze jacyś obserwatorzy Wszechświata.

K.T.



Czytelników zainteresowanych bardziej szczegółowym opisem zachęcamy do przeczytania piątego rozdziału książki *Wprowadzenie do biomatematyki* autorstwa J.D. Murraya.

Moglibyśmy także pokusić się o zastosowanie modelu ciągłego – wówczas czas nie byłby reprezentowany przez ciąg oddalonych od siebie punktów, ale przez półprostą rzeczywistą. Takie przybliżenie jest uprawnione, jeśli czas obserwacji jest dostatecznie długi w stosunku do czasu między kolejnymi obserwacjami. Na przykład, jeśli obserwacje prowadzilibyśmy na przestrzeni kilku lat, a stan emocjonalny każdego z partnerów notowalibyśmy co 15 minut, albo obserwacje byłyby prowadzone przez miesiąc, ale stan emocjonalny każdego z partnerów byłby notowany co kilka sekund.



Skorzystaliśmy tutaj ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla drugiego równania układu (1) i wywnioskować, że $|r_2| < 1$.

Wydaje się, że nie ma rzeczy mniej logicznych niż uczucia. Czasami trwałe i szczęśliwe związki tworzą ludzie, o których mało kto by wcześniej powiedział, że są dla siebie stworzeni. Z drugiej strony, niejednokrotnie idealne, zdawałoby się, pary rozpadają się po pewnym czasie. W jaki sposób możemy więc przewidzieć dynamikę danego związku? Czy początkowy zachwyty drugą osobą będzie się umacniał, czy wręcz przeciwnie – zmieni się w niechęć? Na te pytania czasem trudno odpowiedzieć psychologom, a w zachowaniu partnerów niejednokrotnie trudno doszukać się logiki. Wydaje się, że angażowanie opartej na logice matematyki do tak trudnego i pozornie nieścisłego problemu jest skazane na porażkę. Okazuje się jednak, że „królowa nauk” nawet w takiej sytuacji jest w stanie wcisnąć swoje trzy grosze.

Opiszę tutaj badania przeprowadzone przez grupę amerykańskiego psychologa Johna Gottmana w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Pierwszy problem, przed którym stanęli badacze, to pytanie, w jaki sposób za pomocą liczb opisać emocje. W badaniach uczestniczyły 73 pary. Obserwowano ich zachowanie podczas rozmów na różne, budzące emocje tematy (takie jak pieniądze, teściowie, itp.) i zliczano zachowania „pozytywne” (np. humor, szczery uśmiech) i „negatywne” (np. krytyka, agresja). W ten sposób, po każdej takiej rozmowie otrzymywano liczbę będącą różnicą liczby zachowań „pozytywnych” i „negatywnych”, która w jakiś sposób opisywała stan emocjonalny każdego z partnerów.

Postaramy się teraz opisać zmiany stanów emocjonalnych partnerów za pomocą modelu matematycznego. Użyjemy modelu dyskretnego, czyli takiego, w którym stan procesu (tutaj stan emocjonalny każdego z partnerów) jest opisany tylko w pewnych oddalonych w czasie momentach. Dłuższą rozmowę warto arbitralnie podzielić na rundy i wydaje się, że kolejne wypowiedzi każdego z partnerów doskonale nadają się do tego, by po nich zapisać stan emocjonalny rozmówców.

Oznaczmy przez Z_t stan emocjonalny żony, a przez M_t stan emocjonalny męża po t rundach. Przyjmijmy także, że to żona rozpoczyna rozmowę. Stan emocjonalny partnerów będzie zmieniał się w czasie i będzie opisany ciągiem liczb $Z_1, M_1, Z_2, M_2, \dots$. Przyjmijmy jeszcze jedno założenie: stan emocjonalny partnera po kolejnej rundzie zależy zarówno od jego aktualnego stanu emocjonalnego, jak i od stanu emocjonalnego drugiego z partnerów. Niech ten wpływ opisują pewne funkcje f i g – ich postać ustalimy później. A zatem stan emocjonalny partnerów opisujemy następującym układem równań:

$$Z_{t+1} = f(Z_t, M_t), \quad M_{t+1} = g(Z_{t+1}, M_t).$$

Z funkcji f i g wydzielimy część niezależną od drugiego partnera. Bez wpływów zewnętrznych nasze emocje zwykle ulegają wyciszeniu i osiągamy pewien stan równowagi wewnętrznej (który może być różny dla różnych osób – jedni są nastawieni bardziej pozytywnie do życia, inni mniej). Ten składnik najłatwiej jest modelować przez równanie liniowe. Przyjmijmy zatem, że gdyby obok nie było drugiego z partnerów, to stan emocjonalny zmieniałby się zgodnie z równaniem liniowym

$$(1) \quad Z_{t+1} = r_1 Z_t + a, \quad M_{t+1} = r_2 M_t + b.$$

Przyjrzyjmy się zachowaniu rozwiązań jednego z powyższych równań. Mamy $Z_1 = r_1 Z_0 + a$, następnie $Z_2 = r_1 Z_1 + a = r_1(r_1 Z_0 + a) + a = r_1^2 Z_0 + (r_1 + 1)a$ oraz $Z_3 = r_1^3 Z_0 + (r_1^2 + r_1 + 1)a$. Stąd możemy wywnioskować

$$Z_t = r_1^t Z_0 + a \cdot \frac{1 - r_1^t}{1 - r_1}.$$

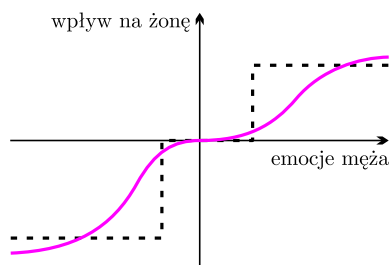
Jeśli $|r_1| < 1$, to wówczas ciąg Z_t będzie zbliżał się do $a/(1 - r_1)$, czyli stan emocjonalny osoby będzie się ustalał. Z drugiej strony, jeśli $|r_1| > 1$, to ciąg nie będzie zbieżny i wartości Z_t będą, co do modułu, coraz większe. Taką osobę, której emocje „nakręcają” się same z siebie, trudno uznać za zdrową psychicznie. Przyjmiemy zatem, że $|r_1| < 1$ oraz $|r_2| < 1$.

Do równań (1) dodajmy wpływ męża na żonę (i odwrotnie). Otrzymamy model

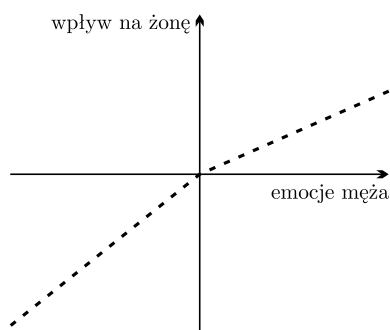
$$(2) \quad Z_{t+1} = W_{MZ}(M_t) + r_1 Z_t + a, \quad M_{t+1} = W_{ZM}(Z_{t+1}) + r_2 M_t + b.$$

Pozostaje nam w jakiś sposób zdefiniować funkcje wpływu męża na żonę $W_{MZ}(M_t)$ i żony na męża $W_{ZM}(Z_{t+1})$. Spróbujmy wyobrazić sobie, jak taka funkcja mogłaby wyglądać. Z odbiorem pozytywnych sygnałów wysyłanych przez partnera jest podobnie jak ze słodzeniem herbaty. Jeśli do herbaty wsypimy za mało cukru, to nie pocujemy,

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Przykładowa, „idealna” funkcja wpływu męża na żonę (kolorowa linia ciągła) i bardzo uproszczona (linia przerywana).



Funkcja wpływu męża na żonę użyta przez Gottmana.

Punkt stacjonarny nazywa się czasem także *punktem równowagi*, *stanem stacjonarnym* lub *stanem równowagi*.

że posłodziliśmy napój. Z drugiej strony, jeśli wsypimy do jednej szklanki bardzo dużo cukru (powiedzmy pięć łyżeczek), a do drugiej niewiele więcej (dajmy na to pięć i pół), to różnicy w słodkości napojów w tych dwóch szklankach nie wyczuwamy. Zatem funkcja wpływu powinna zmieniać się wolno dla małych wartości emocji (pozytywnych czy negatywnych), potem powinna zmieniać się szybciej, a następnie tempo jej zmian znów powinno zwalniać. Przykład takiej funkcji narysowaliśmy na rysunku obok kolorową linią ciągłą. Chociaż funkcja opisująca odpowiedź na emocje negatywne powinna mieć podobny przebieg, nie musi być ona odbiciem symetrycznym wpływu emocji pozytywnych. Łatwo sobie wyobrazić osobę, która gwałtowniej reaguje na krytykę niż na pochwały lub odwrotnie. Taka „idealna” funkcja ma jednak podstawową wadę: jej kształt nie jest łatwy do opisania, szczególnie jeśli chcemy ją dopasować do danych doświadczalnych (choć, oczywiście, nie jest to niemożliwe). Konstruując model, staramy się uprościć opis sytuacji na tyle, na ile to jest możliwe. Pewnym pomysłem na uproszczenie tej „idealnej” funkcji jest rozpatrzenie funkcji kawałkami stałej (przerywana linia na rysunku). Wówczas zakładamy, że do pewnego momentu partnerzy nie reagują na sygnały drugiej strony, a następnie ich reakcja jest stała.

W swoich badaniach Gottman poszedł jednak inną drogą – przybliżył „idealną” funkcję przez funkcję kawałkami liniową (na dolnym obrazku). To podejście ma tę zaletę, że otrzymana funkcja jest ciągła i opisana jedynie przez dwa parametry: nachylenie prostej na prawo od zera i nachylenie prostej na lewo od zera. A zatem każda z funkcji wpływu będzie opisana dwoma parametrami i będą one dane wzorami:

$$W_{MZ}(M_t) = \begin{cases} \alpha_{MZ}M_t & \text{jeśli } M_t \geq 0, \\ \beta_{MZ}M_t & \text{jeśli } M_t < 0, \end{cases} \quad W_{ZM}(Z_t) = \begin{cases} \alpha_{ZM}Z_t & \text{jeśli } Z_t \geq 0, \\ \beta_{ZM}Z_t & \text{jeśli } Z_t < 0. \end{cases}$$

Zanim krótko omówię wyniki badań grupy Gottmana, zastanówmy się, jakie własności matematyczne ma model (2), gdy funkcje wpływu są kawałkami liniowe. Interesujące jest pytanie, czy istnieją punkty, w pobliżu których wzajemne emocje mogą się ustabilizować, lub w których emocje nie będą się zmieniać. Czyli jeśli $Z_1 = \bar{Z}$, a $M_1 = \bar{M}$, to dla wszystkich $t > 0$ pozostanie prawdą, że $Z_t = \bar{Z}$ i $M_t = \bar{M}$. Punkt (\bar{Z}, \bar{M}) o takiej własności nazywa się *punktem stacjonarnym* układu równań (2). Aby znaleźć punkty stacjonarne wykorzystujemy to, że $Z_t = \bar{Z}$ i $Z_{t+1} = \bar{Z}$ i podobnie $M_t = \bar{M}$ i $M_{t+1} = \bar{M}$, oraz równanie (2) i otrzymujemy układ równań:

$$(3) \quad \bar{Z} = \frac{1}{1-r_1}W_{MZ}(\bar{M}) + \frac{a}{1-r_1}, \quad \bar{M} = \frac{1}{1-r_2}W_{ZM}(\bar{Z}) + \frac{b}{1-r_2}.$$

Ponieważ funkcje wpływu są kawałkami liniowe, to układ równań (3) jest kawałkami liniowy i moglibyśmy go rozwiązać analitycznie. Jednak ciekawiej i prościej będzie spojrzeć na rozwiązanie tego układu geometrycznie. Zauważmy, że jeśli narysujemy prawe strony równań (3) na płaszczyźnie (\bar{Z}, \bar{M}) , to ich przecięcia wyznaczą punkty stacjonarne. Czynniki $1/(1-r_1)$ i $1/(1-r_2)$ skalują funkcje wpływu (nachylenia półprostych stają się mniejsze lub większe). Składnik $a/(1-r_1)$, opisujący stan, do którego zbliżają się emocje żony pozbawione wpływu jej męża, przesuwa wykres tak, że przecina on oś Z właśnie w tym punkcie. Podobnie, składnik $b/(1-r_2)$ przesuwa wykres wzdłuż osi M . Skoro umiemy już wyznaczyć stany stacjonarne, to teraz zbadajmy, jak zachowują się rozwiązania w okolicy tych stanów. Jeśli punkt startowy znajduje się w pobliżu stanu stacjonarnego, to badamy, czy rozwiązanie będzie się (w dłuższej perspektywie) do niego zbliżać (mówimy wtedy, że stan stacjonarny jest *asymptotycznie stabilny*), czy też oddali się od niego (powiemy wtedy, że punkt stacjonarny jest *niestabilny*). W pobliżu stanu stacjonarnego układ równań (2) przyjmuje postać

$$(4) \quad Z_{t+1} = \gamma_1 M_t + r_1 Z_t + a, \quad M_{t+1} = \gamma_2 Z_{t+1} + r_2 M_t + b,$$

gdzie γ_1 jest równe α_{MZ} , jeśli $\bar{M} > 0$ i β_{MZ} , jeśli $\bar{M} < 0$. Podobnie, γ_2 jest równe α_{ZM} , jeśli $\bar{Z} > 0$ i β_{ZM} , jeśli $\bar{Z} < 0$. Żeby zobaczyć, co się dzieje w pobliżu stanu stacjonarnego, wprowadzimy nowe zmienne z_t i m_t , opisujące odchylenie od stanu stacjonarnego. Mamy:

$$Z_t = \bar{Z} + z_t, \quad M_t = \bar{M} + m_t.$$

Wstawiając te równości do równania (4) i wykorzystując fakt, że spełnione są równania (3), otrzymujemy

$$(5) \quad z_{t+1} = r_1 z_t + \gamma_1 m_t, \quad m_{t+1} = \gamma_2 z_{t+1} + r_2 m_t.$$

Wstawiając pierwsze równanie (5) do drugiego (by pozbyć się z_{t+1}), otrzymujemy

$$(6) \quad z_{t+1} = r_1 z_t + \gamma_1 m_t, \quad m_{t+1} = r_1 \gamma_2 z_t + (\gamma_1 \gamma_2 + r_2) m_t.$$



Rozwiązanie zadania M 1431.

Załóżmy, że n kul o promieniach r_1, \dots, r_n spełnia podaną własność (pokrywa wszystkie ściany P). Wówczas $\sum_{i=1}^n 4\pi r_i^2 \geq S$, gdzie S to pole powierzchni bocznej P . Ponadto

$V = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^n r_i^3$. Stosując nierówność

Höldera do ciągów (r_1^2, \dots, r_n^2) , $(1, \dots, 1)$ i wag $2/3, 1/3$, otrzymujemy

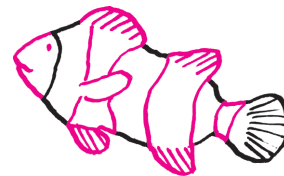
$$n^{1/3} \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{2/3} = n^{1/3} \left(\sum_{i=1}^n (r_i^2)^{3/2} \right)^{2/3} \geq \sum_{i=1}^n r_i^2 \geq \frac{S}{4\pi},$$

skąd

$$n \geq \left(\frac{S}{4\pi} \right)^3 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^2 = \frac{S^3}{36\pi} \frac{1}{V^2},$$

więc wystarczy przyjąć $c(P) = \frac{S^3}{36\pi}$.

Jest to standardowa technika rozwiązywania liniowych równań rekurencyjnych, takich jak (6).



Poszukajmy teraz rozwiązań (6) postaci

$$(7) \quad z_t = z_0 \lambda^t \quad \text{i} \quad m_t = m_0 \lambda^t.$$

Wstawiając do (6) i przekształcając, otrzymujemy układ równań

$$(r_1 - \lambda)z_0 + \gamma_1 m_0 = 0, \quad r_1 \gamma_2 z_0 + (\gamma_1 \gamma_2 + r_2 - \lambda)m_0 = 0.$$

Aby ten układ miał niezerowe rozwiązania (a właściwie nieskończenie wiele niezerowych rozwiązań), potrzebujemy, aby stosunek współczynnika przy z_0 do współczynnika przy m_0 był taki sam w obu równaniach. Zatem musi zachodzić

$$(r_1 - \lambda)(\gamma_1 \gamma_2 + r_2 - \lambda) = r_1 \gamma_1 \gamma_2,$$

czyli

$$(8) \quad \lambda^2 - (r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2)\lambda + r_1 r_2 = 0.$$

Ponieważ rozwiązania są postaci (7), to aby zbliżały się do zera (czyli Z_t i M_t do \bar{Z} i \bar{M}), potrzebujemy, by rozwiązania równania (8) były co do modułu mniejsze od jedynki.

Stwierdzenie 1. Niech $|r_1|, |r_2| < 1$. Jeżeli $r_1 r_2 < 0$ lub $\gamma_1 \gamma_2 > 2\sqrt{|r_1 r_2|} - (r_1 + r_2)$, to rozwiązania λ_1, λ_2 równania (8) są rzeczywiste i jeśli dodatkowo

$$(9) \quad \frac{\gamma_1}{1 - r_1} \cdot \frac{\gamma_2}{1 - r_2} < 1,$$

to $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| < 1$.

Dowód. Obliczmy najpierw wyróżnik równania kwadratowego (8)

$$\Delta = (r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2)^2 - 4r_1 r_2.$$

Jeśli $r_1 r_2 < 0$, to oczywiście $\Delta > 0$. Podobnie, jeśli $\gamma_1 \gamma_2 > 2\sqrt{|r_1 r_2|} - (r_1 + r_2)$, to $\Delta > 0$. Aby przekonać się, że stwierdzenie jest prawdziwe, musimy wykazać, że większy co do modułu pierwiastek równania (8) jest mniejszy od 1 lub większy od -1 .

Przypuśćmy, że $r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2 > 0$. Wówczas większym co do modułu pierwiastkiem jest ten z plusem przy $\sqrt{\Delta}$. Zatem musimy wykazać, że

$$(10) \quad \sqrt{\Delta} < 2 - (r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2).$$

Zauważmy, że nierówność (9) możemy zapisać jako

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2 < 2 - (r_1 + r_2).$$

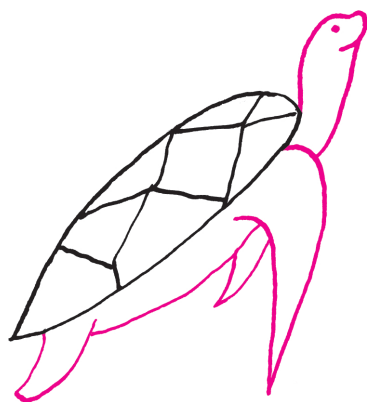
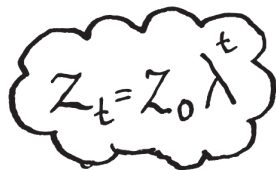
To dowodzi, że prawa strona nierówności (10) jest dodatnia i możemy nierówność podnieść stronami do kwadratu, co po skróceniu wyrazów sprowadzi ją do założonej nierówności (9). \square

Uwaga 2. Zauważmy, że jeśli $r_1 > 0$ i $r_2 > 0$, to

$$2\sqrt{|r_1 r_2|} - (r_1 + r_2) = -(\sqrt{|r_1|} - \sqrt{|r_2|})^2 < 0.$$

Zatem dla dodatnich r_1, r_2, γ_1 i γ_2 , teza Stwierdzenia 1 jest spełniona.

Gottman ze swoim zespołem na podstawie obserwacji wyznaczył dla każdej z par kąty nachylenia funkcji wpływu oraz wielkości r_1, r_2, a i b . Następnie wyznaczono stany stacjonarne i ich stabilność. Okazało się, że położenie stabilnego stanu stacjonarnego ma kluczowe znaczenie. Dla par zakwalifikowanych wcześniej przez psychologów jako pary wysokiego ryzyka (zagrożone rozpadem związku) przynajmniej jedna ze współrzędnych stabilnego stanu stacjonarnego była ujemna, a druga była bliska zera lub także ujemna. Dla par niskiego ryzyka stabilny stan stacjonarny znajdował się w pierwszej ćwiartce. Ponadto, wśród badanych osób można było wyróżnić trzy podtypy różniące się nachyleniami funkcji wpływu: wyraźnie dodatnie nachylenie obu liniowych części funkcji wpływu (pozytywna reakcja na pozytywne emocje i negatywna reakcja na negatywne emocje), wyraźnie dodatnie nachylenie prawej części funkcji wpływu (pozytywna reakcja na pozytywne emocje) i bliskie zera nachylenie lewej części funkcji wpływu (słaba reakcja na negatywne emocje) oraz bliskie zera nachylenie prawej części funkcji wpływu (słaba reakcja na pozytywne emocje) i wyraźnie dodatnie nachylenie lewej części funkcji wpływu (negatywna reakcja na negatywne emocje). Pary niskiego ryzyka miały podobne (tego samego typu) funkcje wpływu męża i żony. Z drugiej strony, funkcje wpływu partnerów z par wysokiego ryzyka zdają się pochodzić z różnych podtypów, czyli są do siebie niedopasowane. To owocuje ujemnym stabilnym stanem stacjonarnym. Wyniki tych badań sugerują hipotezę, że pary, których związek zdąży do rozpadu, nie wypracowały schematu, jak mają na siebie wpływać, a większość ich sporów dotyczy tego, w jaki sposób powinni się kłócić czy rozmawiać ze sobą.



Kwalifikację par potwierdziły późniejsze obserwacje tych par.



Rozwiązanie zadania M 1430. Skoro $NWD(n, k) = an + bk$ dla pewnych liczb całkowitych a, b , to wystarczy

udowodnić, że liczba $\frac{k}{n} \binom{n}{k}$ jest całkowita. Wynika to z równości

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

O pewnym ciekawym zastosowaniu modelu drapieżnik–ofiara

Urszula FORYŚ*, Paweł MATEJEK*

W artykule tym podejmiemy próbę wyjaśnienia nietypowej dysproporcji gatunkowej na kontynencie australijskim. Chodzi o niespotykany nigdzie indziej brak stałocieplnych drapieżników, przy jednoczesnym rozkwicie zimmokrwistych mięsożerców. Zwrócił na to uwagę w swoim artykule *The case of missing meat eaters* (opublikowanym w *Natural History* w 1993 roku) Tim Flannery, mammolog i paleontolog, specjalizujący się w australijskim ekosystemie.

Powodów zaistniałego stanu rzeczy doszukiwał się w plejstocenie, gdy człowiek jeszcze nie dotarł na kontynent, a Australia wraz z przyległymi wyspami tworzyła tzw. Meganezję. W tym czasie na wszystkich kontynentach żyło wiele wymarłych dziś gatunków, należących do tzw. megafauny, czyli populacji zwierząt, których masa często przekraczała tonę, jak np. mamut włochaty, który osiągał masę 4–6 ton, czy *Indrikoterium*, nieparzystokopytny ssak roślinożerny, blisko spokrewniony z nosorożcowatymi, o masie do 15 ton. Pod koniec plejstocenu wielkie wymieranie dotknęło zwierzęta z całego globu, ale wszędzie – poza Australią – przetrwało wiele gatunków ssaków, w tym drapieżnych, osiągających dużą masę, w szczególności różne gatunki kotowatych (puma, ryś, tygrys, lampart, lew, jaguar i gepard).

Jako jedną z możliwych przyczyn wymarcia australijskiej megafauny, wskazywaną przez wielu biologów, Flannery przytoczył niewielkie rozmiary Meganezji, co miało skutkować zbyt małą przestrzenią życiową. Jednakże np. Madagaskar wykazuje porównywalne zróżnicowanie gatunkowe, choć jego obszar jest ponad dwadzieścia razy mniejszy.

Kolejną często przytaczaną hipotezą jest stwierdzenie, że torbacze miały relatywnie małe mózgi, co uniemożliwiło im wyewoluowanie w skuteczne drapieżniki. Jednak np. z czwartorzędowych południowoamerykańskich drapieżnych torbaczy wyewoluowały drapieżniki przypominające północnoamerykańskie tygrysy szablozębne, zdolne do skutecznego polowania na największe ówczesnie żyjące zwierzęta roślinożerne. Podobnie przodkowie amerykańskiego oposa dali początek wielu przedstawicielom megafauny.

Bardziej prawdopodobna wydaje się inna przyczyna. Australia jest starym kontynentem, o stabilnej historii geologicznej. Przez ostatnie 50 milionów lat nie doświadczała zlodowaceń, procesów górotwórczych, czy aktywności wulkanicznej – procesów niezbędnych przy tworzeniu gleb. Ponadto zwarta linia brzegowa, brak

większych zatok, wysoka krawędź Wyżyny Zachodnioaustralijskiej oraz Wielkie Góry Wododziałowe położone na wschodzie sprawiają, że przenikanie wpływów oceanicznych do wnętrza kontynentu jest niewielkie. Dlatego na większości terenów Australia jest wyjątkowo nieurodzajna – panuje tam suchy klimat kontynentalny, bywa, że pora deszczowa nie nadchodzi przez kilka lat z rzędu, a szata roślinna tworzy przede wszystkim stepy, półpustynie i pustynie. Dzieje się tak pomimo tego, że Australia leży na południowej półkuli, gdzie przewaga powierzchni mórz nad lądami jest znaczna, co teoretycznie powinno istotnie łagodzić i stabilizować klimat.

Ten ciągle nieurodzaj powoduje, że australijscy roślinożercy są zmuszeni żyć w dużo większym rozproszeniu niż roślinożercy żyjący na innych kontynentach. Jak pisze Flannery, zmniejszona liczebność potencjalnych ofiar sprawia, że tylko populacje mięsożerców, które mają odpowiednio małe zapotrzebowanie na pożywienie, są w stanie przetrwać. Wobec tego wśród drapieżników faworyzowane są te o mniejszych rozmiarach ciała albo o wolniejszym metabolizmie – w obu przypadkach do przeżycia potrzeba mniejszych ilości pożywienia. Kregowce zmiennoceplne mają ponad sześć razy mniejsze zapotrzebowanie na energię niż torbacze, a dziesięć razy mniejsze niż żyzyskowce. Oznacza to, że największy znany drapieżny torbacz, lew workowaty, potrzebował sześć razy więcej upolowanych ofiar niż konkurujące z nim *Quinkana* (krokodyle ważące ponad 200 kg), *Wonambi* (węże ważące 50 kg) czy *Megalia* (spokrewnione z waranem jaszczurki, dwa razy większe niż współczesne, mierzące 2,5 do 3 metrów warany z Komodo). Ponadto, krokodyle, węże i jaszczurki, ponieważ nie muszą utrzymywać stałej temperatury ciała, potrafią przetrwać bez pokarmu znacznie dłużej niż zwierzęta stałocieplne, co przy trudnym australijskim klimacie jest dodatkową zaletą.

Gady, takie jak *Quinkana*, *Wonambi* czy *Megalia*, wyginęły w plejstocenie, podobnie jak lew workowaty i wiele innych zwierząt megafauny. Jednak potomkowie gadzich olbrzymów, jak waran z Komodo, nadal żyją, natomiast większość torbaczy wówczas bezpowrotnie zniknęła. Wyginęły wszystkie drapieżniki osiągające więcej niż 5 kg, wyłączając diabła tasmańskiego i wilka workowatego.

Właśnie to zagadnienie, czyli dynamikę populacji drapieżnika przy ograniczonej zasobności ofiar, przeanalizujemy za pomocą modelu Lotki–Volterry z ograniczoną pojemnością środowiska dla ofiar. Analiza ta ma na celu zweryfikowanie przypuszczeń Flannery’ego co do powodów zniknięcia drapieżnych torbaczy.

Model matematyczny

Zastosowany przez nas model matematyczny bazuje na klasycznym modelu Lotki–Volterry, który jest najstarszym znanym modelem opisującym interakcje między dwiema populacjami. Został on użyty do opisu dynamiki populacji ryb w Adriatyku przez Volterrę w 1926 roku. Rybacy łowiący ryby w Adriatyku zauważyli, że w czasie trwania i niedługo po zakończeniu pierwszej wojny światowej populacja ryb drapieżnych w Morzu Śródziemnym znacznie wzrosła. Ówczesni biolodzy nie potrafili wyjaśnić tego, zdawało im się, paradoksalnego zjawiska. Volterra w swojej pracy *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* zaproponował model, za pomocą którego wyjaśnił, dlaczego wstrzymanie połowów spowodowało ten nagły wzrost. Nieco wcześniej, w 1920 roku, Lotka niezależnie od Volterry, skonstruował ten sam model i użył go do opisu zmian stężeń dwóch reagujących ze sobą substancji chemicznych. Obecnie najbardziej znanym przykładem zastosowania tego modelu jest analiza zmian populacji kanadyjskich rysy i zajęcy, wykonana na podstawie danych z lat 1847–1903, dotyczących skupu skór przez Kompanię Zatoki Hudsona.

Aby sformułować model, musimy przyjąć pewne założenia dotyczące opisywanych populacji i ich środowiska. Niech V oznacza populację ofiar, zaś P populację drapieżników (poniżej te same oznaczenia zostaną użyte do opisanego zagęszczeń populacji ofiar i drapieżników odpowiednio – nie powinno to prowadzić do niejasności).

Vito Volterra (1860–1940)
– włoski matematyk i fizyk, profesor uniwersytetów w Pizie, Turynie i Rzymie. Zajmował się opracowywaniem modeli matematycznych w biologii. Był jednym z trzynastu włoskich profesorów, którzy w 1931 roku odmówili złożenia przysięgi na wierność Mussolinimu, za co stracił katedrę.

Alfred James Lotka (1880–1949)
– urodzony we Lwowie amerykański matematyk, chemik (chemia fizyczna, biofizyka), ekonomista, statystyk i demograf.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

\dot{X} oznacza pochodną X względem czasu.



Portret fazowy danego układu równań różniczkowych to zobrazowanie przebiegu rozwiązań w przestrzeni (V, P) , gdzie rozwiązania są krzywymi opisanymi lokalnie jako funkcje $P(V)$ lub $V(P)$, a przebieg w czasie zaznaczamy strzałkami, których kierunek wyznaczony jest przez wektor (\dot{V}, \dot{P}) .

Stan (punkt) stacjonarny danego układu to takie rozwiązanie, które nie zależy od czasu, więc prawa strona układu zeruje się w tym punkcie.

1. W środowisku występują wyłącznie rozważane gatunki V oraz P . Innych zwierząt w danym środowisku nie ma, lub nie mają wpływu na badaną dynamikę populacji, zarówno drapieżników P , jak i ofiar V .
2. Gdy nie ma drapieżników, środowisko jest sprzyjające dla ofiar – nie ma w nim żadnych innych ograniczeń. W takiej sytuacji ich dynamika jest opisywana równaniem Malthusa (wzrostu wykładniczego):

$$\dot{V}(t) = rV.$$

3. Gdy nie ma ofiar, drapieżniki nie mają pożywienia, co powoduje wymieranie gatunku:

$$\dot{P}(t) = -sP.$$

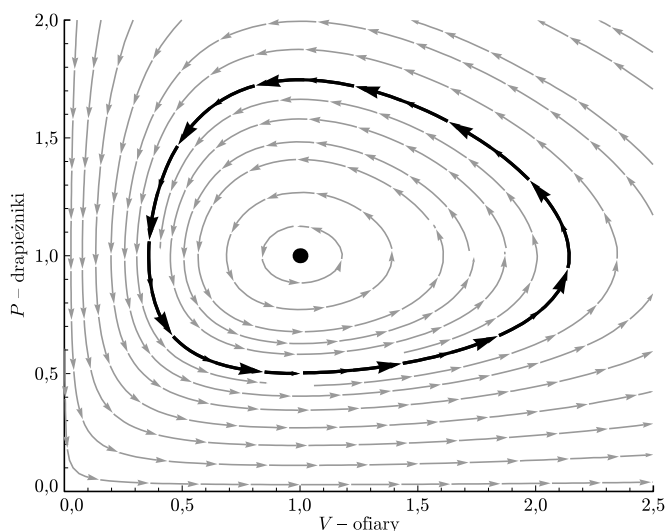
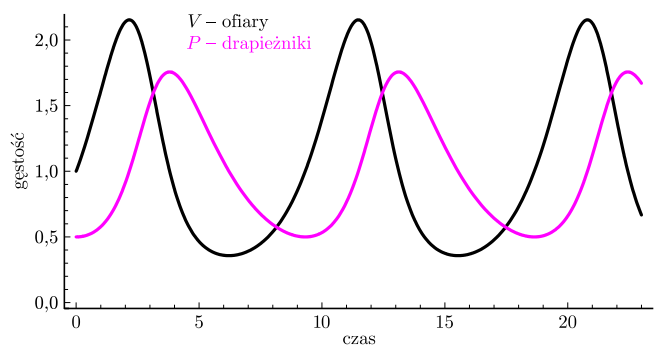
4. Ofiary rozmnażają się niezależnie od polowań drapieżników. Drapieżniki polując na ofiary, zmniejszają ich populację, zatem wzrost populacji P powoduje spadek populacji V . Jednocześnie drapieżniki zdobywają pokarm, który dostarcza im energię potrzebną do życia, w tym do rozmnażania się – zatem populacja P wzrasta wraz ze wzrostem populacji V .

Zakładając dodatkowo równomierne rozmieszczenie osobników w przestrzeni, otrzymujemy klasyczny model Lotki–Volterry, opisany następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{V}(t) = rV - aVP, \\ \dot{P}(t) = -sP + abVP, \end{cases}$$

gdzie: $V = V(t)$, $P = P(t)$ to odpowiednio zagęszczenie populacji ofiar drapieżników (zmiennie względem czasu t), r – współczynnik rozrodczości ofiar, a – skuteczność polowań, s – śmiertelność w populacji drapieżników i b to część biomasy przeznaczona na reprodukcję, przy czym wszystkie powyższe współczynniki są dodatnie.

Analiza tego modelu pozwala uzyskać portret fazowy i przebieg rozwiązań, jak przedstawiono na rysunkach. Górny to wykres gęstości populacji drapieżników i ofiar, dolny zaś to portret fazowy klasycznego modelu Lotki–Volterry, opisanego układem (1). Wyróżniony cykl odpowiada warunkowi początkowemu $V(0) = 1$, $P(0) = \frac{1}{2}$.



Kiedy populacja ofiar się rozwija, drapieżniki mają więcej pożywienia, więc ich liczebność również wzrasta. Jednakże im więcej drapieżników, tym więcej odławianych przez nie ofiar, a zatem po pewnym czasie liczebność populacji ofiar zmaleje. To z kolei powoduje zmniejszenie dostępności pożywienia dla drapieżników, a więc spadek ich liczebności, a to z konieczności zmniejsza odsetek upolowanych ofiar i umożliwia wzrost ich liczby – tak cykl się zamyka. Rysunki wykonane zostały przy stałych równych odpowiednio: $r = 1$, $a = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

Widzimy też, że rozwiązania są okresowe, o maksimach przesuniętych w czasie, co dobrze oddaje cykliczność zjawisk zachodzących w przyrodzie. Co więcej, rozwiązania oscylują wokół dodatniego stanu stacjonarnego $(\bar{V}, \bar{P}) = (\frac{s}{ab}, \frac{r}{a})$ i ich wartości średnie są równe współrzędnym tego punktu niezależnie od trajektorii, czyli także od warunku początkowego. Własność tę nazywamy *prawem zachowania średnich* w układzie drapieżnik–ofiara i jest ona przyczyną zmian zaobserwowanych przez rybaków po pierwszej wojnie światowej.

Faktycznie, jeśli w układzie (1) uwzględnimy odławianie, to dostaniemy:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = rV - aVP - d_1V, \\ \dot{P}(t) = -sP + abVP - d_2P, \end{cases}$$

gdzie d_1 , d_2 są współczynnikami odławiania odpowiednio ofiar i drapieżników. Przy założeniu, że $r > d_1$, czyli odłowy nie prowadzą do zagłady gatunku V , dostajemy układ Lotki–Volterry ze zmienionymi współczynnikami:

$$\begin{aligned} r &\mapsto r - d_1, \quad s \mapsto s + d_2 \\ \Rightarrow \quad V_{\text{sr}}^{\text{odl}} &= \frac{s + d_2}{ab} > \bar{V}, \quad P_{\text{sr}}^{\text{odl}} = \frac{r - d_1}{a} < \bar{P}, \end{aligned}$$

czyli odławianie działa zawsze na niekorzyść drapieżników, a na korzyść ofiar. Zauważmy, że z tej prostej zasady wynika też, iż warto się zastanowić ingerując w układy ekologiczne, w których ofiara jest jakimś szkodnikiem (np. populacją dokuczliwych owadów), bo poskutkuje to głównie zmniejszeniem populacji drapieżników, które z naszego punktu widzenia są pożyteczne. Oczywiście, jeśli wytypimy gatunek ofiar, to zginie także gatunek drapieżników.

Jak widzimy, nawet tak prosty model, jak opisany powyżej, może przyczynić się do wyjaśnienia pewnych zjawisk biologicznych. Jednak mimo tych zalet model Lotki–Volterry nie jest pozbawiony wad, nie uwzględnia on bowiem wielu zjawisk mających istotny wpływ na dynamikę populacji, jak chociażby konkurencji o pokarm pomiędzy ofiarami, gdy ich populacja wzrasta. Dałoby to pewne ograniczenie górne, a tym samym hamulec wzrostu wykładniczego ofiar. Ponieważ ten właśnie czynnik ma, według Flannery’ego, zasadnicze znaczenie w środowisku australijskim, więc przedstawimy modyfikację układu (1) uwzględniającą pojemność środowiska dla populacji ofiar. Do równania opisującego populację ofiar w modelu (1) dodamy składnik postaci $-\frac{rV^2}{k}$, odpowiadający wewnątrzgatunkowej konkurencji o pożywienie, gdzie współczynnik k oznacza pojemność środowiska. Składnik ten można także interpretować w następujący sposób. Rozważmy model dynamiki populacji ofiar w przypadku braku drapieżników:

$$\dot{V} = Vf(V),$$

gdzie mamy $f(V) = r$ przy wykładniczym wzroście populacji, natomiast jeśli założymy, że populacja rozwija się w ograniczonym środowisku, to oczywiste wydaje się założenie, że $f(V)$ powinna być malejącą funkcją V , gdyż im więcej jest osobników w środowisku, tym wolniej może się ta populacja rozwijać. Musi także być taka wielkość populacji k , dla której następuje całkowite zahamowanie wzrostu, czyli $f(k) = 0$. Najprostszą funkcją spełniającą wymienione założenia jest liniowa funkcja $f(V) = r\left(1 - \frac{V}{k}\right)$, gdzie r oznacza teraz maksymalny współczynnik wzrostu populacji.

Otrzymamy w ten sposób następujący rozbudowany model drapieżnik–ofiara:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{V}(t) = rV\left(1 - \frac{V}{k}\right) - aVP, \\ \dot{P}(t) = -sP + abVP, \end{cases}$$

gdzie zmienne i parametry (oprócz k) mają taką samą interpretację jak dla (1), zaś parametr k oznacza pojemność środowiska dla gatunku ofiar.

Zajmiemy się teraz analizą jakościową przebiegu rozwiązań. W tym celu narysujemy portret fazowy modelu, z którego odczytamy globalne zachowanie rozwiązań. Zaczniemy od wyznaczenia izoklin zerowych, czyli krzywych, na których zerują się prawe strony pierwszego (dla zmiennej V) i drugiego (dla zmiennej P) równania. Izokliny mają postać:

- dla zmiennej V : $V = 0, P = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{V}{k}\right)$,
- dla zmiennej P : $P = 0, V = \frac{s}{ab}$,

co przedstawiają rysunki na marginesie.

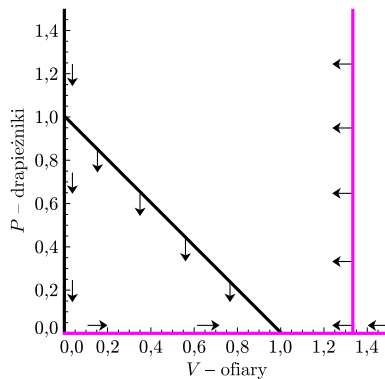
Stany stacjonarne odczytujemy jako punkty przecięcia odpowiednich izoklin. Zauważmy, że gdy $k < \frac{s}{ab}$, to jeden z punktów przecięcia pojawia się poza pierwszą ćwiartką układu (w ćwiartce czwartej, na przedłużeniu odpowiednich prostych), a zatem wykracza poza dziedzinę rozważań modelu, zaś gdy $k > \frac{s}{ab}$, to punkt ten mieści się w pierwszej ćwiartce. Ponieważ żadna z tych nierówności nie jest wyróżniona przez nasz model, analiza musi obejmować dwa przypadki. Przypadek trzeci, $k = \frac{s}{ab}$, jest przypadkiem granicznym, w którym punkty $(k, 0)$ i (\bar{V}, \bar{P}) sklejają się – jest on tożsamy z sytuacją, gdy $k < \frac{s}{ab}$.

Możemy wykazać, że są dwa lub trzy stany stacjonarne o następującym charakterze:

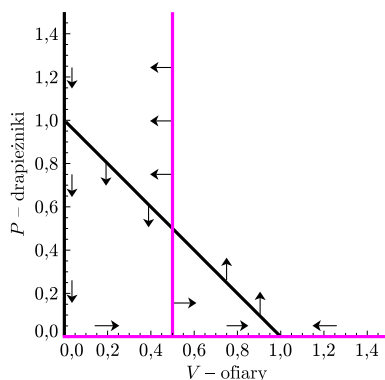
- $(0, 0)$ jest siodłem,
- $(k, 0)$ jest węzłem stabilnym asymptotycznie lub siodłem,
- $(\bar{V}, \bar{P}) = \left(\frac{s}{ab}, \frac{a}{c}\left(1 - \frac{s}{abk}\right)\right)$, istnieje o ile $k > \frac{s}{ab}$ i jest węzłem lub ogniskiem stabilnym.

Na podstawie tych rysunków możemy naszkicować portrety fazowe, które przedstawiamy na sąsiedniej stronie (w przypadku $k > \frac{s}{ab}$ punkt (\bar{V}, \bar{P}) narysowany został jako ognisko, choć może być też węzłem).

Izokliny zerowe układu (2)



w przypadku, gdy $k < \frac{s}{ab}$



i w przypadku, gdy $k > \frac{s}{ab}$.

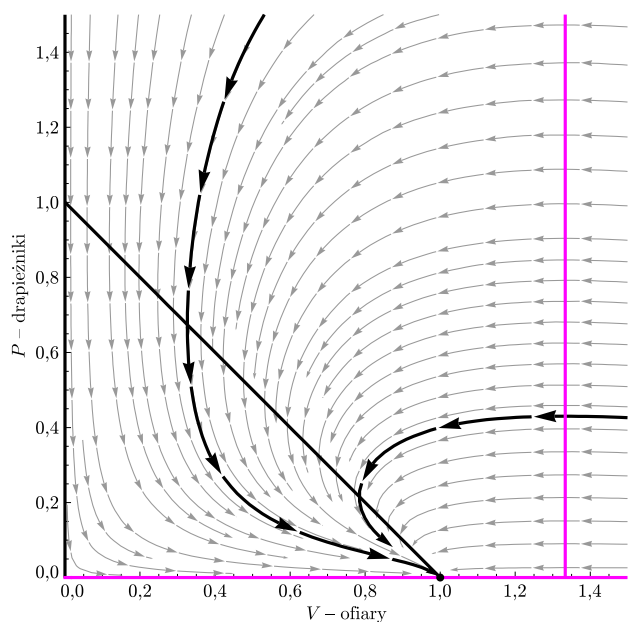
Proste czarne reprezentują ofiary, a kolorowe drapieżniki. Strzałkami zaznaczony jest kierunek orbit przechodzących przez izokliny. Oba rysunki zostały wygenerowane dla stałych $r = k = a = s = 1$ i różnią się wyłącznie wartością współczynnika b , przy czym na górnym rysunku wynosi on $3/4$, a na dolnym 2 .

Punkt jest siodłem, jeśli orbity w jednym kierunku są przyciągane, a w drugim odpychane.

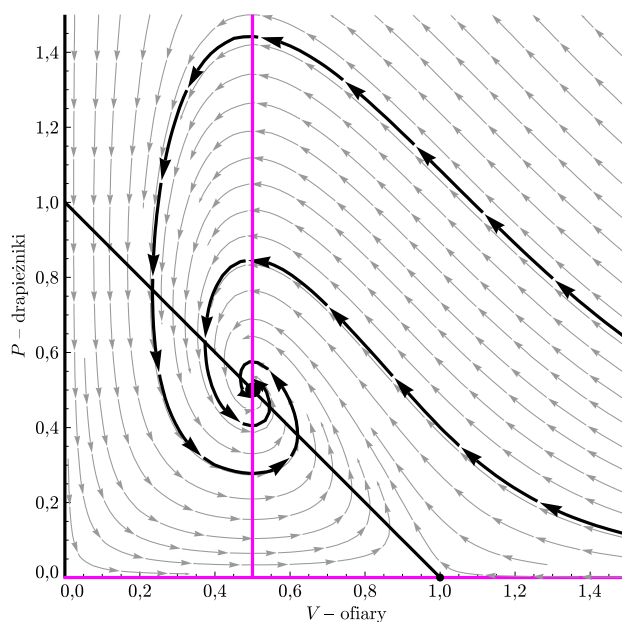
Gdy punkt jest węzłem, orbity są krzywymi, które kończą się/zaczynają bezpośrednio w tym punkcie.

Punkt stabilny asymptotycznie przyciąga rozwiązania ze swego otoczenia.

Punkt jest ogniskiem, gdy orbity przebiegają spiralnie wokół niego – nie kończą się/zaczynają bezpośrednio w nim.



Portret fazowy w przypadku, gdy $k < \frac{s}{ab}$



i w przypadku, gdy $k > \frac{s}{ab}$.

Podobnie jak w przypadku izoklin, oba rysunki zostały wygenerowane dla stałych: $r = 1$, $k = 1$, $a = 1$, $s = 1$; różnią się wyłącznie wartością współczynnika b , przy czym na wykresie lewym $b = 0,75$, zaś na prawym $b = 2$. Na obu portretach wyróżnione zostały po dwie przykładowe orbity: jedna przechodząca przez punkt $(1, 0, 4)$, druga przez punkt $(0, 4, 0, 3)$.

Patrząc na te portrety fazowe, widzimy ciekawe rzeczy.

- Oś układu są orbitami.
- Jeśli punkt (\bar{V}, \bar{P}) jest poza dziedziną lub skleja się z $(k, 0)$, to izokliny dzielą przestrzeń fazową na trzy obszary – nazwijmy je A , B , C , licząc od lewej. Rozwiązanie zaczynające się w C musi przejść do B , bo w przeciwnym razie współrzędna P uciekałaby do nieskończoności, zaś w obszarach A i B obie współrzędne są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne. Zatem punkt stacjonarny $(k, 0)$ jest rozwiązaniem globalnie stabilnym.
- Gdy punkt (\bar{V}, \bar{P}) jest wewnątrz dziedziny ($k < \frac{s}{ab}$), to jest on lokalnie stabilny. Stosując odpowiednie metody (np. metodę funkcji Lapunowa), możemy też wykazać, że jest on globalnie stabilny.

Wnioski

Po przeanalizowaniu układu (2) otrzymaliśmy jeden punkt globalnie stabilny:

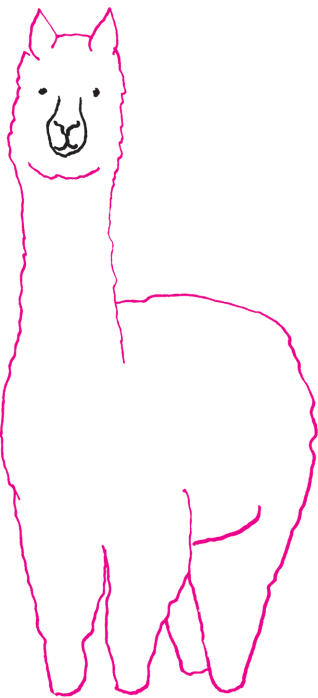
- punkt $(k, 0)$, o ile $k \leq \frac{s}{ab}$,
- punkt (V_s, P_s) , o ile $k > \frac{s}{ab}$.

Każdy z tych punktów jest zbiorem granicznym, do którego zbiegają wszystkie inne orbity układu, poza orbitami biegnącymi wzdłuż układu współrzędnych. Znaczący to, że dowolne rozwiązanie z warunkiem początkowym o obu współrzędnych dodatnich, czyli zaczynające się od dodatnich populacji tak drapieżnika, jak i ofiary, będzie z upływem czasu zbiegało do rozwiązania stacjonarnego, jednego z dwóch powyższych – do którego, to zależy od wartości parametrów układu.

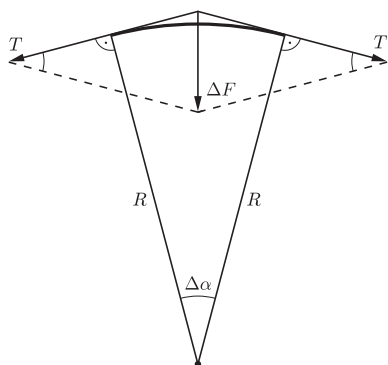
Pamiętamy, że chcieliśmy porównać dynamikę populacji drapieżnika stałocieplnego ze zmiennoocieplnym w tym samym środowisku. Skoro tak, to możemy przyjąć, że współczynniki r oraz k , jako opisujące populację ofiar, są zadane z góry przez model (albo np. pomiary terenowe). Natomiast dla drapieżników – skoro chcemy porównywać dwa różne gatunki, to będziemy porównywali model z dwoma zestawami parametrów: (a_1, b_1, s_1) dla pierwszego drapieżnika oraz (a_2, b_2, s_2) dla drugiego drapieżnika.

Zauważmy, że wystarczy manipulacja współczynnikiem b , aby wybrać, czy $k < \frac{s}{ab}$, czy $k > \frac{s}{ab}$ – im większe b , tym mniejszy ułamek po prawej stronie. Parametr b w modelu (2) opisuje część energii pozyskanej z upolowanej ofiary przeznaczoną na rozród drapieżnika. Jak już było zaznaczone we wstępie, zwierzęta zmiennoociepne mają kilkakrotnie mniejsze zapotrzebowanie na energię niż stałocieplne, gdyż nie muszą utrzymywać stałej temperatury ciała i szybkiego tempa metabolizmu, co oznacza, że relatywnie więcej energii mogą przeznaczyć na reprodukcję. W kontekście omawianego modelu (2) oznacza to większą wartość współczynnika b .

Można tę sytuację interpretować w ten sposób, że dwa różne przypadki portretów fazowych, a więc i różne możliwe zachowania rozwiązań, odpowiadają dwóm różnym gatunkom drapieżników, przy czym przypadek pierwszy, gdy rozwiązania układają się jak na rysunku z lewej, oznacza, że mamy do czynienia z drapieżnikiem stałocieplnym, zaś gdy wyglądają jak na rysunku z prawej, z drapieżnikiem zmiennoocieplnym. To uzasadnia, zgodnie z przypuszczeniami Flannery'ego, nieuchronność zagłady australijskich drapieżnych torbaczy i jednoczesne przetrwanie stabilnej populacji mięsożernych gadów.



Rozwiązanie zadania F 861.
 Każdy mały element kółka o promieniu R zrobionego ze sprężyny przy prędkości kątowej ω porusza się z przyspieszeniem dośrodkowym $a = \omega^2 R$. Jeśli przez $\Delta\alpha$ oznaczyć kąt pomiędzy promieniami łączącymi końce tego elementu z położeniem osi obrotu, to jego masę można zapisać jako $m\Delta\alpha/2\pi$. Siła dośrodkowa działająca na ten element wynosi $\Delta F = T\Delta\alpha$, pochodzi od naciągu sprężyny $T = k(2\pi R - l)$.



Stąd równanie ruchu dla elementu sprężyny ma postać

$$m\Delta\alpha/2\pi\omega^2 R = k(2\pi R - l)\Delta\alpha,$$

a stąd $R = l/(2\pi - m\omega^2/2\pi k)$. Gdy ω rośnie, R także rośnie, dążąc do wartości maksymalnej, którą osiąga dla krytycznej wartości prędkości kątowej

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{k/m}.$$

Sprężyna osiąga wówczas granicę sprężystości (rozprostowuje się), a przy odpowiednio dużej sile rozciągającej ulega zerwaniu.

Jesteśmy świadkami szybkiego postępu w informatyce. Pojawiają się nowe języki programowania, biblioteki i platformy programistyczne. Korzystamy z obliczeń wielkiej skali, a swoje dane i aplikacje przenosimy do tzw. chmury. Jak jest możliwy tak szybki rozwój, pomimo dużego skomplikowania systemów komputerowych?

Odpowiedzią jest modne ostatnio pojęcie *wirtualizacji*, które oznacza korzystanie z abstrakcyjnych modeli. Ukrywamy złożoność pewnego skomplikowanego elementu w czarnej skrzynce, która z zewnątrz wygląda całkiem przystępnie. Abstrakcja występuje jednocześnie na wielu poziomach – czarne skrzynki mogą zawierać w sobie kolejne czarne skrzynki, zupełnie jak rosyjskie matryoski. Przyjrzyjmy się kolejnym poziomom abstrakcji, zaczynając od najwyższych.

Programista dostaje do dyspozycji wysokopoziomowy język programowania. Może używać pojedynczych operacji, instrukcji warunkowych i pętli, z których buduje procedury. Procedury wraz z danymi, na których operują, tworzą klasy będące definicjami obiektów. Część procedur klasy jest widoczna z zewnątrz i tworzy jej interfejs, a pozostałe są pomocnicze i stanowią jej wewnętrzną implementację. Obiekty mogą operować na innych obiektach, i tak cały program można zbudować jak z klocków.

Złożone aplikacje często tworzy się w oparciu o *architekturę wielowarstwową*. Składają się one wtedy z osobnych warstw, które mają jasno określone zadanie i mogą być niezależnie rozwijane. Typowe warstwy są następujące: warstwa prezentacji stanowiąca interfejs użytkownika, warstwa logiki, w której zawarte są algorytmy i reguły przetwarzania poleceń, oraz warstwa danych, która realizuje dostęp do bazy danych. Każda warstwa korzysta wyłącznie z warstwy znajdującej się bezpośrednio pod nią.

Kolejny poziom abstrakcji jest zapewniany przez system operacyjny. Jego rolą jest udostępnianie programom zvirtualizowanych zasobów komputera: procesora, pamięci operacyjnej oraz urządzeń wejścia/wyjścia.

Proces (czyli wykonujący się program) nie jest świadomy obecności pozostałych procesów. Wydaje mu się, że działa na procesorze w sposób ciągły, od uruchomienia do zakończenia. Tymczasem, gdy uruchomionych jest wiele procesów, system operacyjny dzieli dostępny czas procesora, nieustannie przełączając wykonywanie między nimi. Jest to właśnie *wirtualizacja procesora*.

Natomiast *wirtualizacja pamięci operacyjnej* daje procesom wrażenie pracy w ciągłym obszarze pamięci, rozciągającym się przez większość dostępnych adresów. Adresy pamięci widoczne w programie nazywamy wirtualnymi lub logicznymi. Nie są one bezpośrednio używane do adresowania komórek pamięci operacyjnej. System operacyjny za pomocą układów sprzętowych zajmuje się tłumaczeniem adresów logicznych na fizyczne. Dzięki temu może w sposób niezauważalny dla procesów wykonywać wiele pożytecznych funkcji.

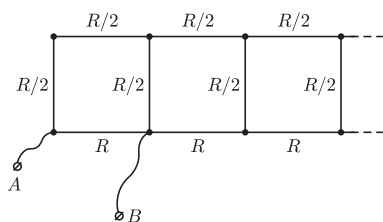
Po pierwsze, różne procesy mają swoje adresy wirtualne odwzorowane na różne adresy fizyczne. Dzięki temu nie mogą uzyskać dostępu do pamięci innych procesów i zakłócać ich pracy. Nazywamy to ochroną pamięci. Jednak procesy mogą również współdzielić pamięć fizyczną. Przykładowo, w części pamięci procesu zapisany jest wykonywany kod programu. Znajduje się w sekcji pamięci tylko do odczytu, więc mamy pewność, że w każdym procesie ten fragment będzie wyglądał tak samo. Nic nie stoi zatem na przeszkodzie, żeby wszystkie te adresy wirtualne odwzorować do tego samego miejsca w fizycznej pamięci operacyjnej, oszczędzając w ten sposób pamięć.

Kolejna technika jest wykorzystywana, gdy zabraknie pamięci operacyjnej. Część zawartości pamięci może być wtedy przeniesiona na dysk bez świadomości procesów. Dane zostaną przywrócone dopiero po ponownym odwołaniu do nich. To ten mechanizm jest odpowiedzialny za spowalnianie komputera, gdy brakuje pamięci operacyjnej. Umożliwia jednak uruchomienie programów zajmujących łącznie więcej pamięci niż dostępne w kościach RAM-u.

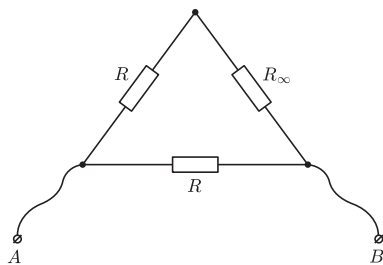
*Katedra Informatyki,
Akademia Górniczo-Hutnicza



Rozwiązanie zadania F 862.
Z symetrii obwodu względem linii $A-B$ wynika, że potencjały punktów symetrycznych względem tej linii są jednakowe. Na tej podstawie możemy rozpatrywany obwód zastąpić obwodem



który z kolei można zwinąć do postaci



i znaleźć oporność pomiędzy punktami A i B :

$$R_{AB} = (R_{\infty} + R)/(R_{\infty} + 2R).$$

Aby znaleźć R_{∞} , korzystamy z faktu, że oporność nieskończonego obwodu jest taka sama z pierwszym jego ogniwem i bez niego. Stąd

$$\frac{1}{R_{\infty}} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{R/2 + R_{\infty} + R},$$

więc

$$R_{\infty} = \frac{R/2(R_{\infty} + 3R/2)}{R/2(3R/2 + R/2)},$$

skąd $R_{\infty} = (\sqrt{21} - 3)R/4$. Podstawiając tę wartość do wzoru na R_{AB} znajdujemy

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{21} + 1}{\sqrt{21} + 5} R \approx 0,58R.$$

Procesy nie mają również bezpośredniego dostępu do pozostałych zasobów komputera, takich jak dysk. Zamiast tego system operacyjny udostępnia procesom *wirtualny system plików*. Operacje dostępu (otwarcie pliku, odczyt zawartości itp.) implementowane są za pomocą ściśle zdefiniowanych wywołań systemowych, które stanowią interfejs pomiędzy procesami użytkownika a systemem operacyjnym. Rozwiązanie takie ma szereg zalet. System operacyjny utrzymuje kontrolę nad tym, co się dzieje w komputerze, dostarcza spójny model plików niezależny od faktycznie użytego na dysku systemu plików, ma możliwość buforowania danych w pamięci podręcznej oraz zapewnia kompatybilność różnych programów.

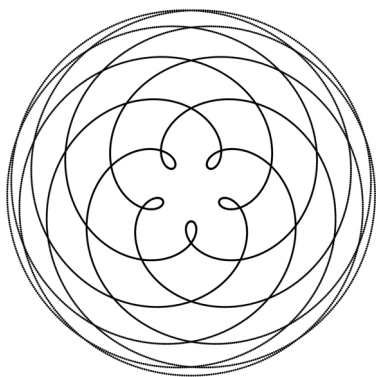
Kolejną warstwą abstrakcji jest *model programowy procesora*. Zarówno programy, jak i kod systemu operacyjnego w procesie kompilacji tłumaczone są z języka źródłowego na kod maszynowy. Mają wtedy postać wykonywalną i mogą zostać bezpośrednio uruchomione na procesorze. Program w kodzie maszynowym zapisany jest jako ciąg instrukcji zrozumiałych dla procesora. Struktura tych instrukcji wyspecyfikowana jest właśnie przez model programowy procesora (ang. *Instruction Set Architecture*), który jest abstrakcyjnym opisem procesora, wirtualną maszyną przedstawioną programistom. Określa, jak programy mogą przeprowadzać obliczenia: definiuje typy danych, dostępne instrukcje i rejestry (nieliczne komórki pamięci wbudowane w procesor, do których ładuje się dane z pamięci operacyjnej w celu wykonania obliczeń). Procesory z tym samym modelem programowym mogą wykonywać te same programy. Dzięki temu jeden program może działać na wielu procesorach.

Sprzętowa realizacja modelu programowego przez procesor nazywana jest *mikroarchitekturą*. Procesor nie musi wcale implementować bezpośrednio abstrakcyjnej maszyny zdefiniowanej w modelu programowym. Faktycznie wykonywane instrukcje nie muszą być tymi zapisanymi w programie, a fizyczne rejestry, do których trafiają dane, nie muszą mieć wzajemnego odwzorowania na wirtualne rejestry, na których operuje program. Ważne jest tylko to, żeby efekt działania programu był taki, jakby działała właśnie wirtualna maszyna z modelu programowego.

I tak instrukcje zwykle nie są wykonywane sekwencyjnie, jedna po drugiej. Procesory nazywane superskalarnymi dysponują wielokrotnionymi jednostkami wykonawczymi, dzięki czemu instrukcje mogą się wykonywać równolegle. W przypadku procesorów firmy Intel już model Pentium był wyposażony w dwie jednostki wykonawcze. Oczywiście, procesor musi wykryć, czy instrukcje przeznaczone do wykonania równoległego są niezależne. Ciąg wzajemnie zależnych instrukcji musi być wykonany sekwencyjnie. W takiej sytuacji na pozostałych jednostkach wykonawczych uruchamia się sąsiednie instrukcje, występujące kawałek dalej w kodzie. Ten mechanizm nazywany jest wykonywaniem poza kolejnością.

Również w obrębie samej jednostki wykonawczej może mieć miejsce równoległość. Cykl wykonania pojedynczej instrukcji dzielony jest na fazy nazywane potokiem. Każda faza wykonuje się na innej specjalizowanej części procesora, dzięki czemu możliwe jest wykonywanie równocześnie różnych faz kolejnych instrukcji. Więcej szczegółów o przetwarzaniu potokowym Czytelnik znajdzie w *Delecie* 8/2012. Problemy pojawiają się, gdy zależności między instrukcjami nie pozwalają na utrzymanie potoku zapelnionego. Przeciwdziała się im, korzystając z szeregu technik, takich jak przewidywanie wyniku instrukcji warunkowych czy przemianowywanie rejestrów.

W dzisiejszych systemach komputerowych abstrakcja występuje na wielu poziomach. Na każdym jednak ma podobne zalety. Umożliwia korzystanie z danego elementu bez znajomości jego wewnętrznych zasad działania. Jednocześnie „pod spodem” mogą w niezauważalny sposób mieć miejsce złożone mechanizmy. Dodatkowo, jasno zdefiniowane przez abstrakcję interfejsy zapewniają kompatybilność różnych implementacji. Dowolny element można zastąpić innym, jeśli tylko komunikuje się z pozostałymi w taki sam sposób. Naturalnie dzieli to system na moduły, z których każdy jest koncepcyjnie prostszy od całości i może być rozwijany niezależnie.



Pentagram (róża) Wenus.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ z } F_1 = 1, F_2 = 1.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
♂	1	0	1	1	2	3	5	8
♀	0	1	1	2	3	5	8	13
♀ + ♂	1	1	2	3	5	8	13	21

Liczba trutni i robotnic w pokoleniu n .

Wenus i pszczoły

Co mają wspólnego starożytna bogini miłości i produkujące miód owady? Odpowiedzią jest *oczywiście* wspaniała złota proporcja, czyli specjalny podział odcinka, o którym ostatnio pisaliśmy w kontekście astronomicznym w numerze 1/2014. Opisany tam stosunek okresów orbitalnych Ziemi (\oplus) i Wenus (\ominus) wyraża się za pomocą złotej proporcji, $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618033989\dots$ i jest bliski $\varphi - 1$, czyli niemal 8/13. W związku z tym momenty koniunkcji tych planet wyznaczają prawie idealny pentagram, w rzeczywistości bowiem w ciągu 8 lat ziemskich Wenus okrąży Słońce 13,004 raza. Rysunek obok ilustruje rezonans w ruchach planet w nieco inny sposób: to orbita Wenus oglądana z układu odniesienia poruszającego się wraz z Ziemią. Jak widać, pentagram można „zakodować” również w znacznie mniej groźnie wyglądający es-flores, orbitalny kwiatek o pięciu płatkach.

Jaki jest jednak związek złotej proporcji z pszczołami? Okazuje się, że trutnie (σ) pochodzą z niezaplodnionych jajeczek, podczas gdy narodziny robotnic (ρ) wymagają udziału trutnia, który to zadanie spełnia tylko raz w życiu. Liczba robotnic w danym pokoleniu równa się zatem liczbie trutni z pokolenia poprzedniego, a także: liczba robotnic w danym pokoleniu jest równa liczbie robotnic w dwu poprzednich pokoleniach. Całkowita liczba pszczół w pokoleniu n jest równa liczbie ciągu Fibonacciego F_n , co obrazuje tabelka.

Złota proporcja φ wynika wprost z ciągu F_n przez $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ (co ciekawe, wartość granicy nie zależy od wartości początkowych ciągu, z wyjątkiem przypadku pary $F_1 = F_2 = 0$); asymptotyczna zależność została opisana przez Johannes Kepler, obserwatora ruchów Wenus oraz pierwszego astronoma, który przewidział przejście planety przed tarczą Słońca (6 grudnia 1631 r.).

Michał BEJGER



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1429. Dane są liczby dodatnie a, b . Rozważmy trójkąty prostokątne ABC o kącie prostym przy wierzchołku C , dla których $AC = a + b$. Niech D będzie punktem na AC , dla którego $AD = a$, $DC = b$. Znaleźć długość boku BC , dla której kąt ABD jest maksymalny.

Rozwiązanie na str. 24

M 1430. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $n \geq k \geq 1$ liczba

$$\frac{\text{NWD}(n, k)}{n} \binom{n}{k}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie na str. 11

M 1431. Niech P będzie pewnym wielościanem. Udowodnić, że istnieje stała dodatnia $c(P)$ o następującej własności: jeśli pewnych n kul o sumie objętości V pokrywa wszystkie ściany (czyli każdy punkt każdej ściany P należy do

co najmniej jednej z nich), to $n \geq \frac{c(P)}{V^2}$.

Rozwiązanie na str. 10

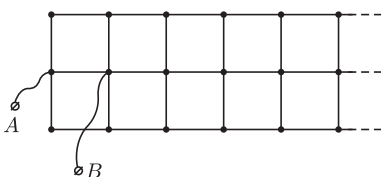
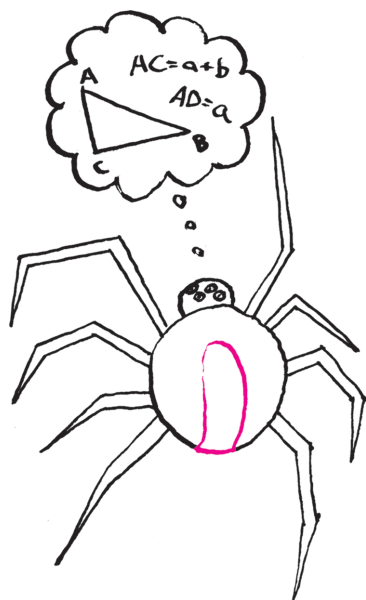
Przygotował Michał NAWROCKI

F 861. Kółko powstałe ze sprężyny o długości początkowej l , współczynnika sprężystości k i masie m , której końce połączone, wiruje z prędkością kątową ω wokół osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez jego środek. Jak zależy promień kółka R od prędkości ω ? Przyjąć, że średnica zwojów sprężyny jest dużo mniejsza od jej długości.

Rozwiązanie na str. 16

F 862. Znaleźć oporność pomiędzy punktami A i B półnieskończonego obwodu, jeżeli oporność każdego z jego elementów wynosi R .

Rozwiązanie na str. 17





mała delta

Ratujmy zdrowie króla!

Król Chimeryk zaniemógł. Wezwał do swojego łoża trzech synów. „Czas mój się wypełnia, bo choroba moja straszna i lekarstwa na nią nie znam. Jedna jeszcze nadzieja została. Za siedmioma górami i siedmioma lasami mieszka stary pustelnik, który ma wiedzę wielką o wszelakich chorobach i sam rozmaite medykamenty przygotowuje sobie tylko znanymi sposobami. Synowie moi! W waszych rękach moje życie i ostatnia nadzieja na jego przedłużenie.”

Zerwali się trzej bracia, każdy z nich konia osiodłał i ruszył inną drogą. Najstarszemu stanęła na przeszkodzie wiedźma Pędzicha, która kompas zaczarowawszy, w złą drogę go skierowała. Błąkał się syn, błąkał, aż zawróciwszy, z trudem trafił do pałacu ojca, niestety, z pustymi rękami. Średni syn ledwo z życiem uszedł, gdy zbójce go napadli, obrabowali, konia zabrali i piechotą trza mu było do pałacu wracać. Jeno najmłodszy, przez siedem gór i rzek przepawiwszy się, chatkę pustelnika znalazł i o chorobie ojca opowiedział. Pustelnik zmartwił się, bo wiedział, że na chorobę tę tylko jedno lekarstwo i szybko trzeba podać. Lekarstwo jednak było trudne do przyrządzenia i składało się z dwóch składników. Każdy z tych składników podany bez tego drugiego był trucizną i zażycie tylko jednego z nich niechybnie kończyło się śmiercią nawet zdrowego człowieka. Razem jednak znosiły swoje śmiertcionośne działanie i dawały wyzdrowienie. Trzeba tylko było zaaplikować dwie dawki dzień po dniu. Inaczej nie zadziałałyby.

„Normalnie lekarstwa te trzymam w butlach. Jednak – żeś w podróży – przygotowałem ci wygodniejszą wersję instant w tabletkach. Daję ci dwie pastylki pierwszego składnika i dwie drugiego. Żebyś ich nie pomylił, bo wszystkie cztery wyglądają identycznie, wkładam dwie pastylki pierwszego z nich do zielonego słoiczka, a drugie dwie do pomarańczowego. Pamiętaj! po powrocie dajesz po jednej pastylce z każdego słoiczka pierwszego dnia i potem tak samo po jednej następnego dnia. Nie wolno ci się pomylić!”

Syn najmłodszy szczęśliwie do pałacu wrócił, dzierżąc dwa szklane słoiczki z lekarstwami. Cóż, kiedy z przejęcia, gdy biegł do łoża ojcowskiego, potknął się, słoiczki trzymane w rękach potłukły się i cztery identyczne pastylki rozsypały się po posadzce pałacowej. Nie wiadomo, która z nich z którego słoiczka pochodziła.

Naradzają się bracia, jak tu, życia ojcowskiego nie narażając, zaaplikować lekarstwo. Mówi najstarszy:

– Dajmy ojcu na chybił-trafił dwie tabletki. Albo będą różne, i wtedy przeżyje, albo będą takie same, to wtedy zemrze, ale śmierć go wszak dosięgnie też wtedy, gdy zaniechamy działania. A tak nasz kochany ojciec ma 50% szans na wyzdrowienie.

– A nawet więcej – wtrącił się średni. – Mamy przecież możliwych sześć wyborów dwóch tabletek spośród czterech i aż cztery spośród tych sześciu wyborów to pary różnych tabletek. Możecie to sami sprawdzić. Jeśli jeszcze nie wierzycie, to zauważcie, że gdy pierwszą tabletkę, obojętnie którą, ojciec zażyje na chybił-trafił, to spośród trzech pozostałych aż dwie są różne od tej pierwszej, więc szanse na przeżycie wynoszą $\frac{2}{3}$, czyli ponad 66%.

– Mam ja pomysł, jak zwiększyć szanse ojca do 100% – ozwał się syn najmłodszy. Studiowałem swojego czasu geometrię i wiem, że czasami przez podziały można złożyć dowolne figury. Proponuję zatem każdą z tabletek przeciąć na pół i z każdej przeciętej tabletki wziąć jedną połówkę i podać ojcu dnia pierwszego, a pozostałe połówki – drugiego. Nie ma możliwości, żeby nie zadziałało!

Małą Deltę przygotował Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Najeźdźcy

Co łączy królika, stonkę, karpia i jenota? To, że wszystkie te osobniki należą w określonym środowisku do przedstawicieli gatunków inwazyjnych. Króliki w Australii (o tym wie każde dziecko), pozostałe – w Europie. No i jeszcze złowrogą barszcz Sosnowskiego, roślina wielka i dotkliwie parząca.

Gatunek inwazyjny, jak świadczy nazwa, pojawia się na nowym terenie, a wprowadzają go tam (świadomie, a najczęściej nie) ludzie. Niektóre z takich gatunków bardzo się nam udały – pomidory, kasztanowce, karpie, bażanty, daniele. Częściej jednak słyszymy o tych, które uznajemy za szkodliwe. O stonce ziemniaczanej propaganda w PRL głosiła, że zrzucona została z samolotów przez amerykańskich imperialistów (!). W odpowiedzi na pola wysyłano aktywistów zbierających te chrząszcze, potem stosowano opryski DDT, dużo później wyhodowano (zgroza!) genetycznie modyfikowane ziemniaki, które stonki się nie boją. Ryba babka bycza zapewne pojawiła się w Bałtyku przywieziona z Morza Czarnego w zbiornikach wód balastowych statków. Wielkie spory toczą hodowcy zwierząt futerkowych z ekologami o norkę amerykańską (jesteśmy największym w Europie producentem tych futer). Czasami jednak jakiejś norce udaje się uciec, spotkać partnera i wtedy zaczyna się inwazja środowiskowa drapieżnego zwierzęcia, niemającego u nas naturalnych wrogów. Norka amerykańska dobrze pływa i wspina się po drzewach, poluje na ryby, raki, płazy i ptaki (jaja, pisklęta). W dodatku krzyżuje się z rodzimą norką. W takich przypadkach zagrożona jest różnorodność biologiczna w obrębie gatunku. Naruszony może też być typowy dla danego ekosystemu skład gatunkowy, co skutkuje poważniejszymi możliwymi zmianami w środowisku.

Od 1 do 26 IX 2014

na WMI UAM odbędą się

III Poznańskie Praktyki Badawcze

W tym czasie studenci z wielu polskich uczelni będą pracowali nad rozwiązaniem problemów z zastosowań matematyki i informatyki w przemyśle.

W tygodniu poprzedzającym PPB uczestnicy będą mieli okazję wziąć udział w warsztatach, podczas których nauczą się m.in. jak prawidłowo tworzyć raporty i prezentacje, jak zarządzać zespołem oraz jak budować modele matematyczne postawionych problemów.

Więcej informacji na www.ppb.edu.pl

Za inwazyjne uznaje się obecnie w Europie 12 tys. gatunków, z czego 10% – za szkodliwe. Przez ostatnie 100 lat liczba gatunków inwazyjnych wzrosła dwa i pół raza, 2/3 z nich to rośliny. W Polsce zarejestrowano takich gatunków prawie 1300, ale część z tego to zbiegłe z niewoli lub wyrzucone przez właścicieli płazy, gady. Najwięcej mówi się o norce, barszczu, ostatnio o nawłoci (zawojowała miedze i wiele zaniedbanych pól w Polsce; podobno z jej żółtych kwiatów pszczoły zbierają bardzo smaczny miód). Ogólnie szkodliwość gatunków inwazyjnych upatruje się w zajmowaniu niszy ekologicznych rodzimych gatunków, drapieżnictwo (jenot zagraża obszarom chronionym wokół zbiorników wodnych nad Biebrzą, Wartą). Niektóre gatunki inwazyjne wywołują problemy zdrowotne (ostre stany alergiczne wywołane przez pyłek ambrozji bylicolistnej). Zakłócają uprawy rolne (stonka), leśne (czerecha amerykańska), gospodarkę wodną (racicznica zmienna, małż z rejonu Morza Czarnego oblepiający części podwodne statków i konstrukcji portowych).

Pojawieniu się gatunków inwazyjnych sprzyja szybki rozwój różnorodnych środków przewozu ludzi i towarów. W Unii Europejskiej dokonano oceny strat wiążących się z gatunkami inwazyjnymi i z ich zwalczaniem, na około 12 mld euro rocznie. W Polsce takich zbiorczych danych jeszcze nie znamy. Jednakże często ograniczanie lub zmniejszanie populacji inwazyjnej okazuje się na dużych terenach niewykonalne i ich rozprzestrzenienia nie sposób powstrzymać, chyba że reaguje się szybko, tuż po pojawieniu się zagrożenia. W Polsce zwraca się głównie uwagę na tereny przyrodniczo chronione, wyłapuje drapieżniki inwazyjne lub stara się o stworzenie wokół rezerwatów stref buforowych przez niedopuszczenie do powstawania tam farm dla zwierząt futerkowych.

A ja się cieszę, że nie wiedziano nic o gatunkach inwazyjnych w czasach, gdy do Europy dzielni odkrywcy zamorskich krain przywieźli dziwne rośliny z bulwami: ziemniaki.

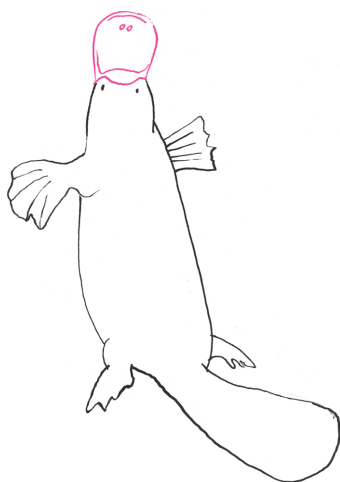
Magdalena FIKUS

Tekst powstał na podstawie Raportu Mirosława Gwiazdowicza opublikowanego przez Biuro Analiz Sejmowych. Biuru gratulujemy, postom życzymy ciekawej lektury.

Magnetyczna chłodziarka

Sposobów na chłodzenie wymyślono wiele. Z termodynamicznego punktu widzenia każdy proces, w którym zmienia się entropia, może być użyty do wytworzenia różnicy temperatur. Jednym z ciekawszych, choć raczej mało znanym sposobem, jest wykorzystywanie efektu magnetokalorycznego. Został on odkryty pod koniec XIX wieku, jako ogrzewanie się substancji magnetycznych na skutek magnesowania. Jeżeli substancja jest paramagnetykiem, to w czasie jej adiabatycznego rozmagnesowania następuje obniżenie temperatury. Zjawisko to zostało objaśnione (niezależnie) przez Petera Debaya i Williama Giauque'a w latach dwudziestych XX wieku.

Giauque dostał Nagrodę Nobla z Chemii (1949) za badania, które przeprowadzał dzięki wykorzystywaniu zaprojektowanej przez siebie magnetycznej chłodziarki [1]. Zasadę działania takiego urządzenia można przybliżyć za pomocą analogii ze standardowym cyklem termodynamicznym używanym np. w lodówkach. Tak jak nasycona para jest skraplana za pomocą wysokiego ciśnienia, tak paramagnetyk jest magnetyzowany za pomocą pola magnetycznego. W obu przypadkach następuje uporządkowanie kosztem wzrostu temperatury, a poprzez oddanie ciepła – obniżenie entropii. Następnie, tak jak ciecz odparowuje po obniżeniu ciśnienia, tak paramagnetyk rozmagnesowuje się po usunięciu zewnętrznego pola magnetycznego. W obu przypadkach proces odbywa się kosztem ciepła wewnętrznego, więc temperatura się obniża, co wykorzystuje się do chłodzenia. Pobranie ciepła z otoczenia powoduje wzrost entropii i cykl się zamyka.



Od około dwudziestu lat obserwuje się wzrost zainteresowania chłodzeniem magnetycznym. W tym roku ma miejsce premiera komercyjnego wykorzystania pomysłu [2]. Produkowane przez francuską firmę *Cooltech Applications* urządzenie *Weenter®* wykorzystuje zestaw kilku substancji magnetokalorycznych o zbliżonych temperaturach Curie (T_C), uformowanych w porowaty blok, umieszczony w polu magnetycznym wytwarzanym przez stały magnes. Rotacja magnesu zapewnia zmianę pola. Przez blok przepuszczany jest czynnik chłodzący (taki jak w chłodnicy samochodowej), na przemian: od strony o najniższej T_C po ogrzaniu, a z powrotem po schłodzeniu. Po około 200 cyklach (z częstotliwością 1 Hz) osiągnięta jest równowaga z temperaturą około -5°C po jednej oraz 36°C po drugiej stronie.

Jednocześnie trwa rywalizacja, jeżeli chodzi o badania podstawowe w tej dziedzinie. Jednym z dominujących tematów jest badanie materiałów wieloferroicznych (ang. *multiferroic*). Chodzi o substancje, które wykazują więcej niż jedną własność ferroiczną (więcej niż jeden parametr uporządkowania). Oprócz ferromagnetyzmu jest to np. ferroelektryczność (spontaniczne pojawianie się polaryzacji dielektrycznej poniżej temperatury Curie). Warunkiem koniecznym ferroelektryczności jest asymetria kryształów.

W czerwcu ukazała się praca [3], w której autorzy opisują badanie monokryształu HoMn_2O_5 . Ta wieloferroiczna substancja wykazuje bardzo dużą anizotropię magneto-krystaliczną. Łatwość jej magnesowania zależy od kierunku pola magnetycznego względem osi kryształu. Dzięki temu wystarczy taki kryształ obrócić w polu magnetycznym, żeby uzyskać efekt magnetokaloryczny. Umożliwia to użycie silnych nieruchomych magnesów nadprzewodzących. Autorzy argumentują, że jest to kolejna droga do uzyskania komercyjnych chłodziarek, choć akurat badana substancja wykazuje efekt magnetokaloryczny w okolicach 10°K , więc na domową lodówkę raczej się nie nadaje.

Trudno wyrokować, czy magnetyczne chłodziarki zawojują rynek.

Wyeliminowanie freonów jest jakimś argumentem, ale decydujący będzie, moim zdaniem, prosty rachunek ekonomiczny. Jeżeli rzeczywiście okażą się tańsze w eksploatacji, to nie można wykluczyć scenariusza, że za kilkanaście lat inne chłodziarki mogą już nie być produkowane.

Piotr ZALEWSKI

- [1] W.F. Giaque, D.P. MacDougall, *Attainment of temperatures below 1° absolute by demagnetization of $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$* , Phys. Rev. **43**, 768, maj 1933; DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.43.768>.
- [2] V. Delecourt, M. Hittinger, Ch. Muller, *Réfrigération magnétique appliquée au froid commercial*, Revue Générale Froid et Conditionnement d'Air **1142**, kwiecień 2014; <http://www.cooltech-applications.com/files/Froid%20article.pdf>.
- [3] M. Balli, S. Jandl, P. Fourier, M.M. Gospodinov, *Anisotropy-enhanced giant reversible rotating magnetocaloric effect in HoMn_2O_5 single crystals*, Appl. Phys. Lett. **104**, 232402, czerwiec 2014; <http://dx.doi.org/10.1063/1.4880818>.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Rozwiązania zadań z numeru 4/2014

Redaguje **Elżbieta ZAWISTOWSKA**

Przypominamy treść zadań:

576. Z równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α zsuwają się dwa klocki o jednakowych masach m , połączone nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k (rys. 1). W chwili początkowej sprężyna jest nieodkształcona, a prędkości klocków są równe zero. Współczynnik tarcia między drugim klockiem a równią wynosi μ , przy czym $\mu < \tan \alpha$. Między pierwszym klockiem a równią tarcia nie ma. Znaleźć maksymalne wydłużenie sprężyny oraz inne wielkości charakteryzujące ruch klocków.

577. Na powierzchni długiego, nieprzewodzącego walca o promieniu R równomiernie rozłożony jest ładunek o gęstości powierzchniowej σ . Walec znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0 , którego linie są równoległe do osi walca. Znaleźć prędkość kątową walca po wyłączeniu zewnętrznego pola magnetycznego. Walec ma jednorodną gęstość ρ .

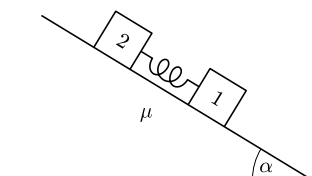
576. Ponieważ spełniony jest warunek $\mu < \tan \alpha$, oba klocki ruszają jednocześnie. Środek masy układu porusza się z przyspieszeniem $a = g \sin \alpha - \frac{1}{2} \mu g \cos \alpha$. Dalej rozważać będziemy problem w układzie środka masy.

Masy klocków są jednakowe, zatem środek masy układu S znajduje się w połowie odległości między klockami, a ich ruch jest symetryczny względem środka masy. Możemy więc ograniczyć się do rozpatrzenia ruchu jednego z klocków.

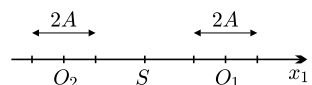
Wypadkowa siła, działająca na klocek pierwszy, wynosi $F_1 = mg \sin \alpha - kx = \frac{1}{2} \mu mg \cos \alpha - kx$, gdzie x jest odkształceniem sprężyny ($x > 0$, gdy sprężyna jest rozciągnięta). Gdy $F_1 = 0$, czyli w stanie równowagi, wydłużenie sprężyny jest równe $\Delta l = \frac{\mu mg \cos \alpha}{2k}$. Niech x_1 oznacza współrzędną pierwszego klocka

względem położenia równowagi O_1 (patrz rys. 2). Możemy wtedy napisać $F_1 = \frac{1}{2} \mu mg \cos \alpha - k(\Delta l + 2x_1) = -2kx_1$. Klocki poruszają się więc względem środka masy ruchem harmonicznym z okresem $T = 2\pi \sqrt{2k/m}$. W chwili początkowej $x_1 = \Delta l/2$, zatem amplitudy drgań wynoszą $A = \frac{\mu mg \cos \alpha}{4k}$.

Maksymalne wydłużenie sprężyny jest równe $x_{\max} = 4A$.



Rys. 1



Rys. 2

577. Oznaczmy przez Δt czas, w którym następuje wyłączenie zewnętrznego pola magnetycznego. Zmiana strumienia tego pola przez powierzchnię przekroju poprzecznego walca powoduje powstanie stycznego do powierzchni walca pola elektrycznego, które działa na ładunek na powierzchni walca i wywołuje jego obrót. Z kolei poruszający się ładunek powierzchniowy wytwarza wewnątrz walca dodatkowe pole magnetyczne, które zgodnie z regułą przekory rośnie w czasie i skierowane jest zgodnie z polem B_0 . Oznaczmy maksymalną wartość wektora tego pola przez B . Zgodnie z prawem Faradaya

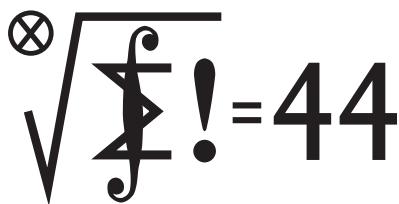
$$K_E = 2\pi R E = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 (B_0 - B)}{\Delta t},$$

gdzie przez K_E oznaczyliśmy krążenie pola elektrycznego E wzdłuż okręgu o promieniu R otaczającego przekrój poprzeczny walca, a przez Φ_B

strumień pola magnetycznego przez powierzchnię tego przekroju. Wartość indukowanego pola magnetycznego, gdy obracający się walec osiągnie końcową prędkość kątową ω wynosi $B = \mu_0 j$, gdzie $j = 2\pi R \sigma \omega$ jest natężeniem prądu na jednostkę długości walca. Średni moment siły zwiększający prędkość kątową walca w czasie Δt dany jest wzorem $M = QER$, gdzie $Q = 2\pi R l \sigma$ jest całkowitym ładunkiem na powierzchni walca o długości l . Równanie ruchu obrotowego walca ma postać $I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = M$. Moment bezwładności pełnego walca to $I = \frac{\pi}{2} \rho R^4 l$, zaś $\Delta \omega = \omega$. Wstawiając natężenie pola E z prawa Faradaya do równania ruchu obrotowego, otrzymujemy szukaną prędkość kątową:

$$\omega = \frac{2\sigma B_0}{R(\rho + 2\mu_0 \sigma^2)}.$$

Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
673 ($WT = 1,64$) i 674 ($WT = 2,94$)
z numeru 1/2014

Jędrzej Garnek	Poznań	47,96
Janusz Olszewski	Warszawa	45,91
Andrzej Idzik	Bolesławiec	42,10
Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	37,56
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,36
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Pan Jędrzej Garnek – już po raz drugi.
Zaś Janusz Olszewski stanie oto
i za pięciu Weteranów.

Rozwiązania zadań z numeru 4/2014

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

679. Na okręgu wybrano skończoną liczbę punktów i niektóre z nich oznaczono kolorem białym, a pozostałe czerwonym, tak, że punktów białych jest przeszło dwukrotnie więcej niż czerwonych. Dowieść, że istnieje taki punkt biały, że każdy łuk okręgu, mający koniec w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych.

680. Dwsieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F . Odcinki prostych DE i DF , wyznaczone przez punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta, mają środki w punktach M i N . Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie P . Wykazać, że środek okręgu, przechodzącego przez punkty D, M, N , leży na okręgu, przechodzącym przez punkty P, M, N .

679. Jeżeli wszystkie wybrane punkty są białe, nie ma czego dowodzić.

Przyjmijmy więc, że tak nie jest. Ustalmy kierunek obiegu (orientację) okręgu; każdy łuk ma wtedy początek i koniec.

Punkt biały nazwijmy *fajnym*, jeżeli każdy łuk okręgu, mający początek w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych. Wybierzmy dowolną parę punktów sąsiadujących, różnych kolorów, w której punkt biały jest wcześniejszy niż punkt czerwony (bezpośrednio go poprzedza). Usuńmy tę parę. Zauważmy, że wszystkie białe punkty, które nie były fajne, pozostają nefajnymi w nowej sytuacji.

Powtarzamy to postępowanie, dopóki czerwone punkty nie znikną. Przyjmijmy, że na starcie było b punktów białych oraz c czerwonych. Po wykonaniu c ruchów zostaje $b - c$ punktów, wszystkie białe, oczywiście fajne (w tej końcowej sytuacji). One zatem były fajne już na starcie; oznaczmy ich zbiór przez B .

Zmieniamy orientację i powtarzamy rozumowanie. Otrzymujemy zbiór B' , złożony z $b - c$ białych punktów, które już na starcie były „fajne przy zmienionej orientacji”. Dla uzyskania tezy zadania należy wykazać, że pewien punkt biały znajduje się w części wspólnej zbiorów B i B' . Do tego wystarczy, żeby zachodziła nierówność $2(b - c) > b$, czyli $b > 2c$, a to jest dane w założeniu.

680. Oznaczmy przez α, β, γ miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C , zaś przez S, T punkty przecięcia odcinka EF odpowiednio z bokami AB, AC . Odcinki AD, BE, CF przecinają się w punkcie I (środku okręgu wpisanego). Z równości

$$|\sphericalangle BAD| = \alpha/2,$$

$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE| = \beta/2,$$

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BCF| = \gamma/2$$

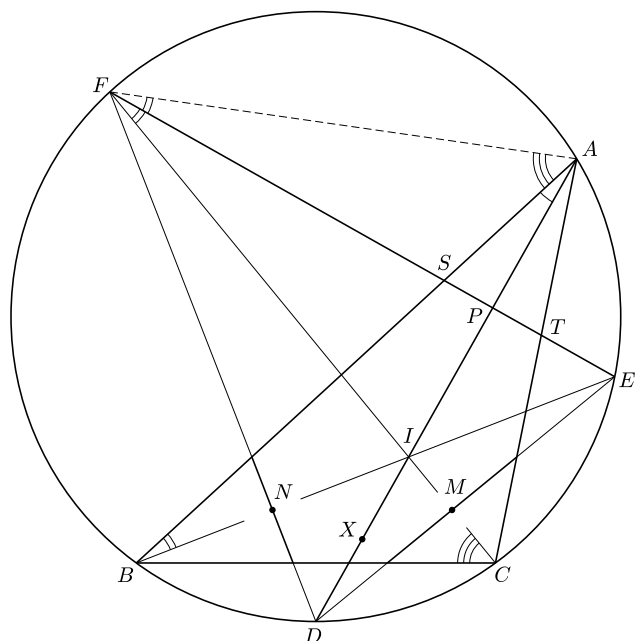
wynika, że w trójkącie APF kąty przy wierzchołkach A i F sumują się do kąta prostego. Zatem kąt przy wierzchołku P jest prosty. W trójkącie AST odcinek AP jest więc jednocześnie dwusieczną i wysokością; to znaczy, że punkt P jest środkiem odcinka ST .

Skoro $AP \perp PF$, równość

$$|\sphericalangle CFE| = |\sphericalangle CBE| = \beta/2 = |\sphericalangle AFE|$$

pokazuje, że prosta EF jest symetralną odcinka AI . Przez analogię, punkty M i N są środkami odcinków CI i BI , a proste DE i DF są symetralnymi tych odcinków. W takim razie jednokładność o środku I i skali $1/2$ przekształca trójkąt ABC na trójkąt PNM .

Okrąg opisany na pierwszym z tych trójkątów przechodzi na okrąg opisany na drugim. Obrazem punktu D jest środek X odcinka ID , który wobec tego leży na okręgu (PNM). Pozostaje zauważyć, że punkt X , jako środek przeciwprostokątnej trójkątów prostokątnych IMD, IND , jest też środkiem okręgu (DMN).



Prosto z nieba: Skaliste otoczenie pulsarów

PSR B1257+12 znajduje się około 1000 lat świetlnych od Ziemi, w gwiazdozbiornie Panny; gwiazda obraca się ponad 160 razy na sekundę (obserwacje przeprowadzono za pomocą teleskopu w Arecibo).

Pierwszymi planetami zaobserwowanymi poza Układem Słonecznym jest para globów opisana przez Aleksandra Wolszczana i Dale'a Fraila w 1992 roku. Odkrycie było zupełnie niespodziewane, ponieważ planety znaleziono podczas analizy czasów nadejścia pulsów (chronometrażu) pulsara PSR B1257+12, tj. bardzo gęstej pozostałości po wybuchu supernowej – nikt nawet nie spekulował, że w tak nieprzyjaznym poboju, wypełnionym dodatkowo zabójczym promieniowaniem i wiatrem energetycznych cząstek mogą wciąż istnieć planety. Obecnie wiemy, że w układzie PSR B1257+12 znajdują się trzy planety (o masach 0,02, 4,3 oraz 3,9 masy Ziemi) oraz, przypuszczalnie, czwarte ciało (masywna odległa planeta bądź kometa). Układy planetarne wokół pulsarów są jednak rzadkim zjawiskiem: drugi dobrze udokumentowany przez obserwacje układ to PSR B1620-26, dlatego też z wielkim zainteresowaniem spotkało się niedawne doniesienie australijskich astronomów z teleskopu Parkesa, współpracujących z kolegami z Południowej Afryki.

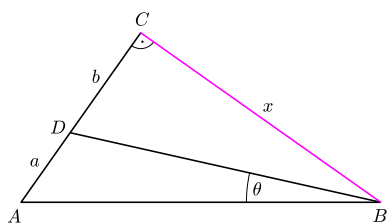
Radiopulsar PSR J0738-4042 obraca się znacznie wolniej od gwiazdy Wolszczana, zaledwie 2,66 razy na sekundę; szczegółowa analiza zaburzeń regularnego cyklu pulsara wskazuje na to, że w jego otoczeniu znajdują się niewielkie ciała: pojedyncze skaliste asteroidy oraz mniejsze obiekty tworzące pyłowy dysk, oddziałujące z magnetosferą pulsara, a nawet spadające na jego powierzchnię, co obserwowano we wrześniu 2005 r. jako raptowną zmianę zachowania się pulsu. Wiatr cząstek

oraz promieniowanie może także rozбивać asteroidy na mniejsze kawałki wchodzące tym chętniej w interakcje z polem magnetycznym gwiazdy. Pył i asteroidy są pozostałością materii pochodzącej z wybuchu supernowej oraz istniejącego wtedy układu planet. PSR J0738-4042 jest zatem kolejnym ekstremalnym przypadkiem potwierdzającym tezę, że planety mogą powstawać (oraz istnieć!) w bardzo różnych, często niesprzyjających środowiskach.

Michał BEJGER



Rozwiązanie zadania M 1429.
Niech x oznacza długość boku BC .



Obliczając pole trójkąta ABD na dwa sposoby, mamy

$$ax = \sin \theta \sqrt{x^2 + b^2} \sqrt{x^2 + (a+b)^2},$$

skąd

$$\frac{a^2}{\sin^2 \theta} = \left(\frac{\sqrt{x^2 + b^2} \sqrt{x^2 + (a+b)^2}}{x} \right)^2$$

$$= x^2 + b^2 + (a+b)^2 + \frac{b^2(a+b)^2}{x^2}$$

$$= \left(x - \frac{b(a+b)}{x} \right)^2 + (a+2b)^2$$

$$\geq (a+2b)^2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \sqrt{b(a+b)}$. Kąt θ jest ostry, więc ma maksymalną wartość, gdy $1/\sin \theta$ ma minimalną wartość, którą wyznaczyliśmy powyżej. Zatem kąt θ jest maksymalny dla

$$x = \sqrt{b(a+b)}.$$

Niebo w sierpniu

Prawdopodobnie największą atrakcją sierpniowego nieba są Perseidy. Ten popularny wakacyjny rój meteorów powstaje z komety Swifta-Tuttle'a i jest jednym z największych w ciągu roku. W okolicy maksimum aktywności, tj. 13 VIII, jest źródłem około 60 meteorów na godzinę dla obserwatora znajdującego się w idealnych warunkach, z dala od światła miasta. Radiant Perseidów leży w gwiazdozbiornie Perseusza, który jest widoczny wtedy w Polsce praktycznie przez całą noc. Niestety, w tym roku jasny Księżyc, który będzie trzy dni po pełni, będzie trochę przeszkadzał w obserwacjach maksimum aktywności tego roju. Mimo tego możemy z pewnością liczyć na kilkadziesiąt „spadających gwiazd” na godzinę.

18 VIII naprawdę warto będzie wstać trochę wcześniej. Godzinę przed wschodem Słońca, nisko nad południowo-wschodnim horyzontem pojawi się para najjaśniejszych planet na naszym niebie. Wenus i Jowisz znajdują się bardzo blisko siebie, w odległości kątowej mniejszej od 2/3 średnicy kątowej Księżyca! Będzie to bardzo zjawiskowe wydarzenie, doskonale widoczne nieuzbrojonym okiem.

25 VIII dojdzie do koniunkcji dwóch kolejnych planet, Marsa i Saturna, które przejdą koło siebie na niebie w odległości około 3 stopni łuku. Mars osiągnie jasność około 0,1 wielkości gwiazdowej, natomiast Saturn 1,1^m. Para będzie widoczna dość krótko po zachodzie Słońca bardzo nisko nad południowo-zachodnim horyzontem. Odległość między nimi będzie zbyt duża, aby mogły zmieścić się w polu widzenia teleskopu, ale obserwacje „gołym okiem” lub lornetką powinny się udać.


Poza spotkaniami samych planet w tym miesiącu dojdzie też do spotkania z Księżycem. 3 VIII dojdzie do koniunkcji Księżyca i Marsa. Minimalna odległość między nimi wyniesie 2 stopnie łuku. Dzień później, 4 VIII, Księżyc zbliży się do Saturna. Ta sama trójka, tj. Księżyc, Mars i Saturn, spotka się znowu 31 VIII. Wtedy minimalna odległość między Księżycem a Saturnem wyniesie tylko 20 minut łuku. Wszystkie te wydarzenia będziemy mogli obserwować wieczorem nad zachodnim horyzontem przez około dwie godziny po zachodzie Słońca.

Magda OTULAKOWSKA-HYPKA



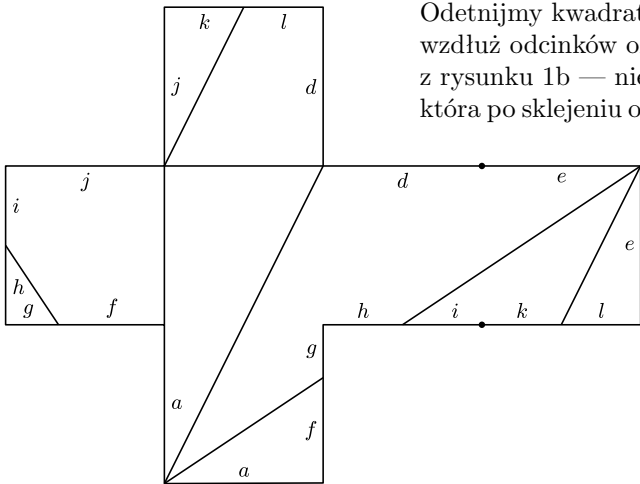
Dwa w jednym

Joanna JASZUŃSKA

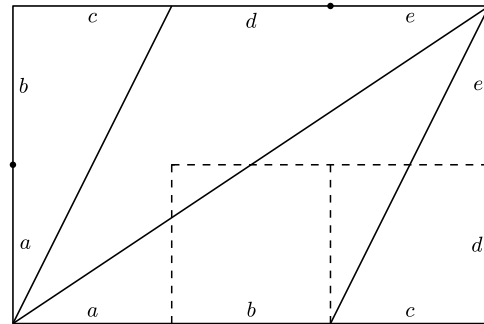
Powierzchnię pewnego wielościanu rozcięto (niekoniecznie wzdłuż krawędzi) i rozłożono, otrzymując płaski wielokąt o kształcie . Czy wyjściowy wielościan musiał być sześcianem?

Okazuje się, że niekoniecznie. Jeśli figurę z rysunku 1a wyciąć, pozginać wzdłuż linii i skleić odcinki oznaczone tymi samymi literami, uzyskamy czworościan! Można się o tym przekonać praktycznie (proszę spróbować, najwygodniej na powiększonej kserokopii), można też teoretycznie, w następujący sposób.

Odetnijmy kwadraty lewy i górny, a następnie doklejmy je do pozostałej części wzdłuż odcinków oznaczonych literami f, g, h, i, k, l . W efekcie uzyskamy figurę z rysunku 1b — nietrudno sprawdzić, że jest to zwykła siatka czworościanu — która po sklejeniu odpowiednich odcinków da tę samą bryłę, co figura z rysunku 1a.



Rys. 1a



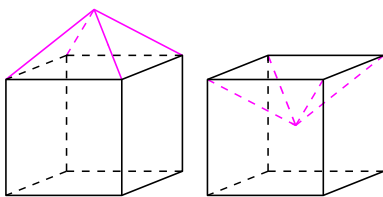
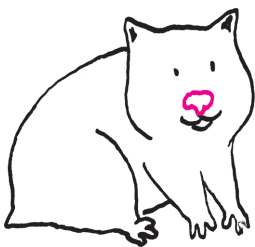
Rys. 1b. Przerywanymi liniami oznaczono ślady po sklejeniu.

Siatkę rozumiemy tu tradycyjnie: płaski wielokąt podzielony na mniejsze wielokąty – ściany wyjściowej bryły.

W podobny sposób można z powierzchni sześcianu otrzymać inne bryły.

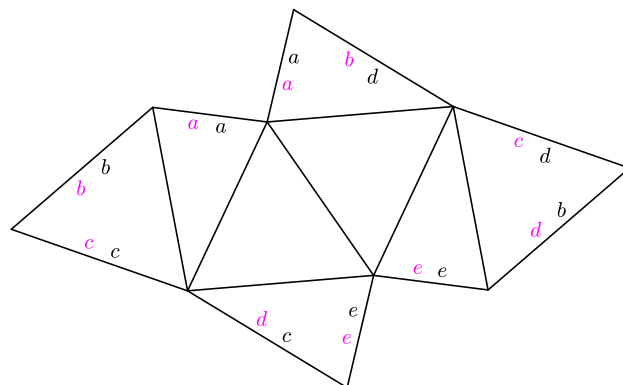
Polecam animację *Metamorphosis of the Cube* (<http://erikdemaine.org/metamorphosis>).

Powyższe podejście jest o tyle nietypowe, że dopuszcza cięcia w poprzek ścian. A czy można wielościan rozłożyć na *siatkę* i następnie złożyć z niej inny wielościan? Łatwo udzielić twierdzącej odpowiedzi, gdy zauważymy, iż rozważane wielościany nie muszą być wypukłe (rys. 2).



Rys. 2. Sześcian z daszkiem i sześcian z wnęką w kształcie daszka mają identyczne siatki.

Zażądajmy więc dodatkowo, by obydwie wielościany były wypukłe. Teraz odpowiedź jest mniej oczywista, ale również okazuje się pozytywna! Siatkę, z której można złożyć dwa różne wielościany wypukłe, przedstawia rysunek 3. Sekret tkwi w tym, że krawędzie tej siatki sklejamy na różne sposoby.



Rys. 3. Krawędzie oznaczone tymi samymi literami należy skleić. Kolorem oznaczono jeden z możliwych sposobów, na czarno – drugi. Warto skserować w powiększeniu, wyciąć i złożyć!

Dołączmy więc do naszych wymagań kolejny warunek: sklejać należy te same krawędzie siatki. Niestety (a może na szczęście?), tym razem nie istnieją szukane bryły, bowiem *twierdzenie Cauchy'ego o sztywności* orzeka, że siatka wraz z taką „instrukcją klejenia” jednoznacznie wyznacza wielościan wypukły.