





SPIS TREŚCI NUMERU 5 (504)

Wahadło Newtona <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 1
 Zadania	str. 3
Pamięć w komputerze <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 4
Sztuczna inteligencja w astrofizyce <i>Aleksandra Solarz, Katarzyna Małek</i>	str. 6
 Z żabami przez symetrię <i>Jerzy Sokolowski</i>	str. 8
Informatyczny kącik olimpijski (93): Wieża z siana <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.10
Izogonalne sprzężenie i symediany <i>Jerzy Bednarczuk</i>	str.11
<i>Delta</i> i fizyka cząstek elementarnych (V): Od LEP-u do LHC: fizyka neutrin <i>Piotr Chankowski</i>	str.16
Prosto z nieba: Gromada na początku wszechświata	str.19
 Groźna epidemia XXI wieku <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Niebo w maju	str.24
 W jednym punkcie <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25



jak się kopie złoto w XXI wieku

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nacz., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T_EX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

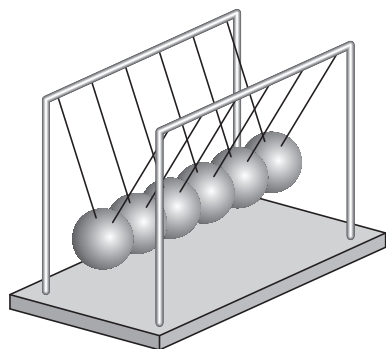
Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Wahadło Newtona

Grzegorz DERFEL*

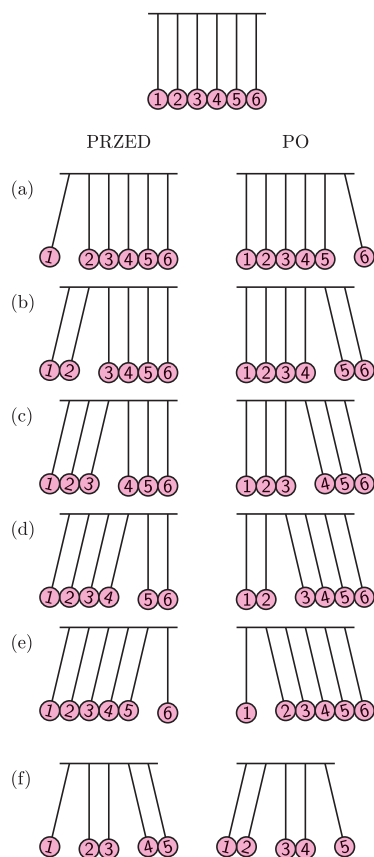


Rys. 1

Wahadło Newtona, zwane też kołyską Newtona, to zabawka, która pozwala zademonstrować osobliwe konsekwencje zasad zachowania pędu i energii przy zderzeniach. Choć przypisywana jest Newtonowi, należałoby nazywać ją „kołyską Mariotte’a”, który, na podstawie doświadczeń ze zderzającymi się kulami, opisał i wyjaśnił zjawiska warunkujące jej działanie. Składa się z kilku jednakowych wahadeł, utworzonych ze stalowych kul zawieszonych na niciach. Rysunek 1 wyjaśnia jej konstrukcję, lecz trzeba zwrócić uwagę na ważne cechy, które gwarantują interesujące nas działania. W stanie równowagi środki kul położone są na jednej poziomej prostej. Wahadła mogą wahać się tylko w płaszczyźnie pionowej zawierającej tę prostą. Dla wprawienia kołyski w ruch, wahadła powinny być wychylane i zwalniane w sposób zapewniający centralne zderzenia kul zachodzące właśnie na tej prostej.

Przyjrzyjmy się działaniu kołyski złożonej z sześciu wahadeł. Prześledźmy pięć tradycyjnie demonstrowanych przypadków schematycznie pokazanych na rysunku 2, który przedstawia położenia kul przed i po obserwowanych zderzeniach.

- Jeśli wychylimy skrajną kulę (nr 1), a następnie puścimy ją swobodnie, uderzy ona w kulę 2 i zatrzyma się, kule 2–5 nie zmieniają swojego położenia, a kula 6 odskoczy na tę samą wysokość, na którą przedtem odchyłono kulę 1.
- Jeśli wychylimy razem kule 1 i 2, to gdy uderzą w kulę 3, zatrzymają się. Kule 3 i 4 nie zmieniają swojego położenia, a kule 5 i 6 utworzą parę, która wychyli się tak samo jak para 1, 2.
- Wychylenie trzech kul 1, 2 i 3 spowoduje, że po zderzeniu z kulą 4 zatrzymają się one, a wychylą razem kule 4, 5 i 6.
- Jeśli wychylimy razem cztery kule 1–4, to po zderzeniu z kulą 5 czwórka ta rozpadnie się: kule 1 i 2 zatrzymają się, a kule 3 i 4 utworzą z kulami 5 i 6 nową czwórkę, która wychyli się na wysokość nadaną pierwotnej czwórce.
- Wreszcie rozważmy wychylenie kul 1–5. Po zderzeniu z kulą 6 piątka rozdzieli się. Kula 1 zatrzyma się, a wychyli się nowa grupa pięciu kul, 2–6.



Rys. 2

Dla wyjaśnienia tych efektów trzeba uświadomić sobie ważną konsekwencję zasad zachowania pędu i energii: dwie kule o jednakowych masach, zderzające się centralnie, wymieniają się prędkościami (oczywiście jeśli straty energii podczas ruchu i przy zderzeniu są zanedbywalne). W szczególnym przypadku, gdy jedna z kul spoczywa, po zderzeniu przejmuje prędkość drugiej, która zatrzymuje się.

Wynik oddziaływań między kulami można analizować na podstawie zwrotów prędkości, jaką sąsiadujące kule mają na danym etapie zjawiska. Niech \vec{A} oznacza kulę biegnącą w prawo, \overleftarrow{A} – w lewo, a A – kulę spoczywającą. $\vec{A}\vec{B}$ oznacza zderzenie biegnącej kuli A ze spoczywającą kulą B , czego wynik można zapisać jako $\overleftarrow{A}\vec{B}$. Podobna wymiana prędkości następuje w zderzeniu $\overleftarrow{A}\vec{B}$, które prowadzi do stanu $\vec{A}\vec{B}$. Po zderzeniu $\vec{A}\vec{B}$ kule rozbiegają się: $\vec{A}\vec{B}$. Podobny wynik występuje, gdy dwie kule jednocześnie uderzają z obu stron w trzecią nieruchomą: $\overleftarrow{A}\vec{B}\vec{C} \Rightarrow \vec{A}\vec{B}\vec{C}$. Dwie kule nie oddziałują ze sobą, gdy biegną w tę samą stronę, np. $\vec{A}\vec{B}$.

Rozważmy zjawiska zachodzące w przypadku (a), gdy wychylona została kula 1. Gdy dochodzi do jej zderzenia z kulą 2, zostaje zatrzymana, a kula 2 przejmuje jej prędkość. Kula 2 zderza się z 3, przy czym następuje kolejna wymiana prędkości między nimi. Ten proces powtarza się dalej z kulami 3 i 4, 4 i 5, oraz 5 i 6. Kule 1–5 pozostają w spoczynku, a kula 6 nie ma się z czym zderzyć i odskakuje. Stosując powyższy sposób zapisu, przebieg zderzeń można przedstawić następująco:

- $\vec{1}\vec{2}\vec{3}\vec{4}\vec{5}\vec{6}$, $\overleftarrow{1}\vec{2}\vec{3}\vec{4}\vec{5}\vec{6}$, $\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\vec{3}\vec{4}\vec{5}\vec{6}$, $\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3}\vec{4}\vec{5}\vec{6}$, $\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3}\overleftarrow{4}\vec{5}\vec{6}$, $\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3}\overleftarrow{4}\overleftarrow{5}\vec{6}$.

W analogiczny sposób można zinterpretować przypadek (b), w którym odchylamy kule 1 i 2. Podczas ruchu odchylone i puszczane swobodnie kule

*Instytut Informatyki,
Politechnika Łódzka

nie oddziałują ze sobą i zmierzają ku kuli 3. Zderza się z nią kula 2 i wymieniają się z nią prędkością, zatrzymuje się. Kula 1 oddziałuje ze spoczywającą kulą 2, w wyniku czego zatrzymuje się ona, a kula 2 zyskuje jej prędkość. Kula 3 przekazuje prędkość kuli 4 i także się zatrzymuje. Następują wymiany prędkości kul 2 i 3 oraz 4 i 5. W ten sam sposób zachodzą kolejne wymiany prędkości kul 3 i 4 oraz 5 i 6. Kula 6 wychyla się. Kula 5 uzyskuje prędkość od kuli 4, która zostaje unieruchomiona. W rezultacie kula 5 podąża za kulą 6, tworząc z nią parę wychyloną tak samo silnie jak przedtem para 1 i 2, a kule 1–4 spoczywają.

(b) $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$.

Podobnie można wyjaśnić wychylenia kul w pozostałych przypadkach:

- (c) $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$;
 (d) $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$;
 (e) $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5} \vec{6}$.

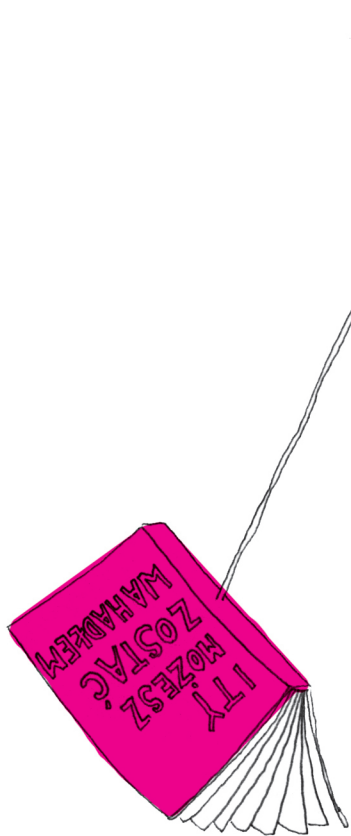
Równie ciekawe zachowania, lecz inne od opisanych, obserwuje się, gdy skrajne kule lub grupy skrajnych kul są wstępnie odchylone jednocześnie na obu końcach. Zilustruje to przykład (f) wahadła o pięciu kulach. Niech kule 1 oraz 4 i 5 odchylone będą o takie same kąty, a kule 2 i 3 pozostają w położeniach równowagi. Po jednoczesnym uwolnieniu wahadeł kula 1 zderza się z 2 i zatrzymuje, a kula 2 przejmuje jej prędkość. Jednocześnie do nieruchomej kuli 3 dociera kula 4 i przekazuje jej swą prędkość, zatrzymując się. Kule 3 i 2 zderzają się z prędkościami równymi, lecz zwróconymi przeciwnie, po czym rozbiegają się w przeciwne strony. Kula 5 zderza się z 4 i oddaje jej swą prędkość. Kule 3 i 4 wymieniają się prędkościami i rozbiegają się. Kula 2 zderza się z 1 i zatrzymuje, a kula 1 odskakuje. Kula 4 zderza się z nieruchomą kulą 5, co oznacza, że zatrzymuje się, a kula 5 wychyla. Kula 3 zatrzymuje się, przekazawszy swoją prędkość kuli 2, która dołącza do kuli 1. W rezultacie odchylone są kule 1 i 2 oraz 5, a 3 i 4 wiszą nieruchomo. Powstaje układ kul symetryczny względem pierwotnego.

(f) $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5}$, $\vec{1} \vec{2} \vec{3} \vec{4} \vec{5}$.

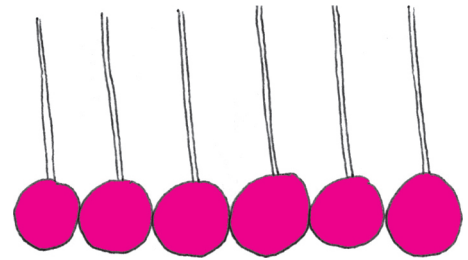
Kluczowym procesem, który powtarza się tu wielokrotnie i decyduje o przebiegu zjawisk, jest wymiana prędkości możliwa dzięki zderzeniu centralnemu jednakowych mas. Gdyby np. wychylone jak w przypadku (b) kule 1 i 2 były trwale złączone i stanowiły jedną masę $2m$ o prędkości v , to zjawiska przebiegałyby inaczej. Po pierwszym zderzeniu połączone kule zachowałyby prędkość $v/3$, a kula 3 uzyskałaby $4v/3$. Prędkość ta byłaby kolejno przekazywana w procesach wymiany aż do kuli 6 i tylko ta kula wychyliłaby się. Połączone kule o prędkości $v/3$, po ponownym uderzeniu w kulę 3, zachowałyby prędkość $v/9$, a kuli 3 udzieliłyby $4v/9$. Po kolejnych wymianach prędkości między kulami 3, 4 i 5 z taką prędkością odchyliłaby się kula 5. W kolejnym zderzeniu prędkość połączonych kul spadłaby do $v/27$, a kula 3 przekazałaby $4v/27$ do kuli 4, która wychyliłaby się. Na koniec kula 3 otrzymałaby prędkość $4v/81$, a para kul zachowała $v/81$. W ten sposób energia i pęd połączonych kul 1 i 2 rozdzieliłyby się pomiędzy wszystkie kule. Widać więc, że nie wystąpiłaby charakterystyczna dla wahadła Newtona symetria wychyleń.

Z powyższych rozważań wynika, że działanie kołyski Newtona jest rezultatem serii wielu szybko po sobie następujących zderzeń. Za każdym razem kule stykają się, odkształcają sprężysto i odpychają. Seria zderzeń trwa ułamek milisekundy, więc nie jesteśmy w stanie ich rozróżnić. Zauważamy tylko końcowy efekt.

Liczne filmy i animacje pokazujące wahadło w akcji można znaleźć w internecie. Można też obejrzeć świetną scenkę pochodzącą z filmu „Rosencrantz i Guildenstern nie żyją”. Niektóre ze sfilmowanych mniej udanych eksperymentów ujawniają, jak ważna jest precyzja wykonania i uruchamiania wahadła. Działanie wahadła jest bowiem poprawne wtedy, gdy jest ono dokładnie wykonane i starannie wprowadzone w ruch. Wtedy czas właściwego działania jest ograniczony tylko tarciem i stratami energii zachodzącymi, gdy podczas zderzeń



kule działają na siebie siłami odkształcającymi je w miejscach styku. Jeśli natomiast z powodu niedokładności konstrukcji zderzenia są niecentralne, to nie zachodzi pożądana wymiana prędkości. Np. kula uderzająca w nieruchomą nie zatrzymuje się, lecz zachowuje niewielką prędkość, a kuli uderzanej przekazuje prędkość nieco mniejszą od swojej prędkości pierwotnej. Obie kule rozbiegają się przy tym pod kątem prostym. W rezultacie następuje zderzenia, w których te kule uczestniczą, są jeszcze bardziej niecentralne. Różnice mas kul także są szkodliwe, nawet jeśli zderzenia są centralne. Przy zderzeniu niejednakowych kul kula uderzająca nie zatrzymuje się, lecz, zależnie od różnicy mas, porusza się z niewielką prędkością w przód lub w tył, wskutek czego nie udziela kuli uderzonej swej prędkości początkowej, lecz odpowiednio większą lub mniejszą. Jeśli wspomniane niedoskonałości wahadła są zbyt wielkie, wywołują widoczne odstępstwa od idealnego przebiegu zderzeń, co niweczy cały efekt eksperymentu.



Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1492. Wyznaczyć największą liczbę naturalną m , dla której istnieją takie liczby naturalne k i l , że spełnione jest równanie

$$k^2 + 1 = l \cdot (2^m - 1).$$

Rozwiązanie na str. 19

M 1493. W wierzchołkach dwunastościanu foremego umieszczamy parami różne liczby naturalne, a następnie każdej krawędzi przypisujemy największy wspólny dzielnik liczb z jej końców. Czy możemy zrobić to w taki sposób, by suma liczb w wierzchołkach była równa sumie liczb na krawędziach?

Rozwiązanie na str. 5

M 1494. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie P . Niech O_1, O_2, O_3, O_4 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABP, BCP, CDP i DAP . Wykazać, że proste OP, O_1O_3 i O_2O_4 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie na str. 19

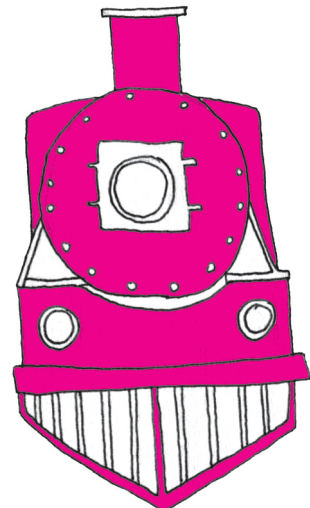
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 903. Ile razy jaśniej Ziemia „w pełni” oświetla powierzchnię Księżyca podczas księżycowej nocy niż Księżyc w pełni oświetla powierzchnię Ziemi? Współczynnik odbicia światła od Ziemi wynosi $a_Z = 0,37$, a od Księżyca $a_K = 0,14$. Odległość Ziemia-Słońce $R_{ZS} = 1,5 \cdot 10^8$ km, odległość Ziemia-Księżyc $R_{ZK} = 3,8 \cdot 10^5$ km, promień Ziemi $R_Z = 6,4 \cdot 10^3$ km, promień Księżyca $R_K = 1,74 \cdot 10^3$ km.

Rozwiązanie na str. 4

F 904. Zbliżając się do przejazdu drogowego przez tory, maszyniści jadących naprzeciw siebie pociągów jednocześnie włączają ostrzegawcze sygnały dźwiękowe, każdy o częstotliwości $f_0 = 440$ Hz. Wartości prędkości pociągów w chwili włączenia sygnałów są równe $v = 50$ km/h. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $c = 340$ m/s. Przyjmij, że każdy z sygnałów rozprzestrzenia się jako fala harmoniczna. Jakiej częstotliwości dźwięk usłyszy każdy z maszynistów przed spotkaniem pociągów?

Rozwiązanie na str. 6



Pamięć w komputerze

Tomasz IDZIASZEK

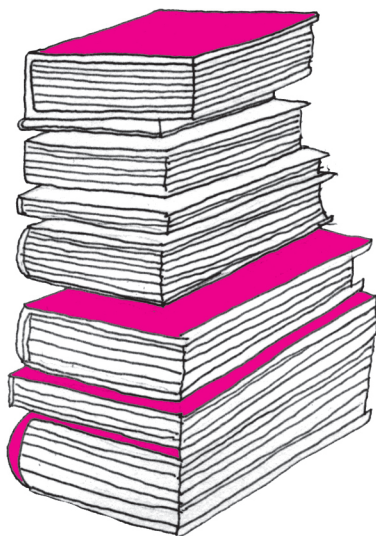
Wyobraźmy sobie ucznia, który ma napisać esej na temat gospodarki w południowych rejonach Brazylii. Powiedzmy, że historia ta dzieje się w czasach, gdy dostęp do Internetu nie był tak powszechny jak teraz. Uczeń w celu zgromadzenia potrzebnych materiałów udaje się do biblioteki, z której wypożycza rocznik statystyczny oraz kseruje potrzebne strony z encyklopedii. Następnie wraca do domu i zabiera się do pisania. Przyniesione materiały ma rozłożone na biurku, aby w każdej chwili mógł do nich sięgnąć. Co więcej, część co ważniejszych informacji z książek zapisał sobie na kartce-ściągawce. Raz na jakiś czas musi też sięgnąć do słownika ortograficznego, który stoi w domowej biblioteczce. Zapewne uczeń nie skończy pracy jednego dnia, przed pójściem spać schowa książki na półkę, skąd jutro będzie musiał je ściągnąć z powrotem.

Ale cóż ta historia ma wspólnego z komputerami – zapyta zniecierpliwiony Czytelnik. Ano tyle, że jest znakomitą analogią tego, jak zorganizowana jest pamięć w komputerze, i pozwoli nam wyjaśnić jej działanie.

Pomyślmy o naszym uczniu jak o procesorze, który jest centralnym elementem każdego komputera. Tak jak procesor realizuje wydawane mu przez programistę polecenia, nasz uczeń również dostał do wykonania pewne zadanie (napisanie eseju). Program, który uczeń ma wykonać, znajduje się już w jego głowie, ale do jego wykonania potrzebne są mu pewne dane (informacje na temat Brazylii). Dane te znajdują się w książkach, które przechowywane są w specjalnym budynku zwanym biblioteką. Uczeń może swobodnie korzystać z tych danych, wiąże się to jednak z pewnym kosztem (dojazd do biblioteki, skserowanie lub przyniesienie ciężkiej książki). W swoim pokoju ma biblioteczkę (mniejszy odpowiednik biblioteki), gdzie może przechowywać wypożyczane książki, posiada też kilka własnych. Zauważmy, że dostęp do książek w biblioteczce jest zdecydowanie szybszy, ale może ona przechowywać dużo mniej książek niż biblioteka. Aktualnie wykorzystywane książki uczeń trzyma na swoim biurku, aby nie musieć wstawać z krzesła i podchodzić do biblioteczki. Ponadto najważniejsze informacje wynotowuje sobie na kartce, żeby nie musieć wertować książek. Każdy z tych racjonalizatorskich pomysłów powoduje szybszy dostęp do wybranych danych, ale z oczywistych względów ilość tych wybranych danych jest w każdym przypadku istotnie mniejsza. Na końcu tego łańcucha miejsc, w których uczeń przechowuje dane, znajduje się pamięć krótkotrwała jego mózgu, zawierająca dane kluczowe w aktualnym momencie (jak choćby kolejne słowo eseju, które uczeń ma zapisać).

Procesor w komputerze postępuje podobnie. Powiedzmy, że wydaliśmy mu polecenie policzenia liczby słów w pewnym tekście zapisanym w pliku. Jak większość plików, znajduje się on na dysku twardym (ang. *hard disk*) komputera, zatem pierwszą czynnością programu będzie wczytanie tego pliku do pamięci operacyjnej (pamięci RAM, ang. *random access memory*). Następnie procesor będzie przeglądał kolejne słowa z tekstu, przenosząc je do swojej niewielkiej pamięci podręcznej (ang. *cache*). Najczęściej wykorzystywane wartości (jak choćby liczba znalezionych słów) procesor przechowuje w kilku wewnętrznych komórkach pamięci, zwanych rejestrami (ang. *register*).

Tak jak uczeń może korzystać z różnych rodzajów dostępu do danych (biblioteka, książka na biurku, kartka-ściągawka, mózg), tak procesor również ma różne rodzaje pamięci (dysk twardy, pamięć RAM, pamięć podręczna, rejestr), które razem tworzą tzw. *hierarchię pamięci w komputerze*. Każdy z tych rodzajów charakteryzuje się innymi wartościami parametrów, z których najważniejsze to pojemność (ang. *capacity*), opóźnienie (ang. *latency*), przepustowość (ang. *bandwidth*) i cena. Im bliżej procesora znajduje się dany rodzaj pamięci, tym ma on mniejsze opóźnienie i większą przepustowość (co nas cieszy), ale mniejszą pojemność i wyższą cenę (co cieszy już nas mniej).



Rozwiązanie zadania F 903.

Niech całkowita moc promieniowania Słońca wynosi L . W odległości R_{ZS} od Słońca na jednostkę powierzchni pada moc $L/(4\pi R_{ZS}^2)$. Oświetlona w tej odległości powierzchnia kuli o promieniu R_Z , współczynniku odbicia a_Z staje się wtórnym źródłem wysyłającym promieniowanie o mocy $a_Z \pi R_Z^2 L / (4\pi R_{ZS}^2)$ w kąt bryłowy 2π (oświetlona jest półkula), a więc w odległości równej odległości Księżyca od Ziemi przypadająca na jednostkę powierzchni moc światła odbitego od Ziemi, I_{ZK} wynosi:

$$I_{ZK} = \frac{a_Z L R_Z^2}{8\pi R_{ZS}^2 R_K^2}$$

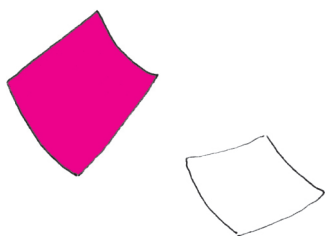
W analogicznym obliczeniu oświetlenia powierzchni Ziemi przez Księżyc, I_{KZ} należy zastąpić a_Z przez a_K i R_Z przez R_K , a R_{ZS} przez sumę odległości Ziemia-Słońce i Ziemia-Księżyc (podczas pełni Księżyc jest po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce), $R_{ZS} + R_{ZK} \approx R_{ZS}$. Ostatnie przybliżenie uwzględnia niewielką odległość Ziemia-Księżyc w porównaniu z odległością Ziemia-Słońce. Po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy:

$$\frac{I_{ZK}}{I_{KZ}} = \frac{a_Z}{a_K} \left(\frac{R_Z}{R_K} \right)^2 \approx 35.$$

Pamięć	Pojemność	Przepustowość	Opóźnienie	$\times 2 \cdot 10^8$	Koszt
rejestr	10^3 B (1 kB)	\approx TB/s	1 ns	0,2 s	\approx 1000 zł/GB
pamięć podręczna	10^6 B (1 MB)		5 ns	1 s	
pamięć RAM	10^9 B (1 GB)	10^4 MB/s (10 GB/s)	50 ns	10 s	30 zł/GB
dysk SSD	10^{11} B (100 GB)	500 MB/s	$5 \cdot 10^4$ ns (50 μ s)	3 h	2 zł/GB
dysk talerzowy	10^{12} B (1 TB)	100 MB/s	10^7 ns (10 ms)	23 dni	0,2 zł/GB



O tym, jak pisać programy komputerowe, by efektywnie korzystały z pamięci podręcznej procesora, można przeczytać w artykułach *Pamięć cache w praktyce* (Delta 10/2009) oraz *Kolejność ma znaczenie* (Delta 9/2011).



Rozwiązanie zadania M 1493.
Nie!

Przypuśćmy przeciwnie i zauważmy, że jeśli $a > b$, to mamy $NWD(a, b) \leq b$ oraz $NWD(a, b) \leq a/2$. W takim razie $3 \cdot NWD(a, b) \leq a + b$. Ponieważ suma liczb na krawędziach jest równa sumie liczb w wierzchołkach, mamy

$$3 \cdot \sum_{a \in V} a = 3 \cdot \sum_{a, b \in E} NWD(a, b) \leq \sum_{a, b \in E} (a + b) = 3 \cdot \sum_{a \in V} a,$$

gdzie zbiory V i E odpowiadają zbiorom wierzchołków i krawędzi dwunastościanu. Dla każdej krawędzi o końcach a i b zachodzi więc równość

$$3 \cdot NWD(a, b) = a + b.$$

W takim razie każda krawędź ma na jednym końcu dwukrotność liczby z drugiego końca.

Ustalmy jeden z wierzchołków, z liczbą x . W każdym z trzech sąsiadujących z nim wierzchołków jest liczba $x/2$ lub $2x$, co jest sprzeczne z założeniem o przyporządkowaniu wierzchołkom parami różnych liczb.

W powyższej tabelce przedstawiliśmy przykładowe charakterystyki wybranych pamięci komputerowych. Oczywiście, konkretne liczby zależą od konkretnego sprzętu, ale rząd wielkości będzie podobny. Dla zobrazowania różnic między opóźnieniem dla różnych rodzajów pamięci wprowadziliśmy też kolumnę, w której czas ten został przemnożony przez $2 \cdot 10^8$. Daje to skalę szybkości naszego ucznia.

Rejestr procesora jest najszybszym rodzajem pamięci z czasem dostępu na poziomie jednego cyklu zegara, zatem dla procesora o szybkości 1 GHz (10^9 Hz) będzie to czas rzędu 1 ns (10^{-9} s). W zależności od rodzaju procesora takich rejestrów jest od kilku do kilkudziesięciu. W skali czasowej ucznia odpowiada to dostępowi do danych w mózgu, co zabiera ułamek sekundy.

Pamięć podręczna procesora zawiera dane ostatnio pobrane z pamięci operacyjnej, z czasem dostępu kilku cykli zegara. Zwykle pamięć podręczna jest dodatkowo podzielona na szybszą i mniejszą pamięć (około 32 kB) oraz większą i trochę wolniejszą (kilka MB). Dostęp do tego rodzaju pamięci odpowiada sprawdzaniu przez ucznia informacji na kartce-ściągawce.

Pamięć operacyjna jest głównym rodzajem pamięci w komputerze, stanowiącym rozsądny kompromis (ang. *trade-off*) między wielkością a szybkością. Jej rozmiar to kilka do kilkunastu gigabajtów. Dostęp do komórki pamięci, która nie została dotychczas skopiowana do pamięci podręcznej (ang. *cache miss*), zajmuje kilkadziesiąt nanosekund. Odpowiada to wyszukiwaniu informacji w książce leżącej na biurku.

Pamięć dyskowa została przedstawiona w dwóch wierszach tabelki ze względu na różnicę, jaka dzieli klasyczne dyski twarde (w których dane zapisywane są na talerzach pokrytych nośnikiem magnetycznym) od nowszych dysków SSD (ang. *solid-state disk*), zbudowanych w oparciu o pamięć flash. Pobranie danych z dysku SSD odpowiada wycieczce do biblioteki, podczas gdy pobranie danych z dysku talerzowego można porównać do sytuacji, gdy danej książki nie ma w lokalnej bibliotece i trzeba ją dopiero sprowadzić z dużego miasta.

Oczywiście, z uwagi na to, że rozmiar pamięci podręcznej jest dużo mniejszy niż rozmiar pamięci operacyjnej, a ten z kolei dużo mniejszy niż rozmiar pamięci dyskowej, podczas działania programu nowe dane będą musiały nadpisywać dane poprzednio znajdujące się w pamięci. Uczeń również ma ograniczone miejsce na kartce-ściągawce i biurku, zatem czasem będzie zmuszony wymazać gumką stare informacje lub odłożyć niektóre książki do biblioteczki, żeby zrobić miejsce na nowe.

Warto zwrócić uwagę na różnice między opóźnieniem a przepustowością pamięci. Ta pierwsza wartość mówi nam o średnim czasie, jaki jest potrzebny, aby pobrać z pamięci jeden losowo położony bajt danych. Natomiast druga mówi nam, jak szybko możemy pobierać dane, jeśli będziemy je czytać po kolei. Przykładowo dla dysku talerzowego dostęp do losowego bajtu może zająć 10 ms (w zależności od tego, jak daleko od miejsca zapisu znajduje się głowica dysku), zatem przeczytanie 100 milionów losowych bajtów może trwać nawet 10^6 s, czyli prawie 12 dni! Niemniej jednak, jeśli będziemy czytać kolejne bajty (zgodnie z ruchem głowicy), to każde kolejne 100 milionów przeczytamy średnio w sekundę. Mówimy tu, że dysk talerzowy jest pamięcią o dostępie sekwencyjnym (ang. *sequential access memory*).

Zauważmy, że jest to całkiem naturalne – znalezienie w książce ustępu traktującego o gospodarce Brazylii może zająć uczniowi trochę czasu, ale jeśli już go znajdzie, to kolejne słowa z paragrafu będzie czytał bardzo szybko.

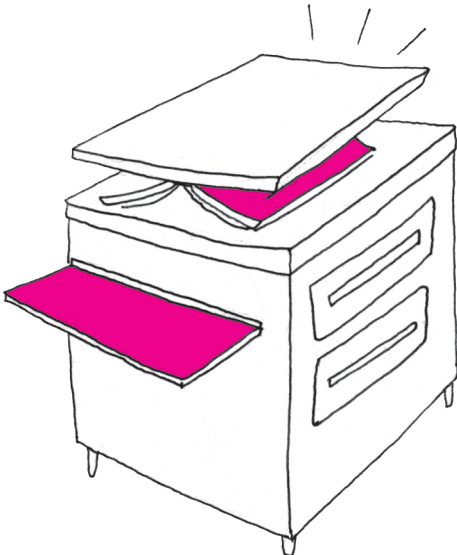


Rozwiązanie zadania F 904.

Każdy maszynista usłyszy wynik interferencji dźwięków dwu sygnałów: „własnej” lokomotywy i lokomotywy nadjeżdżającej z przeciwna. Częstota pierwszego z sygnałów nie ulegnie zmianie, a drugi, na skutek zjawiska Dopplera, będzie odbierany jako dźwięk o częstoci f :

$$f = \frac{c+v}{c-v} f_0.$$

Złożenie harmonicznych sygnałów o częstoci f i f_0 daje sygnał o częstoci $F_1 = (f + f_0)/2$ o amplitudzie modulowanej z częstocią $F_2 = (f - f_0)/2$. Podstawiając dane, otrzymujemy: $f \approx 477,5$ Hz, $F_1 \approx 458,7$ Hz i $F_2 \approx 18,7$ Hz.



Cechami charakterystycznymi obiektów astronomicznych mogą być, między innymi, ich rozmiary katowe, przesunięcie ku czerwieni, okres zmienności i jej amplituda, strumień promieniowania w zadanej długości fali, natężenie i szerokość linii widmowych, czy też różnica strumieni (zwana kolorem).

*Narodowe Centrum Badań Jądrowych w Warszawie

Co prawda, pamięć RAM, zgodnie ze swoją nazwą, jest pamięcią o bezpośrednim dostępie do dowolnej komórki, jednak istnieje jeszcze jeden mechanizm, który powoduje, że w praktyce również w tej pamięci dostęp do kolejnych komórek jest szybszy niż dostęp zupełnie losowy. Mianowicie, dane przesyłane są pomiędzy różnymi rodzajami pamięci nie jako pojedyncze bajty, a w blokach zawierających pewną liczbę kolejnych bajtów. Im większa pamięć, tym większe rozmiary bloków. Przykładowo, podczas pobierania danych z pamięci operacyjnej do pamięci podręcznej oprócz potrzebnego nam bajtu są też kopiowane 63 kolejne bajty (zatem dostęp do pozostałych będzie szybszy, bo w przyszłości będą znajdować się w pamięci podręcznej). Z kolei kopiowanie danych z dysku twardego odbywa się w blokach zawierających po 512 bajtów. W przypadku naszego ucznia odpowiada to kserowaniu całych stron książki, pomimo tego, że potrzebne są mu tylko niektóre informacje zawarte na danej stronie.

Oczywiście, w artykule nie wyliczyliśmy wszystkich możliwości, jakie ma uczeń, gdy chce zdobyć informacje na temat Brazylii (może przecież zapytać nauczyciela, zadzwonić do konsulatu, a w ostateczności może wsiąść w samolot i zdobyć informacje z pierwszej ręki). Podobnie nie omówiliśmy wszystkich sposobów, w jakie użytkownik komputera może dostarczyć mu dane. Wśród pominiętych rodzajów pamięci możemy wspomnieć o różnorodnych pamięciach zewnętrznych, takich jak dyskietki, dyski optyczne (CD, DVD), karty pamięci lub taśmy magnetyczne. Ponadto, aby przyspieszyć ich działanie, dyski twarde również mogą być zaopatrzone w dodatkową pamięć podręczną, obsługiwaną przez specjalny układ zwany kontrolerem dysku. A w dobie Internetu jedną z podstawowych metod pozyskiwania danych jest „ściągnięcie” ich z sieci (gdzie przy ograniczonej prędkości światła istotne jest, w którym miejscu na świecie znajduje się serwer, z którym się łączymy). Zachęcamy Czytelników do samodzielnego sprawdzenia, jakie charakterystyki mają te pamięci, i zaproponowania, jaka analogia ze świata ucznia im odpowiada.

Na koniec warto wspomnieć, że aktualnie kluczowym parametrem przy wyborze komputera biurowego nie jest wcale szybkość procesora, ale szybkość dysku twardego. Zatem to właśnie inwestycja w dysk SSD (lub dwa dyski: mały SSD zawierający partycję z programami oraz większy dysk talerzowy z danymi) może znacząco poprawić komfort pracy z komputerem.

Sztuczna inteligencja w astrofizyce

Aleksandra SOLARZ*, Katarzyna MAŁEK*

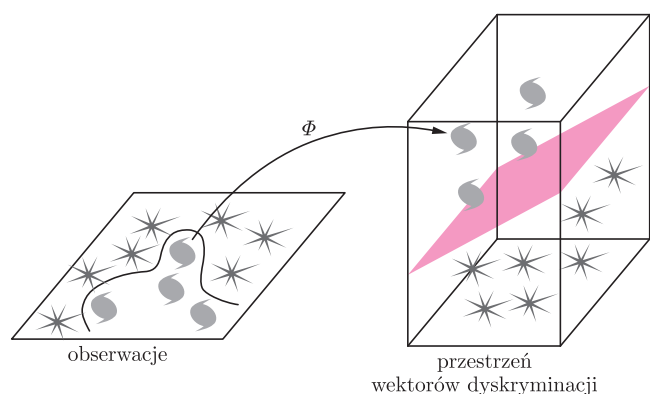
W swojej pracy astronomowie często korzystają z katalogów będących wynikiem wielkich przeglądów nieba. Zebrane w nich dane poddawane są różnorodnym analizom. Ważne jest przy tym, aby katalogi charakteryzowały się jak największą kompletnością i jednorodnością. Niejednokrotnie podczas analizy statystycznej dobrze poznanych typów obiektów wykrywane są źródła rzadko spotykane lub wykazujące niezwykle zachowanie. Dlatego też odpowiedni sposób klasyfikacji obserwowanych obiektów jest bardzo istotnym, o ile nie najistotniejszym krokiem, który należy wykonać przed przystąpieniem do zaawansowanego badania właściwości fizycznych obserwowanych obiektów niebieskich.

Cechy charakterystyczne. Przy tworzeniu przeglądów nieba, bądź tych ukierunkowanych na wykrywanie konkretnych klas obiektów, bądź tych zbierających wszystkie możliwe dane z danego obszaru nieba, bardzo ważna jest znajomość cech charakterystycznych obiektów, które spodziewamy się zaobserwować. Ułatwia to proces samej detekcji oraz klasyfikacji zebranych danych i, co za tym idzie, szybkiego wydobycia ważnych informacji z przeprowadzonego przeglądu do dalszej analizy. Często zdarza się, że unikalna klasa obiektów, choć obecna w przeglądzie, nie zostaje wykryta, ponieważ wykazuje cechy charakterystyczne podobne do innych źródeł licznie wykrytych przez przegląd.

O wyzwaniach dotyczących pomiaru przesunięcia ku czerwieni pisaliśmy w *Delcie* 3/2015.

W przeglądach obserwujących skrawek nieba położony poza płaszczyzną ekliptyki typy obiektów, które spodziewamy się wykryć, to głównie galaktyki, gwiazdy, kwazary oraz obiekty szczególne. Te cztery kategorie można podzielić na podklasy ze względu na ich fizyczne cechy charakterystyczne, tj. typ morfologiczny bądź spektralny rozkład energii. Dlatego morfologia, kolor bądź poszczególne linie widmowe to najpowszechniej używane kryteria służące do klasyfikacji obiektów astronomicznych.

Podczas klasyfikacji nienadzorowanej algorytm tworzy klasy obiektów ze względu na pewien zadany model, np. ze względu na stopień zagęszczenia obiektów w danej przestrzeni parametrycznej. Zaletą takiego podejścia do identyfikacji obiektów astronomicznych jest to, że wkład użytkownika jest minimalny, co sprawia, że wzorce w danych są wyszukiwane niezależnie od poglądów użytkownika na to, jak miałyby one wyglądać.



W przestrzeni trójwymiarowej nietrudno sprawdzić, czy zadany punkt o współrzędnych (X, Y, Z) leży „nad” płaszczyzną opisaną równaniem $ax + by + cz = 1$. Odpowiedź będzie twierdząca, jeśli wyrażenie $aX + bY + cZ - 1$ będzie miało taki sam znak jak c . Jeśli zatem potrafimy wymyślić odwzorowanie Φ z przestrzeni zawierającej wyniki obserwacji do przestrzeni wektorów dyskryminacji rozdzielające rozważane obiekty jak na powyższym rysunku, zadanie ich klasyfikacji będzie niemal wykonane.

Dlatego jest bardzo ważne, by przegląd nieba był efektywny w mierzeniu różnych cech charakterystycznych obserwowanych źródeł. Jednak takie obserwacje są niezwykle trudne i kosztowne. Zatem, chcąc uzyskać jak najliczniejsze próbki obiektów z danej klasy, które posłużą do dalszej analizy, często trzeba poświęcić tzw. „czystość” katalogu i pozwolić na pewien procent błędnych identyfikacji.

To jeszcze astronomia czy już informatyka? Wraz ze wzrostem liczby przeprowadzanych kosmicznych misji obserwacyjnych oraz wzrostem wydajności procesu zbierania danych pojawił się problem z przetwarzaniem oraz identyfikacją istotnych informacji z terabajtów danych bezustannie napływających z satelitów. Dlatego zamiast „ręcznych” technik klasyfikacji (takich jak diagramy kolor-kolor bądź kolor-strumień) wykorzystuje się automatyczne metody pozwalające na wykrywanie i separację różnych typów obiektów z minimalnym zaangażowaniem użytkownika przeglądu. Jednym z najbardziej użytecznych i najpowszechniej wykorzystywanych do tego celu algorytmów jest obecnie uczenie maszynowe (ang. *machine learning*). Metoda ta pozwala wykrywać pewne prawidłowości we wprowadzonych wektorach danych.

Z matematycznego punktu widzenia automatyczną klasyfikację można zdefiniować jako przekształcanie N -wymiarowego wektora zawierającego mierzone parametry określające dany obiekt na tzw. wektor dyskryminacji. Przekształcenie to definiujemy tak, by w pewien sposób podkreślało lub nawet wyolbrzymiało charakterystyczne cechy poszczególnych obiektów. Dlatego bardzo ważny jest wybór przestrzeni cech charakterystycznych obiektów: optymalna klasyfikacja będzie miała miejsce wtedy, gdy różne typy źródeł będą występowały w innych obszarach danej przestrzeni wektorów dyskryminacji i będą się w jak najmniejszym stopniu przekrywały. Jeżeli wykorzystywany przez nas przegląd nieba nie był specjalnie zaprojektowany do wykrywania interesujących nas obiektów, znalezienie odpowiedniego zestawu cech charakterystycznych może być bardzo trudne. W takim przypadku możemy użyć *klasyfikatorów nienadzorowanych*, stworzonych do wykrywania różnych prawidłowości w danych bez uprzedniej wiedzy na temat ich zawartości. Niestety, ten typ klasyfikacji bardzo silnie zależy od wyboru mierzonych parametrów.

Każdy proces klasyfikacji może zostać usprawniony, jeżeli poszukiwane klasy obiektów zostaną sprecyzowane, a wartości ich cech charakterystycznych dokładnie opisane. Wtedy można stworzyć modele klas poszukiwanych obiektów, które posłużą jako wzór, który następnie będzie poszukiwany w danych. Takie typy klasyfikacji nazywane są *nadzorowanymi* i pozwalają na bardzo precyzyjne wyszukiwanie danego typu obiektów. Jeden z najczęściej obecnie używanych w astronomii klasyfikatorów nadzorowanych to maszyna wektorów nośnych (ang. *support vector machine*, SVM). Algorytm ten przekształca wektory zawierające wyniki obserwacji do przestrzeni H wektorów dyskryminacji, używając nieliniowej funkcji $\Phi : X \rightarrow H$, tak by granice między klasami można było opisać w jak najprostszym sposób. Na podstawie wektorów z próbki obiektów wzorcowych SVM dzieli przestrzeń H na odpowiednie klasy. W kolejnym kroku obiekty o nieznanym „przynależności klasowej” zostają przekształcone do przestrzeni H i w zależności od położenia obiektów względem granicy podziału – odpowiednio sklasyfikowane.

Algorytm SVM stosowany jest z sukcesami do generalnej identyfikacji obiektów takich jak gwiazdy, galaktyki, czy kwazary w wielkich przeglądach (między innymi AKARI, VIPERS, WISE), jak też do poszukiwania ich szczególnych podtypów.



mała delta

Z żabami przez symetrię

W kalejdoskopach zazwyczaj stosuje się dwa zwierciadła (ustawione pod kątem $22,5^\circ$, 30° albo 45°) lub trzy, tworzące ściany graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

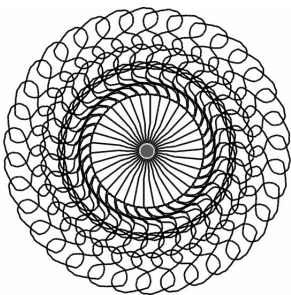
Wielokrotna oś symetrii – obróciwszy obraz wokół dowolnej prostej o 360° , zawsze wrócimy do sytuacji początkowej. Może jednak istnieć taka prosta, że w trakcie obracania obrazu dookoła niej o kąt pełny parokrotnie otrzymamy rezultat nierozróżnialny z początkowym. Wtedy mówimy o wielokrotnej osi symetrii.

Płaszczyzna symetrii – płaszczyzna dzieląca obiekt na dwa, będące swoimi lustrzanymi odbiciami.

W przypadku płaskiego obrazu mówimy wyłącznie o osiach i płaszczyznach symetrii prostopadłych do jego płaszczyzny.



Rys. 1. Uzyskany obraz ma dwukrotną oś symetrii. Identyczny obraz żab uzyskamy, obracając go o kąt 180° i 360° .



Rys. 2. Obraz mający 34-krotną oś symetrii.

Warto też zajrzeć do artykułu Grzegorza Derfla w *Delcie* 9/2015.

Chyba każdy patrzył kiedyś w kalejdoskop – prostokątne lustra odbijające różnobarwne wzory powstałe z przesypujących się koralików. Nie znam nikogo, kto mając w ręku owo urządzenie, byłby w stanie powstrzymać się przed choćby najmniejszym obróceniem nim i zerknięciem przez małe oczko na otrzymany efekt. A gdyby odwrócić sytuację i zbadać, jak zmieni się obraz, gdy zamiast koralikami poruszamy lustrami znajdującymi się w kalejdoskopie? Zacznijmy od wyprawy do szklarza i wyboru bohatera kalejdoskopowych przygód – po starannym castingu wygrywa żaba.

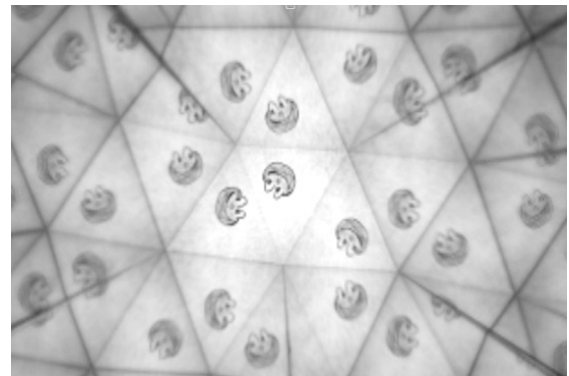
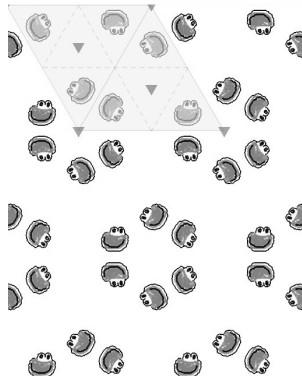
Lustrami będziemy manipulować w „kalejdoskopowy” sposób, czyli tak, żeby każde było prostopadłe do płaszczyzny wzoru. Gdy obok żaby zostanie umieszczone jedno lustro, powstaje oczywiście obraz dwóch żab. Dokładamy lustro drugie, umieszczając je prostopadłe do pierwszego (i płaszczyzny obrazu), powstają cztery portrety. Uzyskany obraz ma dwie płaszczyzny symetrii oraz oś dwukrotną.

Zmniejszając kąt między lustrami, otrzymamy większą liczbę portretów, obrazy o różnych krotnościach osi (choć dla większości kątów obrazy nie będą miały osi symetrii). Co druga żaba patrzy w lewo, a pozostałe w prawo. Na zdjęciu poniżej widać oś „prawie” pięciokrotną (kąt między lustrami niedokładnie odpowiada $1/10$ kąta pełnego). Manipulując kątem, można uzyskać właściwie dowolną krotność osi (zakładając, że obraz żaby może być dowolnie mały lub że lustra, którymi dysponujemy, są dowolnie duże).

Umieszczając lustra równoległe, obserwujemy nowy rodzaj przekształcenia – translację lub inaczej przesunięcie. Lustra (oraz ich odbicia) są płaszczyznami symetrii niekończącego się widoku żabich twarzy.

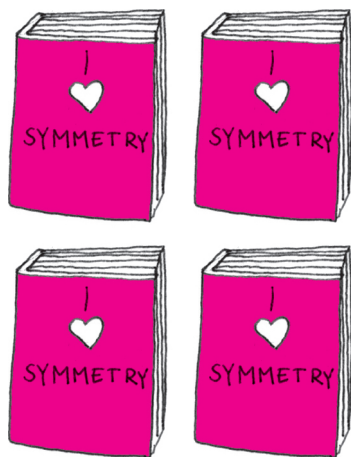


Czas na lustro trzecie. Utworzenie obrazu trójkąta równobocznego nie jest rzeczą łatwą. Problem stanowi grubość szyby oraz fakt, że warstwa srebra znajduje się za nią. Oczekiwane i faktyczne wyniki pracy przedstawione są na obrazkach poniżej.



Zmieńmy ustawienie tak, aby lustra tworzyły trójkąt o kątach 36° , 54° i 90° . Nie zobaczymy śladu po symetrii translacyjnej. Uzyskany obraz pięciokąta foremnego stwarza nieregularności. To dlatego, że pięciokątami foremnymi nie można pokryć płaszczyzny. Takie pokrycie jest możliwe, między innymi, dla każdego trójkąta, kwadratu, prostokąta, równoległoboku i sześciokąta foremnego. Trzema

lustrami można uzyskać regularne obrazy trójkątów równobocznych, kwadratów i sześciokątów (sprawdź, Czytelniku, dlaczego trzema lustrami nie można uzyskać regularnego obrazu prostokątów).

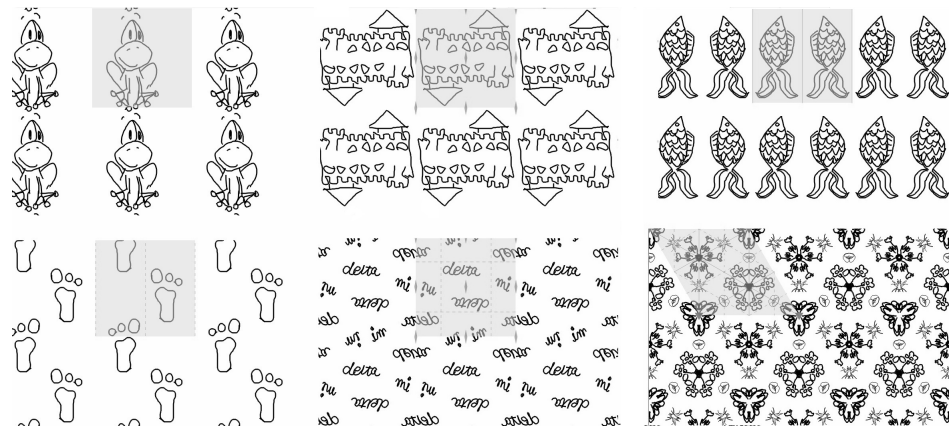
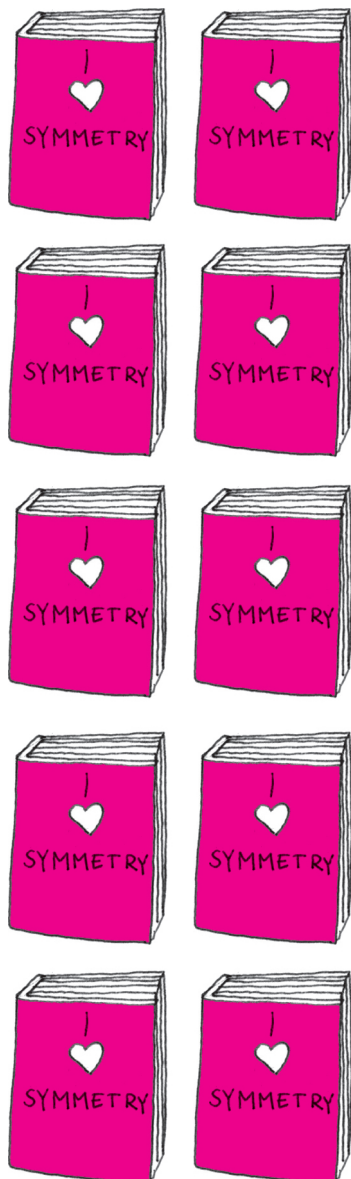


Translacja to przesunięcie wszystkich punktów obiektu o ten sam wektor. To przekształcenie można zastąpić przez złożenie dwóch odbić symetrycznych względem płaszczyzn równoległych.

Obraz nazywamy symetrycznym, gdy nie potrafimy odróżnić, czy został on poddany przekształceniu (translacji, obrotowi, odbiciu lub paru z nich) czy też nie. Zbiór wszystkich przekształceń danego obiektu, które odwzorowują go na siebie, nazywamy *grupą symetrii*. Grupą symetrii pokazanego na marginesie obrazu czterech żab (rys. 1) jest $\{Id, SP_1, SP_2, R_0^{180^\circ}\}$ (obrot o kąt 360° , dwie płaszczyzny symetrii, obrót o kąt 180°), a znajdującej się pod nim serwetki $\{Id, R_0^{k \cdot 360^\circ / 34}\}$, gdzie $k = 1, 2, \dots, 33$. W przypadku obrazu żab wszystkie elementy symetrii przecinają się w jednym punkcie, taką grupę nazywamy *punktową*. Istnieje dokładnie jeden punkt, który nie zmienia swojego położenia przy poddaniu obiektu dowolnemu przekształceniu z grupy.

Symetria translacyjna nie występuje w grupach punktowych, bo powoduje przesunięcie równoległe wszystkich punktów danego obiektu. Translacja może być elementem grupy symetrii tylko figury nieograniczonej, to znaczy niezerowe przesunięcie tylko figury nieograniczonej może spowodować, że będzie ona nierozróżnialna z obrazem nieprzesuniętym. Patrząc na wytapetowaną (nieograniczoną) ścianę poza oczywistą translacją, można zauważyć również inne elementy symetrii. Najmniejszy element wzoru, który powielany i przesuwany (tylko translacja, żadne inne przekształcenie) w różne strony tworzy całość, nazywamy *komórką elementarną*. Komórka elementarna sama w sobie może mieć własności symetryczne. Najmniejszy element wzoru, który poddany przekształceniom symetrycznym tworzy komórkę elementarną nazywamy *motywem*.

Nie wszystkie elementy symetrii mogą łączyć się ze sobą. Na przykład symetria translacyjna może współistnieć tylko z osiami o krotności 2, 3, 4, i 6. Powoduje to ograniczenie liczby rodzajów tapet (mających różne grupy symetrii) – na płaszczyźnie występuje ich 17. Poniżej przedstawiono 6 tapet, których grupy symetrii są różne. Na każdym obrazku kolorem szarym zaznaczono komórkę elementarną. Do grupy symetrii tapety w lewym górnym rogu poza Id (obrotem o 360°) należy tylko translacja, nie obserwujemy żadnej innej symetrii. Na tapecie w prawym górnym rogu poza translacją pojawia się również płaszczyzna symetrii w komórce elementarnej. Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego znalezienia pozostałych jedenastu tapet o innych grupach symetrii niż poniższe.



Powyższe tapety zostały wygenerowane programem Escher2D (dostępnym na stronie deltami.edu.pl), którym w prosty sposób można tworzyć własne wzory w każdej z 17 grup symetrii. Program umożliwia również tworzenie obrazów o dowolnej krotności osi symetrii – no, może prawie dowolnej, bo największa możliwa krotność to 1000. Możliwości stworzenia swojego, w jakiś sposób symetrycznego wzoru jest mnóstwo, a frajdy przy tworzeniu „tapety” tak samo dużo, jak przy obracaniu kalejdoskopem.

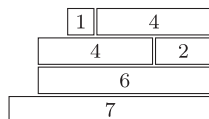
Symetria występuje również w przestrzeni trójwymiarowej, ale to temat na inną historię...

Małą Deltę przygotował Jerzy SOKOŁOWSKI

były pracownik Zakładu Krystalochemii i Krystalofizyki Wydziału Chemii UJ, obecnie inżynier oprogramowania

Informatyczny kącik olimpijski (93): Wieża z siana

W tym miesiącu zadanie *Tower of Hay*, które pojawiło się na konkursie USACO Open Gold w roku 2009. Z n prostopadłościennych beli siana, które mają tę samą wysokość, ale różne szerokości w_1, w_2, \dots, w_n chcemy zbudować wielopoziomową wieżę. Na każdy poziom może się składać kilka beli, a sumaryczna szerokość każdego poziomu musi być nie większa niż sumaryczna szerokość poziomu znajdującego się bezpośrednio pod nim (o ile taki istnieje). Co więcej, żadna bela nie może znajdować się na wyższym poziomie niż inna bela o wyższym numerze (czyli należy je układać po kolei) i należy wykorzystać wszystkie bele. Jaka jest największa możliwa wysokość wieży, którą można zbudować przy takich założeniach (patrz rys. 1)?



Rys. 1. Dla $n = 6$ beli o kolejnych szerokościach 7, 6, 4, 2, 1, 4 można zbudować wieżę o wysokości 4.



Rys. 2. Algorytm zachłanny dla beli z rysunku 1 zbuduje wieżę o wysokości 3.

Dość naturalnym rozwiązaniem zachłannym, które może się nam narzucić, jest konstruowanie każdego poziomu z jak najmniejszej liczby beli siana, podczas budowania wieży od góry. Niestety, jest to rozwiązanie niepoprawne, jak można się przekonać, patrząc na rysunek 2.

Spróbujmy więc rozwiązania opartego o metodę programowania dynamicznego. Niech $d[i, j]$ oznacza maksymalną wysokość wieży złożonej z beli o szerokościach w_i, w_{i+1}, \dots, w_n , jeśli dolny poziom wieży składa się z beli o szerokościach w_i, \dots, w_j . Wtedy mamy następującą rekurencję, w której iterujemy po wszystkich możliwościach zbudowania drugiego poziomu (przyjmujemy tu oznaczenie $w[i, j] = w_i + \dots + w_j$):

$$d[i, j] = \max_{j < k \leq n} \{1 + d[j + 1, k] \mid w[i, j] \geq w[j + 1, k]\}.$$

Czas wypełniania tablicy d to $O(n^3)$, a odpowiedź to $\max_{1 \leq j \leq n} d[1, j]$.

Można nieco zmodyfikować powyższy pomysł, aby uzyskać rozwiązanie o złożoności czasowej $O(n^2)$. Oznaczmy przez $d_2[i, j]$ maksymalną wysokość wieży złożonej z beli w_i, \dots, w_n , w której dolny poziom *nie zawiera* beli w_{j+1} . Rekurencja przybierze postać

$$d_2[i, j] = \max(d_2[i, j - 1], 1 + d_2[j + 1, k_{i,j}]),$$

gdzie $k_{i,j}$ jest maksymalnym indeksem, dla którego $w[i, j] \geq w[j + 1, k_{i,j}]$. Taki indeks możemy obliczać na bieżąco, jeśli ustalimy indeks i i będziemy wypełniać tablicę d_2 kolejno dla rosnących wartości indeksu j . Odpowiedź to $d_2[1, n]$.

Jeszcze lepsze rozwiązanie uzyskamy, korzystając z obserwacji, że najwyższa wieża będzie miała też najmniejszą szerokość dolnego poziomu. Udowodnijmy to przez indukcję: pokażemy to dla wieży zbudowanej z beli w_i, \dots, w_n , przy założeniu, że teza jest spełniona dla wież zbudowanych z beli o szerokościach w_j, \dots, w_n dla $j > i$. Załóżmy, że wieża o najmniejszej szerokości dolnego poziomu ma go zbudowanego z beli w_i, \dots, w_j . Wtedy najwyższa wieża z beli w_{j+1}, \dots, w_n będzie miała (na mocy założenia indukcyjnego) największą wysokość h (a zatem cała wieża wysokość $h + 1$). Teraz dowolna inna wieża mająca dolny poziom $w_i, \dots, w_{j'}$ dla $j' > j$ ma resztę zbudowaną z $w_{j'+1}, \dots, w_n$ o wysokości h' (zatem cała wieża ma wysokość $h' + 1$). Ale wtedy istnieje wieża złożona z w_{j+1}, \dots, w_n o wysokości h' (bo wystarczy rozszerzyć dolny poziom), zatem $h' \leq h$ (z maksymalności h). To kończy dowód.

Niech zatem $d_3[i]$ oznacza taki indeks j , że najwyższa wieża zbudowana z beli o szerokościach w_i, \dots, w_n ma dolny poziom złożony z beli o szerokościach w_i, \dots, w_j . Wtedy mamy rekurencję:

$$d_3[i] = \min_{i \leq j \leq n} \{j \mid w[i, j] \geq w[j + 1, d_3[j + 1]]\}.$$

Wyznaczywszy tablicę d_3 w czasie $O(n^2)$, odpowiedź odzyskujemy, obliczając długość ciągu $d_3[1], d_3[d_3[1] + 1], \dots$ zawierającego końce kolejnych poziomów w najwyższej wieży.

Tablicę d_3 można wypełnić szybciej. Ustalmy indeks j i niech k_j będzie maksymalnym indeksem, dla którego spełniona jest nierówność $w[k_j, j] \geq w[j + 1, d_3[j + 1]]$. Wiemy zatem, że $d_3[i] \leq j$ dla wszystkich $i \leq k_j$. Algorytm jest następujący: dla kolejnych indeksów j wykonujemy przypisanie $d_3[j] := \min(d_3[j], d_3[j + 1])$, wyznaczamy wyszukiwaniem binarnym indeks k_j i wykonujemy $d_3[k_j] := j$. Złożoność czasowa tego algorytmu to $O(n \log n)$.

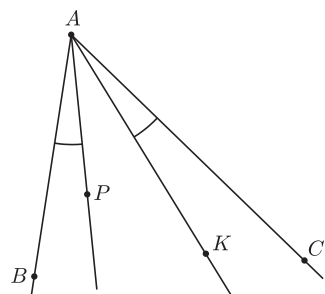
A Czytelników Dociekliwych zachęcamy do rozwiązania tego zadania w optymalnej złożoności czasowej $O(n)$.

Tomasz IDZIASZEK



Izogonalne sprzężenie i symediany

Jerzy BEDNARCZUK*

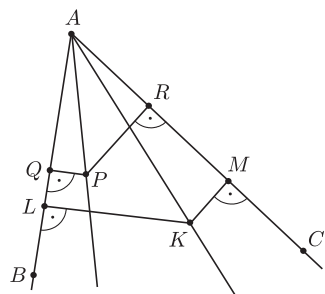


Rys. 1

Izogonalne sprzężenie. Jeżeli w kącie wypukłym BAC leżą takie półproste AP i AK , że kąty BAP i CAK są równe, to będziemy mówić, że półproste AP i AK są *izogonalnie sprzężone w kącie BAC* . Jeśli półproste AP i AK są izogonalnie sprzężone w kącie BAC , to będziemy mówić, że punkty P i K są *izogonalnie sprzężone* w tym kącie (rys. 1). Na wiele sposobów można sprawdzić, czy dane półproste są izogonalnie sprzężone w pewnym kącie. Pomocne jest tu następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Dany jest kąt wypukły BAC oraz półproste AP i AK leżące w tym kącie. Rzuty prostokątne punktu P na *proste* AB i AC to punkty Q i R , rzuty prostokątne punktu K na *proste* AB i AC to punkty L i M oraz $Q \neq L$ i $R \neq M$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (1) $\sphericalangle QAP = \sphericalangle MAK$,
- (2) $|PQ| \cdot |KL| = |PR| \cdot |KM|$,
- (3) $\triangle QPR \sim \triangle MKL$ (tzn. trójkąty QPR i MKL są podobne),
- (4) punkty Q, L, M, R leżą na okręgu, którego środek to środek odcinka PK ,
- (5) $QR \perp AK$,
- (6) $QR \perp AK$ i $ML \perp AP$.



Rys. 2

Uwaga. Dowód przeprowadzimy w takim przypadku, jak na rysunku 2. Możliwe są też inne przypadki: kąt BAC może być rozwarty i co najmniej jeden z punktów Q, R, L, M może leżeć poza ramionami kąta BAC lub punkty A, Q i L mogą leżeć w innej kolejności. We wszystkich tych przypadkach dowód przebiega analogicznie do zaprezentowanego.

Dowód. (1) \Rightarrow (2). Zauważmy, że następujące pary trójkątów są podobne: $\triangle PQA \sim \triangle KMA$ i $\triangle PRA \sim \triangle KLA$. Stąd wynika, że

$$\frac{|PQ|}{|KM|} = \frac{|PA|}{|KA|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|PA|}{|KA|} = \frac{|PR|}{|KL|},$$

a stąd, że

$$\frac{|PQ|}{|KM|} = \frac{|PR|}{|KL|}.$$

(2) \Rightarrow (3). Z założenia wynika, że

$$\frac{|QP|}{|PR|} = \frac{|MK|}{|KL|}.$$

Jednocześnie $\sphericalangle QPR = \sphericalangle MKL$ (wystarczy porównać sumy kątów w czworokątach $AQPR$ i $AMKL$). Wobec tego $\triangle QPR = \triangle MKL$.

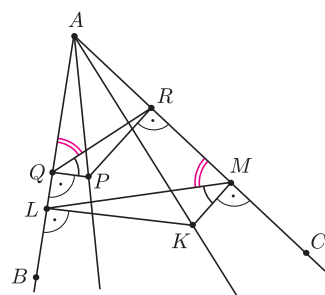
(3) \Rightarrow (4). Ponieważ trójkąty QPR i MKL są podobne, więc $\sphericalangle RQP = \sphericalangle LMK$. Stąd wynika, że $\sphericalangle RQA = \sphericalangle LMA$ (rys. 3). Wobec tego na czworokącie o wierzchołkach Q, L, M, R można opisać okrąg. Środek tego okręgu to środek odcinka PK , bo tam „trafiają” symetralne odcinków LQ i MR .

(4) \Rightarrow (5). Kąty ALK i AMK są proste, więc punkty A, L, K, M leżą na okręgu. Stąd wynika, że $\sphericalangle KLM = \sphericalangle KAM$. Ponieważ czworokąt o wierzchołkach Q, L, M, R jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle MLQ = \sphericalangle QRA$. Lewe strony tych dwóch równości dają w sumie 90° , więc prawe także.

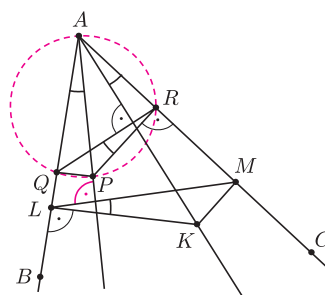
(5) \Rightarrow (6). Kąty AQP i ARP są proste, więc punkty A, Q, P, R leżą na okręgu (rys. 4). Stąd wynika, że $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QRP$. Ponieważ $QR \perp AK$ i $PR \perp AR$, więc $\sphericalangle QRP = \sphericalangle KAM$. Ponieważ punkty A, L, K, M leżą na okręgu, więc $\sphericalangle KAM = \sphericalangle KLM$. Mamy zatem $\sphericalangle QAP = \sphericalangle KLM$ i $KL \perp AL$. Stąd wynika, że $ML \perp AP$.

(6) \Rightarrow (1). Ponieważ punkty A, Q, P, R leżą na okręgu, więc $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QRP$. Ponieważ $QR \perp AK$ i $PR \perp AR$, więc $\sphericalangle QRP = \sphericalangle MAK$. Z tych dwóch równości wynika teza. \square

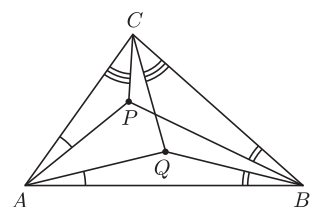
Jeśli dwa punkty należące do wnętrza trójkąta ABC są izogonalnie sprzężone w każdym kącie tego trójkąta, to będziemy mówić, że te punkty są *izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC* (rys. 5). Czy w trójkącie zdarzają się punkty izogonalnie sprzężone? Precyzuje to następujące twierdzenie.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

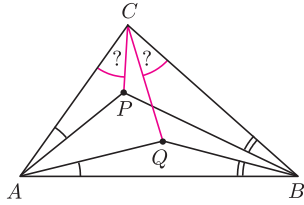
*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie 2. Jeśli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC , to istnieje dokładnie jeden punkt Q , izogonalnie sprzężony z punktem P w trójkącie ABC .

Dowód. Niech punkt Q spełnia warunki podane na rysunku 6. Zauważmy, że punkt Q jest wyznaczony jednoznacznie. Musimy jeszcze udowodnić, że $\sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB$. W tym celu powołamy się na twierdzenie 1, a dokładniej na równoważność warunków 1° z 2°. \square

Przykłady punktów izogonalnie sprzężonych w trójkącie:

- środek okręgu wpisanego w trójkąt jest sprzężony z sobą,
- w trójkącie ostrokątnym ortocentrum jest sprzężone ze środkiem okręgu opisanego.



Rys. 6

Dla zilustrowania możliwości zastosowania podawanych twierdzeń zamieścimy kilka zadań. Ich rozwiązania można znaleźć na końcu artykułu.

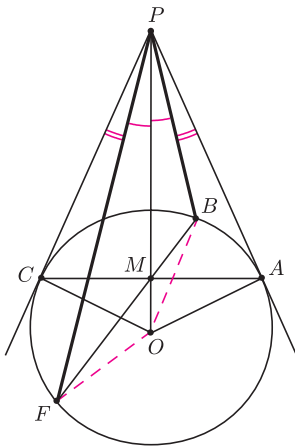
Zadanie 1. Wykazać, że w trójkącie ostrokątnym iloczyn odległości środka okręgu opisanego i ortocentrum od boku trójkąta nie zależy od wyboru boku.

Zadanie 2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA . Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD . Wykazać, że jeśli $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle DAP$, to $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBP$.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta, przy czym $\sphericalangle PAC = \sphericalangle ABQ$ oraz $\sphericalangle PBC = \sphericalangle BAQ$. Wykazać że punkty C, P, Q są współliniowe.

Udowodnimy teraz bardzo przydatne twierdzenie.

Twierdzenie 3. Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O . Przez punkt P poprowadzono proste, styczne do tego okręgu w punktach A i C . Prosta przechodząca przez środek M odcinka AC przecina ten okrąg w punktach B i F (rys. 7). Wówczas półproste PB i PF są izogonalnie sprzężone w kącie APC , czyli $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPF$.



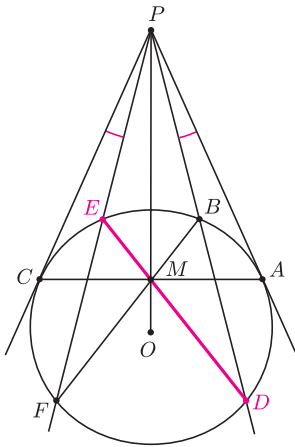
Rys. 7

Dowód. Ponieważ na każdym z czworokątów $BCFA$ i $PCOA$ można opisać okrąg, więc: $|MB| \cdot |MF| = |MA| \cdot |MC| = |MO| \cdot |MP|$ (korzystamy z własności potęgi punktu względem okręgu, o której można przeczytać, na przykład, w *deltoidzie 2/2012*). Z równości $|MB| \cdot |MF| = |MO| \cdot |MP|$ wynika, że punkty B, F, O, P leżą na jednym okręgu. Nazwijmy go σ_1 . Ponieważ $|OB| = |OF|$, więc kąty OPB i OPF są równe (jako kąty wpisane w okrąg σ_1 , oparte na przystających łukach). Stąd wynika, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPF$. \square

Z powyższego twierdzenia wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1. Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O . Przez punkt P poprowadzono proste, styczne do tego okręgu w punktach A i C . Prosta przechodząca przez środek M odcinka AC przecina ten okrąg w punktach B i F . Proste PB i PF przecinają ten okrąg odpowiednio w punktach D i E (rys. 8). Wówczas:

- punkty E, M, D są współliniowe,
- czworokąt $BEFD$ jest trapezem równoramiennym.



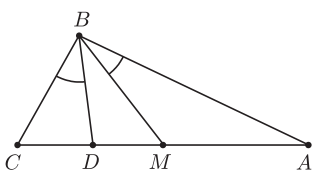
Rys. 8

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że prosta OP jest osią symetrii całego rysunku.

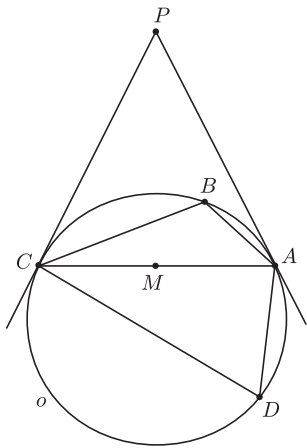
Wniosek 2. Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O . Przez punkt P poprowadzono proste, styczne do tego okręgu w punktach A i C oraz dwie półproste izogonalnie sprzężone w kącie APC , przecinające ten okrąg w czterech punktach. Wówczas te punkty są wierzchołkami trapezu, którego przekątne przecinają się w środku M odcinka AC .

Symediany i punkt Lemoine'a. Jeśli w trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AC , a punkt D należy do boku AC i półprosta BD jest izogonalnie sprzężona z półprostą BM , to półprostą BD będziemy nazywać *symedianą* w trójkącie ABC (rys. 9).

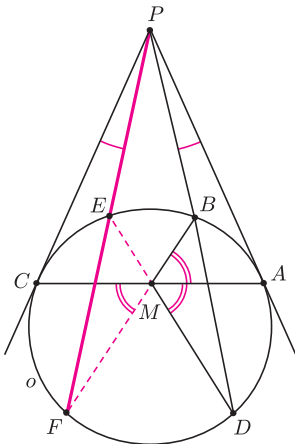
Trzy symediany w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, bo jest to punkt izogonalnie sprzężony ze środkiem ciężkości trójkąta. Punkt przecięcia symedian trójkąta nazywany jest *punktem Lemoine'a* tego trójkąta.



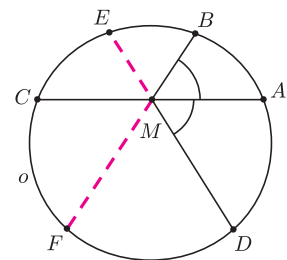
Rys. 9



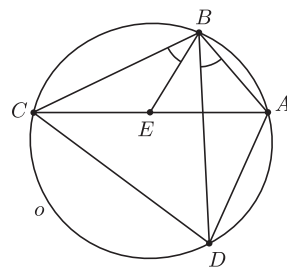
Rys. 10



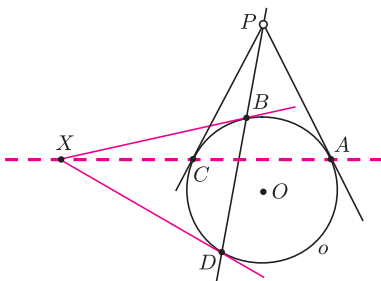
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

Symediany mają wiele ciekawych własności. Kilka z nich podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o , punkt M jest środkiem cięciwy AC , która nie jest średnicą okręgu o , proste styczne do okręgu o w punktach A i C przecinają się w punkcie P (rys. 10). Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (1) punkt P należy do prostej BD ,
- (2) $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD$,
- (3) $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$,
- (4) półprosta BD jest symedianą w trójkącie ABC .

Dowód. (1) \Rightarrow (2). Niech prosta PEF spełnia warunek $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPE$ (rys. 11). Na mocy wniosków z twierdzenia 3 czworokąt $BEFD$ jest trapezem równoramiennym i jego przekątne przecinają się w punkcie M . Stąd wynika, że $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMF = \sphericalangle AMD$.

(2) \Rightarrow (3). Przypuśćmy, że cięciwy ED i BF przecinają się w punkcie M (rys. 12). Wówczas symetralna odcinka AC jest osią symetrii całego rysunku, skąd wynika, że $|AF| = |CD|$ i $|CF| = |AD|$. Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AC , więc pola trójkątów BAF i BCF są równe. Jednocześnie $\sphericalangle BAF = 180^\circ - \sphericalangle BCF$, więc $|AB| \cdot |AF| = |BC| \cdot |CF|$. Z tej i z otrzymanych wyżej równości wynika teza.

(3) \Rightarrow (4). Niech punkt E spełnia warunki podane na rysunku 13, czyli $E \in \overline{AC}$ i $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABD$. Wówczas:

$$(*) \triangle DBA \sim \triangle CBE \quad \text{oraz} \quad (**) \triangle EBA \sim \triangle CBD.$$

Stąd

$$\frac{|EB|}{|EC|} \stackrel{(*)}{=} \frac{|AB|}{|AD|} \stackrel{\text{zał.}}{=} \frac{|CB|}{|CD|} \stackrel{(**)}{=} \frac{|EB|}{|EA|}.$$

Wobec tego $|EC| = |EA|$.

(4) \Rightarrow (1). Przeprowadzimy dowód nie wprost. Niech prosta PB przecina okrąg o w punkcie X . Z udowodnionej implikacji (1) \Rightarrow (4) wynika, że półprosta BX też jest symedianą w trójkącie ABC . Ale w trójkącie ABC z wierzchołka B można poprowadzić tylko jedną symedianę. Wobec tego punkty D i X pokrywają się. \square

Z twierdzenia 4 wynikają dwa istotne wnioski.

Wniosek 3. Ponieważ z warunku (3) wynika, że żaden z punktów A, B, C, D nie jest wyróżniony, więc jeśli półprosta BD jest symedianą w trójkącie ABC , to półprosta DB jest symedianą w trójkącie ADC , a prosta AC zawiera symediany trójkątów BAD i BCD .

Wniosek 4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o . Jeśli proste styczne do okręgu o w punktach A i C przecinają się na prostej BD , to styczne w punktach B i D przecinają się na prostej AC (rys. 14).

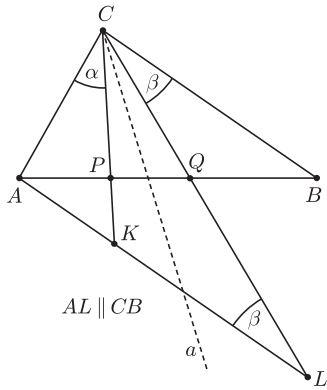
Teraz proponujemy cztery zadania:

Zadanie 4. Czy w trójkącie nierównoramiennym wysokość może być jednocześnie symedianą?

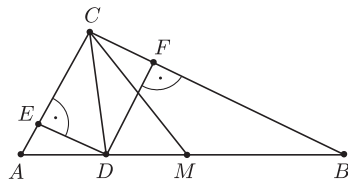
Zadanie 5. Punkt M jest środkiem podstawy AC trójkąta równoramiennego ABC . Okrąg wpisany w kąt ABC jest styczny do jego ramion w punktach A i C . Punkt D należy do krótszego łuku AC tego okręgu i $\sphericalangle DAB = 20^\circ$, $\sphericalangle DBA = 10^\circ$. Obliczyć miarę kąta MDC .

Zadanie 6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, punkty M i N są środkami przekątnych odpowiednio BD i AC . Wykazać, że jeśli $\sphericalangle AND = \sphericalangle ANB$, to $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DMC$.

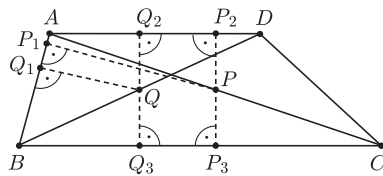
Zadanie 7. Dany jest okrąg i punkty A i B należące do tego okręgu. Odcinek AB nie jest średnicą tego okręgu. Rozważmy takie trójkąty ABX , że punkt X należy do ustalonego łuku AB . Wykazać, że proste zawierające symediany wszystkich takich trójkątów, poprowadzone z wierzchołka X , przecinają się w jednym punkcie.



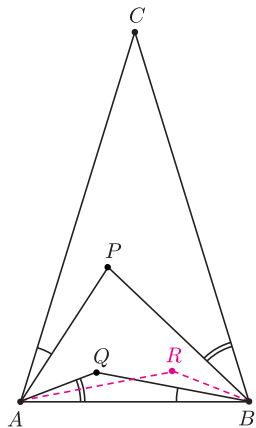
Rys. 15



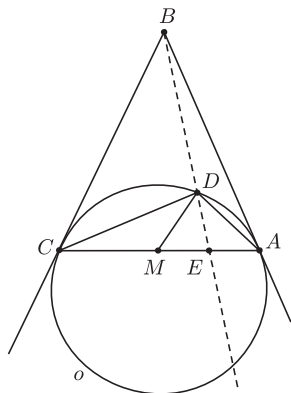
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

Długości odcinków. Przytoczymy teraz trzy twierdzenia, w których podane są własności punktów izogonalnie sprzężonych oraz symedian w zależności od związków między długościami odpowiednich odcinków.

Twierdzenie 5. Dany jest trójkąt ABC . Punkty P i Q należą do odcinka AB (rys. 15). Wówczas proste CP i CQ są izogonalnie sprzężone w kącie ACB wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}$$

Dowód. Przez punkt A poprowadźmy prostą równoległą do prostej BC . Prosta ta przecina proste CP i CQ odpowiednio w punktach K i L . Oznaczmy kąty: $\sphericalangle ACK = \alpha$, $\sphericalangle BCL = \sphericalangle CLA = \beta$. Ponieważ $\triangle APK \sim \triangle BPC$, więc

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AK|}{|BC|}$$

Podobnie $\triangle AQL \sim \triangle BQC$, więc

$$\frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{|AL|}{|BC|}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} &\Leftrightarrow \frac{|AK|}{|BC|} \cdot \frac{|AL|}{|BC|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} \Leftrightarrow \frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AL|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \triangle KAC \sim \triangle CAL \Leftrightarrow \alpha = \beta. \quad \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 6. Półprosta CD jest symedianą w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}$$

Dowód. Twierdzenie 6 jest prostym wnioskiem z twierdzenia 5.

Twierdzenie 7. Niech punkt D należy do boku AB trójkąta ABC . Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D na proste CA i CB (rys. 16). Wówczas półprosta CD jest symedianą w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|DE|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Dowód. W dowodzie skorzystamy z twierdzenia 6. Zaczniemy od zapisania na dwa sposoby stosunku pól trójkątów ADC i BDC :

$$\frac{|AC| \cdot |DE|}{|BC| \cdot |DF|} = \frac{|AD|}{|BD|}$$

Otrzymujemy stąd równość:

$$\frac{|DE|}{|DF|} = \frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|}$$

Zatem

$$\frac{|DE|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} \quad \square$$

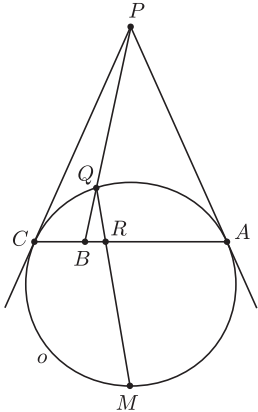
Wniosek 5. Symediana poprowadzona z wierzchołka C w trójkącie ABC jest zbiorem wszystkich takich punktów leżących wewnątrz kąta ACB , których stosunek odległości od prostych AC i BC jest równy $|AC| : |BC|$.

Dla dowodu wystarczy powołać się na twierdzenie 7 oraz własności jednokładności (tej o środku w punkcie C).

Na koniec proponujemy jeszcze trzy zadania:

Zadanie 8. Punkt B należy do odcinka AC . Okrąg o przechodzi przez punkty A i C , proste styczne do okręgu o w punktach A i C przecinają się w punkcie P . Odcinek PB przecina okrąg o w punkcie Q , dwusieczna kąta AQC przecina odcinek AC w punkcie R . Wykazać, że przy ustalonych punktach A, B, C położenie punktu R nie zależy od wyboru okręgu o .

Zadanie 9. Nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o . Proste zawierające środkowe AD, BE, CF tego trójkąta przecinają okrąg o odpowiednio w punktach K, L, M . Prosta przechodząca przez A , równoległa do BC , przecina okrąg o w punkcie P . Analogicznie dla punktów B i C definiujemy punkty Q i R . Wykazać, że proste KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 20

Zadanie 10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Symetralne boków AB i AC przecinają środkową AD odpowiednio w punktach W i V . Proste BW i CV przecinają się w punkcie T . Wykazać, że punkt T należy do symediany trójkąta ABC , poprowadzonej z wierzchołka A .

Rozwiązania zadań

Zadanie 1. Ponieważ w trójkącie ostrokątnym ortocentrum i środek okręgu opisanego są izogonalnie sprzężone, więc dla dowodu tej równości wystarczy powołać się na twierdzenie 1, a dokładniej na to, że z warunku 1° wynika warunek 2° .

Zadanie 2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 17. Skorzystamy z twierdzenia 1, z równoważności warunków 1° i 2° .

$$\begin{aligned} \sphericalangle B A Q = \sphericalangle D A P &\Leftrightarrow |Q Q_1| \cdot |P P_1| = |Q Q_2| \cdot |P P_2| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |Q Q_1| \cdot |P P_1| = |Q Q_3| \cdot |P P_3| \Leftrightarrow \sphericalangle A B Q = \sphericalangle C B P. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Niech punkt R będzie obrazem symetrycznym punktu Q względem symetralnej odcinka AB (rys. 18). Ponieważ punkty P i R są izogonalnie sprzężone w kątach CAB i CBA , więc są także izogonalnie sprzężone w kącie ACB . Wynika stąd, że $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCR$. Jednocześnie $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle BCR$. Z tych dwóch równości wynika, że $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ACQ$, co kończy dowód.

Zadanie 4. Nietrudno zauważyć, że wysokość dowolnego trójkąta prostokątnego, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, jest także symedianą w tym trójkącie. Natomiast z twierdzenia 4, z równoważności warunków (1) i (4), wynika, że jeśli trójkąt nie jest prostokątny i wysokość pokrywa się z symedianą, to ten trójkąt musi być równoramienny.

Zadanie 5. Półprosta BD wyznacza symedianę DE trójkąta ADC (rys. 19). Ponieważ $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DBA = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$, więc $\sphericalangle MDC = \sphericalangle EDA = 30^\circ$.

Zadanie 6. Dla dowodu wystarczy przypomnieć wniosek 3 z twierdzenia 4 i równoważność warunków (2) i (3) tego twierdzenia.

Zadanie 7. Dla dowodu wystarczy przypomnieć twierdzenie 4, a dokładniej równoważność warunków (1) i (4) tego twierdzenia.

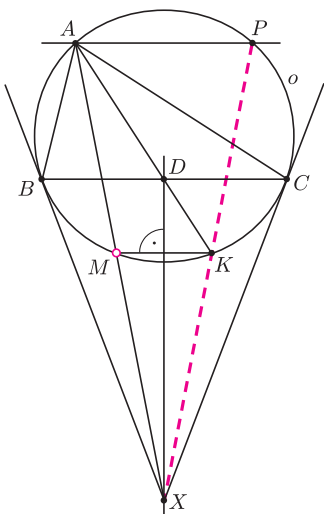
Zadanie 8. Jeśli punkt M jest środkiem łuku AC , to półprosta QM jest dwusieczną kąta AQC (rys. 20). Wówczas:

$$\frac{|RA|}{|RC|} = \frac{|QA|}{|QC|} = \sqrt{\frac{|BA|}{|BC|}}.$$

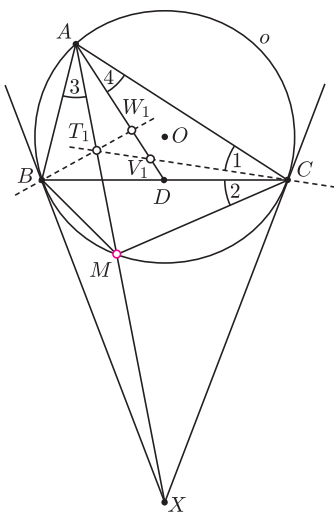
Pierwsza równość wynika z twierdzenia o dwusiecznej, a druga stąd, że półprosta QB jest symedianą w trójkącie AQC . Wobec tego położenie punktu R zależy tylko od punktów A, B, C .

Zadanie 9. Opiszmy na okręgu o taki trójkąt XYZ , aby jego boki YZ, ZX, XY były styczne do okręgu o odpowiednio w punktach A, B, C . Niech M będzie punktem przecięcia odcinka AX z okręgiem o (rys. 21). Wówczas półprosta AM jest symedianą w trójkącie ABC . Stąd wynika, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAK$. Wobec tego łuki BM i CK są przystające i w rezultacie $BC \parallel MK$. Zatem prosta XD jest symetralną odcinka MK . A ponieważ jest również symetralną odcinka AP , więc punkty X, K, P są współliniowe. Stąd wynika, że półproste XA oraz XP są izogonalnie sprzężone w trójkącie XYZ . W rezultacie otrzymujemy, że proste KP, LQ i MR przecinają się w punkcie izogonalnie sprzężonym w trójkącie XYZ z punktem Lemoine'a trójkąta ABC (ten ostatni punkt jest także punktem Gergonne'a trójkąta XYZ).

Zadanie 10 (rozwiązanie Tomasza Cieśli). Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC . Niech styczne do okręgu o przecinają się w punkcie X , a odcinek AX przecina okrąg o w punkcie M . Punkt T_1 jest środkiem odcinka AM , proste BT_1 i CT_1 przecinają środkową AD odpowiednio w punktach W_1 i V_1 (rys. 22). Ponieważ prosta BC zawiera symediany trójkątów ABM i ACM , więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. Wobec tego $V_1 = V$. Analogicznie dowodzimy, że $W_1 = W$. Wobec tego $T_1 = T$.



Rys. 21



Rys. 22

Wydaną w 1963 roku, dla wielu „kultową”, powieść Julia Cortáзара *Gra w klasy można czytać „po kolei”* albo przyjmując zaproponowaną przez autora alternatywną kolejność rozdziałów, która pozwala odkrywać nowe sensy i znaczenia. Skorzystamy tutaj tego rozwiązania aby obejść ograniczenia techniczne *Delty* i pominiemy na razie wynikający z chronologii wydarzeń odcinek V dotyczący fizyki ciężkich zapachów. Ukáže się on w numerze czerwcowym.

Pisząc Δ_{XY}^n , odwołujemy się do numeru n *Delty* z roku 19XY lub 20XY. Pełna lista przywoływanych artykułów jest na stronie www.deltami.edu.pl.

Wiele współczesnych eksperymentów neutrinowych, np. CHOOZ Double CHOOZ, RENO, Daya Bay (Δ_{12}^5), wykorzystywało lub wykorzystuje wiązki neutrin produkowanych przez działające na potrzeby energetyki reaktory jądrowe.

Hipoteza niezerowych mas neutrin była już dawniej rozpatrywana w kosmologii, ponieważ cząstki te odgrywają ważną rolę w ewolucji wszechświata (Δ_{82}^8). W szczególności, rozważania kosmologiczne pozwalają obliczyć gęstość tzw. neutrin reliktowych, stanowiących dziś tło kosmiczne analogiczne do kosmicznego promieniowania tła składającego się z fotonów. Można stąd znaleźć górne ograniczenia na wartość sumy mas lekkich neutrin. Neutrino spełniały też pewną rolę przy formowaniu się we wszechświecie obserwowanych dziś wielkoskalowych struktur i to stąd pochodzi obecne najostrejsze górne ograniczenie na tę sumę mas, równe $0,66 \text{ eV}/c^2$. Ograniczenie to nie dotyczy hipotetycznych ciężkich neutrin, które uległyby rozpadowi w trakcie ewolucji wszechświata.

Gdy można ograniczyć się tylko do oscylacji dwóch zapachów neutrin, np. $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, prawdopodobieństwo tego, że neutrino powstałe jako ν_e o energii E przejdzie w ν_μ po przebyciu dystansu L jest dane wzorem

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 4 \sin^2 \theta_{12} (1 - \sin^2 \theta_{12}) \times \sin^2 \left(1,27 \left(\frac{\Delta m_{12}^2}{(\text{eV})^2} \right) \left(\frac{\text{GeV}}{E} \right) \left(\frac{L}{\text{km}} \right) \right)$$

Czynnik $\sin^2 \theta_{12}$ bierze się tu z modułu odpowiedniego elementu macierzy PMNS.

*Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski

Delta i fizyka cząstek elementarnych (V): Od LEP-u do LHC: fizyka neutrin

Piotr CHANKOWSKI*

Neutrino były przedmiotem wyjątkowo wielu artykułów i notek w *Delcie*. Przypomnę więc tu tylko, że na pomysł istnienia neutrina (elektronowego) wpadł W. Pauli w roku 1932, chcąc ratować zasadę zachowania energii (wydawało się, że jest ona pogwałcona w jądrowych rozpadach β). Zarejestrować neutrino udało się jednak dopiero w roku 1956 (Nagrodę Nobla otrzymali za to F. Reines i C.L. Cowan, Δ_{96}^3), gdy zbudowane po wojnie reaktory atomowe zaczęły jako produkt uboczny wytwarzać ich intensywne wiązki. Kolejnym krokiem było ustalenie, że neutrino powstające w słabych rozpadach mezonów π^\pm nie są tożsame z neutrinami pochodzącymi z rozpadów β (Δ_{89}^2), a po odkryciu trzeciej rodziny fermionów jasne się stało, że powinno istnieć także (nie za ciężkie) neutrino ν_τ – co potwierdziły pomiary rozpadów Z^0 wykonane w LEP-ie (Δ_{90}^{11}). Jak już wspominałem w odcinku I, przez długie lata przyjmowano, że neutrino są bezmasowe i tak też została skonstruowana oryginalna wersja Modelu Standardowego.

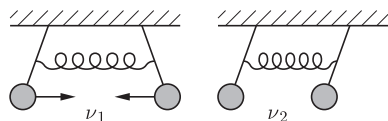
Przełom w fizyce neutrin rozpoczął się od trwającego wiele lat eksperymentu R. Davisa (zob. Δ_{81}^4 , Δ_{82}^{12} , Δ_{88}^9) uhonorowanego w roku 2002 Nagrodą Nobla (Δ_{03}^1). Wykazał on, że strumień docierających na Ziemię ze Słońca neutrin elektronowych jest mniej więcej trzykrotnie mniejszy, niż przewiduje teoria procesów zachodzących w Słońcu (Δ_{78}^1 , Δ_{78}^3 , Δ_{81}^4 , Δ_{82}^{12}). Trzeba było jednak wielu lat, by ugruntowało się przekonanie, iż winna jest nie teoria Słońca, zwana Standardowym Modelem Słońca, w stworzenie której olbrzymi wkład wniósł J.N. Bahcall, lecz zachowanie samych neutrin.

Podobną zagadkę, stwierdzoną w latach dziewięćdziesiątych XX wieku, stanowiły neutrino produkowane w górnych warstwach atmosfery przez promieniowanie kosmiczne (Δ_{99}^2). Powstające tam mezony π^\pm rozpadają się na pary $\mu\nu_\mu$, a z kolei miony μ rozpadają się na $e\nu_e\nu_\mu$; jak łatwo obliczyć, stosunek liczby neutrin mionowych do elektronowych powinien być więc równy 2. Tymczasem stosunek ten mierzony przy powierzchni Ziemi jest bliski 1 (Δ_{99}^2 , Δ_{15}^{12}).

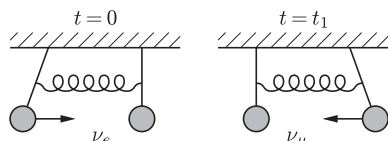
Dzięki wielu eksperymentom przeprowadzonym w większości w XXI wieku znamy już w zasadzie rozwiązanie tych zagadek. Od lat sześćdziesiątych XX wieku wysuwano myśl (koncepcje B. Pontecorvo, Z. Makiego, M. Nakagawy, S. Sakaty i S. Bilenkiego), że gdyby neutrino miały małe, ale niezerowe masy (Δ_{92}^3), powinno występować zjawisko oscylacji neutrin, podobne do wspomnianego już (w odcinku IV) mieszania się – czyli właśnie oscylacji – mezonów K^0 i \bar{K}^0 (Δ_{78}^5), lub B^0 i \bar{B}^0 , polegające na tym, że z pewnym prawdopodobieństwem zmieniają one w locie swoją tożsamość (przykładowo neutrino ν_e przechodzi po pewnym czasie w ν_μ itp). Jeśli bowiem masy neutrin nie byłyby zerowe, na przykład z powodu jakichś oddziaływań z kondensatem pola Higgsa, neutrino ν_e powstające w wyniku absorpcji wirtualnego bozonu W^+ przez elektron (lub emisji wirtualnego W^-) nie odpowiadałoby cząstce fizycznej o dobrze określonej masie, lecz byłoby pewną superpozycją neutrin o dobrze określonych masach. Oznacza to po prostu, że przy absorpcji W^+ przez e^- może powstać dowolne z neutrin o dobrze określonych masach, każde z pewną amplitudą prawdopodobieństwa (podobnie jak przy absorpcji W^- przez kwark u może powstać albo d , albo s , albo b , zob. odcinek I). Z kolei tak wyprodukowane neutrino, absorbując W^- , może przejść w e^- , lub μ^- , lub τ^- .

Z powyższego opisu wynika, że zjawisko zmieniania tożsamości przez neutrino ma w zasadzie takie samo podłoże jak reakcje słabe, w których zmianie ulega dziwność, powab lub piękno hadronu (tj. zapach jednego z tworzących hadron kwarków). Odpowiednie amplitudy powstania neutrin o określonej masie w wyniku absorpcji W^+ przez e^- , μ^- lub τ^- tworzą unitarną macierz PMNS (od nazwisk Pontecorvo, Makiego, Nakagawy i Sakaty) o trzech wierszach i trzech kolumnach. Podobnie jak macierz CKM zależy ona od trzech kątów i jednej obserwowalnej w oscylacjach neutrin tzw. fazy, tj. kierunku na płaszczyźnie zespolonej. Ponieważ jednak, w odróżnieniu od kwarków, neutrino mogą niemal swobodnie przebywać bardzo duże odległości, zanim zostaną zarejestrowane przez swoje oddziaływania słabe, wygodniejszy jest w ich przypadku inny opis: zamiast mówić, że w wyniku absorpcji W^+ przez e^- może powstać dowolne z neutrin o określonej masie, przyjmujemy, że powstaje wtedy ν_e , które w locie może zmienić się w ν_μ lub ν_τ (lub, o czym piszę dalej, w tzw. neutrino

Sprężone wahadła stanowią poglądowy model oscylacji neutrin. Neutrinom ν_1 i ν_2 o określonych masach odpowiadają dwa typy drgań o dobrze określonych częstotliwościach sprzężonych wahadeł,



a powstaniu neutrina ν_e (ν_μ) odpowiada wprawienie w $t = 0$ w ruch tylko lewego (prawego) wahadła:



Po pewnym czasie t_1 lewe wahadło na chwilę zatrzyma się, a z pełną amplitudą drgać będzie prawe wahadło; po $t = 2t_1$ zatrzyma się prawe wahadło, a drgać będzie lewe itd. Można powiedzieć (choć usiłuję tu w sposób niedoskonały oddać efekt kwantowy za pomocą mechanicznego modelu), że w każdej chwili $0 < t < t_1$ są niezerowe prawdopodobieństwa znalezienia tego układu w stanach reprezentujących ν_e i ν_μ .

W rzeczywistości przemiana w ν_μ neutrin ν_e powstających przy spalaniu we wnętrzu Słońca wodoru w hel zachodzi głównie w bardziej zewnętrznych warstwach Słońca. Wskutek dużej gęstości materii zachodzi tam wzmocnienie oscylacji podobne do zjawiska rezonansu w pobudzanych mechanicznych układach drgających. Zwie się to mechanizmem MSW, od nazwisk S. Michejewa, A. Smirnowa i L. Wolfenstein.

Zbiorcze analizy danych z różnych eksperymentów neutrinowych dają $\Delta m_{21}^2 \equiv m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2 \approx 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2/c^2$, $|\Delta m_{32}^2| \approx 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2/c^2$ (od znaku Δm_{21}^2 zależą przewidywania wykorzystujące wspomniany wyżej mechanizm MSW). Wyniki te nie wyznaczają samych mas neutrin i dopiero w połączeniu z innymi ograniczeniami pozwalają stwierdzić, że neutrina są dużo lżejsze od najbliższego z naładowanych elektrycznie leptonów, czyli elektronu.

sterylne ν_s); pozwala to skupić się na zależności prawdopodobieństwa takich oscylacji od energii lecącego neutrina i od przebytej przez nie odległości. (W podobny sposób opisuje się też oscylacje neutralnych mezonów, z tym że w ich przypadku wchodzące w grę odległości są rzędu milimetrów.)

Efekty takie, jak obserwowany przez R. Davisa deficyt pochodzących ze Słońca ν_e , tłumaczy się w tym obrazie tym, że jego detektor mógł rejestrować jedynie ν_e ; tymczasem część tych ν_e przeszła w ν_μ , których detektor zobaczyć nie mógł. W podobny sposób działają (ły) wszystkie eksperymenty typu „znikanie” (ang. *disappearance experiments*) SAGE, GALLEX, Kamiokande, Super-Kamiokande, KamLAND, Δ_{99}^3 . „Znikanie” może być uwarunkowane kinematyką reakcji, np. w Kamiokande neutrina ν_μ , w które zmieniły się ν_e ze Słońca, nie mogły produkować μ^- z powodu niedostatecznej energii i dlatego nie mogły zostać zarejestrowane. Czytelnicy zaznajomieni ze szczególną teorią względności mogą pokusić się o obliczenie, jak duża musi być energia neutrina ν_μ , by zderzając się ze spoczywającym elektronem, mogło ono spowodować reakcję $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ (rozwiązanie na końcu artykułu).

Opisany w odcinkach I i II Model Standardowy przyjmuje, że istnieją tylko trzy rodzaje neutrin, ν_e , ν_μ i ν_τ (czyli że są tylko trzy neutrina o dobrze określonej masie), które wszystkie oddziałują z W^\pm i Z^0 . W zasadzie mogłyby jednak istnieć także dodatkowe neutrina ν_s nieoddziałujące z bozonami pośredniczącymi (a więc niezostawiające żadnych śladów w detektorach), nazywane sterylnymi, w które neutrina „aktywne”, ν_e , ν_μ i ν_τ mogłyby się także zamieniać. Oznaczałoby to, iż neutrin o dobrze określonych masach jest też więcej niż trzy.

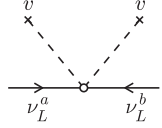
Celem prowadzonych w XXI wieku eksperymentów neutrinowych było więc, po pierwsze, ustalenie, czy hipoteza niezerowych mas neutrin i oscylacji może w sposób niesprzeczny wyjaśnić zagadkowe znikanie neutrin i ile jest neutrin o określonych masach (trzy czy więcej), a następnie wyznaczenie kluczowych parametrów, którymi są różnice kwadratów mas neutrin i wartości elementów macierzy PMNS.

Dzięki trwającym już prawie ćwierć wieku badaniom eksperymentalnym (z)realizowanym przez wiele grup uzyskaliśmy odpowiedzi na wiele pytań dotyczących neutrin. Eksperymenty SAGE, GALLEX, Kamiokande, a później Super-Kamiokande (ostatnie dwa nagrodzone Nagrodami Nobla w latach 2002 i 2015, Δ_{03}^1 , Δ_{15}^{12}) potwierdziły i uściśliły wyniki Davisa dotyczące neutrin słonecznych oraz dokładnie zbadały znikanie neutrin ν_μ pochodzących z atmosfery. Kluczowy eksperyment SNO (Δ_{02}^7), również nagrodzony Nagrodą Nobla w 2015 roku (Δ_{15}^{12}), umożliwił pomiar całkowitego strumienia „aktywnych” neutrin pochodzących ze Słońca i silnie ograniczył możliwość przechodzenia słonecznych ν_e w neutrina sterylne. Przeprowadzono też bardziej kontrolowane eksperymenty (KamLAND, K2K, T2K) typu „znikanie”, jak też i eksperyment OPERA typu „pojawianie się” (ang. *appearance*) polegające na wysyłaniu precyzyjnie mierzonej wiązki neutrin do odległych nawet o setki kilometrów detektorów (Δ_{07}^2 , Δ_{11}^{10} , Δ_{12}^1); ponieważ prawdopodobieństwo oscylacji zależy od przebytego przez neutrina dystansu, niektóre efekty mogą ujawnić się tylko przy takich odległościach. W rezultacie tych badań ustalona została dość dokładnie struktura macierzy PMNS i wyznaczono determinujące charakter oscylacji różnice kwadratów mas neutrin. W odróżnieniu od macierzy CKM macierz PMNS jest bardziej „demokratyczna”: dwa jej kąty mają duże wartości (dwa z nich są bliskie $\pi/4$). Niezwykle istotnym wynikiem jest niedawne zmierzenie niezerowej wartości trzeciego kąta macierzy PMNS (Δ_{12}^5): wynik ten oznacza, że, być może, uda się kiedyś zarejestrować w oscylacjach neutrin efekty łamania symetrii CP.

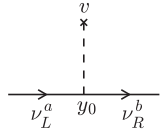
Jak te wyniki i ich fenomenologiczny opis mają się do Modelu Standardowego? Czy konieczne będzie „przepisywanie na nowo podręczników”? Jeśli przyjmie się, że jedynymi neutrinowymi „cegielkami” są trzy lewochiralne pola neutrin (po jednym na każdą rodzinę fermionów), to bezmasowość neutrin jest konsekwencją żądania renormalizowalności (zob. odcinek III) Modelu Standardowego. Bezmasowość wyklucza zaś oscylacje. Renormalizowalność, choć była ważną wskazówką dla twórców Modelu Standardowego, nie jest jednak, jak to dziś rozumiemy, bezwzględny wymogi. Jeśli zaś dopuścić, że Model Standardowy może być „trochę” nierenormalizowalny (a z dzisiejszej perspektywy nie ma powodów, by był teorią ściśle renormalizowalną), to masy neutrin (i mieszanie) można bardzo łatwo uwzględnić w ogólnych ramach tej teorii przez dopisanie do jej równań wyrazów dających oddziaływanie dwóch

lewochiralnych pól neutrin z dwoma polami Higgsa, a więc i z jego kondensatem. Otrzymane w taki sposób masy neutrin nazywa się masami Majorany; neutrina o określonej masie są wtedy neutralnymi fermionami Majorany, które same są swoimi antycząstkami.

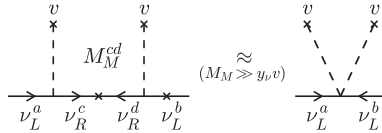
Możliwe (nierenormalizowalne) oddziaływanie lewoskrętnych neutrin ν_L^a ($a, b = e, \mu, \tau$) z kondensatem v pola Higgsa.



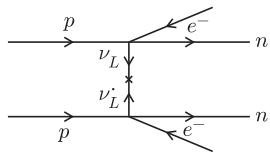
Zwykle oddziaływanie Yukawy lewoskrętnych ν_L^a i prawoskrętnych ν_R^b neutrin z kondensatem generujące masy Diraca.



Mechanizm huśtawki generowania mas neutrin w wyniku oddziaływań.



Jeśli neutrina o dobrze określonych masach są rzeczywiście fermionami Majorany (czyli są same swoimi antycząstkami), możliwe są procesy $\beta\beta 0\nu$, zwane podwójnymi bezneutrinowymi rozpadami β (zob. Δ_{92}^3), czyli jądrowe rozpady $J(A, Z) \rightarrow J(A, Z \mp 2) + e^\pm + e^\pm$.



Procesy $\beta\beta 0\nu$ nie są możliwe, jeśli neutrina są fermionami Diraca. Około dziesięć lat temu były doniesienia zarejestrowaniu takich rozpadów, wyniki te nie zostały jednak potwierdzone.

Zadanie to ma krótsze rozwiązanie, o ile umiemy posłużyć się przekształceniami Lorentza. Są to wielkości, których wartość nie zależy od układu odniesienia użytego do ich obliczenia. Jednym z nich jest niezmiennik s będący kwadratem całkowitego czteropędu układu: $s = E_{\text{tot}}^2 - \mathbf{P}_{\text{tot}}^2 c^2$. Ponieważ reakcja nie zmienia całkowitego pędu ani całkowitej energii układu, s po reakcji ma tę samą wartość, co przed reakcją. Po reakcji $s_{\text{min}} = m^2 c^4$ (s_{min} obliczamy w układzie środka masy); przed reakcją zaś $s = (mc^2 + |\mathbf{k}'|c)^2 - (\mathbf{k}'c)^2$ (tym razem obliczamy niezmiennik w układzie, w którym początkowo elektron spoczywa). Stąd otrzymujemy natychmiast

$$|\mathbf{k}'|_{\text{min}} c = E'_{\nu_\mu} = \frac{(M^2 - m^2)c^2}{2m}.$$

Inną możliwością jest przyjęcie, że na każdą rodzinę fermionów przypadają dwa pola neutrinowe o przeciwnych chiralnościach. Masy neutrin (i tym samym ich oscylacje) można wtedy otrzymać w taki sam sposób, jak masy kwarków – z oddziaływania neutrin z kondensatem pola Higgsa poprzez stałe sprzężenia Yukawy y_ν (odcinek I) – a pochodzenie macierzy PMNS jest wtedy takie samo, jak macierzy CKM. Byłyby wtedy trzy neutrina o dobrze określonych masach (każde mogłoby mieć dwie składowe) i każde miałyby do pary swoje antyneutrino. Takie neutrina nazywa się neutrinami Diraca. Jednak wobec faktu, że masy neutrin są o rzędy wielkości mniejsze niż masy naładowanych leptonów, najbardziej uzasadniona wydaje się jeszcze inna możliwość. Ponieważ prawochiralne pola neutrin nie zmieniają się pod wpływem przekształceń z grupy $SU(2)_W \times U(1)_Y$ (czyli nie oddziałują z bozonami W^\pm i Z^0 – są więc sterylne) można bez psucia symetrii cechowania i renormalizowalności dopisać do równań uogólnionego (przez dołączenie prawochiralnych pól neutrin) Modelu Standardowego odpowiednie wyrazy (zwane masami Majorany), które, gdyby nie było oddziaływań z kondensatem pola Higgsa, powodowałyby, że kwantami prawochiralnych pól neutrinowych byłyby trzy masywne fermiony Majorany. W obecności dodatkowych oddziaływań neutrin z kondensatem pola Higgsa (przez sprzężenia Yukawy) dopisane wyrazy powodują jednak, że kwantami sześciu pól neutrinowych jest sześć neutrin Majorany o dobrze określonych masach. W ogólności neutrina aktywne ν_e, ν_μ i ν_τ mogłyby wtedy przechodzić w neutrina sterylne (będące kwantami prawochiralnych pól neutrin), co byłoby sprzeczne z wynikami eksperymentu SNO. Jeśli jednak masy Majorany prawochiralnych neutrin są bardzo duże w porównaniu z masami generowanymi przez oddziaływanie z kondensatem, oscylacje neutrin aktywnych w sterylne stają się bardzo mało prawdopodobne i dodatkowo masy trzech neutrin stają się bardzo małe (trzy pozostałe neutrina stają się zaś bardzo ciężkie) – uzyskuje się w ten sposób naturalne wyjaśnienie wyjątkowej lekkości neutrin. Mechanizm taki nazywa się „mechanizmem huśtawki”. Choć uzyskana w taki sposób modyfikacja Modelu Standardowego jest renormalizowalna, efektywnym opisem fizyki procesów zachodzących z udziałem cząstek o niskich energiach (pomijającym całkowicie istnienie trzech ciężkich neutrin Majorany) jest przedstawiona tu jako pierwsza możliwość nierenormalizowalna wersja Modelu Standardowego z trzema lewochiralnymi polami neutrin i ich oddziaływaniem z kondensatem. Rachunki pokazują, że wspomniane masy Majorany powinny być rzędu $(10^{12} - 10^{14})$ GeV, co wydaje się wiązać je ze skalą tzw. Wielkiej Unifikacji. O takich, bardziej spekulatywnych ideach napiszę na zakończenie cyklu.

Rozwiązanie zadania. Masy neutrin, znacznie mniejsze niż wszelkie inne skale energii występujące w tych rozważaniach, można całkowicie pominać, trzeba jednak korzystać z kinematyki relatywistycznej. W układzie środka masy, w którym wektorowa suma pędów neutrina ν_μ i elektronu przed reakcją jest równa zeru, podobnie jak suma pędów powstałego w reakcji mionu μ^- i neutrina ν_e , bilans energii jest oczywisty:

$$|\mathbf{k}|c + \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{k}^2 c^2} = \sqrt{M^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} + |\mathbf{p}|c,$$

gdzie m i M są odpowiednio masami elektronu i mionu, a $|\mathbf{k}|$ i $|\mathbf{p}|$ są wartościami pędów cząstek przed i po reakcji. Energia $|\mathbf{k}|c$ neutrina ν_μ , potrzebna do wywołania reakcji, jest minimalna, gdy energie cząstek końcowych są minimalne, $|\mathbf{p}|c \rightarrow 0$. Stąd otrzymujemy

$$|\mathbf{k}|_{\text{min}} = \frac{(M^2 - m^2)c}{2M}.$$

Aby znaleźć minimalną energię ν_μ w układzie, w którym początkowo elektron spoczywa, trzeba przejść do układu poruszającego się z odpowiednią prędkością V (skierowaną wzdłuż kierunku pędu \mathbf{k}). Przy takim przejściu energia E każdej cząstki i składowa jej pędu q równoległa do V przekształcają się do wartości odpowiednio E' i q' według wzorów:

$$E' = \gamma(V)(E + Vq), \quad q' = \gamma(V)(VE/c^2 + q), \quad \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Przyjmując, że w układzie środka masy dla elektronu jest $(E_e, q_e) = (\sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{k}^2 c^2}, -|\mathbf{k}|)$, i żądając, by było $(E'_e, q'_e) = (mc^2, 0)$, wyliczamy, że $V/c = (M^2 - m^2)/(M^2 + m^2)$. Ponieważ w układzie środka masy zachodzi $(E_{\nu_\mu}, q_{\nu_\mu}) = (|\mathbf{k}|c, |\mathbf{k}|)$, wykorzystując znalezione V , obliczamy, że w układzie, w którym elektron spoczywa mamy

$$E'_{\nu_\mu} = \frac{(M^2 - m^2)c^2}{2m},$$

co daje około 10 GeV. Tymczasem elektrony pochodzące ze Słońca mają energie rzędu MeV.



Dla porównania, lokalna gromada w Pannie, w skład której wchodzi około 1500 galaktyk, w tym nasza, waży około 1200 bilionów M_{\odot} .



Prosto z nieba: Gromada na początku wszechświata

Wkrótce po Wielkim Wybuchu, po połączeniu się cząstek elementarnych w lekkie pierwiastki, materia zaczęła się grupować pod wpływem grawitacji w pierwsze gwiazdy. Pierwsze galaktyki pojawiły się setki milionów lat po początku wszechświata, natomiast większe struktury – gromady galaktyk – potrzebowały **miliardów** lat na uformowanie się w kształcie, w którym są obecnie obserwowane. Jak wcześnie w historii wszechświata powstają jednak te największe elementy kosmicznej struktury? Niedawne badania zespołu amerykańskich astronomów z uniwersytetów Missouri, Florydy, Kalifornijskiego i MIT dotyczą obserwacji najstarszej (obecnie) gromady galaktyk, oznaczonej symbolem IDCS J1426.5+3508. Według oszacowań gromada powstała zaledwie 3,8 miliarda lat po Wielkim Wybuchu (przesunięcie ku czerwieni $z > 1,5$) i jest, jak na swój wiek, bardzo masywna: waży 250 bilionów M_{\odot} , czyli 1000 razy więcej niż nasza rodzima Galaktyka.

Elektromagnetyczne obserwacje gromady IDCS 1426 zostały przeprowadzone w różnych długościach fal. Zdjęcia wykonane teleskopami Hubble'a i Kecka można wykorzystać do zważenia gromady, analizując ilość światła uginanego w polu grawitacyjnym gromady, czyli badając zjawisko soczewkowania grawitacyjnego. Dane rentgenowskie zarejestrowane przez teleskop Chandra wykorzystano natomiast do oszacowania całkowitej ilości świecącego gazu znajdującego się w gromadzie. Zmierzono także efekt Siunijajewa-Zeldowicza, czyli rozpraszanie promieniowania mikrofalowego tła na energetycznych elektronach wypełniających gromadę. Te trzy niezależne metody zgodnie dają ten sam, wspomniany wcześniej wynik 250 bilionów M_{\odot} . Dodatkowo, promieniowanie rentgenowskie wyświecane przez gorący gaz świadczy o dynamicznych procesach zachodzących we wnętrzu gromady. Maksimum promieniowania znajduje się nieco obok centrum gromady. Fakt ten interpretuje się jako niedawną (kilka setek tysięcy lat temu) kolizję z inną masywną gromadą galaktyk, co wywołało gwałtowny ruch gazu wewnątrz gromady, wzrost jego temperatury i obserwowane promieniowanie. Jest to istotna informacja o historii powstania gromady IDCS 1426 i, ogólnie, o procesach zachodzących na tak wczesnych etapach ewolucji wielkich struktur. Kolizja z inną gromadą tłumaczy, czemu IDCS 1426 jest już bardzo masywna w tak młodym wieku, w czasie gdy poszczególne galaktyki ją tworzące dopiero nabierały ostatecznego kształtu.

Michał BEJGER



Rozwiązanie zadania M 1492.

Załóżmy, że liczby naturalne k, l, m spełniają zadane równanie. Niech liczba pierwsza p będzie nieparzystym dzielnikiem liczby $k^2 + 1$. Wówczas $k^2 \equiv -1 \pmod p$, więc

$$(-1)^{(p-1)/2} \equiv (k^2)^{(p-1)/2} \equiv k^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Stąd $(p-1)/2$ jest liczbą parzystą, czyli $p \equiv 1 \pmod 4$.

W takim razie liczba $2^m - 1$, jako nieparzysty dzielnik $k^2 + 1$, musi również dawać resztę 1 z dzielenia przez 4, a stąd mamy $m \leq 1$.

Dla $m = 1$ równanie jest spełnione, na przykład, przez liczby $k = 1$ i $l = 2$.



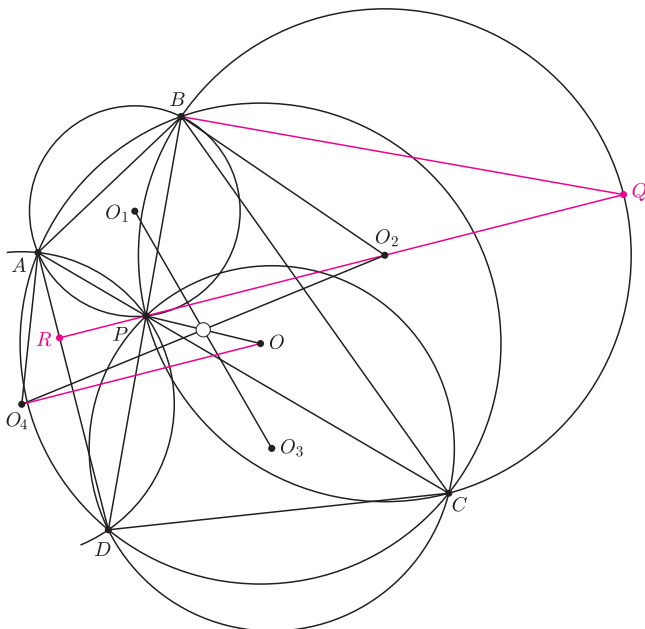
Rozwiązanie zadania M 1494.

Niech R będzie punktem przecięcia prostej PO_2 z prostą AD , a Q różnym od P punktem przecięcia tej prostej z okręgiem opisanym na trójkącie BCP (rysunek). Wówczas $\sphericalangle DPR = \sphericalangle QPB$ oraz

$$\sphericalangle RDP = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle PCB = \sphericalangle PQB.$$

W takim razie trójkąty PDR i PQB są podobne, w szczególności $\sphericalangle PRD = \sphericalangle PBQ = 90^\circ$. Stąd prosta PO_2 jest prostopadła do AD , a więc również równoległa do OO_4 – symetralnej AD . Analogicznie proste PO_4 i OO_2 są równoległe. W takim razie odcinki OP i O_2O_4 przecinają się w połowie jako przekątne równoległoboku.

W podobny sposób możemy pokazać, że prosta O_1O_3 przechodzi przez środek odcinka OP , co daje tezę.



Groźna epidemia XXI wieku

Obecnie 500 milionów ludzi na świecie jest otyłych lub ma nadwagę. Nakłady na leczenie otyłości w USA przekroczyły już straty powodowane paleniem tytoniu i alkoholizmem. W ciągu ostatnich 10 lat liczba otyłych dzieci wzrosła w USA 2,5-krotnie. Otyłość kwalifikuje się jako zespół chorobowy.

Jest zatem powód do niepokoju, jak również chciałoby się poszukać innego niż my winnego: oczywiście geny!

Poszukiwanie genów związanych z tym zespołem trwa kilkadziesiąt lat. Te poszukiwania ozdobione są wykrzyknikami medialnymi: znaleziono gen otyłości! Po chwilowym wzroście nadziei grubasów, że znajdzie się też pastylka, a jeść będzie można nadal do syta, „gen otyłości” znika z prasy codziennej.

Podsumujmy, co na pewno wiemy o tych genach.

Wiemy, że nie wszystkie jeszcze znaleźliśmy, ale około 10 z nich to geny pojedyncze (zespół monogenowy) wpływające na skłonność do tycia, a kilkadziesiąt (ponad 60) to zestawy genów (zespoły poligenowe). Czasem obszary te nakładają się – pojedyncze geny pierwszego typu uczestniczą w działaniach poligenowych. W każdym potencjalnym genie „otyłości” może być wiele (opisano np. 150) różnych mutacji, niektóre zasocjowane mutacje leżą poza obszarem kodującym danego genu. Często mutacja polega jedynie na różnicy w pozycji jednego tylko nukleotydu (elementu składowego genu).

W 1999 roku zidentyfikowano jeden z podejrzanych genów, FTO, jako gen wpływający na otyłość (np. myszy). Dziś widzi się go jako jeden z ważnych składników w różnych zespołach poligenowych. Podobny gen powiązано z ludzką otyłością w 2007 roku. I choć ogłoszono w 2015 roku, że wykryto funkcję tego genu, to zrozumienie działania białka wciąż jeszcze do nas w pełni nie dociera. U myszy pełny brak aktywności FTO prowadzi do wczesnej śmierci. Domyślamy się także, że wpływa on na pracę układu krwionośnego, a także nie ma wątpliwości, że naruszenie aktywności kodowanego białka wiąże się z regulacją metabolizmu pokarmowego kierowanego przez centralny układ nerwowy. Stwierdza się patologie genu FTO przy cukrzycy typu 2, nadciśnienia, arteriosklerozy, nawet w nowotworach nerek. Bardzo dużo genów charakteryzuje się podobnie i niekonkluzywnie – w opisie same ogólniki i brak wyraźnego powiązania z rodzajem aktywności zidentyfikowanego białka kodowanego przez ten gen. Enzym ten usuwa małe podstawniki chemiczne (grupy metylowe) z pojedynczych nici DNA. Jak to się ma do wzrostu lub spadku masy ciała? Gdzie jest ta pigułka?

Nie mamy wpływu na różne czynniki warunkujące podatność na otyłość: płeć, środowisko, pochodzenie etniczne, wykształcenie. Na razie dietetycy mogą zatem koncentrować się wokół porad zachowań, na które możemy mieć wpływ:

- „JP”! (jedz połowę), zmniejsz ilość tłuszczów! (nie wszystkich, w dodatku są też indywidualne układy genów, przy których duża ilość tłuszczów w diecie pomaga w spalaniu nadmiaru kalorii, o czym wiedzą wyznawcy takich diet).
- Zwiększ aktywność fizyczną! (choć przeliczenie liczby kalorii w tabliczce czekolady i ubytku po pół godzinie intensywnego pływania nie każdego do pływania zachęca).

Tycie nie zawsze oznacza brak tzw. silnej woli, tak jak choremu na depresję nie należy radzić, żeby się „wziął w garść”. Ilu tyjących, tyle różnych indywidualnych przyczyn, z różnym naciskiem na *różne*. Także, gdyby już znaleziono „tę pigułkę”, z podobnych przyczyn działałaby różnie na różnych ludzi. Byłoby dobrze, gdyby istniały łatwe i tanie genetyczne testy pozwalające na przewidywanie zagrożenia otyłością dla konkretnych osobników, ale do takich testów chyba jeszcze daleko.

Otyłość, skoro jest chorobą, to kwalifikuje się do leczenia i poszukiwania leków. Nawet to proste powyższe podsumowanie wyraźnie wskazuje na to, że będzie trudno!

Magdalena FIKUS

Idus Martiae Anno Domini 2016

Piętnastego marca stracona została rubież intelektualnej przewagi człowieka nad sztuczną inteligencją, za jaką była uznawana maestria gry w Go. Zakończyła się ostatnia, piąta partia między AlphaGo, programem firmy DeepMind (będącej własnością Google) i Lee Se-dolem (9 dan – najwyższy stopień wtajemniczenia), jednym z najlepszych, jeżeli nie najlepszym zawodowym graczem. AlphaGo wygrał pierwsze trzy rozgrywki. Lee Se-dol wygrał czwartą i, po niezwykle zaciętej walce, przegrał ostatnią.

Na jesieni ten sam program wygrał, w stosunku 5:0, analogiczny mecz z europejskim mistrzem Fan Hui (2 dan). Naprzemiennie rozgrywana była wtedy również seria spotkań nieoficjalnych, która została wygrana przez AlphaGo, ale tylko w stosunku 3:2. W oficjalnych spotkaniach czas był ograniczony do godziny (dla każdego z graczy) z rozszerzeniem o trzy trzydziestosekundowe *byoyomi*, czyli okresy odnawiające się pod warunkiem wykonania w ich trakcie ruchu. W spotkaniach nieoficjalnych nie było tej początkowej godziny. Reguły te zostały ustalone przez Fan Hui przed rozpoczęciem rozgrywek.

W meczu z Lee Se-dolem początkowy czas wynosił dwie godziny, a trzy *byoyomi* były sześćdziesięcioszekundowe.

Koreański mistrz przed meczem „obawiał się przegrania jednej z pięciu partii”. Eksperci Go również stawiali na człowieka. Oczekiwano, że pokonanie przez sztuczną inteligencję najlepszych z najlepszych jest odległe o co najmniej dekadę, jeżeli w ogóle możliwe.

Poglądy te były uzasadniane kombinatoryczną złożonością Go. Szacuje się, że liczba możliwych sytuacji na planszy przekracza liczbę atomów w obserwowalnym wszechświecie. Dlatego gra na najwyższym poziomie opiera się w znacznej mierze na wyćwiczonej przez lata intuicji wykorzystującej wybitne zdolności.

Przypomnijmy, że chodzi o rozgrywkę na kracie utworzonej z dziewiętnastu równoległych i dziewiętnastu prostopadłych do nich linii. Gracze na przemian kładą pojedyncze kamienie, pierwszy czarne, drugi białe, na wolne przecięcia linii. W grze chodzi o odgrodzenie jak największego obszaru za pomocą swoich kamieni (na końcu zalicza się po punkcie za odgrodzone przecięcia; jest kilka sposobów obliczania końcowego wyniku mogących dawać niewielkie różnice – dlatego przed grą ustala się, który sposób zostanie użyty). Kamieni nie można przesuwac, ale ściśle otoczenie grupy kamieni przeciwnika (tak, że żaden z tych kamieni nie sąsiaduje z wolnym przecięciem linii – nie ma tzw. oddechu) skutkuje zdjęciem całej grupy z planszy. W omawianych rozgrywkach stosowana była (powszechnie używana) reguła *komi*, przyznająca graczowi posługującemu się białymi kamieniami (zaczynającemu jako drugi) dodatkowe 7,5 punktu.

Po zwycięstwie nad Fan Hui opublikowano pracę [1], w której przedstawiono ogólne zasady działania programu AlphaGo (oraz jego osiągnięcia).

Od dłuższego czasu podstawą programów wykorzystujących sztuczną inteligencję w grach (zwłaszcza tych z pełną informacją jak Go czy szachy) jest metoda MCTS (*Monte Carlo Tree Search*). W tym przypadku polega ona na ocenie

kolejnego ruchu na podstawie rozegrania szeregu jego kontynuacji z kolejnymi ruchami (zarówno swoimi, jak przeciwnika) wybieranymi w przypadkowy sposób, ale spośród tych mieszczących się w ramach aktualnie najlepszej strategii naśladującej najlepszych graczy (ludzi lub maszyny, w tym siebie samą). Metoda ta pozwoliła na osiągnięcie przewagi nad profesjonalistami w szeregu gier (w tym w szachach), ale w Go dawała szansę na wygraną zaledwie z nie najlepszymi amatorami. Jest to, oczywiście, związane właśnie z kombinatoryczną komplikacją Go.

Dodatkowa przewaga AlphaGo została osiągnięta poprzez twórcze wykorzystanie sieci neuronowych o wielu ukrytych warstwach (*deep neural networks*, DNN). Przez wiele lat uważano, że mnożenie ukrytych warstw takich sieci niewiele pomaga. Ostatnio jednak okazało się, że wykorzystywanie ich do wykonywania hierarchicznych przekształceń wzmacniających lokalne regularności danych wejściowych daje bardzo dobre wyniki w rozpoznawaniu obrazów. A układ kamieni jest przecież obrazem! Temat można dalej zgłębiać za pomocą oryginalnej publikacji [1], ale specjaliści komentują, że na jej podstawie i tak nie da się odtworzyć niuansów działania AlphaGo (co chyba nie powinno specjalnie dziwić).

Warto dodać, że Fan Hui i Lee Se-dol rywalizowali z tzw. rozproszonym AlphaGo posługującym się (przynajmniej w meczu z Fan Hui) czterdziestoma wątkami uruchamianymi na 1202 CPU oraz 176 GPU (*Graphics Processing Unit*). Ciekawe jest również to, że liczba sprawdzanych pozycji była rzędu wielkości mniejsza niż w przypadku słynnego meczu Deep Blue z Kasparowem przed dwudziestu laty, ale (jak widać) były one sprawdzane mądrzej i precyzyjniej [1]. Jednoczesne użycie DNN i MCTS daje najlepsze rezultaty, ale wyniki użycia samych sieci neuronowych są niewiele gorsze. Uważa się, że jest to sposób zbliżony do intuicyjnej gry profesjonalistów.

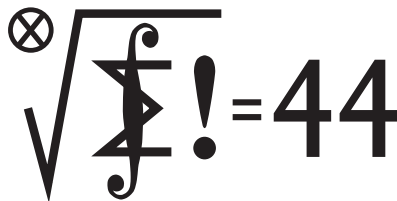
Lee Se-dol podchodził bardzo emocjonalnie do meczu z AlphaGo. Wielokrotnie przeproszał, że nie stanął na wysokości zadania. Czwartą partię wygrał, wykonując niestandardowy ruch, którego AlphaGo nie rozpoznał jako kluczowy. Zorientował się dopiero po dziesięciu następnych ruchach. W ostatnim meczu człowiek miał długo niewielką przewagę po błędzie popełnionym przez AlphaGo na początku partii, ale nie zdołał jej utrzymać w końcówce rozgrywanej w rytm *byoyomi*. Moim zdaniem było widać, że jest na granicy psychofizycznej wytrzymałości. Partia została już uznana za najbardziej niesamowitą z kiedykolwiek rozegranych.

Do historii przejdzie jednak rozpromieniony uśmiech Lee Se-dola po wygranej partii. Być może była to ostatnia taka wygrana człowieka w pojedynku ze sztuczną inteligencją. Sam Lee stwierdził, że nie zamieniłby jej na nic innego.

Jeżeli chodzi o nasze ewentualne (pozostałe) przewagi to zachęcam do przeczytania zakończenia *Rozprawy* Stanisława Lema.

Piotr ZALEWSKI

[1] David Silver, Aja Huang *et al.*, *Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search*, *Nature* **529** (2016) 484.

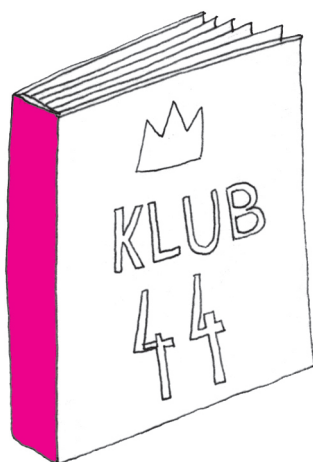
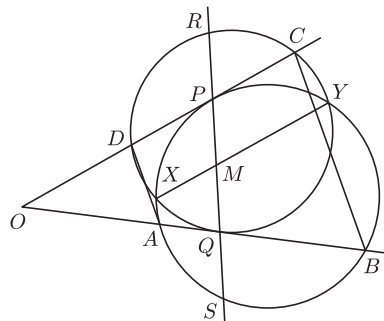


Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
707 ($WT = 1,64$) i 708 ($WT = 1,71$)
z numeru 10/2015

Paweł Najman	Kraków	46,20
Jerzy Cisło	Wrocław	42,48
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	40,34
Stanisław Bednarek	Łódź	38,85
Janusz Fiett	Warszawa	37,91
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	36,17
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77

Pan Najman: 44 p. po raz siódmy.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 721, 722

Redaguje Marcin E. KUCZMA

721. Na bokach BC , CA , AB trójkąta ABC leżą punkty D , E , F , w których okręgi dopisane do trójkąta są styczne do tych boków. Niech R i r będą promieniami okręgów opisanego i wpisanego. Dowieść, że stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi $2R/r$.

722. Rozwiązać równanie $2^x + 2^y = 6^z$ w liczbach całkowitych dodatnich x , y , z .

Zadanie 722 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2016

Przypominamy treść zadań:

713. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym boki AB i CD nie są równoległe. Rozważamy okrąg, przechodzący przez punkty A i B , styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrąg, przechodzący przez punkty C i D , styczny do prostej AB w punkcie Q . Zakładamy, że punkty P i Q leżą na odcinkach CD i AB oraz że wspólna cięciwa tych okręgów przechodzi przez środek odcinka PQ . Udowodnić, że proste AD i BC są równoległe.

714. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej $m \geq 1$.

- (a) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb naturalnych m, n , spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$.
(b) Czy istnieje para liczb naturalnych względnie pierwszych $m, n > 1$, spełniających równanie $d(m)/m = d(n)/n$?

713. Przyjmijmy, że punkt O przecięcia prostych AB i CD leży na półprostej $CD \rightarrow$ i $BA \rightarrow$ oraz że prosta PQ przecina okręgi (ABP) i (CDQ) odpowiednio w punktach S i R (różnych od Q , P). Wspólna cięciwa tych okręgów – nazwijmy ją XY – przechodzi przez środek M odcinka PQ . Z równości $|MP| \cdot |MS| = |MX| \cdot |MY| = |MQ| \cdot |MR|$ oraz $|MP| = |MQ|$ wnosimy, że $|MR| = |MS|$, a stąd $|PR| = |QS|$.

Także $|PC| \cdot |PD| = |PQ| \cdot |PR|$ oraz $|QA| \cdot |QB| = |QP| \cdot |QS|$. Prawe strony tych równości są równe, więc lewe też. Oznaczając odległości punktów A, B, C, D, P, Q od punktu O kolejno literami a, b, c, d, p, q , przepisujemy uzyskaną zależność w postaci $(c - p)(p - d) = (q - a)(b - q)$. Po wymnożeniu i uwzględnieniu równości $p^2 = ab$, $q^2 = cd$, otrzymujemy związek $p(c + d) = q(a + b)$. Tak więc

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a+b}{p} = \frac{c+d}{q} = \sqrt{\frac{c}{d}} + \sqrt{\frac{d}{c}}$$

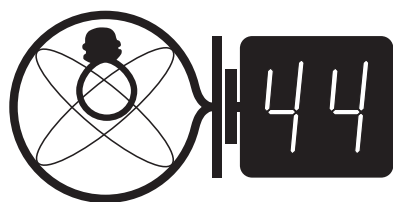
Skoro $b > a$, $c > d$, wynika stąd, że $c/d = b/a$. To zaś oznacza, że proste AD i BC są równoległe.

714. (a) Na przykład, każda para postaci $m = p$, $n = 2p$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą, ma wymaganą własność, bowiem $d(p) = 2$, $d(2p) = 4$.

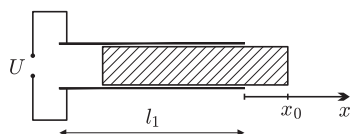
(b) Przypuśćmy, że para liczb względnie pierwszych $m, n > 1$ spełnia podane równanie: $nd(m) = md(n)$. Skoro liczby m, n są względnie pierwsze, wynika stąd, że m jest dzielnikiem liczby $d(m)$. Wobec tego $m \leq d(m)$. Taka nierówność zajść może (w formie równości) tylko wtedy, gdy każda liczba ze zbioru $\{1, \dots, m\}$ jest dzielnikiem liczby m . W szczególności m musi dzielić się przez $m - 1$. To zaś ma miejsce jedynie dla $m = 2$ (rozważamy, z założenia, tylko $m > 1$).

Role liczb m, n są symetryczne; to samo rozumowanie pokazuje, że także $n = 2$; sprzeczność z założeniem, że m, n są względnie pierwsze. Nie istnieje więc para, o jakiej mowa w pytaniu (b).

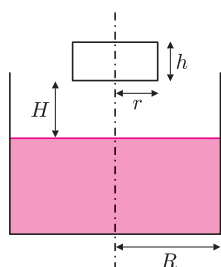
Klub 44



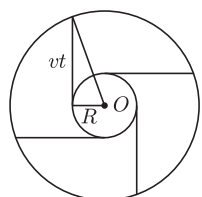
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2016



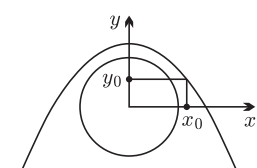
Rys. 1



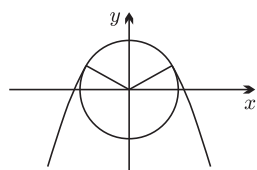
Rys. 2



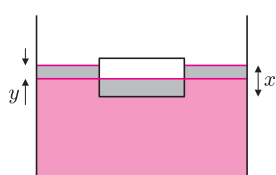
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zadania z fizyki nr 618, 619

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

618. Na kartce papieru narysowano w dziesięciokrotnym pomniejszeniu tor kamienia wyrzuconego z prędkością v pod kątem α do poziomu. Po narysowanej krzywej pełnie mały żuczek, którego prędkość ma stałą wartość u . Ile wynosi przyspieszenie żuczka w punkcie odpowiadającym maksymalnej wysokości, na jaką wznosił się kamień. Oporu powietrza podczas ruchu kamienia nie uwzględniamy.

619. Całą przestrzeń między okładkami kondensatora płaskiego wypełnia płytka dielektryczna o masie m i stałej dielektrycznej ε (rys. 1). Okładki kondensatora mają rozmiary $l_1 \times l_2$, odległość między nimi wynosi d ($l_1 \gg d$, $l_2 \gg d$). Między okładkami utrzymywane jest stałe napięcie U . Płytkę wysunięto z obszaru kondensatora wzdłuż boku o długości l_1 na odległość x_0 , a następnie puszczono swobodnie. Zaniedbując tarcie, znaleźć zależność przemieszczenia i prędkości płytki od czasu.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2016

Przypominamy treść zadań:

610. Mokre koło o promieniu R obraca się ruchem jednostajnym w płaszczyźnie pionowej wokół nieruchomej osi. Prędkość punktów na obwodzie koła wynosi v . Znaleźć granicę obszaru suchego.

611. Do naczynia w kształcie walca o promieniu R , częściowo wypełnionego cieczą, wpada klocek w kształcie walca o promieniu r i wysokości h (rys. 2). W chwili początkowej odległość dolnej powierzchni klocka od powierzchni cieczy wynosi H , a jego prędkość jest równa zero. Ile ciepła wydzieli się do chwili, gdy ustanie ruch klocka i cieczy? Gęstość klocka wynosi ρ , gęstość cieczy $\rho_c > \rho$.

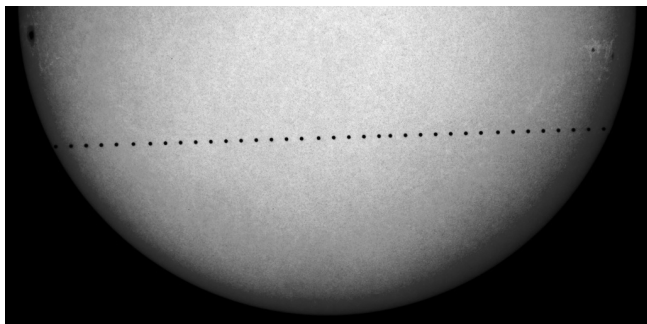
610. Gdyby nie było siły ciężkości, krople oderwane od obręczy koła poruszałyby się po liniach prostych i po czasie t znajdowałyby się na okręgu o środku w punkcie O (rys. 3) i promieniu $r(t)$, przy czym $r^2(t) = R^2 + v^2 t^2$. W polu ciężkości środek okręgu obniża się i w czasie t przebywa drogę $gt^2/2$. Granica obszaru suchego jest obwiednią okręgów, na których znajdują się w kolejnych momentach krople, które oderwały się jednocześnie od obręczy. Przyjmijmy, że początek układu współrzędnych znajduje się w środku obracającego się koła. Równanie „spadającego” okręgu ma w chwili t postać: $x^2 + (y + gt^2/2) = r^2(t)$. Rozważmy prostą poziomą $y = y_0$ (rys. 4). Chcemy znaleźć maksymalną wartość współrzędnej x odpowiadającej jednemu z okręgów przecinających tę prostą: $x^2 = R^2 + v^2 t^2 - (y_0 + gt^2/2)^2$. Po prawej stronie równania mamy trójmian kwadratowy względem t^2 . Jego wartość maksymalna x_0 spełnia równanie: $x_0^2 = R^2 + v^4/g^2 - 2v^2 y_0/g$. Rozwiązując to równanie względem y_0 , otrzymujemy równanie krzywej opisującej granicę „suchego” obszaru: $y_0 = -gx_0^2/v^2 + gR^2/(2v^2) + v^2/(2g)$. Jest to równanie paraboli, której gałęzie są skierowane w dół, a wierzchołek znajduje się na osi y na wysokości $Y = gR^2/(2v^2) + v^2/(2g)$. Gdy $Y > R$, czyli spełniony jest warunek $v^2 > gR$, poszukiwana krzywa leży na zewnątrz obręczy. W przeciwnym przypadku granica „mokrego” obszaru przebiega w górnej części po obręczy (rys. 5), a następnie gładko przechodzi w gałęzie paraboli.

611. Oznaczmy przez x głębokość zamurzenia klocka po ustaleniu się równowagi, a przez y wzrost poziomu cieczy w naczyniu (rys. 6). Zgodnie z prawem Archimedesesa $x = h\rho/\rho_c$. Z rysunku widać, że zachodzi związek $\pi r^2(x - y) = \pi(R^2 - r^2)y$. Stąd $y = h\rho r^2/(\rho_c R^2)$. Wzrost poziomu cieczy możemy też wyliczyć, wiedząc, że parcie na dno zwiększyło się o ciężar klocka, a z drugiej strony ciśnienie na dno zwiększyło się o wartość $\rho_c g y$. Zatem zachodzi związek $\pi r^2 h \rho g = \pi R^2 \rho_c g y$. Po ustaleniu się równowagi energia potencjalna klocka zmalała o wielkość $\Delta E_1 = \pi r^2 h \rho g (H + x - y)$. Energia potencjalna cieczy wzrosła o

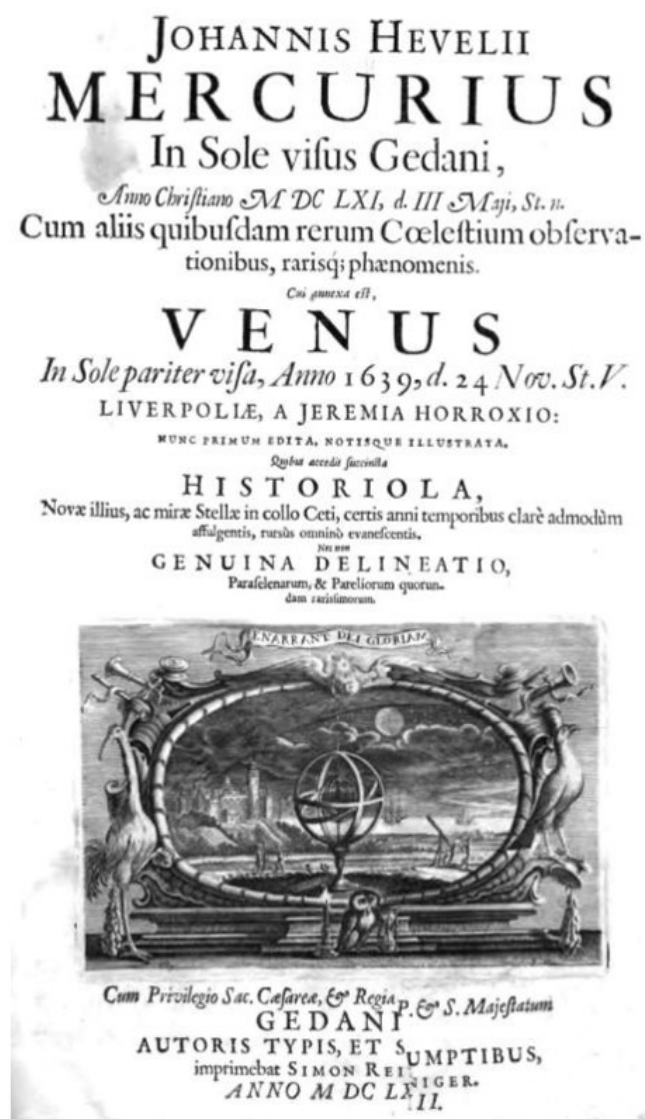
$$\Delta E_2 = \pi r^2 (x - y) \rho_c g (x - y/2 - (x - y)/2) = \pi r^2 \rho_c g (x - y) x/2.$$

Wydzielone ciepło wynosi

$$Q = \Delta E_1 - \Delta E_2 = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho g h \left[H + \frac{h\rho}{2\rho_c} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right].$$



Tranzyt Merkurego na tle tarczy Słońca obserwowany w 2006 roku (źródło: <http://mars.nasa.gov>).



Strona tytułowa dzieła Jana Heweliusza z roku 1662, w którym oprócz tranzytu Merkurego opisał także wyznaczenie średnic kątowych 19 gwiazd.

Niebo w maju

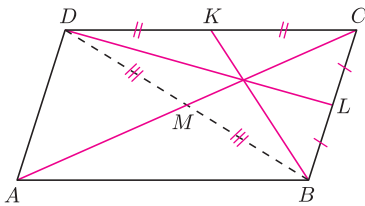
Zjawiskiem wartym największej uwagi w maju będzie tranzyt Merkurego, czyli przejście planety na tle tarczy Słońca. Tranzyty Merkurego obserwujemy około 11 razy w trakcie jednego stulecia, zatem zdecydowanie częściej niż np. przejścia Wenus na tle naszej macierzystej gwiazdy, które zazwyczaj zdarzają się rzadziej niż raz na wiek, a ostatnie trzy, które można było obserwować, wystąpiły w latach 1882, 2004 oraz 2012. Kolejny tranzyt Wenus nastąpi dopiero w 2117 roku, zatem warto teraz skupić uwagę na przejściach Merkurego. Zjawisko zaobserwować będzie można 9 maja. Pierwszy kontakt, czyli zewnętrzne zetknięcie Merkurego z tarczą Słońca nastąpi o godzinie 13:11:59. Drugi kontakt, czyli wewnętrzne stykanie się tarczy planety i gwiazdy nastąpi o 13:15:10. Niestety, z terenu Polski nie będzie można obserwować trzeciego i czwartego kontaktu, przeszkodzi w tym zachód Słońca. Kto lubi podróżować, powinien wybrać się we wschodnie regiony Ameryki Północnej, ewentualnie północne końce Ameryki Południowej, na Arktykę, Grenlandię lub tereny zachodniej Europy i Oceanu Atlantyckiego, gdzie zjawisko będzie można obserwować w całości. Ostatnie tranzyty Merkurego wystąpiły w latach 1999, 2003 oraz 2006, a pierwszy moment przejścia planety na tle Słońca zarejestrowany został w roku 1631 przez Pierre'a Gassendiego. Warto też pamiętać, że 3 maja 1661 roku obserwacji tranzytu Merkurego dokonał gdański astronom Jan Heweliusz, a wyniki opublikował w książce pt. *Mercurius in Sole visus Gedani*. Oszacowana przez Heweliusza średnica kątowa Merkurego wynosiła 11,8 sekundy. Obecnie wiemy, że średnica kątowa Merkurego wynosi 13 sekund, dokładność pomiaru gdańskiego obserwatora budzi zatem podziw i szacunek.

Sympatycy spadających gwiazd powinni w maju zwrócić uwagę na eta Akwarydy widoczne na tle gwiazdozbioru Wodnika. Rój ten, tak jak październikowe Orionidy, związany jest z najbardziej znaną kometą: 1P/Halley. Jego radiant znajduje się dość nisko nad horyzontem (RA 22h, Dec -1°), dostępny więc będzie dla „nocnych marków”, gdyż widoczny jest w drugiej połowie nocy. Jego aktywność jest wysoka i wynosi około 60 meteorów na godzinę, poruszających się z prędkościami około 66 km/s. Eta Akwarydy charakteryzują się jasnymi i szybkimi meteorami o długich śladach. Maksimum roju przypada w trakcie nowiu Księżyca, czyli 6 maja, zatem przy sprzyjających warunkach pogodowych jest to znakomity cel zarówno dla obserwatorów, jak i amatorów astrofotografii. Drugim wartym uwagi jest mniej znany rój eta Lirydy (radiant RA: 19h, Dec: $+44^\circ$) w gwiazdozbiore Lutni, przy granicy z gwiazdozbiorem Łabędzia. Aktywność eta Lirydów jest niezbadana, ale szacuje się ją na około 3–5 meteorów na godzinę, pędzących z prędkościami około 43 km/s. Rój ten powstał na skutek przelotu komety C/1983 H1 (IRAS-Araki-Alcock), odkrytej w 1983 roku. Ta długookresowa, bo mająca okres orbitalny wynoszący aż 964 lata, kometa jest jedną z najbliższych przelatujących koło Ziemi, w odległości raptem 0,0312 j.a., czyli około 4,7 miliona km od naszej planety.

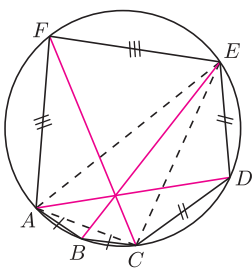
Karolina BĄKOWSKA

W wielu zadaniach należy uzasadnić, że pewne trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Często można wykazać, że wszystkie one są symetralnymi, dwusiecznymi, wysokościami albo środkowymi pewnego trójkąta, co oczywiście kończy dowód.

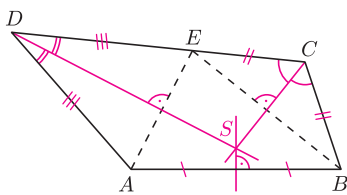
1. Punkty K i L są środkami odpowiednio boków CD i BC równoległoboku $ABCD$. Udowodnij, że odcinki BK i DL przecinają się na przekątnej AC .
2. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg i $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykaż, że główne przekątne tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.
3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $AS = BS$.
4. Wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie S . Wykaż, że proste ES i BC są prostopadłe.
5. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ACDE$ i $BCFG$. Udowodnij, że proste AG , BE oraz wysokość CS trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.



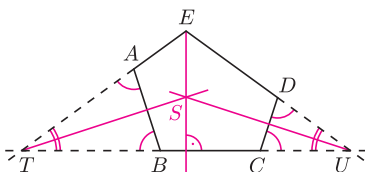
Rys. 1



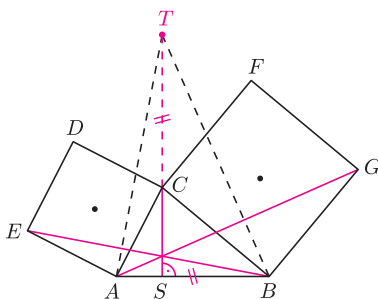
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązania

R1. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych danego równoległoboku (rys. 1). Wówczas M jest środkiem odcinka BD i odcinki BK, DL, CM przecinają się w jednym punkcie jako środkowe trójkąta BCD . \square

R2. Z warunku $AB = BC$ wynika, że punkt B jest środkiem łuku AC danego okręgu i kąty wpisane AEB i CEB są równe (rys. 2). Prosta BE jest więc dwusieczną kąta AEC w trójkącie ACE ; analogicznie proste AD i CF są dwusiecznymi pozostałych kątów tego trójkąta. \square

R3. Niech E będzie takim punktem boku CD , że $ED = AD$, wtedy $EC = BC$ (rys. 3). Wówczas punkty A i E są symetryczne względem dwusiecznej kąta CDA , zatem prosta DS jest symetralną odcinka AE . Analogicznie prosta CS jest symetralną odcinka BE . Symetralne boków trójkąta ABE przecinają się w punkcie S , a stąd $AS = BS$. \square

R4. Niech T i U będą punktami przecięcia prostej BC odpowiednio z prostymi EA i ED (rys. 4). Wobec równości kątów, trójkąty ATB i CUD są równoramienne i podobne, a stąd $\sphericalangle ETU = \sphericalangle EUT$. Symetralna boku AB jest jednocześnie dwusieczną kąta przy wierzchołku T w trójkącie ATB , a więc także w trójkącie ETU . Podobnie symetralna odcinka CD jest dwusieczną kąta EUT , zatem S jest punktem przecięcia dwusiecznych trójkąta równoramiennego ETU . Dwusieczna ES jest więc prostopadła do podstawy TU . \square

R5. Obróćmy kwadrat $ACDE$ o 90° wokół środka tak, by punkt A przeszedł na punkt C , natomiast kwadrat $BCFG$ o 90° wokół swojego środka tak, by punkt B przeszedł na punkt C (rys. 5). Przy obydwu tych obrotach odcinek AB przechodzi na ten sam odcinek o końcu w punkcie C , prostopadły do AB i równy AB . Nazwijmy drugi jego koniec T , wówczas punkty T, C, S są współliniowe.

Przy pierwszym obrocie odcinek BE przechodzi na TA , stąd $BE \perp TA$. Przy drugim obrocie odcinek AG przechodzi na TB , zatem $AG \perp TB$. Wobec tego proste AG, BE, CS są wysokościami trójkąta ABT . \square

Zadania domowe

6. Wykaż, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2 \dots A_{12}$ przekątne A_1A_6 , A_2A_9 i A_3A_{11} przecinają się w jednym punkcie.
7. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB , CD i EF przecinają się w jednym punkcie.
8. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
9. Wykaż, że proste opisane w zadaniu 2 są też wysokościami trójkąta BDF .

Dwa rozwiązania zadania 6 przedstawiono w *deltoidzie* 11/2009. Zadania 3, 7 i 8 pochodzą odpowiednio z VIII, II i V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów www.omg.edu.pl