

14 stycznia 2017 roku zmarł
Krzysztof Maurin
 legendarny matematyk i fizyk



SPIS TREŚCI NUMERU 3 (514)

Newtonowskie intuicje dla fal grawitacyjnych
Michał Bejger



Zadania

Jak krzywizna zżera przestrzeń

(Trudne) początki myśli empirycznej w trzynastowiecznej Europie
Mikołaj Jędrusiak

Pierwiastkowa dekompozycja zapytań
Krzysztof Piecuch



Paleomikrobiologia i nie tylko
Magdalena Fikus

Fraktale z zer i jedynek
Karol Gryszka

Atomki na tropie tajemnicy
Krzysztof Turczyński

Czy moja ręka jest losowa?
Piotr Markowski

Migawka informatyczna: Leniwy nauczyciel
Marcin Pilipczuk

Analiza Starożytnych i Cyprian Norwid
Marek Kordos

Informatyczny kącik olimpijski (103): Przociąganie liny
Tomasz Kazana

Krzysztof Maurin (1923–2017)

Klub 44

Prosto z nieba: Galaktyczny spis powszechny

Niebo w marcu



Kraje, stolice, granice...
Joanna Jaszewska



Warsaw Center of Mathematics and Computer Science

wmcs.edu.pl

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
 Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia; rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA
 Garmond Press: www.garmondpress.pl
 Kolporter: www.kolporter.com.pl
 RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600
 Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:
 str. 11 Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.
 Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl
 str. 12 Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.
 str. 15 Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
 Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl
 Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)
 Wydawca: Uniwersytet Warszawski
 W następnym numerze przedstawiamy

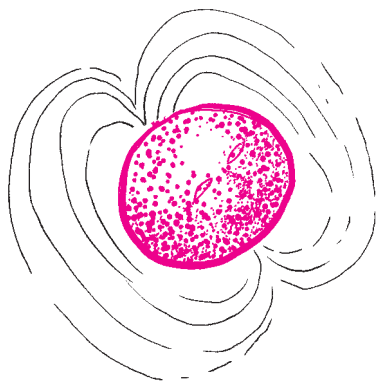


Newtonowskie intuicje dla fal grawitacyjnych

Michał BEJGER

Masy zakrzywiają czasoprzestrzeń,
czasoprzestrzeń wpływa na ruch mas.
John A. Wheeler

Obraz ten należy porównać z grawitacją newtonowską – absolutną, euklidesową przestrzenią, w której na masywne ciała działa natychmiastowa siła.



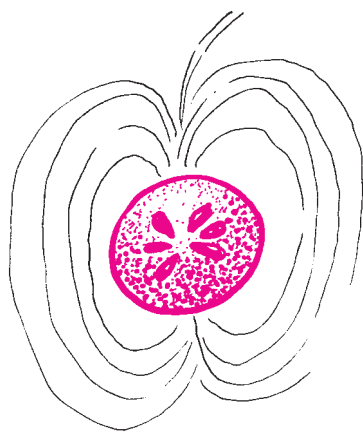
Statyczny rozkład ładunków (w przypadku elektromagnetyzmu) lub mas (w przypadku grawitacji) nie jest źródłem promieniowania. Dla przykładu, radialna zależność pola elektromagnetycznego dla statycznego 2^l -pola to $1/r^{2+l}$, czyli już dla rozkładu monopolowego ($l = 0$) zanika zbyt szybko.

Zmiany momentów monopolowego $M = \int \rho(\mathbf{r})d^3x$ oraz dipolowego mas $P_i = \int \rho(\mathbf{r})x_i d^3x$ nie prowadzą do emisji fal grawitacyjnych. Zmienność elektrycznego momentu dipolowego $P_i^e = \int \rho^e(\mathbf{r})x_i d^3x$ nie jest ograniczona zasadami zachowania, dlatego dominującym składnikiem promieniowania elektromagnetycznego jest promieniowanie dipolowe.

Według ogólnej teorii względności grawitacja jest skutkiem zakrzywiania się czterowymiarowej czasoprzestrzeni wokół masywnych obiektów. Mniej masywne ciała poruszają się wokół bardziej masywnych po liniach geodezyjnych (liniach „najprostszych” w zakrzywionej przestrzeni), co np. w przypadku planet w Układzie Słonecznym daje wrażenie ruchu po orbitach eliptycznych. Na swobodnie poruszające się ciała nie działa żadna siła: ich trajektorie są wynikiem geometrii. Dodatkowo, ogólna teoria względności ma wbudowane ograniczenie prędkości. Wszelkie informacje o zmianie krzywizny rozprzestrzeniają się z prędkością światła. O zmianach tych można myśleć jak o zmiennej w czasie odległości czasoprzestrzennej pomiędzy zdarzeniami. Odległość ta, czyli czterowymiarowy interwał ds definiuje się, używając tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$, $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (zakres $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$ odpowiada jednemu wymiarowi czasowemu i trzem przestrzennym, a powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie w tym zakresie). Składowe $g_{\alpha\beta}$ w ogólnym przypadku mogą mieć skomplikowaną postać zależną od rozmieszczenia zakrzywiających czasoprzestrzeń mas. Dla ilustracji rozważmy przypadek pustej czasoprzestrzeni (czasoprzestrzeni Minkowskiego, z dala od jakichkolwiek mas), z dodanym drobnym zaburzeniem. Interwał czasoprzestrzenny jest wtedy równy $ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta$, gdzie $\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ jest czterowymiarową „odległością” w pustej przestrzeni, a $h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ jej niewielkim zaburzeniem. Wkrótce po ogłoszeniu ogólnej teorii względności, w 1916 roku Albert Einstein stwierdził, że w przypadku przedstawionym powyżej jego równania przyjmują postać równania falowego, którego rozwiązaniem jest owo małe zaburzenie h : fala grawitacyjna. Ma ono parę cech podobnych do fal elektromagnetycznych: ma charakter fali poprzecznej i ma (dwie) niezależne polaryzacje. Przez następne kilkadziesiąt lat istniała poważna kontrowersja, czy rozwiązaniom tym odpowiada zjawisko fizyczne, czy raczej są efektem doboru współrzędnych. Kontrowersja została rozwiana na przełomie lat 50. i 60. przez Feliksa Piraniego, Hermana Bondiego, Ivora Robinsona i Andrzeja Trautmana na korzyść prawdziwości hipotezy fal grawitacyjnych.

Realne promieniowanie jest związane z transportem energii; w szczególności fale powinny móc przenosić energię od źródła do nieskończoności. Jeśli amplituda pola związanego z (dla uproszczenia) sferyczną falą w odległości r od źródła jest równa $h(r)$, to strumień energii przez sferyczną powierzchnię wynosi $F(r) \propto h^2(r)$, a całkowita moc promieniowania (jasność) jest proporcjonalna do $L(r) \propto 4\pi r^2 h^2(r)$. Jako że energia musi być zachowana, amplituda $h(r)$ musi maleć z odległością jak $1/r$. W przypadku detektorów fal grawitacyjnych typu laserowych interferometrów Advanced LIGO i Advanced Virgo, które mierzą właśnie amplitudę fali h , mierzona jest względna różnica różnic długości prostopadłych ramion interferometru, $h = \Delta L_x - \Delta L_y = \Delta L/L$, gdzie L jest długością ramienia (więcej szczegółów w artykule Izzy Kowalskiej w *Delcie* 10/2010). Zależność h od odwrotności odległości przekłada się na daleko większy zasięg w porównaniu do tradycyjnych metod obserwacji, w których wartością mierzoną jest energia proporcjonalna do h^2 . Poprawa czułości o rząd wielkości oznacza dziesięciokrotnie dalszy zasięg w porównaniu do około trzykrotnie większego zasięgu np. teleskopów optycznych.

Przez analogię do elektromagnetyzmu, w którym promieniowanie elektromagnetyczne jest skutkiem przyspieszonego ruchu ładunków elektrycznych, źródłem promieniowania grawitacyjnego powinien być przyspieszony ruch mas. Do promieniowania nie wystarczy jednak samo istnienie ładunku (masy). Dla układu mas opisanego rozkładem gęstości $\rho(\mathbf{r})$, gdzie $|\mathbf{r}|$ to radialna odległość od początku układu odniesienia (np. środka masy), najprostszym momentem rozkładu jest monopol M , który jest po prostu całkowitą masą-energiją układu. Jego zmiana oznaczałaby nieprzebranie zasady zachowania masy-energii. Również zmienny moment dipolowy mas P_i



$$G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{]},$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

Orbitalna prędkość obrotowa ω wiąże się z parametrami orbity poprzez trzecie prawo Keplera,

$$GM = \omega^2 a^3,$$

gdzie $M = m_1 + m_2$ jest całkowitą masą układu. Równanie biegunowe orbity eliptycznej ma postać

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

gdzie a to półoś wielka, a e to ekscentryczność orbity. Gdy $e = 0$ (orbita jest kołem), to $r = a$.

Jeśli przyjmiemy, że orbita układu znajduje się w płaszczyźnie xy , to

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu a}{m_1} \times (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{\mu a}{m_2} \times (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

gdzie $\theta = \omega t$ jest współrzędną kątową określającą położenie ciał. Niezerowe składowe macierzy tensora I_{ij} będą następujące:

$$I_{xx} = \frac{\mu a^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)),$$

$$I_{yy} = \frac{\mu a^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)),$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{\mu a^2}{2} \sin(2\omega t).$$

Charakterystyczną częstotliwością promieniowania fal grawitacyjnych układu podwójnego jest zatem 2ω .

nie może być źródłem promieniowania grawitacyjnego, ponieważ z definicji odpowiada środkowi masy układu; zmienność oznaczałaby złamanie zasady zachowania pędu. Najniższym „promieniującym” multipolem w teorii grawitacji jest zatem kwadrupol, $I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) x_i x_j d^3x$, z którym nie wiążą się żadne zasady zachowania. Powyższe rozważania oznaczają, że sferycznie symetryczny ruch mas, np. kolaps albo eksplozja, nie wywołuje emisji fal grawitacyjnych. To samo dotyczy osiowo symetrycznej rotującej gwiazdy. Dobrymi źródłami fal są natomiast niesferyczne wybuchy supernowych, rotujące zdeformowane gwiazdy neutronowe oraz układy podwójne gwiazd lub czarnych dziur.

Wielkość amplitudy fali grawitacyjnej h można oszacować za pomocą analizy wymiarowej. Z definicji h jest wielkością bezwymiarową i, jak wynika z powyższych rozważań, odwrotnie proporcjonalną do odległości od źródła. Powinna też być związana z momentem kwadrupolowym, którego jednostki to $[\text{kgm}^2]$. Wiemy także, że w wyrażeniu powinna pojawić się druga pochodna, odpowiadająca przyspieszonemu ruchowi mas, niech zatem $h \propto (1/r) \partial^2(MR^2)/\partial t^2$. Jednostki tego wyrażenia to $[\text{kgms}^{-2}]$. By dostać wielkość bezwymiarową, należy odpowiednio dobrać potęgi stałych fizycznych występujące w problemie: stałą grawitacji G oraz prędkość światła c . Bezwymiarowe h otrzymamy dla współczynnika proporcjonalności równego G/c^4 . Jest to bardzo mała liczba, $8,26244528 \cdot 10^{-45} \text{ [m}^{-1}\text{kg}^{-1}\text{s}^2\text{]}$, co oznacza, że źródłami fal o dużej amplitudzie mogą być tylko szybko poruszające się, masywne ciała. Rozważmy układ podwójny mas m_1 i m_2 oddalonych o a (separacji a) na orbicie kołowej. Oszacowanie h można przepisać dla takiego układu, zamieniając MR^2 na μa^2 i przyjmując, że M jest całkowitą, a $\mu = (m_1 m_2)/M$ zredukowaną masą układu. Można też przyjąć, że druga pochodna $\partial^2/\partial t^2$ jest proporcjonalna do orbitalnej prędkości obrotowej ω^2 . Korzystając z trzeciego prawa Keplera (patrz obok), dostaniemy

$$h \simeq \frac{G^2}{c^4} \frac{1}{r} \frac{M\mu}{a} = \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{1}{r} M^{2/3} \mu \omega^{2/3}.$$

Dla przykładu, rząd wielkości h w przypadku dwóch gwiazd neutronowych o podobnych masach ($m_1 = m_2 \approx 1,4 M_\odot$, $M^{2/3} \mu = M^{5/3}/4$) jest następujący:

$$h \approx 10^{-22} \left(\frac{100 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^{2/3} \left(\frac{M}{2,8 M_\odot} \right)^{5/3}.$$

Charakterystyczna względna amplituda $h = \Delta L/L = 10^{-22}$ odpowiada pomiarowi odległości Słońce-Saturn z dokładnością do rozmiaru atomu! Używając argumentów newtonowskich, dostaliśmy *przybliżenie kwadrupolowe* amplitudy h , poprawne dla układów, w których prędkości nie są bliskie prędkości światła. Po raz pierwszy sformułował je w 1918 roku Albert Einstein:

$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}$$

(dwie kropki oznaczają drugą pochodną względem czasu). Amplituda h jest więc bezpośrednio związana z niesymetryczną częścią energii kinetycznej układu: $h \propto E_{\text{kin}}^{\text{nsym}}/r$. Z powyższego i notki na marginesie widać też, że h jest proporcjonalna do momentu kwadrupolowego ($I \propto \mu a^2$) oraz ω^2 . Z rozważań o strumieniu energii wiemy natomiast, że jasność układu (moc promieniowania fal) L jest funkcją $h^2 \propto I^2$, oraz ω w pewnej potędze. Używając analizy wymiarowej (o której więcej napiszemy w następnym numerze), dostajemy

$$L = \frac{dE_{\text{GW}}}{dt} \propto \frac{G}{c^5} I^2 \omega^6 \propto \frac{c^5}{G} \left(\frac{R_s}{a} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6,$$

gdzie E_{GW} jest energią fali grawitacyjnej, $R_s = 2GM/c^2$ jest promieniem Schwarzschilda czarnej dziury o masie M , a $v = \omega a$ jest prędkością liniową masy M na orbicie o promieniu a . Czynniki proporcjonalności wynosi 32/5. Druga wersja równania pokazuje dobitnie, że moc emitowana przez układ podwójny o rozmiarze porównywalnym z R_s i orbitującym z prędkością bliską prędkości światła jest ogromna: czynnik c^5/G wynosi $3,9 \cdot 10^{52} \text{ W}$. Dla porównania zwyczajne układy podwójne są bardzo słabymi źródłami fal. Układ Ziemia-Słońce emituje około 200 W (całkowita emisja elektromagnetyczna Słońca to około $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$).

Fale emitowane są na koszt zmniejszania orbitalnej energii układu, $E_{\text{orb}} = -Gm_1m_2/(2a)$. Porównanie zmiany E_{orb} i E_{GW} daje

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} \equiv \frac{Gm_1m_2}{2a^2} \dot{a} = -\frac{dE_{\text{GW}}}{dt}.$$

Używając trzeciego prawa Keplera oraz wynikającej z niego pochodnej $\dot{a} = -2a\dot{\omega}/(3\omega)$, można otrzymać zależność między masami składników oraz orbitalną prędkością obrotową i jej pochodną:

$$\dot{\omega}^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mathcal{M}^5.$$

Kombinację mas $\mathcal{M} = (\mu^3 M^2)^{1/5} = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$ nazywa się *masą ćwierku* przez analogię do podobnego w charakterze zachowania się częstotliwości i amplitudy odgłosu ptaków; prędkość orbitalna oraz amplituda rośnie ($h \propto \mathcal{M}^{5/3} \omega^{2/3}$), podczas gdy separacja układu a maleje. Masę ćwierku \mathcal{M} można obliczyć wprost z częstotliwości fal grawitacyjnych f_{GW} (o częstotliwości dwukrotnie większej niż orbitalna, $2\pi f_{\text{GW}} = 2\omega$) w detektorze:

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f_{\text{GW}}^{-11/3} \dot{f}_{\text{GW}} \right)^{3/5}.$$

W połączeniu z również mierzoną bezpośrednio przez detektor amplitudą h masę ćwierku można wykorzystać do obliczenia odległości do źródła:

$$r = \frac{5}{96\pi^2} \frac{c \dot{f}_{\text{GW}}}{h f_{\text{GW}}^3}.$$

Metoda ta jest zupełnie niezależna od tradycyjnie używanych do tej pory przez astronomów „drabin odległości”, kalibrowanych poprzez tzw. świece standardowe (np. cefeidy i supernowe typu Ia). W przyszłości pomiary odległości wieloma metodami naraz (np. jasności błysków gamma i fal grawitacyjnych przez nie emitowanych) będą porównywane dla poprawienia kosmicznej skali odległości i precyzyjnego wyznaczenia parametrów kosmologicznych, np. stałej Hubble’a.

Na koniec zastanówmy się, w jaki sposób można otrzymać masy składników dwóch dotychczas zarejestrowanych przez Advanced LIGO sygnałów, GW150914 i GW151226. Po zmierzeniu masy ćwierku ($30 M_{\odot}$ dla GW150914 i $9 M_{\odot}$ dla GW151226) do dyspozycji pozostaje nam analiza przebiegu samego ćwierku. W obu obserwacjach sygnał urywa się przy pewnej krytycznej częstotliwości f_{GW}^c . W przypadku GW150914 f_{GW}^c to około 150 Hz (450 Hz dla GW151226). Nagłe przerwanie ćwierku interpretowane jest jako zderzenie składników o skończonych rozmiarach i moment, w którym układ podwójny przestaje istnieć. Ograniczenie na rozmiar układu dostaniemy, zakładając, że składniki są czarnymi dziurami o promieniach Schwarzschilda. Zatem

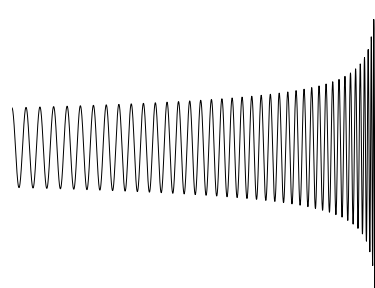
$$R_{s1} + R_{s2} = \frac{2G}{c^2} (m_1 + m_2) = a_{\text{fin}}.$$

Krytyczną odległość a_{fin} wstawiamy do trzeciego prawa Keplera, dostając oszacowanie na sumę mas

$$M = m_1 + m_2 \approx \frac{c^3}{4G\pi\sqrt{2}} \frac{1}{f_{\text{GW}}^c}.$$

Dla GW150914 obliczone w ten sposób M wynosi około $76 M_{\odot}$, dla GW151226 dostajemy $M = 25,4 M_{\odot}$. Dokładne wartości mas układu, otrzymane przy użyciu ogólnej teorii względności i symulacji numerycznych, to, odpowiednio, $65 M_{\odot}$ i $21 M_{\odot}$ (newtonowskie oszacowanie radzi sobie zatem całkiem nieźle, jednak nie na tyle dobrze, by poprawnie określić masy składników dla obu sygnałów poprzez rozwiązanie układu równań M i \mathcal{M}). Alternatywną metodą jest założenie, że masy składników są podobne. Wtedy $M = 2^{6/5} \mathcal{M}$, i $M = 70 M_{\odot}$ dla GW150914, oraz $20,7 M_{\odot}$ dla GW151226.

Masy końcowych czarnych dziur w obu przypadkach wynoszą $62 M_{\odot}$ i $20 M_{\odot}$. Gdzie podziała się brakująca masa? Została wyemitowana w falach grawitacyjnych. Można ją obliczyć w następujący sposób. Całkowita energia



Przykładowy ćwierk, czyli ewolucja w czasie amplitudy i częstotliwości fali grawitacyjnej emitowanej przez zacieśniający się układ podwójny.

Masy składników – czarnych dziur – w przypadku sygnału GW150914 obliczono na $36 M_{\odot}$ i $29 M_{\odot}$, a dla GW151226 na $14,2 M_{\odot}$ i $7,5 M_{\odot}$.

układu dla separacji a składa się z przyczynków od masy spoczynkowej i energii orbitalnej,

$$E = E_{\text{ms}} + E_{\text{orb}} = (m_1 + m_2) c^2 - \frac{Gm_1m_2}{2a}.$$

Zakładając dla uproszczenia, że $m_1 = m_2$, oraz że końcowa separacja $a_{\text{fin}} = 2R_s = 4Gm_1/c^2$ (w rzeczywistości układ staje się niestabilny dla nieco większych separacji) różnicę energii między stanem początkowym ($a \rightarrow \infty$) i końcowym oceniamy na 6% całkowitej masy-energii ($3,9 M_\odot$ dla GW150914 i $1,3 M_\odot$ dla GW151226, w porównaniu do $3 M_\odot$ i $1 M_\odot$ otrzymanych wyrafinowanymi metodami). Większość energii została wypromieniowana podczas przemierzania kilku ostatnich orbit oraz podczas procesu tworzenia końcowej czarnej dziury, którego nasz prosty model nie uwzględnia. W momencie największej „jasności” emitowana moc w obu przypadkach wynosiła około $10^{-3} c^5/G \approx 3 \cdot 10^{49}$ W (składniki poruszały się z prędkościami mniejszymi niż prędkość światła, w odległości większej od promienia R_s końcowej czarnej dziury). Przewyższa ona o rzędy wielkości emisję nie tylko największych dotychczas znanych kosmicznych katastrof – izotropowa emisja błysków gamma to „jedynie” 10^{47} W – ale także sumaryczną emisję wszystkich gwiazd we Wszechświecie. Szacowana gwiazdowa jasność obserwowanego Wszechświata, zawierającego około 10^{11} galaktyk podobnych do Drogi Mlecznej, z której każda składa się z około 10^{11} gwiazd podobnych do Słońca, wynosi bowiem około $4 \cdot 10^{48}$ W.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1522. Na zbiorze dodatnich liczb całkowitych określone są operacje \oplus oraz \odot , takie, że dla każdej pary a, b dodatnich liczb całkowitych zachodzi

$$\underbrace{a \oplus a \oplus \dots \oplus a}_b = a \odot b,$$

b wystąpień a

a ponadto \oplus jest łączne, \odot zaś przemienne. Czy wynika z tego, że \oplus oraz \odot to „zwykłe” dodawanie i mnożenie? Czy implikacja będzie prawdziwa, jeżeli założenie o łączności operacji \oplus zastąpimy założeniem o jej przemienności? Rozwiązanie na str. 7

M 1523. Wielokąt wypukły został podzielony odcinkami na skończoną liczbę czworokątów. Udowodnić, że co najmniej jeden z nich jest wypukły. Rozwiązanie na str. 7

M 1524. Udowodnić, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje ciąg arytmetyczny n dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest podzielna przez sumę swoich cyfr (w zapisie dziesiętnym).

Wskazówka. W rozwiązaniu można skorzystać z twierdzenia o liczbach pierwszych, na przykład używając szacowania $\pi(x) < 2x/\ln x$, prawdziwego dla dostatecznie dużych x , gdzie $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od x .

Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER

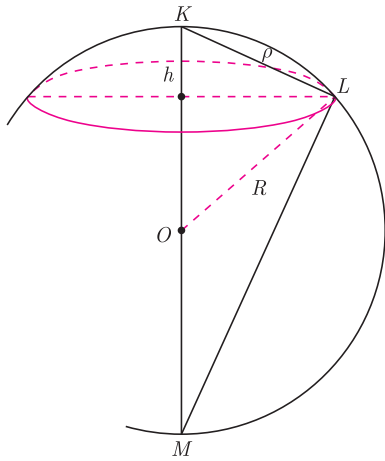
F 923. W Układzie Słonecznym, poza planetami i ich księżycami, po orbitach okołosłonecznych porusza się też wiele mniejszych odłamków skalnych: planetoid i meteoroidów. Niektóre z nich, gdy wpadają do atmosfery ziemskiej, obserwujemy jako meteory. Oszacuj, z jaką maksymalną prędkością V względem Ziemi takie odłamki mogą wchodzić do jej atmosfery. Przyjmij, że masa Słońca $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, odległość Ziemia-Słońce $R_{ZS} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, a stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².

Rozwiązanie na str. 8

F 924. Oszacuj, jaki jest minimalny promień okołosłonecznej orbity żelaznego meteoroidu, na której pozostaje on jeszcze w stanie stałym. Temperatura topnienia taenitu (minerału, z którego są zbudowane meteoroidy żelazne) $T_m = 1700$ K, promień Słońca $R_S = 7,0 \cdot 10^8$ m, temperatura powierzchni Słońca $T_S = 5800$ K, a stała Boltzmanna $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Wm⁻²K⁻⁴.

Rozwiązanie na str. 9





Rys. 1

Jak krzywizna zżera przestrzeń

Cytat z *General Relativity* Johna Archibalda Wheelera, który został umieszczony u góry marginesu artykułu Michała Bejgera, można przejrzysto zilustrować geometrycznie, gdy zajmiemy się przestrzenią dwuwymiarową.

Jak wiadomo, pole czaszy sferycznej to $2\pi Rh$, gdzie R to promień sfery, a h to wysokość czaszy. Skorzystanie ze „szkolnego” twierdzenia, że przyprostokątna w trójkącie prostokątnym jest średnią geometryczną przeciwprostokątnej i swojego rzutu na nią, pozwala na spostrzeżenie, że również na sferze pole koła dane jest wzorem πr^2 – trzeba tylko pamiętać, że owo r to *przestrzenna* odległość środka koła od brzegu, aby nie było nieporozumień, oznaczmy ją przez ρ (rys. 1). Faktycznie $2\pi Rh = \pi(2R)h = \pi\rho^2$.

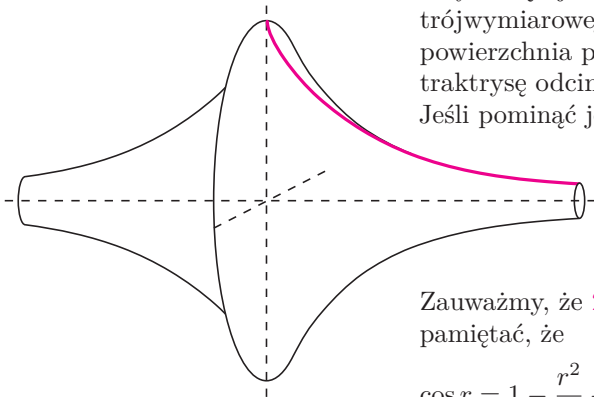
Dla mieszkańców sfery taki promień nie ma sensu. Dla nich promieniem koła na sferze jest łuk KL , oznaczmy jego długość przez r , czyli jest to kąt KOL pomnożony przez R . Ponieważ $\sphericalangle KOL = 2\sphericalangle KML$ i $\rho = 2R \sin \sphericalangle KML$, więc

$$\rho^2 = 4R^2 \sin^2 \sphericalangle KML = 2R^2(1 - \cos \sphericalangle KOL) = 2\left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)R^2,$$

zatem pole koła na sferze to $2\pi\left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)R^2$.

W szczególności pole koła o promieniu r na sferze jednostkowej to $2\pi(1 - \cos r)$.

Wracając do Wheelera, musimy rozważać nie tylko powierzchnie mające stałą krzywiznę dodatnią (jak sfera – jej krzywizna to $1/R^2$), ale i te, które mają krzywiznę ujemną. Przyzwoitych „sfer” o stałej ujemnej krzywiznie w przestrzeni trójwymiarowej nie ma. Ich najbliższą krewną jest *pseudosfera* (rys. 2), powierzchnia powstała z obrotu traktrisy (rys. 3). Długość wyznaczającego traktrysę odcinka (oznaczmy ją przez R) nazywamy promieniem pseudosfery. Jeśli pominąć jej „kant”, to pseudosfera ma wszędzie krzywiznę równą $-1/R^2$.



Rys. 2

Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego dla sfery (choć już, niestety, bez „szkolnego” wsparcia) pozwala stwierdzić, że pole koła o promieniu r na pseudosferze jednostkowej to $2\pi(\cosh r - 1)$.

Zauważmy, że $2\pi(1 - \cos r) \leq \pi r^2 \leq 2\pi(\cosh r - 1)$. W tym celu należy tylko pamiętać, że

$$\cos r = 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} - \dots \quad \text{i} \quad \cosh r = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} + \dots$$

Mamy więc dla $r > 0$

$$2\pi\left(1 - \left(1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} - \dots\right)\right) = \pi\left(r^2 - \frac{2r^4}{4!} + \frac{2r^6}{6!} - \frac{2r^8}{8!} + \dots\right) < \pi r^2$$

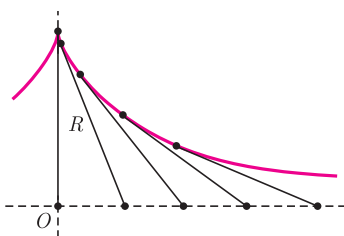
oraz

$$2\pi\left(\left(1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} + \dots\right) - 1\right) = \pi\left(r^2 + \frac{2r^4}{4!} + \frac{2r^6}{6!} + \frac{2r^8}{8!} + \dots\right) > \pi r^2.$$

Zatem koła na powierzchni o krzywiznie dodatniej mają mniejsze pole od kół o tym samym promieniu na płaszczyźnie, a koła na powierzchni o krzywiznie ujemnej – pola większe. Można to interpretować tak, że krzywizna dodatnia zżera powierzchnię, przyciągając do siebie wszystko, a krzywizna ujemna rozpycha powierzchnię, wszystko od siebie odsuwając. Fizycy lubią te oddziaływania nazywać grawitacją.

I na koniec bardzo praktyczne spostrzeżenie krawieckie. Typowa spódnica, gdy jej „nosicielka” obraca się szybko w tańcu, przybiera kształt zbliżony do czaszy. Ale gdy jest uszyta z pełnego klosza, przy szybkich obrotach ułoży się płasko na poziomie talii. Gdy wreszcie wszyjemy w nią jeszcze więcej klinów (tak się często szyje spódnice dla zespołów folklorystycznych), przy obrotach będzie falowała, a jej brzeg będzie naśladował sinusoidę. Przykład, co to znaczy za mało – a co za dużo materiału, jest trafiony, ale chyba z tym przyciąganiem to – w przypadku spódnic – jest nie całkiem tak, jak chciałby Wheeler.

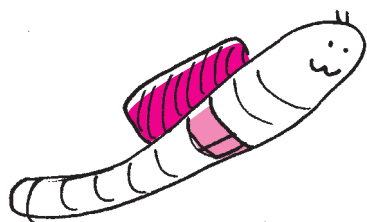
Marek KORDOS



Rys. 3. Traktrisa to krzywa, której odcinek stycznej od punktu styczności do poziomej osi ma stałą długość. Można ją praktycznie zrealizować, wędrując po prostym krawężniku i ciągnąc za sobą na sznurku zabawkę. Dla koneserów: traktrisa jest jedną z ewolwent krzywej łańcuchowej.

(Trudne) początki myśli empirycznej w trzynastowiecznej Europie

Mikołaj JĘDRUSIAK*



Nie sposób chyba wyobrazić sobie procesu rozwoju współczesnych ścisłych nauk przyrodniczych, który pozbawiony byłby etapu eksperymentalnego poznawania otaczającego świata. Obecnie uznaje się doświadczenie za równoprawny z czysto dedukcyjnym, rozumowym, etap w procesie tworzenia teorii naukowej. Eksperyment pełni także kluczową rolę przy rozstrzygnięciu i weryfikacji poprawności postawionych hipotez i teorii.

W dziejach nauki europejskiej nie był to jednak pogląd dominujący od zawsze. O metodzie naukowej, w jej zbliżonym do współczesnego kształcie, można mówić począwszy od XVI–XVII wieku. Okres wcześniejszy, od pierwszej połowy XII do początku XV wieku, zdominowany był przez scholastyczną metodę uprawiania nauk. Podejście to charakteryzowało się rozstrzygnięciem problemów za pomocą czysto spekulatywnej dyskusji, opartej na analizie tez wcześniejszych uczonych, uznanych za autorytety w danej dziedzinie. Autorytetami tymi byli na ogół, z pewnymi wyjątkami, chrześcijańscy uczeni i teologowie, starający się zaadaptować poglądy filozofów starożytnych i arabskich, zwłaszcza Platona i Arystotelesa (oraz szeregu jego komentatorów), do potrzeb ówczesnej myśli chrześcijańskiej. Nie do końca prawdziwa jest, ukuta w epoce Oświecenia, popularna opinia, że scholastyka była szkołą filozoficzną propagującą ciemnotę i zabobon. Prawdą jest natomiast istnienie w scholastyce dysproporcji między preferowanym podejściem spekulatywnym, a tym opartym na eksperymencie. Dysproporcja ta była szczególnie widoczna w przypadku ówczesnych nauk „przyrodniczych”, takich jak perspektywa, optyka, astronomia czy mechanika.

Jednym z pierwszych Europejczyków wychowanych w kulturze Zachodu, który wyraził stanowczy sprzeciw wobec pomijania argumentów natury doświadczalnej podczas dyskusji problemów z dziedziny przyrodznawstwa był Roger Bacon. Ten wspaniały nauczyciel (łac. *doctor mirabilis*) urodził się w 1219 roku, ukończył studia na uniwersytecie w Oxfordzie, gdzie później pracował naukowo (z przerwami na pobyty w Paryżu). Na uczelni zajmował się sztukami wyzwolonymi oraz wykładaniem dzieł Arystotelesa. Wstąpił do zakonu Franciszkanów, co miało umożliwić mu podjęcie niczym nieskrepowanych studiów filozoficznych. Pozostając pod silnym wpływem arabskich komentatorów Filozofa, zaczął formułować swoje innowacyjne i skrajne tezy na temat zastosowania badań eksperymentalnych i matematyki we wszystkich prawie rodzajach nauk. Przekonania Bacona zostały uznane za zbyt radykalne i w konsekwencji potępione. Sam Bacon, związany ślubem posłuszeństwa wobec zwierzchników zakonnych, spędził ostatnie dwadzieścia lat życia w areszcie domowym. Zwolniono go w 1290 roku, jednak bez rehabilitacji. Zmarł w 1292 roku.

Poglądy brata Rogera, zbliżone do współczesnego empiryzmu, zostały szczegółowo wyłożone w jego dziełach. Jego pierwsza i najobszerniejsza praca, znana jako *Dzieło Większe* (łac. *Opus Maius*, 1267 r.), została później uzupełniona kilkoma pomniejszych dziełami, niewnoszącymi już jednak większych zmian do myśli pierwotnie przedstawionej przez Bacona. Do podjęcia pracy nad dziełami z dziedziny filozofii nauki, które w zamierzeniu miały przyczynić się do reformy średniowiecznej metody naukowej, zachęcił Bacona jego przyjaciel Guy de Foulques, późniejszy Klemens IV (1265–1268 r.). Papież przychylny Baconowi w natłoku obowiązków pontyfikalnych nie znalazł jednak czasu na podjęcie szerszej dyskusji o potrzebie reformy scholastycznej szkoły uprawiania filozofii. Jego następca na Tronie Piotrowym, Grzegorz X, był przeciwnikiem programu Bacona.

Dzieło Większe zostało pomyślane jako rodzaj manifestu naukowego, zwracającego szczególną uwagę na potrzebę uprawiania nauk z zastosowaniem możliwie ścisłego rygoru rozumowania. Autor uważał, że skoro problemy

O samym Baconie wiadomo niewiele. Większość dat związanych z jego życiem jest niepewna.

Opus Maius czytałem w przekładzie Tadeusza Włodarczyka.

*doktorant, Wydział Chemii, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania M 1522.
Korzystając z danej równości oraz z przemienności \oplus , uzyskujemy

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_n = 1 \odot n = n \odot 1 = n$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej n . W połączeniu z łącznością \oplus mamy więc

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_a \oplus \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_b = \\ &= \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{a+b} = a + b \end{aligned}$$

dla dowolnych a, b , a zatem \oplus jest „zwykłym” dodawaniem. Z danej w treści zadania zależności wynika więc również, że \odot jest „zwykłym” mnożeniem.

Jeżeli zastąpimy założenie o łączności operacji \oplus założeniem o jej przemienności, odpowiedź ulegnie zmianie. Można rozważyć, na przykład, operację

$a \oplus b = \max(a, b) + 1$, $a \odot b = a + b - 1$,
które nie są „zwykłe”, a spełniają wymagane warunki.



Rozwiązanie zadania M 1523.

Dla wielokąta \mathcal{P} oznaczmy przez $S(\mathcal{P})$ lekko zmodyfikowaną sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta \mathcal{P} , mianowicie taką, w której zamiast kątów wklęsłych występują kąty dopełniające je do pełnych ze znakiem „-”. Jeżeli więc \mathcal{P} jest n -kątem o dokładnie k wklęsłych kątach wewnętrznych, to definiujemy

$$S(\mathcal{P}) = (n - 2) \cdot 180^\circ - k \cdot 360^\circ.$$

Przypuśćmy, że wielokąt wypukły \mathcal{P} jest podzielony odcinkami na wielokąty $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ o rozłącznych wnętrzach. Wierzchołkami podziału nazwijmy te wierzchołki wielokątów \mathcal{P}_i , które nie są wierzchołkami wielokąta \mathcal{P} . Wówczas

$$\sum_{i=1}^k S(\mathcal{P}_i) = S(\mathcal{P}) + a \cdot 360^\circ + b \cdot 180^\circ,$$

gdzie a jest liczbą wierzchołków podziału wokół których znajdują się tylko kąty wypukłe wielokątów \mathcal{P}_i , b zaś jest liczbą wierzchołków podziału leżących na bokach wielokąta \mathcal{P} (w przypadku wierzchołków podziału, będących wierzchołkami pewnych kątów wklęsłych wielokątów \mathcal{P}_i , „wychodzimy na zero”, zgodnie z definicją S).

W szczególności z powyższej równości wynika, że

$$S(\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^k S(\mathcal{P}_i).$$

Pozostaje zauważyć, że gdyby wszystkie wielokąty \mathcal{P}_i były czworokątami wklęsłymi, to $S(\mathcal{P}_i) = 0$ dla każdego i , wobec czego

$$\begin{aligned} 0 &< (n - 2) \cdot 180^\circ = S(\mathcal{P}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k S(\mathcal{P}_i) = 0, \end{aligned}$$

co nie może mieć miejsca.

z dziedziny optyki, astronomii oraz, do pewnego stopnia, mechaniki i hydrostatyki można z powodzeniem rozwiązywać za pomocą czysto logicznej, zmatematyzowanej obróbki zebranych uprzednio danych eksperymentalnych, to, być może, jest to uniwersalna metoda prowadzenia wszelkich badań naukowych. Bacon sądził, że reforma systemu nauczania i uprawiania nauki konieczna jest do tego, aby łacinnicy zdołali doścignąć poziom myśli arabskiej. Swoje poglądy starał się przedstawić w możliwie stonowanej formie, z podkreśleniem poszanowania dla tradycji i zwróceniem uwagi na szereg korzyści dla Kościoła i świata świeckiego, które mogły wyniknąć z wprowadzenia proponowanych reform. Zachowawczy język nie był jednak w stanie zamaskować rewolucyjnego charakteru jego postulatów.

Rozdział pierwszy *Dzieła* rozwija te myśli, zaczynając od podstaw. Podane zostają przykłady błędów rozumowania, których można uniknąć przez zachowanie pełnej konsekwencji, logiki i krytycyzmu poznawczego w trakcie prowadzenia wywodu. Zdaniem Bacona istnieje kilka głównych przyczyn błędzenia, jak na przykład: poleganie na niesprawdzonych źródłach wiedzy (autorytetach), nawyki i osobiste przekonania badacza czy ukrywanie własnej ignorancji pod pozorem wiedzy i skomplikowania teorii. Już pierwsze akapity *Dzieła*, skierowane jawnie przeciwko metodzie scholastycznej, przysporzyły Baconowi licznych wrogów w gronie ówczesnych uczonych. Nawet ostrożnie prowadzona krytyka wobec nadmiernego zaufania pokładanego w autorytetach nie mogła spodobać się dostojnikom Kościoła. Autor wymienia szereg autorytetów godnych, jego zdaniem, zaufania. Obok św. Augustyna czy św. Izydora z Sewilli figurowali także Arystoteles i liczni uczeni arabscy, jak Awicenna, Al-Farabi, Alhazen czy Albumazar. Powoływanie się na uczonych arabskich wymagało pewnej odwagi, gdyż głoszone przez nich teorie w zależności od okresu naprzemiennie znajdowały się na cenzurowanym bądź wracały do łask. Bacon pozbawiony opieki możnego protektora, który zmarł niebawem po ogłoszeniu tych krytycznych wobec systemu prowadzenia średniowiecznej nauki tez, szybko popadł w niełaskę przełożonych.

Rozdział drugi traktuje o bliskim związku logiki z filozofią oraz filozofii z teologią. Nauki te były uważane w średniowieczu za ścisłe, stąd też postulat Bacona zwiększenia roli czystej logiki w dociekaniach natury teologicznej. Autor podaje, między innymi, przykłady zastosowania sylogizmów logicznych do udowadniania niektórych przymiotów Boga.

Rozdział trzeci podnosi, niezmiennie istotne, zagadnienie znajomości języków obcych i korzyści z tego płynących. Średniowieczni uczeni, pragnący zapoznać się z dziełami antycznych filozofów, musieli polegać na łacińskich przekładach tekstów arabskich z oryginalnej greki. Bacon zauważał, że znajomość języka greckiego (sam znał francuski, angielski, łacinę, grekę i częściowo hebrajski) pozwoli uniknąć powstawania błędów przekładu, co było szczególnie istotne w odniesieniu np. do tłumaczeń Pisma Świętego. Za istotną uważał także znajomość nie tyle samego języka, słownictwa, co gramatyki. Jej znajomość jest niezbędna, aby w tekście naukowym, na poziomie czysto językowym, nie pomylić np. skutku z przyczyną. Autor zwraca uwagę na korzyści płynące ze znajomości języków obcych także w sferach niezwiązanych z nauką czy teologią. Podaje współczesny mu przykład nieudanej misji dyplomatycznej, która miała doprowadzić do zawiązania sojuszu między Frankami (ogólnie Krzyżowcami) a Mongołami, wymierzonego przeciwko Arabom. Zabiegi nie powiodły się w pewnej mierze z powodu bariery językowej. Łacinnicy nie byli bowiem w stanie porozumieć się z wysłannikami chana w żadnym znanym sobie języku.

Rozdział czwarty *Dzieła* omawia zagadnienia związane z matematyką „czystą” i jej zastosowaniami w naukach. Bacon uznaje matematykę, a więc logikę, geometrię i arytmetykę, za najszlachetniejszą z nauk. Ten najobszerniejszy rozdział *Dzieła* (250 stron w wydaniu polskim, cała rozprawa liczy ich 700) podaje wiele przykładów zastosowania matematyki w dociekaniach filozoficznych i przyrodniczych. Autor podaje kilka dowodów kulistości Ziemi



Rozwiązanie zadania M 1524.

Niech m będzie dodatnią liczbą całkowitą. Zauważmy, że każda mniejsza od 10^m wielokrotność liczby

$$N(m) = 9 \cdot \text{NWW}(1, 2, 3, \dots, m)$$

jest podzielna przez sumę swoich cyfr. Rzeczywiście, suma cyfr każdej takiej liczby jest nie większa od $9m$ i podzielna przez 9, więc jest dzielnikiem liczby $N(m)$, a tym bardziej dowolnej jej wielokrotności.

Wystarczy więc udowodnić, że dla każdego $n \geq 1$ można dobrać takie m , aby spełniona była nierówność

$$n < 10^m / N(m),$$

a szukany ciąg arytmetyczny będą wówczas tworzyły liczby $kN(m)$ dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Zauważmy, że każda liczba pierwsza $p \leq m$ wchodzi do rozkładu liczby $\text{NWW}(1, 2, 3, \dots, m)$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem $\lfloor \log_p m \rfloor$, a zatem nie większym od $\log_p m$. Wobec tego

$$N(m)/9 \leq \prod_{p \leq m} p^{\log_p m} = m^{\pi(m)} < m^{2m/\ln m} = e^{2m},$$

gdzie mnożenie przebiega liczby pierwsze p oraz skorzystaliśmy z nierówności zasugerowanej we wskazówce do zadania (prawdziwej dla $m \geq M_1$, gdzie M_1 jest pewną dodatnią liczbą całkowitą).

Ponieważ $10/e^2 > 1$, więc $(10/e^2)^{M_2} > 9n$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej M_2 . Do zakończenia rozwiązania wystarczy przyjąć $m = \max\{M_1, M_2\}$.

Uwaga. Uważny Czytelnik zauważy, że zaprezentowane rozumowanie (z adekwatnym szacowaniem płynącym z twierdzenia o liczbach pierwszych) można przenieść na przypadek sum cyfr rozważanych w zapisie w systemie pozycyjnym o dowolnej podstawie $d \geq 3$. Nie rozstrzyga ono jednak, czy istnieją dowolne długie ciągi arytmetyczne liczb naturalnych, które są podzielne przez sumę swoich cyfr w zapisie dwójkowym.



Rozwiązanie zadania F 923.

Maksymalna prędkość z jaką odłamki skalne mogą poruszać się po orbitach okołosłonecznych nie przekracza prędkości ucieczki od przyciągania Słońca. Prędkość ucieczki w odległości równej odległości Ziemia-Słońce jest równa $\sqrt{2} \cdot v_Z$, gdzie v_Z to prędkość, z jaką Ziemia obiega Słońce ($v_Z^2 = GM_S/R_{ZS}$). Maksymalna prędkość meteoroid-Ziemia wynosi więc $V = (\sqrt{2} + 1)v_Z$. Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $V = 72 \text{ km/s}$.

(wbrew popularnemu pogładowi średniowieczni uczeni nie uważali jej za płaską). Dowody te mają naturę geometryczną, wychodzą jednak z przesłanek empirycznych. Na przykład, kluczowe w jednym z rozumowań jest spostrzeżenie, że woda zawsze ścieka w dół. Inne rozumowanie opiera się natomiast na obserwacji, że oddalające się na morzu statki znikają za horyzontem.

W sporze o istnienie atomów rozumianych jako niepodzielne fragmenty materii Bacon zajmuje stanowisko zapożyczone od Arystotelesa. Rozpatruje on kwadrat złożony z małych kulek. Zauważa, że w takim przypadku bok kwadratu ma tyle samo atomów, co jego przekątna. Sprzeczności, a więc i nieistnienia atomów upatruje w znanym twierdzeniu, mówiącym o niewspółmierności długości przekątnej kwadratu do długości jego boku.

W jednym z przykładów Bacon rozpatruje kwestię, czy przeciwległe ściany katedry mogą być idealnie równoległe. Najpierw zauważa, że ściana, która nie jest prostopadła do płaszczyzny podłoża, musi przewrócić się pod własnym ciężarem. Następnie z faktu kulistości Ziemi wysnuwa wniosek, że ściany nie mogą być równoległe. Zauważa, że odchylenie od równoległości będzie tym większe, im większa będzie odległość między ścianami katedry.

Jeszcze bardziej pomysłowe rozumowanie, oparte na założeniu kulistości Ziemi, dotyczy pytania o pojemność naczynia umieszczonego na różnych wysokościach. Autor rozpatruje talerz wypełniony po brzegi wodą. Najpierw naczynie to jest postawione w piwnicy, potem na szczycie wieży. Pytanie, w którym przypadku do talerza zmieści się więcej wody, Bacon rozstrzyga następująco. Woda jest przyciągana przez Ziemię – o ile zajdzie taka możliwość, zawsze będzie więc ściekać na dół. Z tego powodu odległość powierzchni lustra cieczy od środka Ziemi będzie w każdym punkcie lustra taka sama. Kształt menisku będzie więc wyznaczony przez krzywiznę Ziemi i średnicę talerza. Z faktu że, jak byśmy to dzisiaj powiedzieli, pole odcinka kołowego, wyznaczonego przez odcinek o danej długości, jest tym większe, im mniejszy jest promień koła, brat Roger wnioskuje, że w talerzu postawionym w piwnicy zmieści się więcej wody. Mimo że poglądy Bacona na temat natury menisku są w ogólności błędne, to nie można odmówić temu rozumowaniu pewnego uroku.

W dalszej części rozdziału czwartego omówione są zastosowania matematyki w teologii (chodzi głównie o reformę kalendarza i wyznaczanie chronologii wydarzeń biblijnych), astronomii, astrologii i geografii (zagadnienie kreślenia map). Zawarty jest też opis geografii znanego świata oraz pobieżnej historii omawianych ziem.

Rozdział piąty jest w zasadzie kompletnym studium klasycznej optyki. Przedstawione są informacje dotyczące działania zwierciadeł i soczewek, opisane są zjawiska załamania i odbicia światła. Zaprezentowane są także rozważania na temat natury światła. Zawarty jest szczegółowy opis budowy oka oraz połączeń nerwowych oka z mózgiem. Jasno wypowiedziany jest pogląd, że proces widzenia zachodzi nie w oku, lecz w mózgu. Autor informacje z dziedziny optyki czerpie głównie od uczonych arabskich, takich jak Al-Kindi czy wspomniany Alhazen.

Rozdział szósty zawiera zestawienie znanych w epoce faktów z dziedziny nauk eksperymentalnych, takich jak alchemia, astronomia czy mechanika. Bacon wielokrotnie podkreśla tu swoją tezę na temat istotnego udziału badań eksperymentalnych w procesie poznawania otaczającego świata. Uznaje on, że eksperyment jest narzędziem rozstrzygającym o poprawności postawionej teorii.

Zawarte zostały tu opisy eksperymentów z magnezem, spalającym zwierciadłem oraz pierwsza w Europie relacja dotycząca przywiezionych prawdopodobnie z Chin fajerwerków. Rozdział ten jest szczególnie znany ze względu na zdawkowe, lecz w XIII wieku rewolucyjne, „przepowiednie” Bacona – uznał on bowiem, że w przyszłości możliwe będzie skonstruowanie przemyślnego układu soczewek, pozwalającego dowolnie przybliżać obserwowane obiekty (mikroskop i teleskop). Rozważał także możliwość skonstruowania soczewki dostosowanej do potrzeb konkretnej osoby (okulary – nieznane wtedy w Europie). W dziedzinie

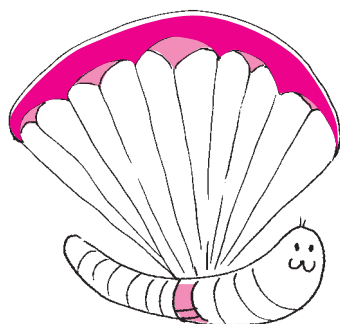


Rozwiązanie zadania F 924.

Strumień mocy promieniowania ciepłego pochodzącego od Słońca w odległości D od jego środka wynosi: $W = R_S^2 \sigma T_S^4 / D^2$. Dla uproszczenia dalszych obliczeń przyjmijmy, że możemy pominąć kątowny rozmiar Słońca. Wówczas ciało o promieniu r absorbuje moc $P = \pi r^2 W$ i, po osiągnięciu temperatury równowagi T , tę samą moc emituje. Mamy więc $P = 4\pi r^2 \sigma T^4$. Meteoroid pozostaje w stanie stałym, gdy $T < T_m$. Oznacza to, że odległość od Słońca stałych meteoroidów żelaznych musi spełniać warunek:

$$D > \frac{R_S}{2} \frac{T_S^2}{T_m^2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $D > 5,82 R_S = 4,07 \cdot 10^9$ m. Nasze oszacowanie jest zaniżone, gdyż w tak małej odległości od Słońca poprawka wynikająca z faktu, że jest ono źródłem rozciąglwym jest już dość znaczna – rozmiary kątowne Słońca „widziane” przez meteoroid wynoszą bowiem wówczas około 20° .



optyki dysponował on konkretnymi podstawami teoretycznymi, pozwalającymi uwiarygodnić przedstawione prognozy. Przewidywał skonstruowanie funkcjonalnej maszyny parowej oraz maszyny latającej. Należy zaznaczyć, że jego rozważania na ten temat miały charakter czysto hipotetyczny, życzeniowy. Prawdopodobnie zetknął się on z pracami opisującymi „maszyny parowe” Herona z Aleksandrii i ich proste zastosowania, jednak nie był inżynierem i nie był w stanie podać bardziej konkretnych rozwiązań, tak jak, na przykład, uczynił to później Leonardo da Vinci.

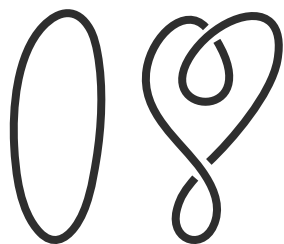
Niekompletny rozdział siódmy, ostatni, zawiera zestawienie refleksji autora na temat etyki, moralności i prawa.

Postać Bacona, zarówno w epoce, jak i współcześnie, powodowała szereg kontrowersji. Jego szeroka znajomość dzieł arabskich i greckich uczonych, w połączeniu z prowadzeniem badań eksperymentalnych i nieortodoksyjnymi przekonaniami, przysporzyła mu opinii czarownika. Współcześnie istnieje teoria spiskowa, przypisująca Baconowi autorstwo tajemniczego manuskryptu Voynicha.

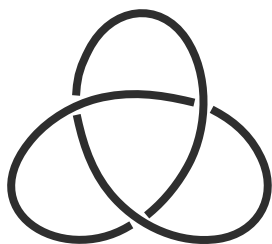
Mimo że obecnie podaje się w wątpliwość, czy Bacon osobiście przeprowadzał opisywane przez siebie eksperymenty, to pytanie, czy brat Roger był istotnie pierwszym empirykiem w Europie, czy raczej wszechstronnie wykształconym erudytą, jest z punktu widzenia historii nauki drugorzędne. Niewątpliwie był on pierwszym uczonym średniowiecznej Europy, który tak stanowczo wyraził swoje przekonania na temat potrzeby oparcia nauk w jak największym stopniu na logicznym rozumowaniu, wspartym, jeśli to tylko możliwe, na badaniach doświadczalnych. Jego życiorys pokazuje, jak trudne do przyjęcia w XIII wieku były takie poglądy. Ostatecznie metoda prowadzenia badań naukowych w kształcie zbliżonym do zapostulowanego przez Bacona, a więc i w kształcie zbliżonym do współczesnego, została przyjęta kilkaset lat później, na przełomie XVI i XVII wieku.

Zadanie dla wytrwałych i dociekliwych

Pętla na rysunku 1 przedstawiają ten sam sznurek. Rysunek 2 już tym samym nie jest – jakkolwiek długo i wytrwale nie bawilibyśmy się zwykłą pętlą, bez jej uszczerbku na zdrowiu (rozerwanie i sklejenie), pętli z rysunku 1 nie otrzymamy. Splot z rysunku 3 ma tę cechę, że trzy ogniwa są splecione, ale dowolne dwa już nie. Inaczej: jeżeli rozetniemy którekolwiek z ogniw, to pozostałe będą niesplecione. Splot z rysunku 4 ma dokładnie tę samą cechę. Przedstawiony sposób zaplatania moglibyśmy powtórzyć dla dowolnej liczby pętli, np. 10 – w dalszym ciągu po rozcięciu jednego, dowolnego ogniwa pozostałe będą niesplecione. Moglibyśmy ten sposób powtórzyć również dla 3 pętli – czy otrzymamy wtedy ten sam co na rysunku 3?



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Splot Boromeuszy



Rys. 4. ang. *Brunnian link*

Drogi Czytelniku, jeżeli potrafisz nas (Redakcję) przekonać, że trzy ogniwa splecione metodą z rysunku 4 są tym samym co splot Boromeuszy, albo, że tym samym nie są, z radością opublikujemy Twoją przekonującą odpowiedź w *Delcie*. Jak dotąd żadnemu śmiałkowi się to nie udało...

Pierwiastkowa dekompozycja zapytań

Krzysztof PIECUCH*

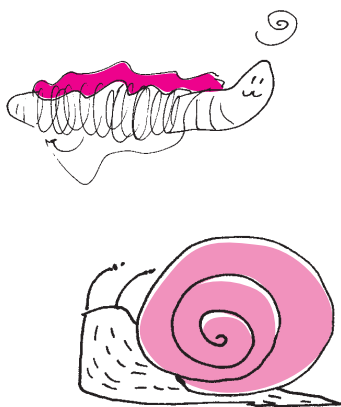
W niniejszym artykule chciałbym przedstawić Czytelnikom technikę, która może okazać się pomocna przy rozwiązywaniu różnych problemów informatycznych. Rozważmy przykładowe zadanie. Dana jest N -elementowa tablica T liczb naturalnych z przedziału $[0, N)$ oraz M zapytań postaci (a, b) , gdzie $0 \leq a \leq b < N$. Dla każdego zapytania należy odpowiedzieć na pytanie ile różnych elementów ma podtablica $T[a..b]$. Można łatwo napisać algorytm, który dla zapytania znajduje odpowiedź w czasie $O(N)$, a więc dla M zapytań działa w czasie $O(NM)$ (kod źródłowy 1).

```
Function zapytanie(a, b)
  answer = 0;
  cnt[N] = {0};
  for (i = a; i <= b; i++) do
    if (cnt[T[i]] == 0) then
      answer++;
      cnt[T[i]]++;
  return answer;
```

Kod źródłowy 1

```
Function dodaj(i)
  if (cnt[T[i]] == 0) then
    answer++;
    cnt[T[i]]++;
Function usun(i)
  if (cnt[T[i]] == 1) then
    answer--;
    cnt[T[i]]--;
Function zapytanie(a, b)
  while (stare_a > a) do
    dodaj(--stare_a);
  while (stare_a < a) do
    usun(stare_a++);
  while (stare_b < b) do
    dodaj(++stare_b);
  while (stare_b > b) do
    usun(stare_b--);
  return answer;
```

Kod źródłowy 2



Rozważmy jednak inne podejście do problemu. Zapamiętajmy wynik poprzedniego zapytania i spróbujmy zmodyfikować go tak, aby pasował do kolejnego (kod źródłowy 2).

Nasz algorytm wciąż rozwiązuje problem w czasie $O(NM)$, gdyż przejście z jednego zapytania do następnego może zająć $O(N)$ czasu. Jednak gdybyśmy zagwarantowali, że kolejne zapytania będą podobne, algorytm mógłby działać szybciej. Rozważmy problem, w którym znamy na wstępie wszystkie zapytania. Możemy wybrać kolejność w jakiej będziemy na nie odpowiadać. Załóżmy dla uproszczenia, że N jest kwadratem liczby naturalnej. Okazuje się, że istnieje kolejność, która gwarantuje, że nasz algorytm wykona jedynie $O((M + N)\sqrt{N})$ operacji.

Podzielmy przedział $[0, N)$ na \sqrt{N} części:

$$[0, \sqrt{N}), [\sqrt{N}, 2\sqrt{N}), \dots, [(\sqrt{N} - 1)\sqrt{N}, N).$$

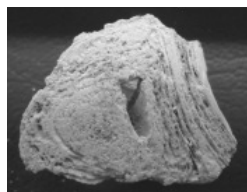
Każdy z tych przedziałów jest rozmiaru \sqrt{N} . Teraz utwórzmy kubełek dla każdego z nich. Dla każdego zapytania (a, b) patrzymy do którego z tych kubełków wpada a i umieszczamy to zapytanie w odpowiednim kubełku. Następnie w każdym kubełku sortujemy zapytania rosnąco po wartościach b . Przeglądamy teraz kubełki po kolei i odpowiadamy na zapytania zgodnie z ustalonym porządkiem.

Obliczmy złożoność naszego algorytmu. Rozważmy dwie sytuacje. W pierwszej z nich oba zapytania należą do tego samego kubełka. W takiej sytuacji $stare_a$ oraz a należą do tego samego przedziału. Nie wykonamy zatem więcej niż $O(\sqrt{N})$ operacji `dodaj` i `usun` w trakcie zmiany $stare_a$ na a . Jeśli chodzi o wartości $stare_b$ oraz b to są one w ramach jednego kubełka posortowane rosnąco. Oznacza to, że jeśli dwa zapytania są w jednym kubełku, to będziemy wykonywać jedynie operację `dodaj`. A więc dla ustalonego kubełka sumarycznie wystarczy wykonać jedynie $O(N)$ takich operacji przy zmianach $stare_b$ na b . Rozważmy teraz sytuację w której zapytania należą do różnych kubełków. Jak powiedzieliśmy wcześniej, w najgorszym przypadku wykonamy $O(N)$ operacji między dwoma zapytaniami. Jednak taka sytuacja zdarzy się co najwyżej $O(\sqrt{N})$ razy, bo tylko tyle mamy kubełków. A więc sumarycznie nasz algorytm zadziała w czasie

$$O(M\sqrt{N} + N\sqrt{N} + N\sqrt{N}) = O((M + N)\sqrt{N}).$$

A teraz dwa ćwiczenia dla Drogiego Czytelnika. Pierwsze jest następujące: mając daną tablicę $T[0..N - 1]$ oraz M zapytań (a, b) należy dla każdego zapytania odpowiedzieć ile inwersji znajduje się w podtablicy $T[a..b]$. Inwersją w tablicy T nazywamy taką parę liczb (i, j) , że $i < j$ oraz $T[i] > T[j]$. Drugie zaś brzmi: mając dany graf $G = (V, E)$ oraz tablicę jego krawędzi T , należy dla każdego zapytania (a, b) odpowiedzieć na pytanie ile spójnych składowych ma graf obcięty do krawędzi $T[a..b]$. Każde z tych zadań można rozwiązać za pomocą opisanej w artykule techniki, nazywanej pierwiastkową dekompozycją zapytań, jednakże wymagają one dodatkowego pomysłu. Mam nadzieję, że rozwiązywanie tych zadań przyniesie Czytelnikom dużo frajdy.

*doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski



Paleomikrobiologia i nie tylko

Ułożyli ją na wznak, ręce skrzyżowane. Już niedługo miała rodzić synka (choć płci nie znała). Zdarzyło się to w wiosce obok miasta Troja, 800 lat temu.

Archeolodzy, uzbrojeni w zezwolenia lokalnych władz i komisji bioetycznej otworzyli w 2005 roku grób numer 24 położony wśród kilkudziesięciu innych na niegdyś wiejskim cmentarzu. I zajrzeli, co się w nim zachowało. Wiek zawartości grobowców oznaczono metodą radioaktywnego węgla na początek XIII stulecia.

Szczątki 30-letniej kobiety (średni wiek życia kobiet w tym rejonie i w tej epoce ocenia się na 32 lata) były w dobrym stanie – szkielet prawie nieuszkodzony. Wzrost 159 cm. Mitochondrialny DNA kobiety, wyizolowany z kości łokciowej, wskazywał na jej pochodzenie z Bliskiego Wschodu lub Kaukazu. Analiza kolagenu kości sugerowała przeważającą roślinną dietę. Poniżej linii żeber znaleziono dziwne, twarde, zmineralizowane kule wielkości 2–3 cm.

Wszystko, co się zachowało, podlegało dalszym analizom. Kule składały się z nawarstwionych złogów wapniowo-fosforanowych i założono, że przemianom tym podlegały ropnie chorej po jej śmierci. Warunki panujące w grobowcu pozwoliły na zachowanie fragmentów DNA. Dokładna analiza wskazała na obecność DNA kobiety (24–48% preparatu), chromosomu Y (zapewne płodu) i genomów bakterii: *Staphylococcus saprophyticus* (gronkowiec) (37–66%) i *Gardenerella vaginalis* (5–7%). Te zakażenia sugerują, że kobieta cierpiała na zapalenie błon płodowych i łożyska oraz towarzyszącą chorobę nerek i pęcherza, które stały się przyczyną jej śmierci. DNA gronkowców z grobu było tak dużo, że udało się odtworzyć cały genom i stwierdzić, że współcześnie bakterie tego rodzaju występują jedynie u bydła. Odkrywczy, komentując ten fakt, stwierdzają, że w owych czasach ludzie na wsi żyli w bezpośrednim kontakcie z udomowionymi zwierzętami, i że widocznie dla dalszej ewolucji tych bakterii środowisko zwierzęce okazało się bardziej sprzyjające.

Długie fragmenty odtworzonego genomu *Gardenerella* okazały się bardzo podobne do oznaczanych klinicznie obecnie w grupie względnych beztlenowych ziarniaków gram-zmiennych. W jednej z tych bakterii występowała dodatkowo mała dodatkowa cząsteczka DNA zwana plazmidem. Co zabawne, niósł on gen, który – gdyby w XIII wieku istniała penicylina – czyniłby bakterię niewrażliwą na antybiotyk. W mineralnych kulach znaleziono pod skaningowym mikroskopem kuleczki o średnicy 1–2 μm (wielkość potencjalnych komórek bakterii).

Dane przedstawione tu pochodzą z publikacji z 2017 roku. Dwanaście lat trwała praca wykonana w dużych zespołach o różnej specjalizacji, nim ogłoszono wyniki badań. Wszystkie fakty trzeba było skonfrontować, potwierdzić tezy, wielokrotnie powtórzyć oznaczenia. Współczesne nauki przyrodnicze nie polegają na opisywaniu błysku geniuszu od razu, kolejnego dnia. Na uwagę zasługują również wzajemne zależności między różnymi naukami, wykorzystane wzorowo w cytowanej pracy. Wzięło w niej udział 20 badaczy z 15 ośrodków naukowych – Włoch, USA, Japonii i innych. Sięgnięto do wiedzy z zakresu genetyki (sekwencjonowanie, analiza porównawcza sekwencji), fizjologii człowieka, oznaczania wieku znalezisk, demograficznej historii regionu, chemii i biochemii trwania szczątków żywych istot, dietetyki, rozpowszechnienia chorób, mikrobiologii lekarskiej, podstaw bioetyki. Przyroda jest różnorodna i wewnętrznie spleciona.

Te uwagi dedykuję rządzącym edukatorom popierającym szkodliwą tendencję do dzielenia wiedzy ludzkiej na niezależne w ich umysłach gałęzie. Tuwim nazywał to „straszny mieszczaństwo”:

*A patrząc – widzą wszystko oddzielnie,
Że dom... że Stasiek... że koń... że drzewo...*

Magdalena FIKUS



mała delta

Fraktale z zer i jedynek

Tradycyjnie fraktale kojarzą nam się (często) z ładnymi rysunkami figur, które wykazują pewien zestaw cech odróżniających je od zwykłych obiektów. Nie precyzujemy tutaj uniwersalnego zestawu, gdyż sama definicja fraktala nie jest uniwersalna. W większości sytuacji chcemy, aby fraktal miał złożoną strukturę, spełniał pewne cechy samopodobieństwa oraz by nie dało się go zbyt prosto opisać geometrycznie. Mimo to często można go opisać względnie prosto pewnymi regułami rekurencyjnymi wykonywanymi na obiekcie startowym (lub zestawie takich obiektów).

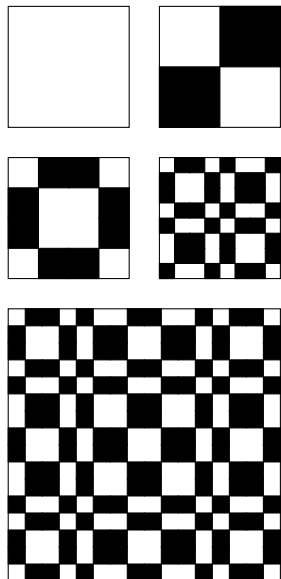
Rozważmy nieskończony ciąg $(x_n)_{n \geq 0}$, którego elementami są skończone ciągi zer i jedynek. Wprowadzamy operację negatywu skończonego ciągu y . Operacja ta dokonuje zamiany zer na jedynki oraz jedynki na zera w ciągu y , a jej wynik oznaczamy przez \bar{y} . Jeśli więc $y = 01010$, to $\bar{y} = 10101$. Definiujemy rekurencyjnie ciąg $(x_n)_{n \geq 0}$: niech $x_0 = 0$ oraz $x_{n+1} = x_n \bar{x}_n$. A zatem $x_1 = 01$, $x_2 = 0110$, $x_3 = 01101001$ i tak dalej. Ciąg *Thuego–Morse’a* nazwiemy nieskończony ciąg $x = x_0 \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots$, który ma tę własność, że każdy x_i jest jego prefiksem:

$x = 0110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010110 \dots$

Definicja ciągu $(x_n)_{n \geq 0}$ pozwala na wygenerowanie ciekawego obrazka przez odpowiednie kolorowanie pól macierzy M_n o wymiarach $2^n \times 2^n$ (elementy macierzy rozmieszczamy w kwadracie 1×1). Mianowicie macierz M_n wypełniamy cyframi ciągu x_{2^n} . Zaczynając od lewego górnego rogu, wypełniamy kolejne komórki, przesuwając się w prawo, a następnie, po wypełnieniu pierwszego wiersza przechodzimy niżej itd. Zauważmy, że kolumna najbardziej z lewej ma taką samą zawartość jak najwyższy wiersz. Podobnie druga kolumna od lewej ma taką samą zawartość jak drugi wiersz od góry itd. Pola z cyfrą zero malujemy na biało, te z jedynką na czarno. Otrzymujemy w ten sposób ciąg biało-czarnych szachownic takich, że cała szachownica M_n jest podszachownicą M_{n+1} . Dokładniej: szachownica M_{n+1} zawiera dwie kopie szachownicy M_n oraz dwa jej negatywy (pola czarne stają się białe i odwrotnie).

Rozważmy szachownice narysowane dla dużych, coraz większych n , pokolorujmy nawet w ten sposób całą ćwiartkę płaszczyzny podzieloną na jednostkowe kwadraty. Pierwszy wiersz ćwiartki zawiera cały ciąg Thuego–Morse’a, tzn. jest pokolorowany zgodnie z jego oznaczeniami, podobnie pierwsza kolumna. Takie nieskończone pokolorowanie ma wiele ciekawych cech. Dla przykładu usuńmy z naszej ćwiartki drugi, czwarty i każdy parzysty wiersz, to samo zróbmy z kolumnami. Resztę sklejmy w całość (to nie będzie trudne, elementy będą do siebie pasować). Co powstało? Otrzymaliśmy kolorowaną identyczną z początkową.

Weźmy na ćwiartce kwadrat o $2^k \times 2^k$ polach ($k > 0$), jego identyczną kopię można znaleźć w wielu, a nawet bardzo wielu, innych miejscach. Zachęcamy do zabawy w szukanie zależności między współrzędnymi lewego górnego rogu kwadratu i długością jego krawędzi a kolorami wierzchołków wszystkich jego kopii.

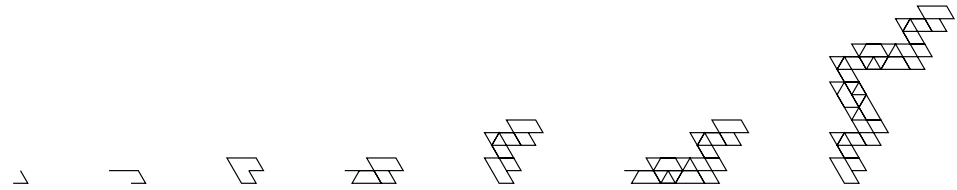
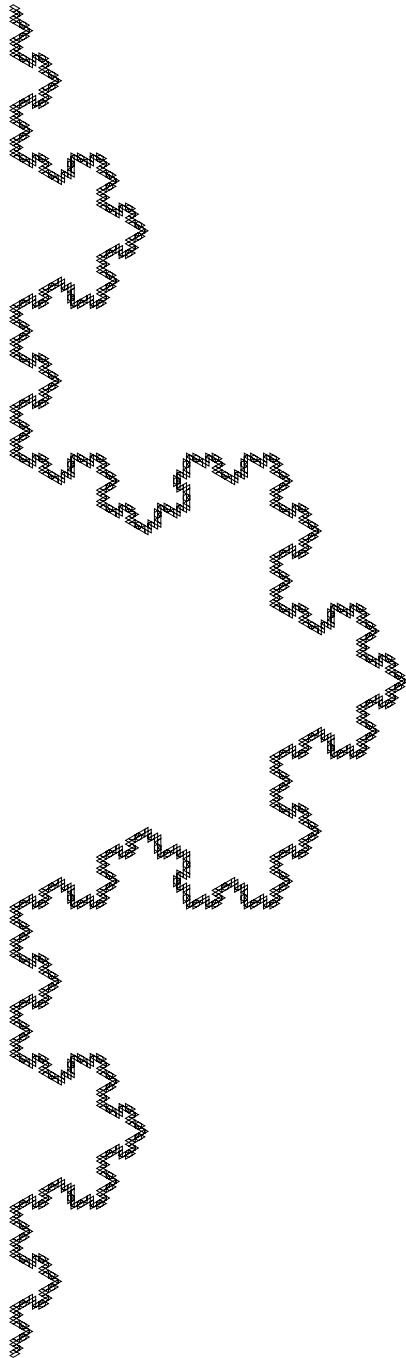


Rozważmy operację, która z ćwiartki układu współrzędnych pokolorowanej według opisanej zasady co nieco usuwa. Pozbądźmy się wszystkich wierszy oraz kolumn o numerach będących wielokrotnościami jakiejś ustalonej liczby naturalnej n . Czy dla $n \neq 2$ to, co nie zostanie usunięte, może utworzyć po sklejeniu kopię całej ćwiartki? A gdybyśmy usuwali nie tylko wiersze i kolumny o numerach wielokrotności n , ale również wszystkie te, których numery są od nich większe o mniej niż ustalone m ? Dla jakich par liczb m, n jest to możliwe?

Żółw to zwierzę nieco powolne, ale rozumne i gdy określi się dla niego ciąg instrukcji, bezbłędnie je wykona. Na polecenie „0” żółw reaguje ruchem o jedną jednostkę do przodu, na polecenie „1” obraca się w miejscu o 60° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Naszą trasę (a raczej żółwia) nazwiemy grafiką żółwia.

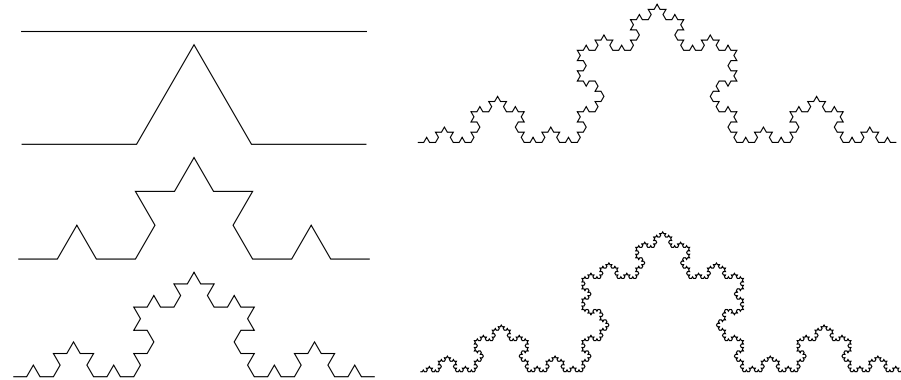
Co się stanie, gdy polecenia będą kolejnymi cyframi ciągu Thuego–Morse’a? Przyjmijmy, że dla ustalonego n czytamy wszystkie cyfry ciągu x_n i generujemy grafikę żółwia. Jak będzie wyglądać rysunek ciągu x_0 , x_1 , x_4 lub też x_{10} ? Czy wraz ze wzrostem indeksu n rysunek będzie coraz bardziej chaotyczny, czy może zaobserwujemy jakiś porządek?

Zacznijmy od kilku prostych obrazków dla $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.



Prawdopodobnie nie jesteśmy jeszcze w stanie dostrzec schematu lub podobieństwa. Zróbmy rysunek dużo większy, to jest dla $n = 14$ (rysunek na marginesie jest obrócony w stosunku do wcześniejszych przykładów).

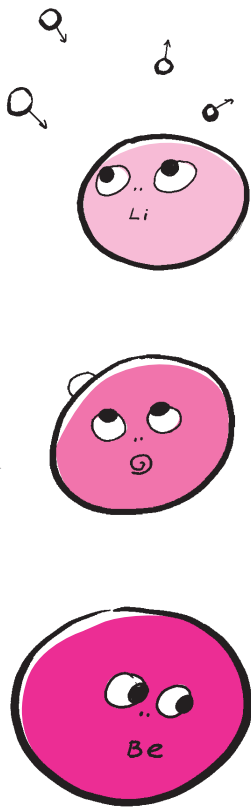
Czytelnik znający podstawowe fraktale dostrzeże tutaj zarys krzywej Kocha, której schemat generowania kolejnych przybliżeń (niemający na oko związku z ciągiem Thuego–Morse’a) przedstawiamy poniżej.



Nie jest to przypadek. Okazuje się bowiem, że im większe n , tym wierniej grafika żółwia dla naszego ciągu odtwarza krzywą Kocha. Należy jednak zaznaczyć, iż nie będzie to idealna i dokładna kopia. Otrzymany rysunek jest jedynie aproksymacją, ale wysoce porządną. Kolejne przybliżenia zbiegają bowiem jednostajnie (po odpowiednim skalowaniu i obracaniu) do prawdziwej krzywej Kocha (czyli „ostatniego” obrazka, jaki należałoby narysować w nieskończonym ciągu powyższych krzywych). Co to znaczy „jednostajnie”? Ciąg krzywych aproksymuje jednostajnie inną, gdy dla dowolnego błędu, który ustalimy (dowolnie małego, o więcej nie chcemy się mylić) od pewnego indeksu n (odpowiada to krzywej ciągu x_n) wszystkie krzywe są odległe od tego, do czego zbiegają, o nie więcej niż wybrany na początku błąd. Ta zdumiewająca własność (generowanie fraktali) nie jest jedynie cechą ciągu Thuego–Morse’a, ale znacznie większej rodziny ciągów.

Czytelników ciekawych tych oraz innych związków zachęcamy do przeczytania artykułu *When Thue–Morse Meets Koch*, którego autorami są Jun Ma oraz Judy Holdener.

Małą Deltę przygotował Karol GRYSZKA



Atomki na tropie tajemnicy

Krzysztof TURZYŃSKI*

Kiedy cały świat, a przynajmniej świat fizyków cząstek elementarnych, pilnie śledził, czy w doniesieniach na temat LHC nie pojawią się wzmianki o zaobserwowaniu jakichś nowych, niewyjaśnianych znaną teorią zjawisk, w małym laboratorium fizyki jądrowej Atomki w węgierskim Debreczynie stwierdzono pewien kłopotliwy fakt.

Spoczywające jądra litu ${}^7\text{Li}$ były bombardowane wiązką elektronów i protonów o energii 1,03 MeV, dokładnie dobraną tak, by wywołać fuzję protonów z jądrami litu i wytworzyć jądro berylu ${}^8\text{Be}$, a dokładniej jego stan wzbudzony o energii 18,15 MeV. Stan taki żyje bardzo krótko, po czym zmienia się w stan podstawowy, a nadmiarowa energia emitowana jest w postaci pary elektron-pozyton. Obie te cząstki można zaobserwować, precyzyjnie określając ich energie oraz kierunki. Liczba zdarzeń, w których elektron i pozyton rozbiegają się pod określonym kątem, powinna wyraźnie maleć ze wzrostem kąta. Takie eksperymenty są wykonywane rutynowo przez fizyków zajmujących się badaniem jąder atomowych i pozwalają na wnioskowanie o szczegółach własności oddziaływania składników tych jąder, czyli protonów i neutronów, co z kolei pozwala na ulepszanie teoretycznego opisu jąder atomowych.

Tymczasem zespół, którym kierował Attila Krasznahorkay, zobaczył coś nieoczekiwanego. Liczba par elektron-pozyton rozbiegających się w przedziale kątów 120–160 stopni była wyraźnie większa od oczekiwanej, tworząc wyraźną „górkę” na wykresie. Było to zastanawiające z co najmniej dwóch względów. Po pierwsze, nie ma żadnego znanego powodu, aby taki nadmiar występował. Po drugie, o czym niejednokrotnie można było przeczytać w *Delcie*, zaobserwowanie zwiększonej częstości występowania produktów reakcji o określonych parametrach często wiąże się z wytworzeniem krótko żyjącego stanu pośredniego i stanowi niejednokrotnie jedyny zauważalny przejaw istnienia takiego stanu. W tym przypadku byłyby to cząstka o masie około $17 \text{ MeV}/c^2$, czyli zaledwie trzydziestotrykrotnie cięższa od elektronu, najlżejszej z masywnych cząstek elementarnych, jeśli nie liczyć bardzo niechętnie oddziałujących z materią neutrin. Czy możliwe, by fizycy cząstek od dziesięcioleci uzyskujący w akceleratorach wyższe energie „przegapili” coś tak lekkiego? Czy istnienie takiej cząstki nie jest aby wykluczone przez wyniki przeprowadzonych dotąd doświadczeń?

Jest wykluczone na podstawie danych dotyczących rozpadów znanych cząstek, a konkretnie rozpadu neutralnych pionów na parę fotonów. Działający w CERN-ie eksperyment NA48/2 bada te oddziaływania bardzo dokładnie. Gdyby nowa cząstka o masie potrzebnej do wyjaśnienia anomalii z Atomków oddziaływała z materią jądrową, zostałaaby w miarę łatwo wykryta, gdyż mogłaby być jednym z produktów rozpadu pionu. Mogłaby, o ile oddziaływałaby tak jak znane cząstki, a nie, na przykład, tylko z neutronami, ignorując protony i neutralne piony.

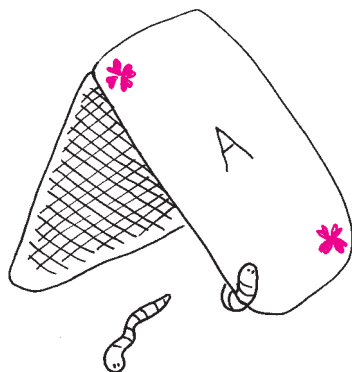
Zauważyła to grupa naukowców z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Irvine kierowana przez Tima Taita. Po przeanalizowaniu dostępnych danych zauważyli oni, że taka własność, nazwana przez nich protofobią, oszczędziłaby takiej cząstce wcześniejszego ujawnienia, ale znakomicie wyjaśniałaby rezultaty węgierskich badaczy. Praca szczegółowo uzasadniająca tę propozycję została opublikowana w prestiżowym czasopiśmie *Physical Review Letters* i wzbudziła spore poruszenie wśród fizyków cząstek elementarnych i fizyków jądrowych.

Entuzjaści nowego pomysłu od razu zabrali się za tworzenie pełnych teorii zawierających nowo odkrytą cząstkę. Sceptycy zauważyli, że i wcześniejsze publikacje zespołu z Debreczyna nie raz donosiły o różnych zaobserwowanych anomaliami. Krasznahorkay odpowiadał im, że te poprzednie prace powstały w czasach, gdy zespołem kierował nieżyjący już Fokke de Boer, i dotyczyły starego układu doświadczalnego, podczas gdy nowy został porządnie

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

skalibrowany i pracuje stabilnie, nie wykazując żadnych niepokojących objawów. Flegmatycy czekają zaś na niezależne sprawdzenie wyników laboratorium Atomki, czego można dokonać, używając do tego celu działającego przy LHC detektora LHCb. Odpowiednia analiza zostanie wykonana w ciągu najbliższych lat po nagromadzeniu odpowiedniej liczby danych doświadczalnych.

Czy zatem jesteśmy świadkami przełomu? Historia fizyki cząstek elementarnych ostatnich lat obfituje w szybko przebrzmiewające sensacyjne odkrycia. Niedobrze byłoby jednak stracić czujność i nie przyglądać się uważnie podejrzanym wynikom doświadczeń. Choć z dzisiejszej perspektywy wiele ważnych odkryć wydaje się dziełem przypadku, przypadek ten zawsze natrafiał na kompetentnych i przygotowanych naukowców.

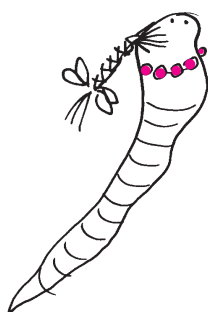


Czy moja ręka jest losowa?

Piotr MARKOWSKI*

Grając w większość gier karcianych, musimy przetasować talię w taki sposób, aby ich kolejność była „jak najbardziej” losowa. Pierwszym pytaniem, na które odpowiemy sobie w tym artykule, jest pytanie o probabilistyczny sposób wyrażenia tej własności.

Powiedzmy, że mamy do dyspozycji n kart, które ponumerowaliśmy liczbami naturalnymi. Gdy przyporządkujemy kartom ich pozycje, to szybko zauważymy, że ta reprezentacja prowadzi nas do interpretacji potasowanej talii jako permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Teraz możemy zastanowić się, jaki jest cel tasowania kart i opisać dobre potasowanie w języku probabilistyki. Skoro potasowana talia n kart może być potraktowana jako permutacja, to mówiąc o dobrym tasowaniu, zapewne mamy na myśli, że po potasowaniu kart otrzymamy dowolną permutację z jednakowym prawdopodobieństwem. Na przykład dla talii 3 kart każda z sześciu możliwości ich potasowania ((123), (132), (213), (231), (312), (321)) powinna wypadać – średnio – raz na sześć tasowań.



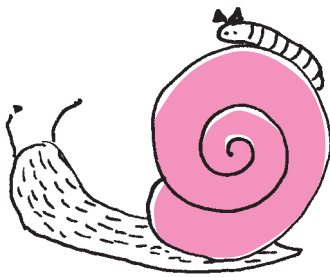
Zbadajmy teraz pewne proste tasowanie: w każdym ruchu bierzemy kartę z wierzchu i wkładamy ją na losowe miejsce w talii (a jakżeby inaczej: z jednakowym prawdopodobieństwem!). Pokażemy, że jeżeli oznaczymy kartę leżącą na spodzie stosu kart, a następnie będziemy tasować do momentu, aż oznaczona karta trafi na wierzch i jeszcze jeden ruch dłużej, to otrzymamy losową (w przedstawionym wyżej sensie) talię. Pomysł wygląda prosto, ale jak sprawdzić, że działa? Żeby przekonać się o jego skuteczności, podzielmy nasze tasowanie na drobniejsze kroki:

1. Tasujemy do momentu, aż pewna karta znajdzie się pod oznaczoną kartą.
2. Tasujemy do momentu, aż dwie karty znajdą się pod oznaczoną kartą.
- ...
- $n - 1$. Tasujemy do momentu, aż $n - 1$ kart znajdzie się pod oznaczoną kartą.
- n . Wkładamy oznaczoną kartę (znajdącą się w tym momencie na wierzchu) w dowolne miejsce talii z jednakowym prawdopodobieństwem.

Teraz możemy uzasadnić, że po każdym kroku karty znajdujące się pod kartą oznaczoną są dobrze potasowane.

1. Nie ulega wątpliwości, że po pierwszym kroku karty znajdujące się pod tą oznaczoną są dobrze potasowane (jest wszak tylko jedna...).
2. A zatem: nie ulega wątpliwości, że po drugim kroku 2 karty znajdujące się pod tą oznaczoną są dobrze potasowane (karta z wierzchu z takim samym prawdopodobieństwem znajdzie się pod i nad pierwszą kartą, która trafiła pod oznaczoną kartę).

*doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski



Zmienną X o rozkładzie geometrycznym możemy skonstruować w następujący sposób: rzucajmy niesymetryczną monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p i niech X będzie numerem pierwszej próby, w której wyrzuciliśmy orła. Wówczas:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Sprawne kalkulacje doprowadzą nas do wzoru $\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$.



Overhand shuffle



Riffle shuffle

i . Rozumując indukcyjnie, zakładamy, że po kroku $i - 1$ pod oznaczoną kartą znajduje się $i - 1$ dobrze potasowanych kart. Jeśli po i -tym kroku pierwsza z brzegu karta została losowo umieszczona w talii i wiemy, że wyładowała pod oznaczoną kartą, to innymi słowy została losowo umieszczona wśród kart znajdujących się pod tą oznaczoną, a zatem po wykonaniu i -tego kroku pod oznaczoną kartą znajduje się i dobrze potasowanych kart.

...

$n - 1$. A zatem: nie ulega wątpliwości, że po $(n - 1)$ -szym kroku $n - 1$ kart znajdujących się pod oznaczoną kartą jest dobrze potasowanych.

n . A zatem: nie ulega wątpliwości, że po n -tym kroku talia kart jest dobrze potasowana.

Skoro znamy już opis kroków, to chcielibyśmy powiedzieć coś o liczbie ruchów, które musimy wykonać w tym tasowaniu, zanim uzyskamy idealnie potasowaną talię. Oznaczmy tę liczbę przez T ; oczywiście, jest to wielkość losowa, spróbujemy jednak obliczyć jej średnią. Niech R_i będzie liczbą ruchów potrzebną na wykonanie i -tego kroku. Wówczas R_i ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{i}{n}$. Istotnie, po $(i - 1)$ -szym kroku prawdopodobieństwo umieszczenia pierwszej z brzegu karty pod kartą oznaczoną (zatem wykonania i -tego kroku) wynosi właśnie $\frac{i}{n}$. Teraz możemy obliczyć średnią T ; wystarczy zauważyć, że $T = R_1 + R_2 + \dots + R_n$, a zatem:

$$\mathbb{E}T = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}R_i = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx n \log n.$$

Przy użyciu powyższego wzoru możemy oszacować średnią liczbę ruchów potrzebną do dobrego potasowania przedstawionym schematem talii 52 kart przez 205. W rzeczywistości, aby mieć dużą pewność co do skuteczności tego tasowania, wymagane jest około 300 ruchów.

Oczywiście, przedstawiony sposób tasowania nie należy do szczególnie popularnych. O wiele częściej można spotkać tzw. *overhand shuffle*, którego matematyczny model można wyrazić w następujący sposób: na początku w każdą z $n - 1$ luk między kartami wstawiamy z ustalonym prawdopodobieństwem p „przegródkę”, tworząc w ten sposób pewną losową liczbę bloków, a następnie odwracamy ich kolejność. Taki schemat tasowania uchodzi za amatorski i dużo bardziej profesjonalnie prezentuje się tzw. *riffle shuffle*. W języku matematycznym może on zostać przedstawiony następująco: najpierw każdemu miejscu w talii przyporządkujemy 1 lub 0 z równymi prawdopodobieństwami, a następnie na miejscu i -tej „jedyńki” od góry umieszczamy i -tą kartę od góry, a na miejscu j -tego „zera” od dołu j -tą kartę od dołu. Podczas analizy tego sposobu tasowania często wygodniej jest posłużyć się prostszym opisem procedury „odtasowywania”, polegającej na losowym przyporządkowaniu kartom 0 i 1, a następnie umieszczeniu bloku kart „jedynekowych” przed blokiem kart „zerowych”.

Profesor Persi Diaconis, który zajmuje się tą tematyką, pokazuje w swoich artykułach, że *overhand shuffle* wymaga średnio 10 000 ruchów do dobrego potasowania, zatem przedstawiony przez nas pozornie naiwny sposób tasowania jest lepszy od tego, jakim posługuje się wiele osób (przynajmniej w opisanym przez nas sensie). Z drugiej strony, tym, którzy stosują *riffle shuffle*, wystarczy średnio 7 ruchów, aby tasowanie było dobre. Warto zatem nauczyć się tego sposobu tasowania, nie tylko ze względu na jego efektywność.

Na koniec kilka uzupełnień. Powyżej opisaliśmy losowy czas T , po którym rozkład potasowanej talii (na pewno!) będzie jednostajny. W teorii taki czas nazywamy *mocnym czasem jednostajnym* (ang. *strong uniform time*). Wyznaczanie jego średniej stanowi dopiero początek rozważań. Celem wielu współczesnych analiz jest znalezienie takiej liczby tasowań, która z dużym prawdopodobieństwem pozwoli osiągnąć „wystarczająco dobre” potasowanie (tzn. chcemy, aby po ustalonym czasie uzyskany rozkład prawdopodobieństwa był odpowiednio bliski rozkładowi jednostajnemu) – w tej sytuacji mówi się o czasie mieszania (ang. *mixing time*).

Udanych tasowań i rozdań!

Leniwy nauczyciel

Wyobraź sobie, Czytelniku, że jesteś dość leniwym nauczycielem w podstawówce. Uczniowie mieli zadane, jako pracę domową, ogromne ilości przykładów z tabliczki mnożenia i dodawania w zakresie pięćdziesięciu. Biorąc pod uwagę liczbę dzieci w klasie, sprawdzanie tego to istna męczarnia. Ale przecież można trochę oszukać, np. spośród dziesiątków przykładów, spojrzeć na losowe pięć i przyjąć, że jeśli są dobrze, to reszta też jest pewnie dobrze. A czytania zostaje dużo mniej.

W informatyce powyższy trik działa zaskakująco dobrze, prowadząc do tzw. dowodów sprawdzanych losowo, zwanych w skrócie PCP od ang. *Probabilistically Checkable Proof*. Jako przykład weźmy problem znajdowania cyklu Hamiltona: pytamy, czy dany graf ma cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Choć jest to problem trudny obliczeniowo, istotną własnością tego problemu jest to, iż łatwo przekonać kogoś, że dany graf rzeczywiście ma taki cykl: wystarczy go pokazać. Taki dowód – dla ustalenia uwagi, niech to będzie lista wierzchołków grafu w kolejności odwiedzenia przez cykl Hamiltona – jest jednak trudny do zweryfikowania przez leniwego nauczyciela, który czyta losowy, krótki jego kawałek. Na przykład, bardzo trudno będzie mu odróżnić listę, która opisuje cykl Hamiltona, od takiej, która opisuje dwa rozłączne cykle, które łącznie przechodzą przez każdy wierzchołek grafu.

Twierdzenie PCP, bardzo ważne twierdzenie informatyki teoretycznej z lat 90., mówi, że problem cyklu Hamiltona – i, w ogólności, wszystkie problemy z tzw. klasy NP – mają krótkie dowody PCP. To znaczy, że będąc uczniami leniwego nauczyciela, i mając za zadanie domowe sprawdzenie, czy dany graf G ma cykl Hamiltona, możemy zapisać pozytywną odpowiedź jako napis niewiele dłuższy niż wielkość G , taki że nauczyciel przeczyta (wybrane w sposób losowy) trzy bity naszej odpowiedzi oraz

- jeśli w grafie G istnieje cykl Hamiltona, to istnieje rozwiązanie, które mogliśmy dać nauczycielowi, takie że on zawsze zaakceptuje je jako poprawne;
- jeśli w grafie G nie istnieje cykl Hamiltona, to istnieje stała $\varepsilon > 0$ (niezależna od grafu G) taka, że niezależnie, jakie rozwiązanie spróbujemy oddać, nauczyciel zorientuje się, że go oszukujemy z prawdopodobieństwem co najmniej ε .

By docenić znaczenie tego twierdzenia, spójrzmy na nie z innej strony. Załóżmy, że jesteśmy uczniem, który zna algorytm sprawdzania nauczyciela (tj. wiemy, które trzy bity będzie czytał nauczyciel z jakim prawdopodobieństwem i które wartości tych bitów prowadzą do zaakceptowania pracy domowej), ale nie umie znajdować cyklu Hamiltona w grafach. Czy możemy jakoś oszukać ten system?

Założmy, że nauczyciel oczekuje rozwiązania złożonego z m bitów. Dla każdej pozycji i w rozwiązaniu stwórzmy zmienną binarną x_i . Załóżmy, że nauczyciel z prawdopodobieństwem p_{i_1, i_2, i_3} czyta bity na pozycjach i_1, i_2, i_3 , i oczekuje wartości ze zbioru $S_{i_1, i_2, i_3} \subseteq \{0, 1\}^3$. Dla nas to się tłumaczy jako następujący warunek na nasze zmienne: chcemy, by było $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in S_{i_1, i_2, i_3}$, a jeśli tego nie spełnimy, to prawdopodobieństwo tego, że nauczyciel odrzuci naszą pracę domową, rośnie o p_{i_1, i_2, i_3} . Innymi słowy, problem znalezienia rozwiązania pracy domowej sprowadza się do tzw. *problemu z więzami*: mamy m zmiennych binarnych, i pewną liczbę więzów mówiących, że pewne trójki zmiennych mają przyjmować określone wartości; każdy z więzów ma określone prawdopodobieństwo, zwane dalej *wartością*.

Twierdzenie PCP mówi, że jeśli nauczyciel sprawdza pracę domową dla grafu G mającego cykl Hamiltona, to istnieje rozwiązanie, które go zawsze przekonuje – czyli istnieje rozwiązanie naszego problemu z więzami, które spełnia *wszystkie* więzy. Z drugiej strony, jeśli G nie ma cyklu Hamiltona, to nauczyciel odrzuca dowolne rozwiązanie z prawdopodobieństwem co najmniej ε – czyli każde rozwiązanie naszego problemu z więzami nie spełnia więzów o łącznym prawdopodobieństwie (wartości) co najmniej ε . Zapomnijmy o nauczycielu, i spójrzmy na to tak: zamieniliśmy problem sprawdzania, czy dany graf ma cykl Hamiltona, na problem rozróżniania, czy w danym problemie z więzami da się spełnić *wszystkie* więzy, czy też dowolne rozwiązanie nie spełnia jakiejś stałej, ustalonej wartości ε więzów. Czyli przetłumaczyliśmy problem cyklu Hamiltona na tzw. problem z dziurą: instancje dla grafów z cyklami Hamiltona są znacząco inne od tych dla grafów bez takich cykli – jest tam dziura o wartości ε .

Założmy teraz, że mamy $(1 - \delta)$ -aproxymacyjny algorytm dla naszego problemu z więzami: jeśli w danej instancji najlepsze rozwiązanie spełnia więzy o łącznej wartości μ , to nasz algorytm zawsze zwraca rozwiązanie o łącznej wartości co najmniej $(1 - \delta)\mu$. Jeśli $\delta < \varepsilon$, to można użyć takiego algorytmu do rozstrzygnięcia problemu istnienia cyklu Hamiltona, gdyż będzie on w stanie odróżnić instancje problemu z więzami, w których można spełnić wszystkie więzy, od tych, w których można spełnić więzy o łącznej wartości co najwyżej $(1 - \varepsilon)$. Otrzymujemy następujący wniosek z twierdzenia PCP: stworzenie algorytmu $(1 - \delta)$ -aproxymacyjnego dla $\delta < \varepsilon$ dla naszego problemu z więzami jest co najmniej tak trudne jak znajdowanie cyklu Hamiltona w grafie.

Ten wniosek jest punktem wyjścia do całej dziedziny *trudności aproxymacji*, która jest współcześnie intensywnie rozwijana.

Marcin PILIPCZUK

Analiza Starożytnych i Cyprian Norwid

Marek KORDOS

Podwojenie sześciianu to zadanie: skonstruuj odcinek $\sqrt[3]{2}$ razy dłuższy od danego.

W języku arytmetyki będzie to brzmiało: znajdź *dwie średnie proporcjonalne* dla a i $2a$. Dwie średnie proporcjonalne dla a i b to takie liczby x i y , że

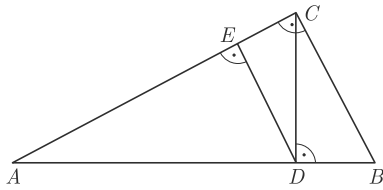
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Przykład geometrycznej realizacji jest na rysunku 1.

Podwojenie sześciianu byłoby zrealizowane, gdybyśmy umieli narysować taką konstrukcję dla $b = 2a$. Wtedy bowiem

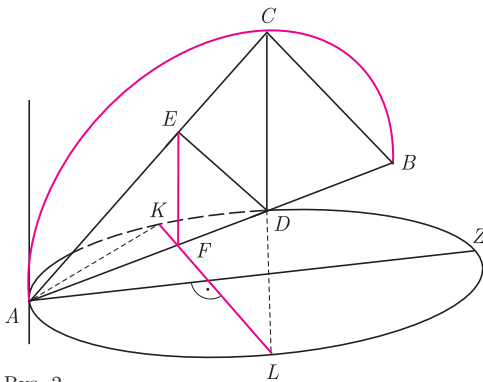
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}, \text{ czyli } \left(y = \frac{x^2}{a} \text{ i } y^2 = 2ax \right), \text{ czyli } \frac{x^4}{a^2} = 2ax, \text{ czyli } x^3 = 2a^3.$$

Archytas z Tarentu postanowił tę konstrukcję zrealizować, posługując się metodą nazwaną później *analizą Starożytnych*. Polega ona na przyjęciu założenia, że mamy żądany obiekt i badaniu jego jak najliczniejszych własności w nadziei na to, że może któreś ze znalezionych pozwoli ten obiekt skonstruować.



Rys. 1,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}.$$



Rys. 2

Pomysł Archytasa polegał na wskazaniu żądanych punktów w przecięciu trzech znanych powierzchni, czyli nie na płaszczyźnie, lecz w przestrzeni. W tym celu wyposażył rysunek 1 wykonany dla $AB = 2AE$ w półkrog o średnicy AB , czyli o promieniu a . Na płaszczyźnie narysował okrąg o o promieniu a i na nim, prostopadle do płaszczyzny umieścił figurę z rysunku 1 w taki sposób, by punkty A i D znajdowały się na o . Oznaczmy jeszcze przez Z przeciwny do A koniec średnicy o . Następnie z E opuśćmy wysokość na AB otrzymując F i przez ten punkt poprowadźmy prostopadłą do AZ – jej przecięcia z o to K i L . Zauważmy, że

$$EF^2 = AF \cdot FD = KF \cdot FL.$$

Pierwsza równość wynika z tego, że w trójkącie prostokątnym AED wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na jakie dzieli przyprostokątną. Druga równość wynika z podobieństwa trójkątów AFK i LFD . Nieoczekiwany wniosek to fakt, że trójkąt KEL okazuje się prostokątny (jako, że jego wysokość jest średnią geometryczną odcinków na jakie dzieli KL).

Wyobraźmy sobie teraz okrąg opisany na KEL , którego średnicą jest KL . Leży on w płaszczyźnie prostopadłej do AZ . Zatem wszystkie z punktów K, L, E, C leżą na powierzchni stożka o osi AZ . Kąt pomiędzy osią a tworzącymi stożka to 60° , bo $AK = AL = AE = a$ (patrz rysunek 3).

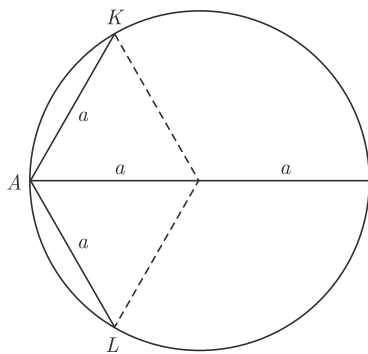
Koniec rozumowania Archytasa jest taki. Punkt C można zlokalizować, zauważając, że poza tym, iż leży on na stożku, leży on także na walcu o tworzących przecinających okrąg o i prostopadłych do jego płaszczyzny oraz na „torusie bez dziurki” – tę ostatnią powierzchnię otrzymamy, uzupełniając półkrog opisany na ABC do okręgu i obracając go dookoła tej tworzącej walca, która przechodzi przez A .

A lokalizacja C pozwala na skonstruowanie trójkąta ABC .

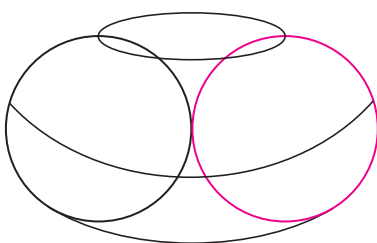
Wtedy $AD = \sqrt[3]{2} \cdot AE$.

Zapewne wielu zauważy, że to jakby zupełnie coś innego, niż to, co chcemy uznawać za konstrukcję. Wynika z tego pytanie, jak to się stało, że dziś dla nas konstrukcja musi być wykonywana na płaszczyźnie i to wyłącznie cyrklem i linijką. Czyżby znalazł się dyktator, który to zarządził? Z przykrością należy odpowiedzieć: TAK.

Po upowszechnieniu konstrukcji Archytasa z filipiką przeciw niemu (no, może nie z filipiką, bo mowy Demostenesa miały miejsce później) wystąpił Platon.



Rys. 3



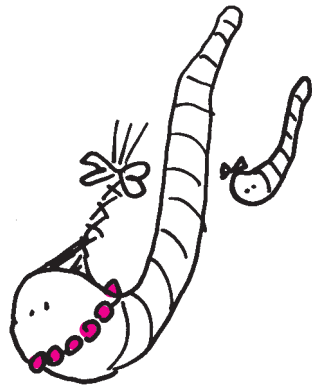
Rys. 4

Stwierdził, że używanie do konstrukcji struktur przestrzennych, a zwłaszcza powstających mechanicznie, urąga matematyce, która na czystej kontemplacji polegać powinna (to wziął dwa tysiąclecia później pod uwagę Nobel i tym uzasadnił nieprzyznanie matematykom nagrody). A czysta kontemplacja powinna operować jedynie tak ulotnym i niepraktycznym obiektem, jak – nieistniejąca przecież realnie – płaszczyzna i manipulować wyłącznie liniami doskonałymi, a więc w każdym punkcie jednakimi, jakimi na płaszczyźnie są jedynie proste i okręgi.



O dziwo, ta argumentacja okazała się przekonująca i matematycy pokornie przyjęli dyktat Platona. Samo zaś rozważanie przeciwstawienia czystej kontemplacji, jaką powinna być nauka, ponurej praktyczności (jakby Ełojów Morlokom) uznane zostało za niezbędny element wykształcenia kulturalnego człowieka i było nauczane aż do I wojny światowej nawet w gimnazjach klasycznych, gdzie matematyka była obecna tylko śladowo.

Dokumentem takich rozważań jest wiersz Cypriana Norwida poświęcony zadumie nad zdegradowaniem kontemplacji.



PLATO I ARCHITA

ARCHITA

*Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem –
Aż żal mi było bezwiedności gminu,
Mimo że wieczną on jest wagą czynu! . . .
Więc – Geometrii myślane promienie
(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenie,
Sferyczność w drzewie wytkuwszy toporem
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce. . .
To – któż wie. . .*

PLATO

*Boskie zmysłowiąc obrysy,
Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotność niebieskiego zgrubisz*,
Więc Filozofię, Grecję może, zgubisz. . .*

ARCHITA

*O! Plato. . . padam przed prawdy bez-koncem,
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,
Tak wielce wszystko przesiąkłe jest słońcem,
Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;
Dlatego świętych nie niżę arkanów,
Ani ojczyzny krągłą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które rażą cię dziś, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie
(Lubo promiennność uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba**,
Tą siły ramion zmnożywszy naukę,
Nie zdoła bronić się jak morska ryba? . . .*

PLATO

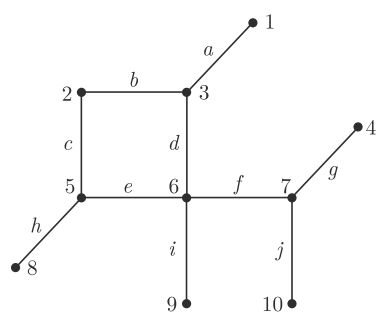
Przyjdzie – i tobie dzień zwycięstwa – sztukol! . . .

*Idealność Platona była przeciwną rodzącej się właśnie mechanice, uważając ją (w pierwotnym jej ekstremie) jako zdegradowanie kontemplacji

(przypis Poety)

**To się odnosi do przyszłości już wyraźniejszej mechaniki, której Archimed na rzecz ojczyzny zażył

(przypis Poety)



Wierzchołki oznaczono liczbami, krawędzie – literami. Jedyne możliwe przyporządkowania to: 1a, 2b, 3d, 6e, 5c, 8h, 9i, 7f, 4g, 10j albo 1a, 3b, 2c, 5e, 6d, 8h, 9i, 7f, 4g, 10j.

Informatyczny kącik olimpijski (103): Przeciąganie liny

W tym miesiącu proponujemy zadanie *Przeciąganie liny*, które pojawiło się w podwarszawskim Józefowie, podczas zeszłorocznej Bałtyckiej Olimpiady Informatycznej. Zadanie opisuje problem optymalizacji znanej wakacyjno-urlopowej zabawy. Co ciekawe, warstwa fabularna proponowanego rozwiązania – choć pozostaje w podobnych klimatach – to jednak odchodzi od liny na rzecz plecaka. Ale po kolei:

W zadaniu rozważamy $2n$ osób chcących zabawić się w tytułową grę. Lina do zabawy ma przygotowane $2n$ uchwytów, po n z każdej strony. Każda z osób deklaruje z góry dwa uchwyty, przy których chciałaby się znaleźć. Znamy również siłę każdej z osób, wyrażoną przez liczbę naturalną od 1 do s . Naszym celem jest ustalić, czy jest możliwe takie ustawienie uczestników zabawy, aby każdy dostał jeden z dwóch wybranych przez siebie uchwytów oraz aby różnica sił między dwiema drużynami nie przekraczała pewnej danej liczby k .

Ograniczenia opisane w zadaniu wydają się dość dziwaczne. Najlepiej jest na nie spojrzeć w następujący sposób. Rozważmy graf G , w którym wierzchołki reprezentują uchwyty, a krawędzie – ludzi. Krawędź e łączy wierzchołki u i v wtedy i tylko wtedy, gdy osoba e zadeklarowała jako ulubione właśnie uchwyty u i v . W tym języku przyporządkowanie osobom uchwytów sprowadza się do (wzajemnie jednoznacznego) przyporządkowania krawędziom jednego z ich wierzchołków.

Nawet jeśli zapomnimy o warunku dotyczącym zrównoważenia sił obu stron, nie zawsze jest możliwe jakiegokolwiek przyporządkowanie spełniające wszystkie preferencje dotyczące uchwytów. Przede wszystkim, w G każda spójna składowa o m wierzchołkach musi mieć dokładnie m krawędzi. Takie grafy to tak zwane pseudolasy, a więc zbiory rozłącznych pseudodrzew. Każde pseudodrzewo zawiera dokładnie jeden cykl (dlaczego?). W takim grafie istnieją tylko dwa różne przyporządkowania wierzchołków do sąsiednich krawędzi. Dla wierzchołków nie leżących na cyklu możliwy jest tylko jeden wybór. Na cyklu wybory są dwa: przyporządkujemy krawędzie kolejnym wierzchołkom albo zgodnie albo przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Wobec powyższego, nasze rozwiązanie w pierwszej fazie sprawdza, czy dane wejściowe rzeczywiście tworzą pseudolas. Jeśli nie, to oczywiście odpowiedź na zadanie brzmi również „nie”. Dalej zakładamy więc, że mamy do czynienia już tylko z pewnym zbiorem pseudodrzew. Jak zauważyliśmy wcześniej, dla każdego takiego pseudodrzewa mamy tylko dwie możliwości. Dla każdej z nich obliczymy jaką siłę do lewej strony liny wnosi. Te wartości oznaczymy jako a_i oraz b_i dla i -tego pseudodrzewa. Bez straty ogólności założymy, że zawsze $a_i \leq b_i$. Widzimy, że łączna siła lewej drużyny będzie równa co najmniej $\sum_i a_i$ i co najwyżej $\sum_i b_i = \sum_i a_i + \sum_i (b_i - a_i)$, przy czym każdy ze składników $(b_i - a_i)$ możemy dodać bądź nie, według naszego uznania. Pamiętajmy oczywiście, że chcemy, aby ta siła mieściła się między $(S/2 - k/2)$ a $(S/2 + k/2)$, gdzie S oznacza łączną siłę wszystkich osób.

To ostatnie spojrzenie na problem z zadania opiszemy w języku tak zwanego problemu plecakowego (ang. *knapsack problem*). Rozważmy plecak o pojemności maksymalnej $(S/2 + k/2 - \sum_i a_i)$ kg. Mamy dostępny zbiór przedmiotów (indeksowany i) o wagach $(b_i - a_i)$ kg. Pytamy, czy uda się nam zabrać przedmioty o łącznej wadze co najmniej $(S/2 - k/2 - \sum_i a_i)$ kg i jednocześnie nieprzekraczającej pojemności plecaka.

Problem plecakowy to klasyczny problem, który da się standardowo rozwiązać w czasie $O(nS)$. W naszym zadaniu możemy jednak znaleźć rozwiązania lepsze (o ile $s \ll n$), bo działające w czasie $O(\sqrt{S}) \cdot O(S) = O(S^{3/2})$.

Skorzystamy z założenia, że siła każdej osoby (a więc i wagi przedmiotów w problemie plecakowym) jest wyrażona liczbą naturalną. Wnioskujemy z tego, że istnieje co najwyżej $O(\sqrt{S})$ różnych wartości wag przedmiotów (suma m różnych liczb naturalnych jest równa co najmniej $\frac{(m-1)m}{2} = O(m^2)$). Pozostaje ostatni krok, zrealizowany za pomocą *programowania dynamicznego*:

Tworzymy (początkowo wypełnioną zerami) binarną tablicę t rozmiaru S , w której będziemy zaznaczać, czy da się przygotować plecak o ustalonej wadze. Działamy w pętli o $O(\sqrt{S})$ obrotach, w każdym obrocie dając dostęp do kolejnej unikatowej wagi przedmiotu.

Oto pseudokod jednego obrotu, dla nowej wagi w występującej q razy:

```
for i = S downto 1 do
  if ((t[i] == 1) then
    x := q, j := i;
    while (x < 0 and t[j + w] == 0) do
      x := x - 1;
      t[j + w] := 1;
      j := j + w;
```

W każdym kroku pętli albo uzyskujemy nową objętość plecaka albo kończymy dodawania dla ustalonej objętości. Oba zdarzenia mogą wystąpić S razy, stąd czas działania jednego obrotu pętli to faktycznie $O(S)$ tak, jak zapowiedzieliśmy.

Tomasz KAZANA

Profesor Krzysztof Maurin – matematyk, wychowawca, mistrz

W dniu 14 stycznia 2017 roku zmarł w wieku 93 lat profesor Krzysztof Maurin: twórca polskiej szkoły fizyki matematycznej, wieloletni profesor Uniwersytetu Warszawskiego, założyciel i długoletni kierownik Katedry Metod Matematycznych Fizyki, wychowawca licznych pokoleń matematyków i fizyków teoretycznych, autor wielu monografii, a przede wszystkim „kultowego” wykładu z analizy matematycznej dla fizyków, będącego podstawą wielokrotnie wznawianej „Analizy” – książki, która nie przestaje fascynować swoim oryginalnym spojrzeniem na matematykę jako na język fizyki.

Francuskie nazwisko odziedziczył po przodkach – hugenotach. Jako matematyk był specjalistą w zakresie metod przestrzeni Hilberta oraz reprezentacji grup. Jednak jego bogata osobowość nie pozwoliła mu zamknąć się w jednej dziedzinie nauki. Był myślicielem o niezwykle szerokich horyzontach: opublikował m.in. wiele prac filozoficznych i teologicznych, a za jedno ze swych głównych osiągnięć uważał założenie (w roku 1970) i prowadzenie niemal do końca życia międzydyscyplinarnego seminarium „Systemy otwarte”, które do dziś gromadzi nie tylko przedstawicieli nauk ścisłych (fizyków, matematyków, chemików, biologów), ale również licznych humanistów. Na seminarium tym występowali m.in. tacy myśliciele jak Carl Friedrich von Weizsäcker, Józef Tischner czy Krzysztof Michalski.

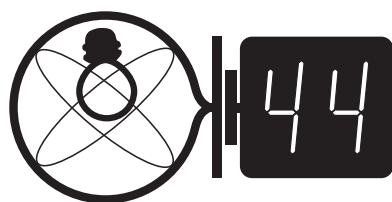
Jako student fizyki w latach 1960–65 wysłuchałem wielu jego wykładów, a w końcu trafiłem „pod jego skrzydła” jako uczeń i asystent. Matematyka, jaką nam przekazywał, była czymś dużo ważniejszym niż zwykle, przyziemne „rachunki”: podążając za myślą Cauchy’ego, Weierstrassa, Riemanna czy Grothendiecka, którą nam przybliżał, mieliśmy wrażenie, że rosną nam skrzydła, otwierają się niedostępne przedtem horyzonty, że zostaliśmy dopuszczeni do obcowania twarzą w twarz ze światem Idei Platona. Tą swoją fascynacją chętnie dzieliliśmy się z innymi: pamiętam, jak koleżanki ze szkoły muzycznej zabawiałem teorią liczb rzeczywistych według Cauchy’ego.

Profesor, którego między sobą, w gronie uczniów, tytułowaliśmy „Szefem”, w trosce o nasz rozwój naukowy podsuwał nam do referowania na seminarium Katedry ciekawe, aktualne prace. Miał w tej dziedzinie ogromną intuicję i wiele ważnych kierunków badawczych wywodzi się właśnie z tych „obowiązkowych” referatów. Uważał też, że trzeba się ciągle uczyć: już nawet po doktoracie czy habilitacji byliśmy przezeń energicznie zachęcani do wysłuchania co najmniej dwóch wykładów monograficznych w każdym semestrze, a – przede wszystkim – do uczęszczania na ćwiczenia i zdawania egzaminów, na które zgłaszaliśmy się pokornie wraz ze studentami.

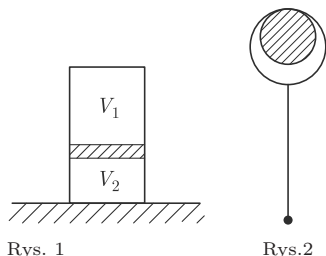
Do najważniejszych przyjaźni naukowych Profesora zaliczyłbym tę z Eberhardem Zeidlerem, wybitnym matematykiem niemieckim, założycielem i wieloletnim dyrektorem Instytutu Maxa Plancka „Matematyka w naukach przyrodniczych” (*Mathematik in der Naturwissenschaften*) w Lipsku, mieście Jana Sebastiana Bacha. Jako student, Zeidler był jednym z niewielu lipszczan, którzy w 1960 r. protestowali przeciwko zburzeniu trzynastowiecznego kościoła uniwersyteckiego i zastąpieniu go „nowoczesną” architekturą *enerdowską*. Pokutował za to dwa lata jako żołnierz *Volksarmee*. Pod koniec życia wielokrotnie mówił mi, że swoją wizję matematyki, którą publikował w licznych monografiach, zawdzięcza rozmowom z profesorem Maurinem. Przyjaźń tę kultywowali telefonicznie niemal do samej śmierci Zeidlera w listopadzie ubiegłego roku. Jestem przekonany, że wrócili teraz do przerwanej, na pewno niezwykle interesującej, rozmowy. Jeśli się tylko w któreś sobotnie popołudnie trafi do kościoła św. Tomasza w Lipsku – długoletniego miejsca pracy Jana Sebastiana – na motety w wykonaniu *Thomanerchor*, chóru kiedyś prowadzonego przez starego mistrza, zapewne da się ich obu spotkać.

Jerzy KIJOWSKI

Klub 44



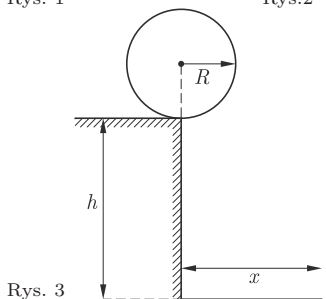
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2017



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltam1.edu.pl

Zadania z fizyki nr 634, 635

Redaguje **Elżbieta ZAWISTOWSKA**

634. W pionowym, zamkniętym naczyniu znajduje się tłok, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Z obu stron tłoka znajdują się jednakowe masy tego samego gazu doskonałego. W temperaturze T_0 , jednakowej w całym naczyniu, objętość gazu nad tłokiem jest k razy większa niż objętość gazu pod tłokiem. Jaki będzie stosunek tych objętości, gdy temperatura wzrośnie do wartości T ?

635. Do dolnego końca pręta o długości l przyczepiono małą kulkę o masie m , a do górnego końca rurkę w kształcie walca o wewnętrznym promieniu R . Masy pręta i rurki są zanedbywalne. Rurka nasunięta jest luźno na nieruchomą, poziomą oś (rys. 2). Współczynnik tarcia między wewnętrzną powierzchnią rurki i osią jest równy μ . Dla jakich wartości kąta φ odchylenia pręta od pionu tak skonstruowane wahadło może znajdować się w równowadze?

Rozwiązania zadań z numeru 11/2016

Przypominamy treść zadań:

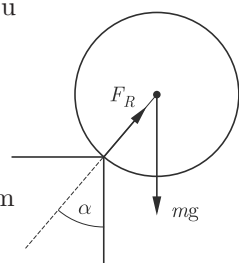
626. Na skraju prostokątnego uskoku o wysokości h leży jednorodna kula o promieniu R , przy czym $h > \frac{R}{3}$ (rys. 3). W stanie początkowym kula znajduje się w stanie równowagi chwiejnej. Znaleźć odległość x miejsca upadku kuli na ziemię, zakładając, że jej ruch rozpoczyna się z zerową prędkością początkową. Nie ma tarcia między kulą a uskokiem.

627. W pionowo ustawionym cylindrze z tłokiem znajduje się jednoatomowy gaz doskonały. Odległość tłoka od dna cylindra wynosi l . Po obciążeniu tłoka ciężarkiem o masie m i ustaleniu się równowagi temperatura bezwzględna gazu wzrosła dwukrotnie. Cylinder i tłok wykonane są z izolatora cieplnego. Obliczyć przyrost energii wewnętrznej gazu. Pominąć tarcie między cylindrem a tłokiem.

626. Dopóki kula nie traci kontaktu z uskokiem, działa na nią siła ciężkości mg oraz siła reakcji podłoża F_R (rys. 4). Ponieważ nie ma tarcia, siła reakcji skierowana jest wzdłuż promienia kuli. Obie siły mają zerowy moment względem środka kuli, zatem kula porusza się ruchem postępowym. Środek masy kuli porusza się po okręgu o promieniu R , a jego równanie ruchu ma postać:

$$mv^2/R = mg \cos \alpha - F_R.$$

W momencie, w którym kula odrywa się od uskoku, siła reakcji znika: $mv_0^2/R = mg \cos \alpha_0$. Z zasady zachowania energii mamy $v_0^2 = 2Rg(1 - \cos \alpha_0)$. W chwili oderwania kąt α_0 , jaki tworzy prędkość kuli z poziomem, dany jest wzorem $\cos \alpha_0 = 2/3$, wartość prędkości wynosi



Rys. 4

$v_0 = \sqrt{2Rg/3}$, a dolny punkt kuli znajduje się na wysokości $h_0 = h - R/3$ nad ziemią. Po oderwaniu środek masy kuli porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$, w kierunku pionowym spada w polu ciężkości z prędkością początkową $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$ i osiąga prędkość $v_y = \sqrt{5v_0^2/9 + 2gh_0}$ po czasie $t = (v_y - v_{0y})/g$. Szukana odległość dana jest wzorem

$$x = v_{0x}t + R \sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}R \left(1 + \frac{2v_0^2}{3gR} \left(\sqrt{1 + \frac{18gh_0}{v_0^2}} - 1 \right) \right).$$

627. Zmiana energii wewnętrznej gazu dana jest wzorem $\Delta U = nc_vT$, gdzie T jest temperaturą w stanie początkowym, n liczbą moli, a c_v molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości. Oznaczmy ciśnienia początkowe i końcowe w cylindrze odpowiednio przez p_1 i p_2 . Równania Clapeyrona dla tych stanów mają postać:

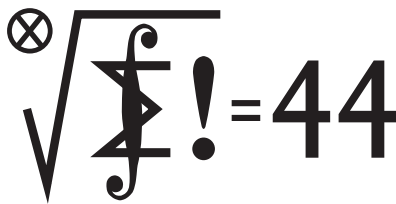
$$p_1 l S = nRT \text{ oraz } p_2 (l - x) S = 2nRT,$$

gdzie x jest przesunięciem tłoka, a S jego polem powierzchni. Odejmując te równania stronami, otrzymujemy $(p_2 - p_1)lS - p_2 x S = nRT$. Z warunków równowagi mamy $(p_2 - p_1)S = mg$, a z pierwszej zasady termodynamiki $p_2 S x = \Delta U = nc_p T$. Stąd $mg l = nc_p T$, uwzględniając, że $c_p = c_v + R$. Szukana zmiana energii wewnętrznej wynosi

$$\Delta U = \frac{mg l c_v}{c_p},$$

a ponieważ gaz jest jednoatomowy, więc

$$\Delta U = 3mg l / 5.$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2017

Zadania z matematyki nr 737, 738

Redaguje Marcin E. KUCZMA

737. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg ω , przy czym proste BC i AD przecinają się w takim punkcie F , że prosta EF jest styczna do ω . Druga prosta styczna do okręgu ω , równoległa do EF , przecina proste EA, EB, EC, ED odpowiednio w punktach K, L, M, N . Udowodnić, że odcinki KL i MN mają jednakową długość.

738. Wypisując, jedna za drugą, wszystkie liczby całkowite dodatnie, mające (w systemie dziesiętnym) co najwyżej n cyfr, piszemy łącznie c_n cyfr (np. $c_1 = 9, c_2 = 189$); w tym z_n zer (np. $z_1 = 0, z_2 = 9$). Czy równość $z_n = c_{n-1}$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$?

Zadanie 738 zaproponował pan Bartłomiej Pawlik z Limanowej.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2016

Przypominamy treść zadań:

729. W trójkącie ABC bok AC jest dłuższy niż BC . Punkt P leży na dwusiecznej CK kąta C , zaś punkt Q leży na środkowej CM , połowiącej bok AB ; przy tym $MP \parallel AC$ oraz $KQ \parallel BC$. Wykazać, że odcinek PQ jest prostopadły do CK .

730. Wyznaczyć kres dolny zbioru liczb postaci $n\{n\sqrt{2}\}$ gdy $n = 1, 2, 3, \dots$ (tradycyjne oznaczenie: $\{x\} = x - [x]$).

729. Oznaczmy przez X punkt przecięcia przekątnych czworokąta $KPQM$. Prosta MP , równoległa do AC , przecina bok BC w punkcie N , będącym środkiem tego boku. Skoro ów bok jest równoległy do KQ , zatem punkt X (leżący na prostej MN) jest środkiem odcinka KQ .

Z danych równoległości dostajemy ponadto równość kątów

$$|\sphericalangle PKX| = |\sphericalangle KCB| = |\sphericalangle KCA| = |\sphericalangle KPX|.$$

Trójkąt XKP jest więc równoramienny: $|KX| = |PX|$. Punkt X , jako środek odcinka KQ , jest w takim razie środkiem okręgu opisanego na trójkącie KPQ . Wynika stąd, że kąt KPQ jest prosty – a to teza zadania.

730. Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 1$ i oznaczmy $[n\sqrt{2}] = k$. Oczywiście $k < n\sqrt{2}$, czyli $k^2 < 2n^2$, zatem $2n^2 - k^2 \geq 1$. Dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned} n\{n\sqrt{2}\} &= n(n\sqrt{2} - k) = \frac{n(2n^2 - k^2)}{n\sqrt{2} + k} \geq \frac{n}{n\sqrt{2} + k} > \\ &> \frac{n}{n\sqrt{2} + n\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Uzyskane ograniczenie dolne okaże się być szukanym kresem dolnym. Pierwsza z powyższych nierówności staje się równością, gdy $2n^2 - k^2 = 1$; druga będzie „bliska równości”, gdy stosunek $k/n\sqrt{2}$ będzie bliski 1.

Wskażemy nieskończony ciąg rozwiązań (n, k) równania $2n^2 - k^2 = 1$.

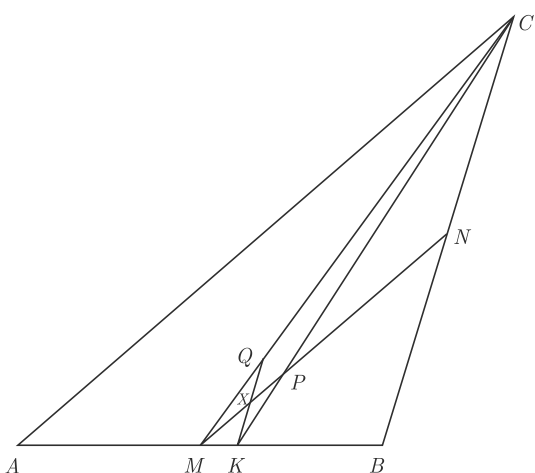
Para $(1, 1)$ jest rozwiązaniem. Dalej, jeśli para (n, k) jest rozwiązaniem, to $(n', k') = (3n + 2k, 4n + 3k)$ też, bowiem

$$\begin{aligned} 2(n')^2 - (k')^2 &= 2(9n^2 + 12nk + 4k^2) - (16n^2 + 24nk + 9k^2) = \\ &= 2n^2 - k^2. \end{aligned}$$

Istnieją więc rozwiązania (n, k) z dowolnie wielką wartością n . Gdy (n, k) jest dowolną z takich par, wówczas $k < n\sqrt{2} < k + 1$, czyli $k = [n\sqrt{2}]$, wobec czego (zgodnie z początkowym przekształceniem)

$$\begin{aligned} n\{n\sqrt{2}\} &= \frac{n(2n^2 - k^2)}{n\sqrt{2} + k} = \frac{n}{n\sqrt{2} + k} < \\ &< \frac{n}{n\sqrt{2} + (n\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2} - (1/n)}. \end{aligned}$$

Liczba n może być dowolnie wielka, zatem ostatnie wyrażenie może mieć wartość dowolnie bliską $1/(2\sqrt{2})$. To dowodzi, że istotnie liczba $1/(2\sqrt{2})$ jest kresem dolnym zbioru wartości $n\{n\sqrt{2}\}$.



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
622 ($WT = 3,4$), 623 ($WT = 1,72$)
624 ($WT = 2,5$), 625 ($WT = 3,6$)
z numerów 9/2016 i 10/2016

Michał Koźlik	Gliwice	39,32
Marian Łupieżowicz	Knurów	37,97
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	31,58
Jacek Konieczny	Poznań	29,51

Prosto z nieba: Galaktyczny spis powszechny

Astronomowie lubią łatwe do zapamiętania, a jednocześnie poprawne co do rzędu wielkości oszacowania różnych wielkości występujących we Wszechświecie. Jedną z takich liczb jest całkowita liczba gwiazd. Na podstawie obserwacji wiemy, że w naszej Galaktyce jest ich około sto miliardów (10^{11}). Z kolei obserwacje pozagalaktyczne utwierdzały nas przez lata w przekonaniu, że w obserwowalnym Wszechświecie jest tyle samo galaktyk, co gwiazd, czyli również około 10^{11} . W sumie daje to 10^{22} gwiazd.

Czytelnik uważny zauważy zapewne, że użyłem słów „całkowita liczba gwiazd” w „obserwowalnym Wszechświecie”. Czy te dwa sformułowania nie bywają czasem w sprzeczności? Pytaniem tym zajęli się ostatnio astronomowie korzystający z fenomenalnych możliwości teleskopu kosmicznego Hubble’a (obsługiwanego wspólnie przez NASA i ESA). Stworzyli oni trójwymiarową mapę galaktyk, sięgając daleko w przestrzeń, a więc i do wczesnych momentów Wszechświata. Dodatkowo zastosowano nowe modele przewidujące liczbę galaktyk zbyt słabych, by dało się je obserwować przez teleskop

Hubble’a. Oszacowana w ten sposób liczba galaktyk – 10^{12} – jest 10 razy większa od powszechnie przyjmowanej. Około 90% galaktyk to małe i niezbyt jasne skupiska gwiazd, o których niewiele wiemy!

Otrzymane wyniki świadczą o ewolucji, jakiej doświadczają galaktyki w trakcie trwania Wszechświata – podczas ostatnich kilku miliardów lat wiele z nich połączyło się w większe, przez co obserwowalna liczba jasnych galaktyk w pobliżu naszej jest mniejsza niż na wcześniejszym etapie (formowanie się większych struktur z mniejszych nazywa się żargonowo mechanizmem *bottom-up*). Skoro jednak praktycznie w każdym miejscu na niebie znajduje się galaktyka, to czemu nocne niebo nie świeci tak jasno, jak powierzchnia Słońca? W praktyce powyżej opisany paradoks Olbersa wyjaśnia się kombinacją różnych prozaicznych czynników: poczerwieniem światła odległych galaktyk, związaną z rozszerzaniem się Wszechświata oraz pochłanianiem i rozpraszaniem światła przez międzygalaktyczny pył.

Michał BEJGER

Niebo w marcu

W marcu wszystkim miłośnikom obserwacji prowadzonych „gołym okiem” polecamy koniunkcje. Już w pierwszą noc marca Mars znajdzie się w odległości 4° od Księżycy. Po zapadnięciu zmroku, czyli około godziny 17:37, oba ciała niebieskie znajdować się będą około 32° nad horyzontem południowo-zachodnim. W momencie największego zbliżenia, na tle gwiazdozbioru Ryb, Księżyc osiągnie jasność $-10,6^m$, natomiast Mars $1,0^m$. Kolejną koniunkcją marcową będzie spotkanie Jowisza z Księżycem, które nastąpi 14 III. Oba ciała, oddalone o zaledwie 2° , znaleźć będzie można na tle gwiazdozbioru Panny, a ich jasności wynosić będą $-12,5^m$ oraz $-2,4^m$ odpowiednio dla Księżycy i Jowisza. 20 III zachęcamy do obserwacji koniunkcji Księżycy i Saturna. Oba ciała, oddalone o 3° , pojawiają się na wysokości 15° nad horyzontem, na tle gwiazdozbioru Strzelca. Jasność Księżycy wyniesie $-11,9^m$, natomiast Saturna: $0,1^m$ – będą one wystarczające do obserwacji nawet z terenów mocno oświetlonych.

Obserwatorom wyposażonym w teleskopy polecamy w tym miesiącu Makemake – planetę karłowatą. Obiekt ten został odkryty w 2005 roku, a jego nazwa pochodzi od bóstwa z wierzeń ludności zamieszkującej Wyspę Wielkanocną. Odkrycie Makemake, i zaraz w tym samym roku, kolejnych obiektów tego samego typu (Eris i Haumei), spowodowało utratę przez Plutona statusu dziewiątej planety Układu Słonecznego. 23 III Makemake (rektascensja $12,97h$ i deklinacja $25^\circ 16'$) znajdzie się w opozycji względem Słońca, na tle gwiazdozbioru Warkocza Bereniki. Obiekt o jasności $16,9^m$ będzie widoczny przez większą część nocy. Makemake zobaczymy zaraz po zmroku, na wysokości 25° nad horyzontem wschodniego nieba. Najwyższy punkt na niebie osiągnie około północy, a tuż przed świtem znajdzie się 41° nad horyzontem nieba zachodniego.

Celem trudniejszym do obserwacji, jednak zdecydowanie wartym uwagi, będzie kometa

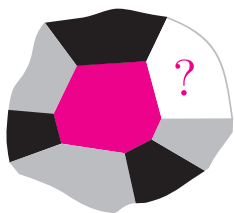
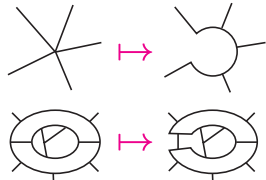
73P/Schwassmann–Wachmann. Kometa odkryta została w 1930 roku, a jej nazwa pochodzi od nazwisk odkrywców Arnolda Schwassmanna i Arno Wachmanna. W momencie odkrycia kometa zbliżyła się do Ziemi na odległość raptem $0,062$ j.a., co odpowiada odległości trochę większej niż 9 milionów kilometrów. Jak wskazuje symbol P w nazwie, kometa ta jest obiektem okresowo obiegającym Słońce. Choć na jeden obieg wokół naszej Diennej Gwiazdy potrzebuje raptem 5,43 lat, to przez ponad pół wieku nie budziła wielkiego zainteresowania pośród astronomów. Sytuacja uległa zmianie, gdy w 1995 roku zaobserwowano rozpad komety na części. Podobną sytuacja zdarzyła się w roku 2006. Najbardziej sprzyjającą nocą do obserwacji tegorocznego przelotu 73P/Schwassmann–Wachmann jest 9 III. Tej nocy obiekt znajdzie się na południowym niebie, na wysokości około 17° . Jej odległość od Słońca wyniesie $0,98$ j.a. oraz $1,40$ j.a. od Ziemi. Jasność komety jest prognozowana na 12^m . Należy jednak pamiętać, że tak jak efemerydy, czyli przyszłe położenia komet, astronomowie potrafią dobrze określić, tak już jasności są trudniejsze do oszacowania. Wynika to z faktu, że jasność danej komety zdeterminowana jest jej zachowaniem w pobliżu Słońca. W przypadku 73P/Schwassmann–Wachmann podczas jej przelotu w roku 1995 prognozowano jej jasność na 13^m , jednak, w wyniku rozpadu jądra, nastąpiło pojaśnienie komety aż do wartości 7^m . Warto zatem kilka dni przed planowanymi obserwacjami sprawdzić, jaka jest aktualna szacowana jasność obiektu i tym samym przygotować do obserwacji odpowiednie instrumenty.

W planach obserwacyjnych warto wziąć również pod uwagę pełnię naszego naturalnego satelity, która wypada 12 III, natomiast nów 28 III. Warto pamiętać również, że równonoc wiosenna przypadnie w tym roku 20 III, natomiast 26 III nastąpi zmiana czasu z zimowego na letni.

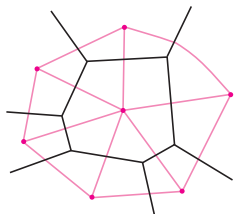
Karolina BĄKOWSKA



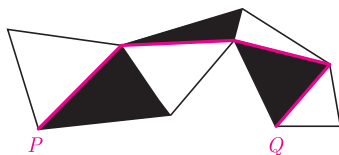
Mapa jest *regularna*, gdy każdy wierzchołek ma stopień 3 oraz jeśli dwa kraje sąsiadują, to wzdłuż spójnego fragmentu granicy. Każdą mapę można do takiej sprowadzić i pomalowanie nowej mapy jest dobre również dla wyjściowej:



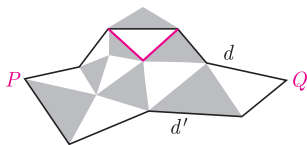
Rys. 1. Np. Paragwaj, Luksemburg, województwo wielkopolskie świadczą o tym, że do pomalowania odpowiednich map nie wystarczą trzy kolory.



Rys. 2. Fragmety map M i M' .



Rys. 3. $n = 1$, $k = 3$, więc Q ma kolor $1 - 3 = -2 \equiv 1 \pmod{3}$.



Rys. 4. Dwoma kolorowymi bokami trójkąta zastępujemy pojedynczą krawędź drogi d (trzeci bok tego trójkąta).

Literatura: J.H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*, Cambridge University Press, 1966.

Kraje, stolice, granice... Joanna JASZUŃSKA

Styczniowy deltoid poświęcony był dwubarwnym mapom. Udowodniliśmy w nim

Twierdzenie 1. *Mapę można pomalować dwoma kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej wierzchołek jest stopnia parzystego.*

Przyjmujemy tę samą terminologię oraz założenia o mapach i ich kolorowaniach.

Ograniczmy teraz nasze rozważania do map *regularnych* (definicja na marginesie). W każdym wierzchołku takiej mapy schodzą się trzy kraje, z pewnością więc dwie barwy nie wystarczą do pomalowania ich. Co więcej, jeśli jakiś kraj ma nieparzystą liczbę sąsiadów, to nie da się ich pokolorować dwiema barwami (rys. 1). Dowodzi to jednej z implikacji w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. *Mapę regularną można pomalować trzema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej kraj ma parzystą liczbę sąsiadów.*

W dowodzie drugiej implikacji przyda się pojęcie mapy M' *dualnej* do mapy M : jej wierzchołkami są stolice państw mapy M , a jeśli dwa państwa sąsiadują, to w poprzek ich granicy rysujemy krawędź łączącą stolice (rys. 2).

Dowód. Jeśli każdy kraj na mapie M ma parzystą liczbę sąsiadów, to każdy wierzchołek mapy M' ma stopień parzysty. Na mocy twierdzenia 1 możemy więc mapę M' pomalować na czarno-biało. Ponadto każdy jej kraj jest trójkątem, co wynika z regularności mapy M . Pomalujemy wierzchołki M' barwami 0, 1, 2.

Pokolorujmy dowolny wierzchołek P barwą 0. Następnie każdy inny wierzchołek Q połączmy z P dowolnym ciągiem różnych krawędzi i pomalujemy kolorem $n - k \pmod{3}$, gdzie n to liczba krawędzi wzdłuż tej drogi od P do Q , które mają czarny trójkąt po lewej stronie, a k – po prawej (rys. 3). Aby zakończyć dowód, należy wykazać, że kolor wierzchołka Q nie zależy od wyboru drogi.

Rozważmy dwie różne drogi d i d' i deformujmy d do d' , „mijając” kolejne trójkąty jak na rysunku 4. Wówczas jedną krawędź wliczaną do n zastępujemy dwiema liczonymi do k lub jedną z k — dwiema z n . Ponieważ $2 \equiv -1$ oraz $-2 \equiv 1 \pmod{3}$, taka zmiana nie wpływa na kolor wierzchołka Q . Stąd faktycznie kolor ten nie zależy od wyboru drogi, a barwy sąsiednich wierzchołków (państw mapy M) różnią się o 1. \square

Słynne twierdzenie orzeka, że każdą mapę da się pomalować najwyżej czterema barwami. Dowodu (bardzo trudnego) nie przedstawimy, ale pokażemy równoważność pewnych warunków.

Twierdzenie 3. *Mapę regularną można pomalować czterema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy jej krawędzie można pomalować trzema kolorami tak, by w każdym wierzchołku schodziły się krawędzie trzech różnych barw.*

Dowód. Rozważmy mapę pomalowaną czterema kolorami: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Pokolorujmy każdą z krawędzi barwą odpowiadającą sumie graniczących wzdłuż niej państw, przy czym dodawanie wykonujemy po współrzędnych i modulo 2, np. $(1, 0) + (1, 1) = (0, 1)$. Są wówczas tylko trzy możliwe kolory krawędzi: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ — sumy sześciu możliwych par różnych barw krajów.

Zauważmy, że każda barwa zsumowana sama ze sobą daje $(0, 0)$. Stąd suma kolorów trzech krawędzi w każdym z wierzchołków też równa jest $(0, 0)$, gdyż kolor każdego z państw jest w niej liczony dwukrotnie. Wobec tego dwie krawędzie jednego wierzchołka nie mogą mieć tego samego koloru, gdyż wówczas ich suma byłaby równa $(0, 0)$ i zmieniłaby się po dodaniu trzeciej (różnej od $(0, 0)$). Uzyskaliśmy więc odpowiednie kolorowanie krawędzi.

Załóżmy teraz, że krawędzie mapy pokolorowano barwami $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ w sposób opisany w twierdzeniu. Pomalujmy dowolnie wybrany kraj P kolorem $(0, 0)$. Następnie każdy inny kraj Q połączmy z P dowolną drogą nieprzechodzącą przez wierzchołki mapy i pomalujmy kolorem równym sumie barw wszystkich przekraczanych po drodze granic. Aby zakończyć dowód, należy wykazać, że kolor państwa Q nie zależy od wyboru drogi. Rozumowanie to, bazujące na deformowaniu drogi, przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 1 (tym razem każdy wierzchołek ma stopień 3 i suma kolorów dwóch jego krawędzi równa jest kolorowi trzeciej). Barwy sąsiednich krajów różnią się wówczas o barwę ich granicy. \square