



Nakład: 3500 egz.



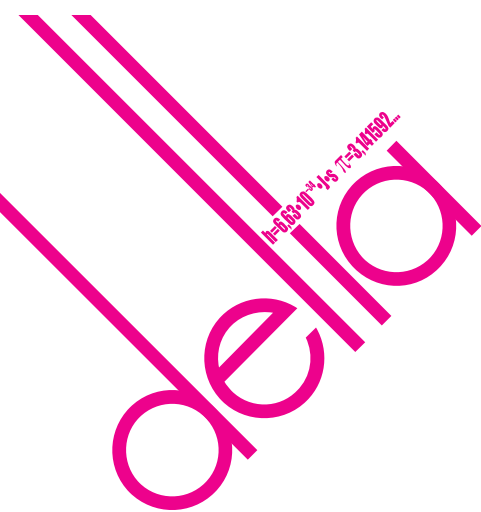
deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA






$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $T=3,141592 \dots$

NR 1 (536) 2019
CENA 4 ZŁ VAT 5%
PL ISSN 0130-3005 | NR IND 35550 X
MIESECZNIK
www.deltami.edu.pl

KRATY
str. 6



SPIS TREŚCI NUMERU 1 (536)

 Całkowita dyskrecja <i>Bartłomiej Bzdega</i>	str. 1
Strzałka czasu <i>Piotr Szymczak</i>	str. 2
A jednak się da (III) Tym razem: o dowodach z wiedzą zerową. <i>Tomasz Kazana</i>	str. 4
Kraty <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 6
 Poznajemy tajemnice genów <i>Magdalena Fikus</i>	str. 9
Efekty relatywistyczne bez teorii względności <i>Ludwik Lehman</i>	str. 10
 Nieskończoność <i>Michał Korch</i>	str. 12
Szereg Leibniza i punkty kratowe <i>Michał Krych</i>	str. 14
 Zadania	str. 18
Informatyczny kącik olimpijski (123): <i>Or</i>	str. 19
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Einstein w centrum Galaktyki	str. 22
Niebo w styczniu	str. 22
Aktualności Ze stałą Plancka po ziemniaki	str. 24
 O deltoidach <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25

Drogi Czytelniku,
pewnie dziwisz się, że trzymasz w ręku *Delte*, w której stopce redakcyjnej nie figuruje ani Marek Kordos (założyciel i redaktor naczelny od 1974 r.), ani Krystyna Kordos (sekretarz redakcji od 1978 r.). Skojarzenie jest jednoznaczne: redakcja *Delty* to Marek, Krystyna i „reszta”. Było tak przez prawie 45 lat, w czasie których *Delta* pokonała wiele zakrętów: stan wojenny, reglamentacja papieru, zmiany wydawców, etc. – dzięki wielkiej determinacji zespołu, kierowanego i motywowanego przez charyzmatycznego Redaktora Naczelnego, historia *Delty* może toczyć się dalej.

Krystyno i Marku,
cieszymy się, że mogliśmy Was poznać i z Wami pracować. Jesteśmy wdzięczni za mądrość i doświadczenie, którymi się z nami dzieliliście. Mamy nadzieję, że chociaż część tego bogactwa udało nam się przyswoić. Ufamy, że wystarczająco dobrze nas wychowaliście i przygotowaliście do podjęcia tego wielkiego wyzwania, jakim jest wydawanie stworzonego przez Was pisma.

Dziękujemy
Redakcja

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski



Całkowita dyskrecja

Bartłomiej BZDEGA

W świecie liczb rzeczywistych z nierównością $a < b$ niewiele da się zrobić, natomiast jeśli a i b są liczbami całkowitymi, to możemy ją wzmocnić: $a + 1 \leq b$. W zadaniach 1, 2 i 3 korzystamy z tej własności liczb całkowitych.

Nie jest to obserwacja szczególnie głęboka, ale wartościowa dzięki swym liczным zastosowaniom, przeformułowaniu i uogólnieniom. Możemy, dla przykładu, powiedzieć, że pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma żadnej innej liczby całkowitej, a pomiędzy kwadratami liczb naturalnych nie ma żadnych kwadratów liczb naturalnych; analogicznie dla liczb pierwszych czy wielokrotności ustalonej liczby – w ogólności dla dowolnego ciągu rosnącego. Takie spostrzeżenia są użyteczne w zadaniach 4, 5 i 6.

Można stosować jeszcze nieco inne podejście: w każdym ograniczonym przedziale znajduje się tylko skończenie wiele liczb całkowitych. Jeżeli więc uda się jakąś niewiadomą z zadania oszacować z góry i z dołu, to możemy uwzględnić wszystkie jej możliwe wartości, rozpatrując kilka przypadków. Takie postępowanie stosujemy w zadaniach 7 i 8.

Użyteczny bywa również następujący wniosek: jeśli w pewnym zbiorze znajdziemy n różnych liczb naturalnych, to co najmniej jedna z nich jest większa lub równa n . Ten motyw występuje w zadaniach 9 i 10.

Zadania. (Uwaga. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.)

1. Udowodnić, że nie istnieją liczby naturalne a, b i c , które spełniałyby równość $a^a + b^b = c^c$.
2. Wykazać, bez powoływania się na Wielkie Twierdzenie Fermata, że jeśli liczby naturalne a, b, c oraz $n \geq 2$ spełniają równość $a^n + b^n = c^n$, to $a, b, c > n$.
3. Ciąg (a_n) liczb naturalnych spełnia warunki $a_{2n} = 3a_n - 1$ i $a_{2n+1} = 3a_n + 1$ dla wszystkich naturalnych n . Dowieść, że jest to ciąg rosnący.
4. Dowieść, że sumę dwóch kolejnych liczb pierwszych większych od 2 można przedstawić w postaci iloczynu trzech liczb naturalnych większych od 1.
5. Liczby a i b są naturalne. Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna n , dla której $a \cdot 2^n + b$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony, rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n) , który spełnia warunki: $a_n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ oraz $a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ dla wszystkich $n \geq 4$.
7. Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi podzielność $1 + 2^n + 4^n \mid 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$?
8. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych (a, b) , dla których liczby $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ są sześcianami liczb naturalnych.
9. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będą liczbami naturalnymi. Dowieść, że $\text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq n \cdot \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
10. Zbiór A stanowi $n \geq 4$ liczb naturalnych, przy czym spełniony jest warunek $\text{NWW}(a, b) > c$ dla wszystkich parami różnych $a, b, c \in A$. Dowieść, że suma odwrotności elementów zbioru A jest mniejsza od 2.

Wskazówki do zadań

1. Przyjmijmy, dla dowodu nie wprost, że $a^a + b^b = c^c$. Bez straty ogólności $a \geq b$. Można z tego wywnioskować $a^a \geq b^a \geq (a+1)^a \geq (a+1)^{a+1}$, która prowadzi do sprzeczności.

2. Bez straty ogólności niech $a \leq b < c$. Należy uzasadnić i wykorzystać nierówność $c^n \geq (b+1)^n > b^n + n b^{n-1}$ z której da się wywnioskować, że $a > n$.

3. Dość łatwo wykazać, że $a_2 < a_1$. Zależny indukcyjnie, przy ustalonym $n \geq 2$, że $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$. Trzeba dowieść, że $a_{n+1} > a_n$. Należy tu rozważyć dwa przypadki: $n = 2t$ oraz $n = 2t + 1$ dla pewnego całkowitego dodatniego t . Pierwszy przypadek jest natychmiastowy i nie wymaga nawet skorzystania z założenia indukcyjnego. W drugim korzystamy z nierówności $a_{t+1} > a_t$, którą zapiszemy w postaci $a_{t+1} \geq a_t + 1$.

4. Jaką liczbą jest średnia arytmetyczna dwóch kolejnych liczb pierwszych, większych od 2?

5. Przyjmijmy, że liczba $a \cdot 2^n + b$ jest kwadratem naturalnego n . Wtedy liczby $a \cdot 2^{n+2} + b + 1$ i $4(a \cdot 2^n + b)$ też są kwadratami, a różnica między nimi dla odpowiednio dużych n jest za mała.

6. Przyjmijmy, że taki ciąg istnieje. Wykazujemy przez indukcję, że $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 2a_n$ dla wszystkich $n \geq 4$. Z tego trzeba wywnioskować równość $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ dla wszystkich $n \geq 4$, a to prowadzi do sprzeczności.

7. Iloraz $\frac{1+2^{n+1}+4^{n+1}}{1+2^n+4^n}$ jest liczbą naturalną i dość łatwo oszacować go z góry i z dołu. Poem rozważamy wszystkie możliwości.

8. Przyjmijmy, że $a \geq b$. Wtedy $a^3 + 6ab + 1 \leq a^3 + 6a^2 + 1 > (a+2)^3$, więc $a^3 + 6ab + 1 = (a+1)^3$ czyli $a = 2b + 1$. Podstawiając tę wartość, uzyskujemy oszacowania $b^3 > b^3 + 6ab + 1 > (b+4)^3$ i mamy trzy przypadki do rozważania.

9. Niech $W = \text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Liczby $\frac{a_1}{W}, \frac{a_2}{W}, \dots, \frac{a_n}{W}$ są naturalne i różne.

10. Niech M będzie największą liczbą w zbiorze A . Każde $a \in A$ ma $\lfloor M/a \rfloor$ wielokrotności, które nie przekraczają M . Z treści zadania wynika, że wszystkie te wielokrotności są różne.

Strzałka czasu

Piotr SZYMCZAK*

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

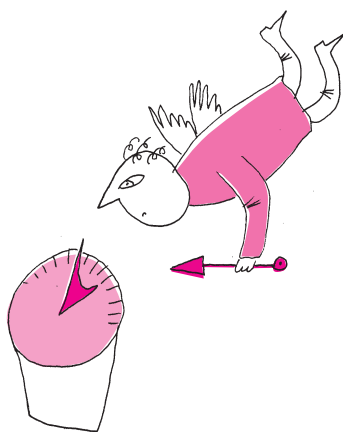
Przestrzeń i czas to dwa pojęcia, z którymi stykamy się najwcześniej, dwa ograniczenia narzucone nam przez Stwórcę, który – jak twierdzą święte księgi – jednocześnie stoi ponad nimi (jest wszechobecny i ponadczasowy). A o tym, że nas dotyczą, przekonujemy się, nierzadko w bolesny sposób – spędzając godziny w pociągu do Piły czy niemiłosiernie nudząc się w kolejce do dentysty. Z czasem jest zresztą gorzej niż z przestrzenią, bo chociaż z Piły można wrócić, to oczekiwanie przebiega zawsze w jednym tylko kierunku – przesuwał nas z przeszłości w kierunku chwil przyszłych. Pod prąd rzeki czasu przemieścić się nie da, chwile przelatują i odchodzą w przeszłość, zostając tylko w naszej pamięci. Przemijanie, ulotność i nietrwałość czasu są więc nieodłączną cechą naszego codziennego życia – źródłem zarówno rozpacz, jak i piękna, bo przecież to ulotność chwili czyni ją niepowtarzalną. Fakt, że pamiętamy przeszłość, a nie pamiętamy przyszłości, czyli wyróżnienie kierunku upływu czasu przez nasz umysł nazywamy psychologiczną strzałką czasu. Jak Biała Królowa mówiła Alicji: „To bardzo nędzny rodzaj pamięci, taki, który działa tylko w przeszłość”.

Biała Królowa pamięta, że za chwilę ukłuje się szpilką od broszki, my jednak tego nie potrafimy – czas biegnie dla nas zdecydowanie w jednym kierunku. I dlatego tym większe jest nasze zaskoczenie, gdy uświadamiamy sobie, że tej asymetrii między przyszłością a przeszłością nie znajdziemy w większości teorii fizycznych. Równania mechaniki klasycznej są nieczułe na zmianę kierunku czasu, mogą równie dobrze opisywać procesy zachodzące w przód, jak i wstecz w czasie, nie wyróżniając żadnego z nich. Gdybyśmy więc stworzyli demona, który – jak pisał Laplace – „w danej chwili znałby wszystkie siły ożywiające przyrodę i wzajemne położenie rzeczy”, to dla takiej istoty „nic nie byłoby niepewnym i przyszłość byłaby jej przytomna, podobnie jak przeszłość”. Ta wizja świata, gdzie przyszłość jest tak samo określona jak przeszłość, zaostrza się jeszcze bardziej w świecie relatywistycznym, w którym czas staje się jednym z czterech wymiarów statycznego, geometrycznego tworzywa zwanego czasoprzestrzenią.

Są jednak teorie fizyczne, w których asymetria zdaje się odgrywać większą rolę. Jedną z nich jest termodynamika, opisująca procesy, w których uczestniczy wiele cząstek. Wśród nich łatwo znaleźć zjawiska nieodwracalne: mleko wlane do filiżanki miesza się z kawą i zmienia jej czerń w brąz, gaz wypuszczony ze słoika rozlatuje się po całym pokoju, a drwa wrzucone do kominka płoną. Procesów odwrotnych – w których jednorodny płyn dzieliłby się na mleko i kawę, a gaz sam zbierał się w słoiku – nie obserwujemy. Termodynamika radzi sobie z opisem tych procesów, zauważając, że układ przechodzi od stanów mniej do bardziej prawdopodobnych. W skali mikro konfiguracji atomów wypełniających cały pokój jest więcej niż tych, w których wszystkie cząstki mieszczą się w słoiku. Przyjęcie, że wszystkie te konfiguracje są równoprawdopodobne, prowadzi do konkluzji, że w makroskali dużo bardziej prawdopodobny będzie stan „cząstki równomiernie wypełniają pokój” niż stan „wszystkie cząstki są w słoju”. Liczbę stanów mikroskopowych mogących urzeczywistnić dany stan makroskopowy mierzy entropia, stąd też dostajemy słynną drugą zasadę termodynamiki mówiącą o tym, że w procesach spontanicznych entropia rośnie.

Jak to jednak możliwe, że termodynamika – opisująca ewolucję układów w skali makro – ma strzałkę czasu, podczas gdy ruch poszczególnych cząstek, opisywany prawami Newtona, tej strzałki nie wykazuje? Obiekcja taka została podniesiona przez Josefa Loschmidta w 1876 r. (i nosi czasem nazwę paradoksu Loschmidta). Boltzmann, odpowiadając Loschmidtowi, zauważył, że nie tylko nie ma sprzeczności między nieodwracalnością w skali makro i odwracalnością w mikroskali, lecz wręcz ta pierwsza wydaje się wynikać z tej drugiej. Wracając do przykładu z gazem, który w chwili $t = 0$ znajduje się wewnątrz słoika, a w chwili t_1 w wyniku rozprężenia wypełnia równomiernie cały pokój, Boltzmann wskazuje, że gdyby obserwować ewolucję wstecz w czasie

O demonie Laplace'a pisaliśmy w Δ_{15}^7 .





Polecamy drugą Studencką Konferencję Zastosowań Matematyki DwuMian. Wydarzenie przygotowywane jest przez koła naukowe i organizacje studenckie z Politechniki Warszawskiej oraz Uniwersytetu Warszawskiego. Jego celem jest integracja studentów i doktorantów zainteresowanych zastosowaniami metod matematycznych w naukach technicznych i przyrodniczych czy też statystyce i inżynierii danych. Na konferencji będzie można wysłuchać prezentacji innych studentów bądź wygłosić własny referat. Odbędzie się także sesja plakatowa, ciekawe warsztaty (prowadzone przez firmy wspierające i organizatorów) oraz wieczory integracyjne. Poza wystąpieniami studenckimi będzie możliwość wysłuchania zaproszonych gości, którzy matematykę stosują zawodowo.

Pierwszy DwuMian przyciągnął ponad 200 uczestników, wśród których zyskał dużą aprobatę.

Konferencja odbędzie się w dniach 22–24 marca 2019 roku na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW. Zapisy oraz więcej informacji można znaleźć na stronie dwumian.mini.pw.edu.pl i fb.com/DwuMianWarszawa



(znów startując z gazu wypełniającego słoik dla $t = 0$), to gaz ten również się rozpręży, by w chwili $-t_1$ w przeszłości wypełnić pokój. Ewolucja jest więc w pełni odwracalna, również na poziomie makroskopowym, a wrażenie nieodwracalności bierze się stąd, że warunki początkowe (gaz w słoiku, drwa przed kominkiem) odpowiadają stanom o bardzo niskiej entropii. Co więcej, można pokazać, że wszelkie naruszenia odwracalności na poziomie mikroskopowym będą skutkowały łamaniem drugiej zasady termodynamiki. A więc – paradoksalnie – nieodwracalność w skali makro jest ściśle związana z odwracalnością w mikroskali, a termodynamiczna strzałka czasu okazuje się złudzeniem.

Skąd biorą się stany początkowe o niskiej entropii? Kiedy prześledzimy procesy, w wyniku których powstały te stany i ich warunki początkowe, to tak cofając się w czasie, dojdziemy do wniosku, że Wszechświat jako całość na początku swojego istnienia musiał mieć bardzo niską entropię. To rozumowanie jest najeżone trudnościami, trudno bowiem zdefiniować globalną entropię Wszechświata, nie jest też łatwo dołączyć do rozważań o entropii oddziaływania grawitacyjne ze względu na ich długi zasięg. Nie ulega jednak wątpliwości, że termodynamiczna strzałka czasu splata się w intrygujący sposób ze strzałką kosmologiczną, wskazującą na kierunek ekspansji Wszechświata.

A co z czasem w mechanice kwantowej? Tu sytuacja jest dość dziwaczna (tak jak i sama teoria kwantów). Podstawowym obiektem w mechanice kwantowej jest funkcja falowa, powiązana z prawdopodobieństwem znalezienia układu w różnych stanach fizycznych. Wielkość ta ewoluje w sposób deterministyczny, zgodnie z równaniem Schrödingera, które opisuje, jak fale prawdopodobieństwa propagują się i interferują, podobnie jak fale na wodzie. Tak jak równanie Newtona, równanie Schrödingera jest nieczułe na zmianę kierunku upływu czasu. Wydawałoby się więc, że świat kwantowy jest w skali mikro odwracalny, podobnie jak świat klasyczny. Byłaby to jednak konkluzja przedwczesna, bo wszystko komplikuje się w momencie pomiaru stanu układu kwantowego – układ wybiera stan odpowiadający danemu wynikowi pomiaru, a funkcja falowa nagle, w sposób nieciągły, zmienia swoją postać. Ten element ewolucji kwantowej jest nieodwracalny i choć ostatnio pojawiają się prace wskazujące na związek takiej kwantowej strzałki czasu ze strzałką termodynamiczną, zdecydowanie więcej tu pytań i wątpliwości niż odpowiedzi.

I wreszcie – czy te wszystkie strzałki (kosmologiczna, termodynamiczna, kwantowa) mają coś wspólnego z psychologiczną strzałką czasu? Czy postrzeganie przez nas czasu jako jednokierunkowy jest rzeczywiście związane z takim, a nie innym stanem początkowym Wszechświata? A może upływ czasu jest tylko złudzeniem, jak sądził m.in. Albert Einstein, który w listach do swojego przyjaciela Michele Besso poruszał ten temat wielokrotnie? W liście z roku 1953 r. Einstein krytykował pracę przyjaciela o nieodwracalności w teorii względności, pisząc „Wchodzisz na grząski grunt. Nie ma nieodwracalności w podstawowych prawach fizyki, to tylko iluzja, którą stwarzają szczególne warunki początkowe”. Kiedy zaś Besso umarł, Einstein napisał do jego siostry: „Michele opuścił ten dziwny świat tuż przede mną. Nie ma to żadnego znaczenia. Dla nas, fizyków z przekonania, różnica między przeszłością, teraźniejszością i przyszłością jest złudzeniem, choć przyznać trzeba, że złudzeniem uporczywym”.

Problem istnienia związku między termodynamiczną a psychologiczną strzałką czasu to tylko jedna z wielu zagadek dotyczących natury czasu, które pozostają nierozwikłane. Łatwo dorzucić kolejne: Dlaczego Wszechświat na początku istnienia miał tak niską entropię, co spowodowało nakręcenie termodynamicznego zegara? Co dzieje się ze strzałką czasu w skali Plancka, w której kwantowe efekty grawitacji stają się istotne, a czas i przestrzeń tracą swoją ciągłą naturę? Jak wygląda strzałka czasu we Wszechświecie z zamkniętymi pętlami czasowymi, w których możliwa jest podróż wstecz w czasie? Czy znajdziemy kiedyś odpowiedzi na te wszystkie pytania? Czas pokaże.

A jednak się da (III),

czyli saga kryptologiczna w odcinkach.

Tym razem: o dowodach z wiedzą zerową.

Tomasz KAZANA

Bywa tak, że chcemy o czymś przekonać niedowiarków, jednak w taki sposób, aby uwierzyli, ale też aby za dużo się nie dowiedzieli. Fabularna, nieinformatyczna ilustracja, którą lubię przywoływać, gdy próbuję wyrazić, o co mi chodzi, jest następująca. Wyobraźmy sobie, że potrafię zliczyć liczbę liści na drzewie, jeśli tylko spojrzę na nie przez 5 sekund. Więcej: twierdę, że umiem to publicznie udowodnić w przeciągu 5 minut, i to tak, że wszyscy mi uwierzą, ale nikt się nie zorientuje, jak ja to robię!

Jak mogłby wyglądać *protokół*, który realizuje powyższe założenia? Popatrzmy:

1. Proszę publiczność o wskazanie dowolnego drzewa.
2. Patrzę na to drzewo przez 5 sekund i mówię: „to drzewo ma M liści”.
3. Proszę publiczność o zawiązanie mi oczu.
4. Proszę publiczność o podejście do analizowanego drzewa i zerwanie z niego dowolnych K liści (oczywiście K publiczność ustala samodzielnie, nie informując mnie o swoim wyborze).
5. Proszę publiczność o rozwiązanie mi oczu.
6. Ponownie patrzę na drzewo przez 5 sekund i mówię: „to drzewo ma X liści”.

I teraz tak: jeśli $X \neq M - K$, to z pewnością nikogo nie przekonałem. Jednak jeśli $X = M - K$, to eksperyment daje do myślenia. Oczywiście, aby zmniejszyć szansę zdarzenia, że po prostu miałem szczęście, protokół weryfikacyjny można kilka razy powtórzyć, dla różnych drzew i różnych wyborów zmiennej K . Jeśli więc pozytywnie przejdę na przykład 10 testów pod rząd, to sądzę, że już wszyscy mi uwierzą, że naprawdę umiem błyskawicznie zliczać liście na drzewie. Mimo to: nikt nie ma nawet cienia wskazówki, jak ja to robię!

Właśnie takie przekonywanie jak wyżej nazywamy fachowo *dowodzeniem z wiedzą zerową* (*zero-knowledge proofs*), a bardziej kolokwialnie: przekomarzaniem się w stylu „wiem, ale nie powiem”. Okazuje się, że zaskakująco wiele stwierdzeń matematycznych da się udowodnić w taki właśnie sposób. W szczególności: gdybyśmy na przykład potrafili rozstrzygnąć pozytywnie hipotezę Riemanna, to możemy zaproponować światu pewną zabawę, w wyniku której wszyscy uwierzą, że faktycznie hipoteza Riemanna jest prawdziwa, ale nikt nawet powierzchownie nie liźnie smaku naszego dowodu. Jak to zrobić – obiecuję naszkicować na końcu, a na razie zajmijmy się prostszym przykładem.

Izomorfizm grafów

Opiszemy protokół dowodu z wiedzą zerową dla problemu izomorfizmu grafów. Przypomnijmy: problem polega na rozstrzygnięciu, czy dwa dane grafy G_1 oraz G_2 są izomorficzne, czy też nie. Załóżmy więc, że znamy pewien izomorfizm π między G_1 a G_2 . Naszym celem jest przekonać *publiczność* (fachowo: *weryfikatora*), że faktycznie znamy π , ale bez ujawniania, jak to π w rzeczywistości wygląda.

Do dzieła:

1. Postulujemy publicznie, że grafy G_1 oraz G_2 są izomorficzne.
2. Publikujemy dowolny graf H , który jest izomorficzny z G_1 (czyli również z G_2).
3. Weryfikator wybiera liczbę $k \in \{1, 2\}$.
4. Publikujemy izomorfizm π' między H a G_k .
5. Weryfikator sprawdza, czy π' jest rzeczywiście poprawnym izomorfizmem między H a G_k .
6. Kroki 2–5 powtarzamy N razy.

Powyższy protokół ma trzy kluczowe cechy:

- (a) Jeśli naprawdę znamy postulowany izomorfizm, to jesteśmy zawsze w stanie wykonać poprawnie cały protokół;

Prezentowana anegdota jest elementem informatycznego folkloru. Autor tego tekstu po raz pierwszy usłyszał ją od profesora Damiana Niwińskiego.



Szerzej o problemie izomorfizmu grafów pisał Łukasz Kowalik w Δ_{18}^{12} .

Założmy, że zarówno zbiór wierzchołków G_1 , jak i G_2 to $\{1, 2, \dots, n\}$. Permutacja $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ jest izomorfizmem między G_1 a G_2 , gdy dla każdej pary i, j spełniony jest warunek: w G_1 istnieje krawędź między wierzchołkami i a j wtedy i tylko wtedy, gdy w G_2 istnieje krawędź między wierzchołkami $\pi(i)$ a $\pi(j)$.

Dowody z wiedzą zerową nie muszą być stuprocentowo pewne. Formalna definicja (której w tym tekście nie podajemy) dopuszcza bardzo małe (*negligible*, pomijalne) prawdopodobieństwo, że weryfikator zostanie oszukany.

- (b) Szansa, że oszukamy weryfikatora (to znaczy: przekonamy go, że znamy izomorfizm między G_1 a G_2 , mimo że wcale go nie znamy) wynosi co najwyżej $\frac{1}{2^N}$;
- (c) Przekonany weryfikator nie ma bladego pojęcia, jak może wyglądać izomorfizm między G_1 a G_2 .

Naszkicujmy zatem uzasadnienia stwierdzeń (b) oraz (c) (pozwolimy sobie napisać, że (a) jest trywialne):

Ad (b) Zauważmy, że jeśli odnosimy sukces z prawdopodobieństwem powyżej $\frac{1}{2^N}$, to przynajmniej w jednej z N iteracji protokołu, w kroku 4. byliśmy przygotowani na opublikowanie izomorfizmu zarówno między H a G_1 (ozn. π_1), jak i między H a G_2 (ozn. π_2). Istotnie – gdyby tak nie było, to w każdej iteracji mielibyśmy szansę co najwyżej $\frac{1}{2}$ na akceptację przez weryfikatora, a więc ogólnie – co najwyżej tylko $\frac{1}{2^N}$. Jednak znajomość zarówno π_1 jak i π_2 oznacza również znajomość $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, a to jest przecież izomorfizm między G_1 a G_2 .

Ad (c) Zastanówmy się, czego – po wykonaniu całego protokołu – *dowiedział* się weryfikator. Jak widać, poznał N różnych trójek postaci (H_i, e_i, π'_i) takich, że π'_i jest izomorfizmem między H_i a G_{e_i} . Czy taka wiedza jest w jakikolwiek sposób ekskluzywna? Otóż łatwo zauważyć, że absolutnie nie – przecież takie trójki można sobie samemu (w dowolnych ilościach) produkować, znając wyłącznie G_1 oraz G_2 , a te są przecież publiczne od samego początku!

Cykl Hamiltona w grafie

Cykl Hamiltona to takie uszeregowanie wierzchołków grafu, że między każdą parą kolejnych (oraz między ostatnim i pierwszym) wierzchołków w tym uszeregowaniu istnieje w tym grafie krawędź.

Czas na nieco bardziej skomplikowany przykład – protokół dowodu z wiedzą zerową dla problemu istnienia cyklu Hamiltona w grafie. W tym protokole będziemy używać idei *zobowiązań* (Commit), opisanych przez Łukasza Rajkowskiego w poprzednim odcinku AJSD, w numerze Δ_{18}^{11} .

Jak poprzednio, założmy, że znamy cykl Hamiltona $c = (a_1, \dots, a_n)$ pewnego grafu G . Teraz:

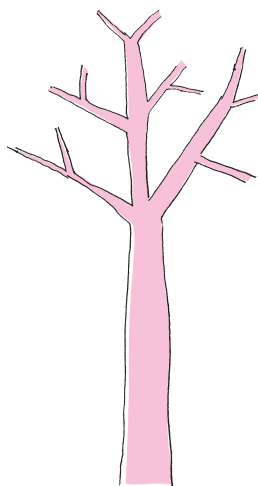
1. Postulujemy publicznie, że w G istnieje cykl Hamiltona. Będziemy próbować to udowodnić, ale nie zdradzając, jak faktycznie wygląda c .
2. Losujemy dowolną permutację π oraz obliczamy graf $\pi(G)$ (czyli izomorficzny do G , ale z wierzchołkami spemutowanymi według π).
3. Upubliczniamy następujące zobowiązania:
 - Commit(π)
 - Commit(e_1), Commit(e_2), ..., Commit(e_m), gdzie $\{e_1, \dots, e_m\}$ stanowią opisy wszystkich krawędzi grafu $\pi(G)$ (to znaczy: każde e_i jest parą pewnych wierzchołków grafu $\pi(G)$).
4. Weryfikator wybiera liczbę $k \in \{1, 2\}$.
5. Jeśli $k = 1$, to otwieramy wszystkie (zarówno permutacji, jak i krawędzi) zobowiązania z kroku 3.
6. Jeśli $k = 2$, to otwieramy zobowiązania tych (i tylko tych) krawędzi, które tworzą cykl Hamiltona w $\pi(G)$ (NIE otwieramy zobowiązania permutacji!).
7. Jeśli $k = 1$, to weryfikator sprawdza, czy otwarte krawędzie $\{e_1, \dots, e_m\}$ są faktycznie krawędziami grafu $\pi(G)$.
8. Jeśli $k = 2$, to weryfikator sprawdza, czy faktycznie otwarte krawędzie tworzą jeden zamknięty cykl długości n .
9. Kroki 2–8 powtarzamy N razy.

Telegraficzny skrót wiedzy o zobowiązaniach: po opublikowaniu Commit(x) praktycznie nie jest możliwe odczytanie x . *Otworzyć* zobowiązanie (ujawniając x) może tylko jego autor, przy czym – nie jest w stanie oszukać, czyli wmówić, że w zobowiązaniu znajdował się jakiś $x' \neq x$.

Intuicja: jeśli $k = 1$, to weryfikator sprawdza, czy nie oszukujemy przy konstruowaniu $\pi(G)$; jeśli $k = 2$, to weryfikator sprawdza, czy w zobowiązaniach grafu faktycznie jest cykl Hamiltona; żadna z tych informacji pojedynczo nie pozwala na odtworzenie cyklu Hamiltona w G , jednak aby przygotować zobowiązania z kroku 3 tak, aby mieć pewność przejścia obu testów w krokach 7–8, TRZEBA znać cykl Hamiltona w G .

Prezentowane przykłady są poprawne i działają w rozsądnej asymptotycznej złożoności czasowej, jednak daleko im jeszcze do uznania ich za zupełnie praktyczne. Stąd istnieje ważny nurt badań kryptologicznych poszukujących innych protokołów zero-knowledge. Pewien ważny postępek miał miejsce w roku 2007, gdy Jens Groth i Amit Sahai zaproponowali bardzo szybkie (po prostu praktyczne) protokoły oparte o teorię grup dwuliniowych, działające dla dość szerokiej, ale niestety istotnie mniejszej od NP, klasy problemów. Mają one jeszcze inną pożądaną cechę: nie wymagają wielorundowej interakcji między weryfikatorem a osobą dowodzącą, jak w naszych przykładach.

Twierdzimy, że ten protokół również ma trzy cechy, o których mówiliśmy w poprzednim przykładzie. To znaczy: jeśli rzeczywiście znamy cykl Hamiltona w G , to wykonamy protokół bez problemu (trywialna obserwacja). Dalej: szansa na oszukanie weryfikatora wynosi ponownie co najwyżej $\frac{1}{2^N}$, a schemat dowodu jest dokładnie taki sam jak poprzednio. Wystarczy tylko zauważyć, że jeśli w którejkolwiek iteracji jesteśmy pewni akceptacji weryfikatora (niezależnie od wyboru k), to znaczy, że zobowiązaliśmy się do permutacji π takiej, że znamy cykl Hamiltona w $\pi(G)$. To jednak oznacza, że znamy również cykl Hamiltona w G . Pozostaje tylko upewnić się, że nabyta (w wyniku realizacji protokołu) przez weryfikatora wiedza nic mądrego mu nie mówi. I tak jest w istocie: jeśli



Czytelnik Spostrzegawczy zauważy, że jedną rzecz na temat naszego dowodu jednak zdradzamy – mianowicie górne oszacowanie jego długości (wynoszące k).

Czytelnik Niezłśliwy jest zapewne w stanie uwierzyć, że dowody z wiedzą zerową są ważnym narzędziem całej kryptologii, a nie tylko jej złośliwej części. Są chociażby podstawą anonimowych kryptowalut (np. Zerocash). Inne ciekawe ich zastosowanie przedstawimy w odcinku VI naszej sagi.

$k = 1$, to weryfikator uczy się tylko pewnego izomorfizmu G , a jeśli $k = 2$, to weryfikator poznaje losową permutację liczb $\{1, \dots, n\}$, zupełnie niezależną od G (bo w tym przypadku nie zna $\pi!$).

Co jeszcze?

Pokazaliśmy dwa przykłady protokołów dowodów z wiedzą zerową. Nasuwa się pytanie: jakie inne (i jak bardzo skomplikowane) stwierdzenia możemy podobnie dowodzić? Okazuje się (być może zaskakująco), że... *niemal wszystkie*. Aby się o tym przekonać, potrzebna jest pewna wiedza z teorii złożoności obliczeniowej, a konkretnie: informacja, że problem istnienia cyklu Hamiltona w grafie jest problemem NP-zupełnym. Nie jest ambicją tego artykułu, aby dokładnie wytłumaczyć to pojęcie (patrz na przykład Δ_{13}^{11} , Δ_{17}^{11} czy Δ_{17}^{11}), więc siłą rzeczy musimy w tym momencie trochę rozluźnić rygor ścisłej precyzji na rzecz intuicji.

(„Niemal wszystkie” w akapicie wyżej należy rozumieć jako „niemal wszystkie występujące w praktyce”. Dla Prawdziwych Teoretyków klasa NP to wręcz „niemal nic”.)

Otóż fakt, że problem cyklu Hamiltona (CH) jest NP-zupełny, oznacza, że dzięki temu, że pokazaliśmy protokół dowodu z wiedzą zerową dla CH, wiemy jak konstruować protokoły z wiedzą zerową dla **dowolnego innego** problemu z klasy NP! W jaki sposób? Wystarczy zastosować odpowiednią efektywną redukcję do problemu CH (która musi zawsze istnieć) i dalej stosować protokół opisany wyżej.

W szczególności: załóżmy, że udowodniliśmy hipotezę Riemanna. Rozważmy teraz język:

$$L = \{\text{zdanie prawdziwe } \phi \mid \phi \text{ ma dowód długości } \leq k\}.$$

Niewątpliwie $L \in \text{NP}$ (dlaczego?), więc dla każdego $\phi' \in L$ istnieje dowód z wiedzą zerową, w szczególności: dla $\phi' =$ „Hipoteza Riemanna jest prawdziwa”.

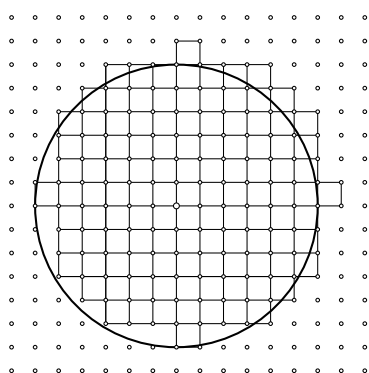
A po ludzku: okazuje się, że istnieje graf G_{Riemann}^k (rozmiaru wielomianowego od k) taki, że jeśli hipoteza Riemanna ma dowód długości $\leq k$, to w tym grafie jest cykl Hamiltona, a jeśli nie ma takiego dowodu – to i cyklu Hamiltona w G_{Riemann}^k nie znajdziemy. Więcej: znalezienie grafu G_{Riemann}^k jest efektywnie obliczalną funkcją zdania ϕ' (zapisanego w jakiejś formalnej logice). Jeśli więc rzeczywiście znajdziemy dowód dla hipotezy Riemanna długości k i mamy nieodpartą pokusę pohandryczyć się ze światem, to możemy zawsze przedstawić wyłączny dowód istnienia cyklu Hamiltona w grafie G_{Riemann}^k . Dowód z wiedzą zerową, rzecz jasna!

Kraty

Jarosław GÓRNICKI*

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

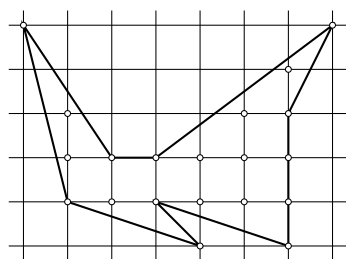
Na płaszczyźnie euklidesowej \mathbb{R}^2 zbiór $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy *kratą*, a jego elementy *punktami kratowymi*.



Rys. 1. Liczba $L(r)$ jest równa powierzchni pokrytej przez kwadraty jednostkowe, których dolny lewy wierzchołek leży wewnątrz lub na brzegu koła

Carl Gauss zauważył, że jeśli liczba punktów kratowych w kole $x^2 + y^2 \leq r^2$ wynosi $L(r)$, to $\frac{L(r)}{r^2} \rightarrow \pi$, gdy $r \rightarrow \infty$ (rys. 1). Empirycznie wyznaczył $L(100) = 31\,417$, więc $\pi \approx 3,1417$. Precyzyjnie, Gauss pokazał, że $L(r) = \pi r^2 + E(r)$, gdzie błąd $|E(r)| \leq 2\sqrt{2}\pi r$. Do dziś nie wiemy, jakie jest najlepsze oszacowanie tego błędu.

Szybko okazało się, że kraty to ciekawy obiekt badań matematycznych. Na przykład, na płaszczyźnie łatwo wykreślić prostą, która nie przecina zbioru \mathbb{Z}^2 . Jeśli na prostej znajdują się dwa punkty kratowe, to jest ich na tej prostej nieskończenie wiele i są one rozmieszczone w równych odstępach. Istnieją też proste, które zawierają dokładnie jeden punkt kratowy. Gdyby prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $(1, \sqrt{2})$ zawierała punkt kratowy $(m, n) \neq (0, 0)$, to z twierdzenia Talesa uzyskalibyśmy, że $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, a to jest niemożliwe, bo $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.



Rys. 2. $|W| = 9 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = \frac{27}{2}$

Konsekwencją twierdzenia Blichfeldta jest sławny wynik Hermanna Minkowskiego:

Twierdzenie (H. Minkowski, 1889) *Jeżeli zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, jest ograniczony, wypukły, symetryczny względem początku układu współrzędnych i o objętości większej od 2^n , to zbiór M zawiera niezerowy punkt kraty \mathbb{Z}^n .*

Analizując pola wielokątów o wierzchołkach w punktach kraty \mathbb{Z}^2 , Georg Pick wykazał niespodziewanie, że wiedza o liczbie i położeniu punktów kratowych w wielokącie określa jego pole.

Twierdzenie 1. (G. Pick, 1899) *Pole wielokąta W , którego wierzchołki są punktami kraty \mathbb{Z}^2 , a boki nie przecinają się, jest równe*

$$|W| = p_w + \frac{1}{2}p_b - 1,$$

gdzie p_w i p_b oznaczają, odpowiednio, liczbę punktów kratowych we wnętrzu i na brzegu wielokąta (rys. 2).

Jednym z istotniejszych wyników o punktach kratowych jest rezultat Hansa Blichfeldta:

Twierdzenie 2. (H. Blichfeldt, 1914) *Dla dowolnej liczby naturalnej k , dowolny zbiór ograniczony $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, o objętości większej od k można tak przesunąć, by zawierał co najmniej $k + 1$ elementów kraty \mathbb{Z}^n .*

Część I. Problem i rozwiązanie

W 1957 r. Hugo Steinhaus w *Matematyce 10* (2), str. 58–59, przedstawił kilka zadań konkursowych dotyczących kraty \mathbb{Z}^2 :

Zadanie A. *Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje koło, zawierające wewnątrz dokładnie n punktów kratowych.*

Zadanie B. *Znaleźć największe koło zawierające wewnątrz dokładnie:*

- (a) 0 punktów kratowych, (b) 1 punkt kratowy, (c) 2 punkty kratowe, (d) 3 punkty kratowe, (e) 4 punkty kratowe, (f) 5 punktów kratowych. *Podać średnice tych kół.*

Zadanie C. *Największe koło zawierające wewnątrz dokładnie 4 punkty kratowe można tak przesunąć, żeby wewnątrz miało dokładnie 9 punktów kratowych, a także dokładnie 8 lub 7 punktów kratowych. Czy można je tak przesunąć, żeby w jego wnętrzu było dokładnie 5, 6 lub 10 punktów kratowych?*

Rozwiązania Steinhausa znajdzie Czytelnik w książce *Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa* opracowanej przez Edwarda Piegata, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2000.

Rozwiązanie Zadania A podał też Waclaw Sierpiński w czasopiśmie *L'Enseignement Mathématique* (2) 4 (1958), str. 25–31. Pomysł Sierpińskiego opierał się na następującej obserwacji:

każde dwa różne punkty kraty \mathbb{Z}^2 mają różne odległości od punktu $w = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$, tj. nie ma okręgu o tym środku przechodzącego przez dwa lub więcej punktów kraty.

Istotnie, niech $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y) \in \mathbb{Z}^2$ i $a \neq b$. Jeżeli $|a - w| = |b - w|$, to

$$(a_x - \sqrt{2})^2 + \left(a_y - \frac{1}{3}\right)^2 = (b_x - \sqrt{2})^2 + \left(b_y - \frac{1}{3}\right)^2,$$

czyli

$$a_x^2 + a_y^2 - b_x^2 - b_y^2 - \frac{2}{3}(a_y - b_y) = 2(a_x - b_x)\sqrt{2}.$$

Prawa strona jest więc liczbą wymierną, zatem $a_x = b_x$, ale wówczas

$$a_y^2 - b_y^2 - \frac{2}{3}(a_y - b_y) = (a_y - b_y) \left(a_y + b_y - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Jest to możliwe jedynie, gdy $a_y = b_y$. Zatem $a = b$, sprzeczność.

Rozwiązanie Sierpińskiego. Krata \mathbb{Z}^2 jest zbiorem przeliczalnym, więc korzystając z powyższej obserwacji, wszystkie jej elementy możemy ustawić w ciąg $\mathbb{Z}^2 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ tak, że

$$|a_i - w| < |a_{i+1} - w| \text{ dla } i = 1, 2, \dots$$

Wówczas koło otwarte

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x - w| < |a_{n+1} - w|\}$$

zawiera wszystkie punkty kratowe a_1, a_2, \dots, a_n i żadnych innych. *Voilà!*



Wiele punktów może pełnić rolę środka koła w twierdzeniu Sierpińskiego, ale żaden z nich nie może mieć obu współrzędnych wymiernych. Jeśli

$$\bar{w} = \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right), \text{ to punkty kratowe } (r, -p) \text{ i } (-r, p) \text{ są tak samo odległe od punktu } \bar{w}, \text{ gdyż}$$

$$\left(r - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(-p - \frac{r}{q}\right)^2 = \left(-r - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(p - \frac{r}{q}\right)^2.$$

Wówczas, jeśli we wnętrzu takiego koła o środku \bar{w} jest n punktów kratowych, to żadne koło o środku w punkcie \bar{w} nie zawiera $n + 1$ punktów kratowych.

Mamy więc:

Twierdzenie 3. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje koło o środku $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$, którego wnętrzu zawiera dokładnie n punktów kratowych.

Podobne rozumowanie (szczegóły pozostawiamy Czytelnikom) pokazuje, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje kula o środku w punkcie $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$ zawierająca wewnątrz dokładnie n punktów kraty \mathbb{Z}^3 .

Część II. Pokłosie

Naturalne jest pytanie o istnienie okręgów przechodzących dokładnie przez n punktów kraty \mathbb{Z}^2 . Łatwo rysujemy okręgi przechodzące przez 1, 2, 3, 4 punkty kratowe. A jak jest dla większej liczby punktów kratowych?

W 1958 r. Andrzej Schinzel, korzystając z twierdzenia teorii liczb: *liczba $r(n)$ rozwiązań równania $x^2 + y^2 = n$ w liczbach całkowitych (= ilość rozkładów liczby naturalnej n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych) jest równa $4(d_1 - d_2)$, gdzie d_1 jest liczbą dzielników liczby n postaci $4k + 1$, a d_2 jest liczbą dzielników liczby n postaci $4k + 3$ (dowód w tym numerze, w artykule Michała Krycha), udowodnił:*

Twierdzenie 4. (A. Schinzel, 1958) Dla każdej liczby naturalnej n na okręgu opisanym równaniem

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}5^{k-1} & \text{dla } n = 2k, \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}5^{2k} & \text{dla } n = 2k + 1 \end{cases}$$

leży dokładnie n punktów kraty \mathbb{Z}^2 .

Korzystając z rezultatu Schinzla, Tadeusz Kulikowski wykazał:

Twierdzenie 5. (T. Kulikowski, 1959) Dla każdej liczby naturalnej n istnieje sfera, która zawiera dokładnie n punktów kraty \mathbb{Z}^3 .

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia Schinzla na płaszczyźnie $z = 0$ istnieje okrąg $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$, na którym leży dokładnie n punktów $(x, y, 0) \in \mathbb{Z}^3$.

Rozważmy sferę o środku w punkcie $(a, b, \sqrt{2})$ i promieniu $\sqrt{c + 2}$, gdzie $a = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$, $b = 0$, a c to kwadrat odpowiedniego promienia z twierdzenia 4:

$$(*) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - \sqrt{2})^2 = c + 2,$$

skąd

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 - c = 2z\sqrt{2}.$$

Liczby całkowite x, y, z mogą spełniać to równanie tylko wtedy, gdy $z = 0$. Oznacza to, że wszystkie punkty $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ leżące na sferze (*) leżą na przecięciu tej sfery z płaszczyzną $z = 0$. Zatem jedyne punkty kratowe na sferze (*) to n punktów kratowych należących do okręgu Schinzla. \square

W tym samym czasie Jerzy Browkin zauważył, że funkcja

$$f(a) = \left| a_x + a_y\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right| + \left| a_x\sqrt{3} - a_y - \frac{1}{\sqrt{3}} \right|,$$

(gdzie $a = (a_x, a_y) \in \mathbb{Z}^2$) przyjmuje różne wartości dla każdych dwóch różnych punktów kraty \mathbb{Z}^2 , oraz dowiódł, że dla każdej liczby naturalnej n :

- istnieje kwadrat zawierający wewnątrz (odpowiednio: na brzegu) dokładnie n punktów kraty \mathbb{Z}^2 ,

- istnieje sześcián zawierający wewnątrz dokładnie n punktów kraty \mathbb{Z}^3 .

Podobne problemy można rozważać dla figur o innych kształtach – trójkątów, elips. Oczywiście największe zainteresowanie budzą problemy, które mimo wysiłków nadal pozostają bez odpowiedzi.

Problem 1. Czy istnieje prostopadłościan, którego krawędzie, przekątne ścian, przekątna wewnętrzna mają długości całkowite?

Historia tego problemu sięga 1719 roku, gdy Paul Halcke wskazał prostopadłościan $44 \times 117 \times 240$, którego przekątne ścian też są całkowitej długości.

Problem 2. (H. Steinhaus) Czy istnieje taki podzbiór A płaszczyzny, że każdy zbiór przystający do A zawiera dokładnie jeden punkt kratowy?

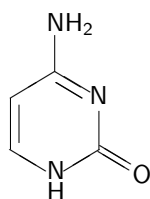
Spacer po kracie \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 lub \mathbb{Z}^3 polegający na tym, że w każdym kolejnym kroku przechodzimy o jedną jednostkę do sąsiedniego punktu kratowego (mając równe szanse poruszania się w każdym możliwym kierunku) nazywamy *symetrycznym błądzeniem przypadkowym*. George Pólya pokazał w 1921 roku, że w przypadku takiego błądzenia w kracie \mathbb{Z} lub \mathbb{Z}^2 z prawdopodobieństwem równym 1 powrócimy do położenia początkowego. W kracie \mathbb{Z}^3 prawdopodobieństwo to wynosi około 0,35. Tak więc naprawdę zabłądzić możemy w kratkach \mathbb{Z}^n , gdzie $n \geq 3$, ale to temat na inne spotkanie.

Poznajemy tajemnice genów

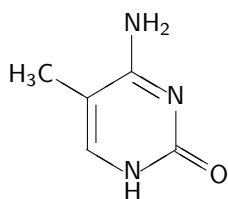
Nieodłączną cechą nauki jest to, że udzielenie odpowiedzi na jakieś pytanie zawsze pociąga za sobą wiele pytań kolejnych. Moim (i z pewnością nie tylko moim) zdaniem na tym m.in. polega cudowność i nieśmiertelność nauki.

I tak, ostatnio spojrzalam ponownie na jedną z dróg w dziedzinie, o której najczęściej myślę, czyli genetyce. Zaczęło się w 1953 roku od opisanie ogólnej struktury DNA i stwierdzenia jej odkrywców: „nie uszło naszej uwadze, że ta struktura implikuje sposób powielania się tej cząsteczki oraz jej funkcjonowania jako informacji genetycznej”. Może oni to zobaczyli, ale nikt nie wiedział wówczas, JAK się te funkcje realizują.

Prosta droga do odpowiedzi na to pytanie wiodła od poznania struktury chemicznej głównych graczy – cząsteczek DNA, RNA i białek. Do dziś oznaczono strukturę wielu z nich, pochodzących z różnych źródeł. Poddano je analizom metodami informatycznymi i zadano bardzo wiele kolejnych pytań. Skoncentruję się na jednej kwestii, jeszcze do końca nierozpoznanej.



cytozyna



5-metylocytozyna

DNA składa się z czterech podstawowych jednostek, oznaczanych symbolicznie C, G, A, T. Gdy zajęto się ustalaniem ich kolejności, to odkryto – w różnych ilościach, w różnych tkankach, różnych okresach podziałowych komórek i życia osobnika – jeszcze jedną jednostkę, metylocytozynę (MeC). Metylocytozyna może tworzyć takie same wiązania wodorowe z guaniną w drugiej nici jak cytozyna.

Skąd biorą się metylocytozyny w DNA? Specyficzne enzymy, tzw. metylotransferazy przyłączają grupy metylowe do syntetyzowanej cząsteczki DNA. Proces ten nosi nazwę metylacji. Najczęściej grupy metylowe odnajduje się w tzw. „wyspach” CpG, obecnych częściej przed genem, a nie w jego obszarze. Metylacja cytozyny sprawia, że cała cząsteczka w tym rejonie jest bardziej upakowana i mniej aktywna w procesach ekspresji genu. Wprowadzenie grupy metylowej jest zatem jednym ze sposobów regulacji aktywności DNA: ekspresji genów, replikacji, naprawy uszkodzeń. Podsumowuje te zjawiska nowa gałąź nauki, epigenetyka. Metylacja odgrywa u ssaków znaczącą rolę podczas embriogenezy i różnicowania komórek. O tym, jak istotny dla rozwoju organizmu jest ten proces, świadczy fakt, iż zarodki myszy pozbawione genu metylotransferazy obumierają w ciągu ośmiu dni od zapłodnienia. Niektórzy naukowcy nawet używają poziomu metylacji jako wskaźnika wieku lub narzędzia do przewidywania długości życia.

Epigenetyka opisuje zmiany w ekspresji genów niezwiązane ze zmianą kolejności podjednostek w łańcuchu DNA.

Sygnalem do spontanicznej metylacji mogą być czynniki środowiska: stresy, działanie chemikaliów, promieniowanie. Metylacja DNA przebiega różnie w różnych komórkach i różnych tkankach zależnie od ich wieku. Na przykład istnienie u dorosłego człowieka około 200 typów komórek jest m.in. wynikiem epigenetycznych wzorców modyfikacji DNA w poszczególnych tkankach w trakcie ich różnicowania.

Najłatwiejszym do obserwacji skutkiem efektów epigenetycznych są rosnące z wiekiem różnice u bliźniaków jednojajowych. Im dłużej żyją, tym bardziej różnią się zarówno pod względem cech zewnętrznych, jak i na poziomie metabolizmu, i wiąże się to właśnie z różnymi wzorcami metylacji cytozyny oraz – rzadziej – adenozyyny. Uważa się, że zmiany epigenetyczne mogą mieć związek z częstością występowania autyzmu czy chorób reumatoidalnych. Jeżeli epigenom, czyli genom, w którym uwzględniamy istnienie metylowanych składników, steruje potencjałem genomu, można założyć, że w pewnych warunkach będzie miał wpływ na stany patologiczne – szuka się takich relacji w przypadku nowotworów i ogólnie klasyfikowanych zaburzeń typu

autoimmunoagresji. Zmiany epigenetyczne mogą być dziedziczone przez dzielące się komórki, a jeśli doszło do nich w komórkach rozrodczych – przekazywane są kolejnym pokoleniom. Fascynującym przykładem znaczenia epigenetyki dla procesów rozwojowych są różnice w metylacji genomów pszczoł robotnic i królowej, związane z innym rodzajem pokarmu dostarczanego młodym osobnikom. Największe różnice dotyczą komórek mózgowych oraz pełnego wykształcenia się jajników wyłącznie u królowej.

Metylację kwasów nukleinowych odkrywa się w wielu innych procesach. Metylowany jest końcowy fragment informacyjnych RNA, tzw. czapeczka, i ta modyfikacja czyni dany RNA trwalszym, przeciwdziała jego degradacji. Metylacja towarzyszy znakowaniu DNA rodzicielskiego – odróżnia elementy „od ojca” od elementów „od matki”, jest także uznawana za odpowiedzialną za inaktywację u samic ssaków jednego z dwóch chromosomów X w każdej komórce.

Wiele tajemnic związanych z DNA czeka jeszcze na odkrywców.

Magdalena FIKUS

Efekty relatywistyczne bez teorii względności

Ludwik LEHMAN

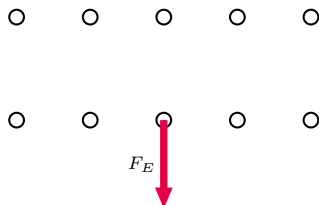


Zasada względności została po raz pierwszy jasno wyrażona w słynnym dziele Galileusza *Dialog o dwóch najważniejszych układach świata* w 1632 roku. Dzisiaj często formułuje się ją w następujący sposób: prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Wystarczy znaleźć jeden układ inercjalny – pozostałe poruszają się względem niego ruchem jednostajnym prostoliniowym. Zasada względności niejednokrotnie okazywała swą zadziwiająco dużą moc poznawczą. Zaledwie 20 lat po jej sformułowaniu Christiaan Huygens zastosował ją do opisu zderzeń całkowicie sprężystych. Zrozumiał on, że wystarczy założyć jeden „oczywisty” wynikający z symetrii przypadek: dwie identyczne kule zderzające się z tymi samymi prędkościami mają po zderzeniu prędkości przeciwne. Potem zastosował zasadę względności. Wyobraźmy sobie, że opisane zderzenie przeprowadzamy na łodzi poruszającej się względem lądu (rycina obok).

Aby otrzymać prędkości kul względem lądu, trzeba do ich prędkości względem łódki dodać prędkość samej łódki. W ten sposób, stosując zasadę względności, łatwo uzyskamy wzory na prędkości kul po zderzeniu dla ich dowolnych prędkości przed zderzeniem.

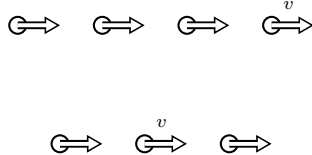
Przy zastosowaniu podobnych metod opisano dokładnie zderzenia sprężyste i niesprężyste jeszcze przed sformulowaniem przez Newtona zasad dynamiki.

Bardzo wdzięcznym obiektem rozważań z użyciem zasady względności Galileusza jest tzw. siła elektrodynamiczna, czyli siła, z jaką działają na siebie (poprzez pole magnetyczne) dwa przewodniki z prądem. Będziemy ją nazywać siłą magnetyczną. Rozważmy szczególnie prosty przypadek przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Dwa równoległe identyczne szeregi ładunków dodatnich

Rozpatrujemy dwa równoległe identyczne sztywne szeregi spoczywających ładunków dodatnich, np. protonów. Nie będziemy się interesować siłami utrzymującymi ten układ w równowadze. Na rysunku 1 zaznaczono siłę elektryczną, jaką górny szereg działa na jednostkę długości szeregu dolnego. Teraz przejdźmy do układu poruszającego się względem tego „spoczywającego” z prędkością v w lewo (rys. 2).



Rys. 2. Ładunki z rysunku 1 obserwowane z układu poruszającego się z prędkością v w lewo

Nasze szeregi są w tym układzie prądami elektrycznymi. Górny prąd wytwarza pole magnetyczne, które działa na jednostkę długości drugiego prądu siłą elektrodynamiczną (rys. 3) o wartości

$$(1) \quad F_M = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R},$$

gdzie R to odległość między szeregami ładunków, a I to natężenie prądu takie samo dla obu szeregów wynoszące

$$(2) \quad I = \sigma'v,$$

gdzie σ' jest gęstością liniową ładunku. Na dolny szereg działa też przeciwnie skierowana siła elektryczna o wartości

$$(3) \quad F'_E = \sigma'E.$$

Zbadajmy, przy jakiej prędkości ładunków te siły równoważą się

$$(4) \quad F_M = F'_E.$$

Obliczmy tę prędkość. Po wstawieniu do (4) wzorów (1), (2) i (3) otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{\mu_0 \sigma'^2 v^2}{2\pi R} = \sigma'E.$$

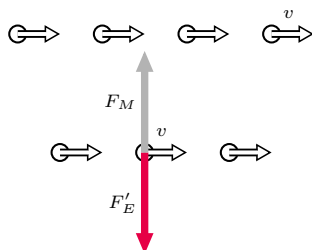
Natężenie pola elektrycznego dla jednorodnie naładowanego przewodu można obliczyć z prawa Gaussa. Wynosi ono

$$(6) \quad E = \frac{\sigma'}{2\pi R\epsilon_0},$$

gdzie ϵ_0 to przenikalność elektryczna próżni.

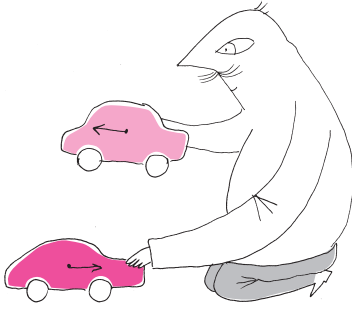
Wstawiając (6) do (5) otrzymujemy wzór na szukaną prędkość

$$(7) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$



Rys. 3. Siły elektryczna i magnetyczna działające na dolny prąd

Przypomnijmy: dla prędkości ładunków danej wzorem (7) siła magnetyczna równoważy siłę elektryczną. Jednak w układzie, w którym ładunki spoczywają,



działa na nie tylko siła elektryczna. Zatem w tym układzie nasz szereg ładunków ma przyspieszenie skierowane w dół, a w „primowanym” nie ma żadnego. To jest sprzeczne z zasadą względności Galileusza, zgodnie z którą przyspieszenie cząstki jest takie samo we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Zatem można wyciągnąć wniosek, że niemożliwe jest osiągnięcie przez ładunki elektryczne prędkości danej wzorem (7). Dla przypomnienia – jest to wzór na prędkość światła w próżni.

Do tego wniosku dochodzimy, stosując wyłącznie zwykłą „szkolną” fizykę, nie wiedząc nic o istnieniu teorii względności!

Rozważmy jeszcze dokładniej „realną” sytuację, gdy siła elektryczna z rysunku 3 jest większa od magnetycznej. Siła wypadkowa musi być w obu układach taka sama. Stąd nieuchronny wniosek, że siła F'_E działająca w układzie poruszającym się (rys. 3) musi być większa od tej w układzie spoczywającym (rys. 1). Ze wzoru (6) widać, że jest to możliwe, jeśli liniowa gęstość ładunku w układzie poruszającym się σ' będzie większa od gęstości σ w układzie spoczywającym. Jeśli zakładamy niezmienniczość ładunku, zostaje nam jeszcze jedno wyjście: odległość między ładunkami zależy od ich prędkości. Gdy się poruszają (rys. 3) – odległość ta jest mniejsza, zatem gęstość liniowa ładunku jest większa.

Spróbujmy obliczyć to skrócenie odległości. Zauważmy, że

$$(8) \quad F_E = F'_E - F_M.$$

Podstawiając do (8) wzory (1), (2), (3) i (6) otrzymujemy

$$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\pi R} = \frac{\sigma'^2}{2\varepsilon_0\pi R} - \frac{\mu_0\sigma'^2 v^2}{2\varepsilon_0\pi R}.$$

Po uproszczeniu i uporządkowaniu możemy napisać

$$\sigma^2 = \sigma'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

gdzie c jest prędkością światła daną wzorem (7).

Przedstawmy tę zależność w postaci

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Stosunek gęstości liniowej ładunku w obu układach jest równy odwrotnemu stosunkowi odległości między poszczególnymi ładunkami w tych układach. Zatem możemy napisać:

$$(9) \quad l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdzie l to odległość między ładunkami w układzie spoczywającym, a l' – w układzie poruszającym się. Jest to wzór na tzw. skrócenie Lorentza.

Stosując „nierelatywistyczne” wzory elektrodynamiki i zasadę względności Galileusza, udało się na prostym przykładzie uzasadnić niemożliwość osiągnięcia prędkości światła i w dodatku uzyskać prawidłowy wzór na czysto relatywistyczne skrócenie Lorentza! Jak to możliwe?

Elektrodynamika Maxwella jest *de facto* teorią relatywistyczną, i dlatego można z niej wysnuć relatywistyczne wnioski. Hendrik Lorentz odkrył skrócenie nazwane później jego nazwiskiem jeszcze przed powstaniem teorii względności, szukając transformacji (też nazwanej jego nazwiskiem) zachowującej postać równań Maxwella przy przejściu do układów poruszających się względem eteru. Jednak dopiero Albert Einstein odkrył uniwersalność i pełny sens transformacji (i skrócenia) Lorentza.

Jak widać, skrócenie Lorentza można łatwo zaobserwować nie tylko przy prędkościach zbliżonych do prędkości światła. Wystarczy zmierzyć siłę między dwoma przewodami z prądem. Mimo iż prędkość dryfu elektronów w przewodniku jest rzędu milimetrów na sekundę, efekty relatywistyczne mają tu decydujące znaczenie.

W pięknej książce Edwarda M. Purcella *Elektryczność i magnetyzm* można znaleźć opis pola magnetycznego jako efektu relatywistycznego.



mała delta

Nieskończoność 0

Na nieskończoność natrafiono już w starożytności. Nic dziwnego, że była traktowana z podejrzliwością, w końcu wszystko w prawdziwym świecie wydawało się skończone. Bywała źródłem problemów, paradoksów i sporów (na przykład, *paradoks Zenona z Elei*). W końcu, w drugiej połowie XIX wieku, nieskończoność udało się nieco oswoić (nie mylić z ujarzmić), weszła do kanonu matematyki, a właściwie w jej fundamenty. Owo osvajanie zaczęło się od Georga Cantora. Zbiór nazwał on *przeliczalnym*, jeśli jego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi. W konsekwencji zbiór liczb naturalnych jest oczywiście przeliczalny, co więcej zbiór liczb całkowitych również (wyjaśnienie w dalszej części). Nieco trudniej wykazać, że przeliczalność dotyczy również zbioru liczb wymiernych. Zupełnym fenomenem była (i jest) praca Georga Cantora *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* z 1874 roku, w której udowodnił, że choć zbiór liczb algebraicznych – czyli pierwiastków wielomianów o współczynnikach wymiernych, którymi są np. $\frac{1}{7}$, $\sqrt{2}$, ale π już nie (co jest bardzo nietrywialne) – jest przeliczalny, to zbiór liczb rzeczywistych nie jest.

W 2018 roku minęła setna rocznica śmierci **Georga Cantora** (1845–1918), uważanego za ojca *teorii mnogości* (nauki o zbiorach). Urodził się w Sankt Petersburgu, gdzie mieszkał do 11 roku życia. W młodości uchodził za wybitnego skrzyпка. Kiedy rodzina Cantora wróciła do Niemiec w poszukiwaniu łagodniejszego klimatu (z powodu choroby ojca Cantora), odkryto niewiarygodny matematyczny talent chłopca. Dzięki majątkowi odziedziczonemu po ojcu Cantor był w stanie podjąć studia w Berlinie, gdzie napisał pracę doktorską dotyczącą teorii liczb. Habilitację uzyskał na Uniwersytecie w Halle, gdzie później spędził większość swojego naukowego życia i gdzie w 1879 roku został profesorem w wieku 34 lat. W matematycznej karierze natrafiał jednak na liczne przeszkody. Trudności przysparzali mu między innymi niektórzy profesorowie z Berlina, którzy nie godzili się z jego podejściem do matematyki. Działalność naukowa Cantora była w tamtych czasach bardzo kontrowersyjna.

Wspomniane trudności nadszarpaneły zdrowie psychiczne Cantora. Hospitalizowany w 1884 roku, przez pewien czas wołał zajmować się filozofią

i literaturą epoki elżbietańskiej, a nie matematyką. Pokonawszy ten kryzys, przyczynił się do powołania Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego i został jego pierwszym prezesem. David Hilbert umieścił problem sformułowany przez Cantora, *hipotezę continuum*, na pierwszym miejscu słynnej listy dwudziestu trzech problemów zebranych podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Paryżu w 1900 roku. Jak dzisiaj wiemy, problemu tego sam Cantor mimo licznych prób nie mógł rozwiązać. Ostatnie lata jego życia to na przemian częste pobyty w sanatoriach, problemy finansowe, cenione wykłady i spory o sens stworzonej przez niego teorii mnogości. Zmarł na atak serca w jednym z sanatoriów.

Posługując się słowami Davida Hilberta: prace Cantora to *najwspanialszy produkt matematycznego geniuszu i jedno z najwyższych osiągnięć czysto intelektualnej ludzkiej aktywności*. Na cześć geniuszu Georga Cantora i jego wpływu na współczesną matematykę, sto lat po jego śmierci, opublikujemy cykl artykułów przybliżających pojęcie nieskończoności i teorię mnogości przez niego stworzoną.

Nieskończoność 1: Hotel Hilberta

Nieskończoność... Co myślisz, gdy słyszysz to słowo? Może myślisz o rozgwieżdżonym niebie? Może próbujesz wyobrazić sobie coś bardzo, ale to bardzo dużego? A może myślisz o ludzkiej wyobraźni i sile naszego umysłu? George Cantor postanowił potraktować nieskończoność jak coś „zwykłego” i po prostu ją zbadał. Pójdziemy jego śladem. Zastanówmy się... Czy każda nieskończoność jest taka sama? Czy też może są większe i mniejsze? Czy wszechświat jest nieskończony? Co to jest nieskończoność? Na wiele pytań dotyczących nieskończoności udzielono wyczerpujących odpowiedzi. Na część z nich odpowiedzi nie są znane. O niektórych wiadomo, że nie da się na nie odpowiedzieć po prostu „tak” lub „nie”.

Wybermy się do hotelu. Hotel, jak to hotel, jest w nim ileś pokoi – powiedzmy pięć. Przypuśćmy dla uproszczenia, że są jednoosobowe. Nie będzie zaskoczeniem, gdy zauważymy, że jeśli każdy pokój jest zajęty, a na recepcję zgłosi się kolejny gość, zostanie odprowadzony z kwitkiem.

Ale... Wyobraź sobie hotel, w którym jest nieskończenie wiele pokoi. Taki eksperyment myślowy zaproponował wspomniany już matematyk, David Hilbert. W Hotelu Hilberta jest nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi. Powiedzmy, że są ponumerowane – pierwszy pokój ma numer zero, drugi numer jeden, trzeci numer dwa i tak dalej. Załóżmy, tak jak poprzednio, że w każdym pokoju jest już gość, czyli inaczej rzecz ujmując, wszystkie pokoje są zajęte. Na recepcję w środku nocy zgłasza się jeszcze jeden, spóźniony, chętny do zamieszkania przybysz.

Okazało się, że recepcjonista był matematykiem – zastanowił się dwa razy i udostępnił wolny pokój, budząc uprzednio wszystkich pozostałych gości.

Jak to zrobił? Wszyscy goście zostali poproszeni o przeniesienie się do pokoju o numerze o jeden wyższym niż numer ich obecnego pokoju. W ten sposób gość z pokoju zerowego przeszedł do pokoju pierwszego, gość z pokoju pierwszego do pokoju

drugiego, gość z pokoju drugiego do trzeciego i tak dalej. Każdy gość mógł przecież przenieść się do kolejnego pokoju, nic nie stało na przeszkodzie. W wyniku tej operacji pokój zerowy został zwolniony i tam zakwaterował się dodatkowy przybysz. Udało się! **Wniosek:** w Hotelu Hilberta można zakwaterować o jednego gościa więcej, niż jest miejsc w pokojach. Lub inaczej: zbiór liczb $1, 2, 3, \dots$ jest równoliczny ze zbiorem $0, 1, 2, 3, \dots$

Przeprowadźmy jeszcze jeden eksperyment. Załóżmy, że do pustego hotelu zgłaszają się dwie grupy gości: nieskończona grupa kobiet i nieskończona grupa mężczyzn. Jeśli obsługa jest dobrze wychowana, prawdopodobnie wpuści do hotelu najpierw kobiety. Ale niestety, jeśli tak zrobi – zajmą one wszystkie nieskończenie wiele pokoi i nieskończona grupa mężczyzn zostanie na przysłowiowym lodzie. Czy można postąpić inaczej? Owszem. Kwaterować na zmianę. Do zerowego pokoju kobietę, do pierwszego mężczyznę, do drugiego kobietę, do trzeciego mężczyznę itd. W skrócie: w pokojach o parzystych numerach kwaterujemy kobiety, a w pokojach o nieparzystych numerach – mężczyzn. W ten sposób żadnej kobiecie ani żadnemu mężczyźnie nie zabraknie miejsca. Uff... **Wniosek:** w Hotelu Hilberta zmieszczą się dwie grupy gości, z których każda samodzielnie mogłaby zapełnić cały hotel. Lub inaczej: zbiór liczb $0, 1, 2, 3, \dots$ jest równoliczny ze zbiorem $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Zastanów się jeszcze, co by się stało, gdyby zamiast „tylko” dwóch nieskończonych grup gości przed Hotelem Hilberta pojawiło się ich nieskończenie wiele, na przykład nieskończenie wiele autobusów, a w każdym nieskończenie wielu pasażerów? Czy można ich przyjąć...? Do tych rozważań jeszcze wrócimy.

A w następnym odcinku przyjrzymy się, jak w dawnych czasach ludzie myśleli o nieskończoności i skąd w ogóle wziął się taki koncept.

Małą Deltę przygotował Michał KORCH

David Hilbert żył na przełomie XIX i XX wieku. Podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w 1900 roku ogłosił listę – jego zdaniem – najciekawszych, nierozwiązanych w tamtym czasie problemów matematycznych (podczas Kongresu nie została zaprezentowana kompletna lista). Okazało się, że te problemy wyznaczyły kierunek rozwoju matematyki w XX wieku. Pierwszy problem na liście dotyczył właśnie nieskończoności! Jak ten problem brzmi? Czy udało się go rozwiązać? Porozmawiamy o tym przy kolejnych okazjach.

Szereg Leibniza i punkty kratowe

Michał KRYCH*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niniejszy artykuł został napisany w oparciu o „Geometrię pogładową” Davida Hilberta i Stefana Cohn-Vossena. To wspaniała książka napisana przez jednego z najwybitniejszych matematyków w historii, na podstawie wykładów Hilberta przy udziale jego ucznia. Nieco zapomniana; dostępna również w języku polskim.

Powiązemy tu wzór Leibniza

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

z geometrią (pola) i teorią liczb. Tekst jest wyraźnie dłuższy od tego, który jest w książce Hilberta i Cohn-Vossena, bo szkicujemy dowód twierdzenia z teorii liczb, na które autorzy jedynie powołują się. Pozostawimy jednak bez dowodu niektóre bardzo znane twierdzenia z teorii liczb, ze względu na ograniczenia miejsca w miesięczniku. Zaznaczyć warto, że podawany zwykle studentom pierwszego roku dowód jest krótszy, ale zdaniem autora tego tekstu, nie pokazuje związku z geometrią, który jest mocno sugerowany obecnością π we wzorze.

Używać będziemy liczb zespolonych. Jak zwykle $i^2 = -1$. Symbol $\mathbb{Z}[i]$ oznacza zbiór liczb zespolonych, których części rzeczywista i urojona są całkowite. Liczby te nazywane są też *punktami kratowymi*.

Istotny dla dalszych rozważań jest fakt:

liczba całkowita n większa od 1 jest sumą kwadratów dwu liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy jest iloczynem dwu sprzężonych elementów $\mathbb{Z}[i]$, o modułach większych od 1, co wynika z równości $n = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$.

W $\mathbb{Z}[i]$ można zajmować się dzieleniem liczb nieomal tak, jak w zbiorze liczb całkowitych. Liczba $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$ jest dzielnikiem liczby $z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $q \in \mathbb{Z}[i]$, że $z_2 = qz_1$. Liczba $1 + i$ jest dzielnikiem liczby 2, bo $2 = (1 - i)(1 + i)$. Jedynymi dzielnikami jedności w $\mathbb{Z}[i]$, czyli dzielnikami liczby 1, są ± 1 oraz $\pm i$, bo z równości $1 = qz_1$ wynika, że $1 = |q|^2 |z_1|^2$, i z tego że $q, z_1 \in \mathbb{Z}[i]$ wynika, że $|q|^2 = 1 = |z_1|^2$, a jeśli $x, y \in \mathbb{Z}$ i $x^2 + y^2 = 1$, to $xy = 0$. Liczbę pierwszą w $\mathbb{Z}[i]$ można zdefiniować jako taką, której jedynymi dzielnikami są dzielniki jedności oraz ona sama pomnożona przez jeden z dzielników jedności, ale sama nie jest dzielnikiem jedności. Wtedy 2 = (1 - i)(1 + i) nie jest liczbą pierwszą, ale 3 już jest (Czytelniku: dlaczego?). Prawdziwe jest, jak w przypadku podzielności w \mathbb{Z} ,

Twierdzenie (o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze). *Jeśli $z \in \mathbb{Z}[i]$ nie jest dzielnikiem jedności, to istnieją liczby pierwsze $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $z = p_1 p_2 \dots p_k$. Jeśli liczby $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_\ell \in \mathbb{Z}[i]$ są pierwsze i $z = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \dots \tilde{p}_\ell$, to $k = \ell$ i po ewentualnej zmianie numeracji ilorazy $\frac{p_i}{\tilde{p}_i}$ są dzielnikami jedności w $\mathbb{Z}[i]$.*

Dowód można oprzeć na następującym, nietrudnym do uzasadnienia, fakcie.

Twierdzenie (o dzieleniu z resztą w $\mathbb{Z}[i]$). *Dla dowolnych liczb $w, z \in \mathbb{Z}[i]$, $z \neq 0$ istnieją liczby $\kappa, \rho \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $w = \kappa z + \rho$ i $|\rho| < |z|$. Liczbę κ nazywamy ilorazem, a ρ resztą z dzielenia liczby w przez liczbę z .*

Iloraz i reszta **nie** są zdefiniowane jednoznacznie:

$3 = (1 - i)(1 + i) + 1 = (2 - i)(1 + i) - i$,
więc resztą z dzielenia 3 przez $1 + i$ jest zarówno 1 jak i $-i$, ilorazami są odpowiednio $1 - i$ oraz $2 - i$.

Obecność π we wzorze Leibniza sugeruje, że w którymś momencie naszych rozważań powinien pojawić się okrąg.

Twierdzenie (o podwajaniu sumy kwadratów). *Na okręgu o promieniu \sqrt{m} i środku 0 znajduje się tyle samo punktów kratowych, co na okręgu o promieniu $\sqrt{2m}$ i środku 0.*

Dowód. Jeśli $m = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, to

$$\begin{aligned} 2m &= (1 + i)(1 - i)(a + bi)(a - bi) = (1 + i)(a - bi)(1 - i)(a + bi) = \\ &= ((a + b) + (a - b)i)((a + b) - (a - b)i) = (a + b)^2 + (a - b)^2. \end{aligned}$$

Jeśli zaś $2m = c^2 + d^2$, to obie liczby c, d są parzyste albo obie są nieparzyste. W obu sytuacjach liczby $a = \frac{c+d}{2}$ i $b = \frac{c-d}{2}$ są całkowite i oczywiście $a^2 + b^2 = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 = \frac{c^2+d^2}{2} = m$. Innymi słowy, przypisując każdemu punktowi

**Rozwiązanie zadania F 967.**

Układ połączonych baterii stanowi źródło o pewnej wypadkowej sile elektromotorycznej \mathcal{E} i oporze wewnętrznym R_w . W przypadku (a) $\mathcal{E} = n\mathcal{E}_0, R_w = nr_w$, a w przypadku (b) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, R_w = r_w/n$. Moc P wydzielana na oporze R dołączonym do źródła o danych \mathcal{E} i R_w wynosi:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_w)^2}.$$

Przy danym R_w moc P osiąga maksimum dla $R = R_w$. W przypadku (a) należy więc do układu baterii podłączyć opór $R = nr_w$, a w przypadku (b) $R = r_w/n$. Jak łatwo sprawdzić, moc wydzielana na optymalnie dobranym oporze R , w obu przypadkach wynosi tyle samo:

$$P = \frac{n\mathcal{E}_0^2}{4r_w}.$$

Także prąd płynący przez każdą z n baterii i moc wydzielana na oporze wewnętrznym każdej z nich są w obu przypadkach takie same.

**Rozwiązanie zadania F 968.**

W jednorodnym polu magnetycznym ruch naładowanej cząstki jest złożeniem ruchu jednostajnego wzdłuż kierunku pola i ruchu po okręgu ze stałą prędkością kątową $\omega = 2\pi f$. Siłą dośrodkową jest tu siła Lorentza. Mamy więc:

$$m\omega^2 r = q\omega r B,$$

gdzie r jest promieniem okręgu, $B = |\vec{B}|$, a ωr jest wartością składowej prędkości prostopadłej do wektora indukcji \vec{B} . Otrzymujemy więc $\omega = qB/m$, czyli:

$$f = \frac{qB}{2\pi m}.$$

Częstotliwość f nie zależy od kierunku i wartości prędkości cząstki. Fakt ten wykorzystywany jest do wyznaczania efektywnych mas nośników prądu (elektronów i dziur) w półprzewodnikach.

kratowemu (a, b) punkt $(a + b, a - b) = (c, d)$, określamy różnowartościowe przekształcenie zbioru wszystkich punktów kratowych na zbiór wszystkich punktów kratowych, których obydwie współrzędne dają tę samą resztę z dzielenia przez 2. Przy tym punktom z okręgu o promieniu \sqrt{m} przypisywane są punkty z okręgu o promieniu $\sqrt{2m}$. \square

Z tego twierdzenia wynika, że liczba punktów kratowych na okręgu o środku w punkcie 0 i promieniu $r > 0$ zależy wyłącznie od nieparzystych dzielników pierwszych liczby r^2 . Opiszemy teraz w kilku krokach, w jaki sposób.

Twierdzenie. Każda liczba pierwsza $p \in \mathbb{Z}$, która z dzielenia przez 4 daje resztę 1, jest sumą kwadratów dwu liczb całkowitych.

Liczne dowody tego twierdzenia, sformułowanego przez Pierre'a de Fermata, znajdują się w wielu podręcznikach do teorii liczb oraz, rzecz jasna, w *Delcie* (artykuł *Jedno zdanie* Wojciecha Czerwińskiego, numer 7/2017).

Zauważmy, że z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu w \mathbb{Z} wynika, że jeśli $p = x^2 + y^2$ jest liczbą pierwszą w \mathbb{Z} i $x, y \in \mathbb{Z}$, to liczba $x + yi$ jest pierwsza w $\mathbb{Z}[i]$ i wybór liczb $x, y \in \mathbb{Z}$ jest jednoznaczny z dokładnością do pomnożenia liczby $x + yi$ przez ± 1 lub $\pm i$ oraz zmiany kolejności składników. Oznacza to, że jeśli $p = 4m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) jest liczbą pierwszą w \mathbb{Z} , to na okręgu o promieniu \sqrt{p} znajduje się 8 punktów kratowych.

Ponieważ kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 4 (w \mathbb{Z}) resztę 0 lub 1, więc liczby postaci $4m + 3$, $m \in \mathbb{Z}$ nie są sumami dwóch kwadratów. Stąd wynika, że liczby pierwsze postaci $4m + 3$ są również pierwsze w $\mathbb{Z}[i]$. Co najmniej jeden z dowodów tego faktu wykorzystuje następujący lemat:

Lemat (o liczbach pierwszych, które są sumami dwóch kwadratów). *Jeśli liczba pierwsza $p > 2$ jest dzielnikiem sumy kwadratów liczb całkowitych niepodzielnych przez p , to sama też jest sumą kwadratów liczb całkowitych.*

Dowód tego lematu zajmuje kilka wierszy, ale go opuszczamy. Z tego lematu wynika:

Wniosek (o dzielnikach pierwszych sumy kwadratów dwu liczb całkowitych). Jeśli liczba n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, to każdy jej dzielnik pierwszy postaci $4m + 3$ wchodzi w jej rozkład na czynniki pierwsze z parzystym wykładnikiem.

Lemat (o liczbie dzielników liczby bez dzielników pierwszych postaci $4m + 1$). *Jeśli $n = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot q_\ell^{\beta_\ell}$ i $q_1, q_2, q_3, \dots, q_\ell$ są liczbami pierwszymi postaci $4m + 3$, a $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, to:*

- jeśli wszystkie liczby $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ są parzyste, to liczba dzielników naturalnych postaci $4m + 1$ liczby n jest większa o 1 od liczby jej dzielników postaci $4m + 3$;
- jeśli co najmniej jedna z liczb $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ jest nieparzysta, to liczba dzielników naturalnych postaci $4m + 1$ liczby n jest równa liczbie jej dzielników postaci $4m + 3$.

Dowód. Iloczyn dowolnie wielu liczb postaci $4m + 1$ jest też liczbą tej postaci. Podobnie iloczyn parzystej liczby czynników postaci $4m + 3$. Natomiast iloczyn nieparzystej liczby czynników postaci $4m + 3$ jest liczbą postaci $4m + 3$.

Jeśli $2 \mid \beta_j$, to dzielnikami liczby $q_j^{\beta_j}$ postaci $4m + 1$ są liczby $q_j^0, q_j^2, \dots, q_j^{\beta_j}$, więc jest ich $1 + \frac{\beta_j}{2}$. Dzielnikami postaci $4m + 3$ są liczby $q_j, q_j^3, \dots, q_j^{\beta_j-1}$, więc jest ich $\frac{\beta_j}{2}$.

Jeśli $2 \nmid \beta_j$, to dzielnikami liczby $q_j^{\beta_j}$ postaci $4m + 1$ są liczby $q_j^0, q_j^2, \dots, q_j^{\beta_j-1}$, więc jest ich $\frac{1+\beta_j}{2}$. Dzielnikami postaci $4m + 3$ są liczby $q_j, q_j^3, \dots, q_j^{\beta_j}$, więc jest ich $\frac{1+\beta_j}{2}$.

Poprzednie dwa akapity uzasadniają tezę dowodzonego lematu dla $\ell = 1$.

**Rozwiązanie zadania M 1588.**Rozważmy funkcję $g(x) = f(x) - x^2$.

Wówczas

$$g(x+1) - g(x) =$$

$$= f(x+1) - f(x) - (x+1)^2 + x^2 = 0,$$

wobec czego funkcja $g(x)$ jest okresowaz okresem 1. Skoro $|f(x)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$, to

$$|g(x)| = |f(x) - x^2| \leq |f(x)| + x^2 \leq 2$$

dla $x \in [0, 1]$ i w konsekwencji, wobec okresowości $g(x)$, $|g(x)| \leq 2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd ostatecznie

$$|f(x)| = |g(x) + x^2| \leq |g(x)| + x^2 \leq x^2 + 2,$$

co było do udowodnienia.

**Rozwiązanie zadania M 1589.**

Przypuśćmy, że każda osoba w danej grupie ma co najwyżej czterech znajomych. Wówczas łączna liczba relacji znajomości w tej grupie nie przekracza

$$\frac{8 \cdot 4}{2} = 16.$$

Tymczasem, w myśl warunków zadania,

w każdej z $\binom{8}{5} = 56$ piątek osób są co

najmniej trzy znajomości, a każda taka

trójka znających się nawzajem osób

należy do dokładnie $\binom{8-3}{2} = 10$ piątek

osób. Wobec tego łączna liczba

znajomości w grupie jest nie mniejsza od

$$\frac{3 \cdot 56}{10} = 16,8.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że w danej

grupie musi istnieć osoba, nazwijmy ją A ,

która ma co najmniej 5 znajomych. Aby

zakończyć rozwiązanie, wystarczy

stwierdzić, że wśród znajomych osoby A

pewnych trzech zna się wzajemnie, więc

dołączając do nich A , otrzymujemy

czwórkę osób o postulowanej własności.

**Rozwiązanie zadania M 1590.****Odpowiedź:** Największa możliwa liczbaelementów zbioru T jest równa $2n$.

Przyjmując

$$T = \{n+1, n+2, \dots, 3n\},$$

mamy $|T| = 2n$ oraz suma każdego trzechelementów T jest większa od $3n$, a zatemnie należy do T .Z drugiej strony, zbiory $S_0 = \{n, 2n, 3n\}$

oraz

$$S_k = \{k, 2n-k, 2n+k\}$$

(dla $k = 1, 2, \dots, n-1$) stanowią rozbitciezbioru S , a w każdym z nich jeden

z elementów jest sumą trzech innych,

mianowicie

$$3n = n + n + n$$

oraz

$$2n+k = k+k+2n-k.$$

Pozostaje zauważyć, że jeżeli $T \subseteq S$ oraz $|T| \geq 2n+1$, to $S_k \subseteq T$ dla pewnego k i w konsekwencji zbiór T nie ma danej

w treści zadania własności.

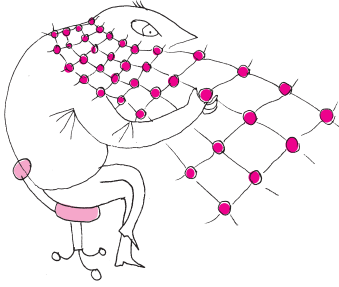
Załóżmy, że liczba $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot q_{\ell-1}^{\beta_{\ell-1}}$ ma $a_{\ell-1}$ dzielników postaci $4m+1$ oraz $b_{\ell-1}$ dzielników postaci $4m+3$.Jeśli $2 \nmid \beta_\ell$, to liczba $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot q_\ell^{\beta_\ell}$ ma $a_\ell = a_{\ell-1} \cdot (1 + \frac{\beta_\ell}{2}) + b_{\ell-1} \cdot \frac{\beta_\ell}{2}$ dzielników postaci $4m+1$ oraz $b_\ell = a_{\ell-1} \cdot \frac{\beta_\ell}{2} + b_{\ell-1} \cdot (1 + \frac{\beta_\ell}{2})$ dzielników postaci $4m+3$. Zachodzi równość $a_\ell - b_\ell = a_{\ell-1} \cdot (1 + \frac{\beta_\ell}{2}) + b_{\ell-1} \cdot \frac{\beta_\ell}{2} - a_{\ell-1} \cdot \frac{\beta_\ell}{2} - b_{\ell-1} \cdot (1 + \frac{\beta_\ell}{2}) = a_{\ell-1} - b_{\ell-1}$.Jeśli $2 \mid \beta_\ell$, to liczba $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot q_\ell^{\beta_\ell}$ ma $a_\ell = a_{\ell-1} \cdot \frac{1+\beta_\ell}{2} + b_{\ell-1} \cdot \frac{1+\beta_\ell}{2}$ dzielników postaci $4m+1$ oraz $b_\ell = a_{\ell-1} \cdot \frac{1+\beta_\ell}{2} + b_{\ell-1} \cdot \frac{1+\beta_\ell}{2}$ dzielników postaci $4m+3$. Zachodzi więc równość $a_\ell - b_\ell = 0$.Teza lematu wynika z powyższych rozważań natychmiast – prosta indukcja. \square **Twierdzenie** (o liczbie dzielników nieparzystych). *Niech $n = 2^\gamma \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot$* *$p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot q_\ell^{\beta_\ell}$, gdzie p_1, p_2, \dots, p_k są liczbami pierwszymi postaci $4m+1$, liczby q_1, q_2, \dots, q_ℓ są liczbami pierwszymi postaci $4m+3$, $m \geq 0$, a wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wtedy:*

- jeśli co najmniej jeden z wykładników $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ jest nieparzysty, to n ma tyle samo dzielników postaci $4m+1$, co dzielników postaci $4m+3$;
- jeżeli wszystkie wykładniki $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ są podzielne przez 2, to liczba n ma o $\alpha := (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_k+1)$ więcej dzielników postaci $4m+1$ niż dzielników postaci $4m+3$.

Dowód. Nieparzyste dzielniki liczby n są iloczynami dzielników liczb $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ i $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot q_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot q_\ell^{\beta_\ell}$. W pierwszej grupie jest $\alpha = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_k+1)$ liczb. Każda z nich jest postaci $4m+1$. W drugiej grupie jest ϱ_1 liczb postaci $4m+1$ i ϱ_3 liczb postaci $4m+3$. Z lematu poprzedzającego dowodzone twierdzenie wynika, że jeśli co najmniej jeden wykładnik spośród $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ jest nieparzysty, to $\varrho_1 = \varrho_3$, więc również $\alpha \cdot \varrho_1 = \alpha \cdot \varrho_3$, co dowodzi pierwszej części tezy. Jeśli wszystkie liczby $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\ell$ są parzyste, to $\varrho_1 = \varrho_3 + 1$, więc $\alpha \cdot \varrho_1 = \alpha \cdot \varrho_3 + \alpha$, a to oznacza, że druga część tezy też jest prawdziwa. \square Teraz przyjrzymy się dwu liczbom: 2100 i 74529000. Znajdziemy liczbę punktów kratowych na okręgach o promieniach $\sqrt{2100}$ i $\sqrt{74529000}$ oraz powiązemy ją z liczbą nieparzystych dzielników każdej z tych liczb. Po tych przykładach pojawi się twierdzenie ogólne, którego dowód jest w zasadzie powtórzeniem rozumowania w tych szczególnych przypadkach, więc go opuszczamy.Liczba $2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7 = 2100$ nie jest sumą kwadratów dwu liczb całkowitych, bo w jej rozkładzie na czynniki pierwsze występuje liczba postaci $4m+3$ z nieparzystym wykładnikiem (3 lub 7). W tej sytuacji na okręgu o promieniu $\sqrt{2100}$ nie ma punktów kratowych. Zwróćmy uwagę, że 2100 ma 6 dzielników postaci $4m+1$ (są to 1, 5, 5^2 , 3, 7, $3 \cdot 7 \cdot 5$, $3 \cdot 7 \cdot 5^2$) i tyle samo dzielników postaci $4m+3$ (są to 3, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 5^2$, 7, $7 \cdot 5$, $7 \cdot 5^2$).A teraz przyjrzymy się liczbie $2^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 74529000$. Liczba $5^3 \cdot 13^2$ ma $4 \cdot 3 = 12$ dzielników, wszystkie postaci $4m+1$. Liczba $3^2 \cdot 7^2 = 441$ ma $3 \cdot 3 = 9$ dzielników, pięć z nich jest postaci $4m+1$ (są to: 1, 3^2 , $3 \cdot 7$, 7^2 i $3^2 \cdot 7^2$), pozostałe cztery są postaci $4m+3$ (są to: 3, 7, $3^2 \cdot 7$ i $3 \cdot 7^2$). Liczba $2^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 74529000$ ma więc $12 \cdot 5 = 60$ dzielników postaci $4m+1$ oraz $12 \cdot 4 = 48$ dzielników postaci $4m+3$. Na okręgu o promieniu $2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 13 \cdot 3 \cdot 7$ leży $4 \cdot (60 - 48) = 48$ punktów kratowych, co teraz udowodnimy. Z twierdzenia o podwajaniu sumy kwadratów wynika, że na tym okręgu leży tyle samo punktów kratowych, co na okręgu o promieniu $5\sqrt{5} \cdot 13 \cdot 3 \cdot 7$. Mamy

$$5^3 \cdot 13^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (2+i)^3 \cdot (2-i)^3 \cdot (2+3i)^2 \cdot (2-3i)^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

Załóżmy, że $(x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 = 5^3 \cdot 13^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$.Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu, równości $|x+yi| = |x-yi|$ i tego, że sprzężenie iloczynu to iloczyn sprzężeń, wynika, że liczba $x+yi$ jest iloczynem postaci $i^b(2+i)^{a_1} \cdot (2-i)^{3-a_1} \cdot (2+3i)^{a_2} \cdot (2-3i)^{2-a_2} \cdot 3 \cdot 7$, gdzie $b \in \{0, 1, 2, 3\}$,



Przypominamy, że $[x]$ to największa liczba całkowita z półprostej $(-\infty, x]$.

$a_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ i $a_2 \in \{0, 1, 2\}$. Jest więc tych liczb 48. Okazuje się, że podobne rozumowanie można przeprowadzić dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , otrzymując następujące:

Twierdzenie (o liczbie punktów kratowych na okręgu o promieniu \sqrt{n}). *Liczba punktów kratowych leżących na okręgu o promieniu \sqrt{n} jest równa pomnożonej przez 4 różnicy między liczbą dodatnich dzielników postaci $4m + 1$ liczby całkowitej $n > 0$ i liczbą dodatnich dzielników postaci $4m + 3$ liczby n .*

Niech $N(r)$ oznacza liczbę punktów kratowych w kole $K(r)$ o środku $(0, 0)$ i promieniu $r > 0$, więc o polu πr^2 . Kwadraty, dla których te punkty są wierzchołkami lewymi dolnymi niemal pokrywają koło, choć tu i ówdzie za nie wystają. Sumą ich pól jest oczywiście $N(r)$. Kwadrat, który ma punkty wspólne z kołem $K(r)$, ale w tym kole nie jest zawarty, mieści się w różnicy kół $K(r + \sqrt{2})$ i $K(r - \sqrt{2})$, więc w pierścieniu o polu $\pi(r + \sqrt{2})^2 - \pi(r - \sqrt{2})^2 = 4\pi r\sqrt{2}$.

Wobec tego $|N(r) - \pi r^2| \leq 4\pi r\sqrt{2}$, więc $|\frac{N(r)}{r^2} - \pi| \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{r}$. Z otrzymanej nierówności i z twierdzenia o trzech ciągach wynika natychmiast, że

$$(L) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r^2} = \pi.$$

Załóżmy, że $r > 10$. Wtedy liczba punktów kratowych w kole $K(r)$ jest równa sumie liczb punktów kratowych na okręgach o promieniach \sqrt{n} , gdzie $n \in [0, r^2]$ oznacza liczbę całkowitą. Przypomnijmy, że liczba punktów na tym okręgu jest równa różnicy liczb dzielników n postaci $4m + 1$ i $4m + 3$ pomnożonej przez 4. Dodajmy te liczby dla wszystkich n . Liczba 1 jest dzielnikiem $[\frac{r^2}{1}]$ liczb n , liczba 3 dzielnikiem $[\frac{r^2}{3}]$ liczb n , liczba 5 dzielnikiem $[\frac{r^2}{5}]$ liczb n , liczba 7 dzielnikiem $[\frac{r^2}{7}]$ liczb n itd. Oznacza to, że na tych wszystkich okręgach znajduje się łącznie

$$1 + 4 \left(\left[\frac{r^2}{1} \right] - \left[\frac{r^2}{3} \right] + \left[\frac{r^2}{5} \right] - \left[\frac{r^2}{7} \right] + \dots \right) = N(r)$$

punktów kratowych (dodajemy 1, bo trzeba też uwzględnić punkt $(0, 0)$). Ta suma w rzeczywistości jest skończona, bo od pewnego miejsca kolejne składniki są zerami. Wykażemy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \left(\left[\frac{r^2}{1} \right] - \left[\frac{r^2}{3} \right] + \left[\frac{r^2}{5} \right] - \left[\frac{r^2}{7} \right] + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Niech $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ i $k < \ell$. Niech $s_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k-1} a_k$. Wtedy zachodzi nierówność

$$(*) \quad |s_k - s_n| = |a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k-1} a_k - (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n)| \leq a_{k+1}.$$

Wynika ona z nierówności

$$s_{2j} \leq s_{2j} + a_{2j+1} - a_{2j+2} = s_{2j+2}, \quad s_{2j+1} \geq s_{2j+1} - a_{2j+2} + a_{2j+3} = s_{2j+3}$$

$$s_{2j} \leq s_{2j} + a_{2j+1} = s_{2j+1},$$

więc $s_{2j} \leq s_{2j+2} \leq s_{2j+3} \leq s_{2j+1}$ dla każdego naturalnego j . Stąd w szczególności wynika, że jeśli $\lim a_n = 0$, to ciągi monotoniczne (s_{2n}) i (s_{2n+1}) mają granice, te granice są równe i wobec tego skończone.

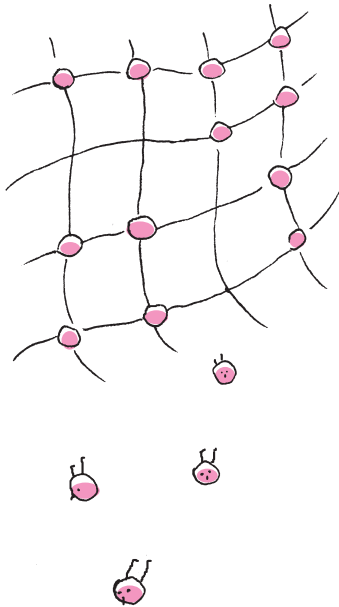
Wróćmy do wyjściowego problemu. Niech s będzie taką liczbą naturalną, że $2s + 1 \leq r < 2s + 3$, oczywiście dla różnych r otrzymujemy różne liczby s , w każdym razie niekoniecznie takie same. Liczba r wyznacza s jednoznacznie (s jest funkcją r). Mamy $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s}{r^2} = 0$, bo $0 < \frac{s}{r^2} < \frac{2s+1}{r^2} \leq \frac{1}{r}$.

Zachodzą oczywiste nierówności:

$$\left[\frac{r^2}{1} \right] \geq \left[\frac{r^2}{3} \right] \geq \left[\frac{r^2}{5} \right] \geq \left[\frac{r^2}{7} \right] \geq \dots$$

Z nierówności $(*)$ wynika, że kończąc dodawanie na składniku $(-1)^s \lfloor \frac{r^2}{2s+1} \rfloor$ popełniamy błąd, którego moduł jest mniejszy od $\lfloor \frac{r^2}{2s+3} \rfloor < \frac{r^2}{r} = r$. Wobec tego

$$(1) \quad \left| \frac{1}{r^2} \left(\left[\frac{r^2}{1} \right] - \left[\frac{r^2}{3} \right] + \dots \right) - \frac{1}{r^2} \left(\left[\frac{r^2}{1} \right] - \left[\frac{r^2}{3} \right] + \dots + (-1)^s \left[\frac{r^2}{2s+1} \right] \right) \right| < \frac{1}{r}.$$



Mamy również

$$(2) \quad \left| \left(1 - \frac{1}{3} + \dots \right) - \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^s \frac{1}{2s+1} \right) \right| < \frac{1}{2s+3} < \frac{1}{r}.$$

Zauważmy jeszcze, że $\left\lfloor \frac{r^2}{2j+1} \right\rfloor \leq \frac{r^2}{2j+1} < \left\lfloor \frac{r^2}{2j+1} \right\rfloor + 1$, zatem

$$0 \leq \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{r^2} \left\lfloor \frac{r^2}{2j+1} \right\rfloor < \frac{1}{r^2}.$$

Liczb nieparzystych od 1 do $2s+1$ jest $s+1 < r$, więc

$$(3) \quad \left| \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^s \frac{1}{2s+1} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\left\lfloor \frac{r^2}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r^2}{3} \right\rfloor + \dots + (-1)^s \left\lfloor \frac{r^2}{2s+1} \right\rfloor \right) \right| < r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

Z nierówności (2), (3) i (1) oraz z nierówności trójkąta ($|a+b| \leq |a| + |b|$) wynika, że

$$\left| \left(1 - \frac{1}{3} + \dots \right) - \frac{1}{r^2} \left(\left\lfloor \frac{r^2}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r^2}{3} \right\rfloor + \dots \right) \right| < \frac{3}{r},$$

a stąd wynika, że

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \left(\left\lfloor \frac{r^2}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r^2}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r^2}{7} \right\rfloor + \dots \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{4r^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Różni ludzie, w tym bardzo wybitni, zajmowali się różnicą $N(r) - \pi r^2$ i uzyskiwali coraz dokładniejsze wyniki. Przytoczę niektóre z nich. Carl Friedrich Gauss (1798): $|N(r) - \pi r^2| \leq 2\sqrt{2}\pi r$; Waclaw Sierpiński (1906) $|N(r) - \pi r^2| \leq r^{2/3}$ zmniejszając wykładnik przy r z 1 do $2/3$. Najlepszy wynik w tej dziedzinie, wedle tego co wiem, osiągnął w 2017 roku Jean Bourgain, laureat medalu Fieldsa z 1994 roku: $\frac{517}{824} \approx 0,627$. Godfrey Hardy (1915) wykazał, że nie istnieje taka stała $c > 0$, że $|N(r) - \pi r^2| \leq cr^{1/2}$, podobny wynik niezależnie uzyskał Edmund Landau. Hipoteza: dla każdej liczby $d > \frac{1}{2}$ istnieje taka stała $c > 0$, że $|N(r) - \pi r^2| \leq cr^d$. Do zbadania został już tylko przedział długości $\frac{517}{824} - \frac{1}{2} = \frac{105}{824} \approx 0,127$.



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1588. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\text{równość} \quad f(x+1) - f(x) = 2x + 1$$

oraz $|f(x)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$. Wykazać, że $|f(x)| \leq x^2 + 2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie na str. 16

M 1589. Grupa ośmiu osób ma tę własność, że pośród dowolnych pięciu spośród nich można wskazać trzy osoby, które znają się wzajemnie. Wykazać, że w tej grupie są cztery osoby, które znają się wzajemnie.

Rozwiązanie na str. 16

M 1590. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz zbiór $S = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów podzbioru $T \subseteq S$ o następującej własności: Dla każdej trójki (niekoniecznie różnych) elementów T ich suma nie należy do T .

Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 967. Mamy do dyspozycji n identycznych baterii o sile elektromotorycznej \mathcal{E}_0 i oporze wewnętrznym r_w każda. Chcemy uzyskać jak największą moc wydzieloną na oporniku podłączonym do źródła zbudowanego z tych baterii. Jaką moc możemy uzyskać, łącząc baterie (a) szeregowo i (b) równolegle? Ile powinien wynosić opór R dołączanego opornika w każdym z przypadków, by wydzielona moc była maksymalna?

Rozwiązanie na str. 15

F 968. Cząstka o ładunku q i masie m wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego. Prędkość cząstki tworzy różny od zera kąt z wektorem indukcji \vec{B} pola. Ile wynosi częstotliwość f , z jaką cząstka obiega kierunek pola \vec{B} ?

Rozwiązanie na str. 15

Informatyczny kącik olimpijski (123): Or

Tym razem omówimy zadanie Or, które pojawiło się w 2018 roku na *Junior Balkan Olympiad in Informatics* w Timisoarze (Rumunia).

Zadanie: Dana jest liczba całkowita p oraz kwadratowa macierz A rozmiaru $n \times n$. W każdym polu macierzy znajduje się jedna liczba całkowita. Z ilu pól składa się najmniejsza prostokątna podmacierz macierzy A , której or bitowy wszystkich elementów wynosi p ?

Dla uproszczenia, wartością podmacierzy będziemy nazywali wartość równą or'owi wszystkich liczb w tej podmacierzy.

Rozwiązanie $O(n^6)$

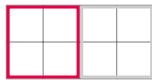
Zacznijmy od najbardziej intuicyjnego pomysłu. Rozwiązanie polega na niezależnym sprawdzeniu każdej podmacierzy i wybraniu tej, która ma wartość p oraz jest najmniejsza. Wszystkich podmacierzy jest $O(n^4)$ (lewy górny róg możemy wybrać na $O(n^2)$ sposobów, podobnie prawy dolny róg możemy wybrać na $O(n^2)$ sposobów). Naiwne obliczenie wartości podmacierzy (iterowanie po wszystkich elementach) działa w czasie $O(n^2)$. Zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^6)$.

Szybkie obliczanie wartości podmacierzy

Skonstruujemy strukturę danych, która będzie umożliwiała obliczanie wartości dowolnej podmacierzy.

W naiwnym rozwiązaniu iterujemy po każdym polu podmacierzy. Oczywiście takie rozwiązanie jest wolne, dlatego je przyspieszymy. Chcemy, w pewnym sensie, niektóre pola zliczać hurtowo. Zatem obliczymy wartość wszystkich podmacierzy o rozmiarze $a \times b$, gdzie a, b są liczbami postaci 2^k dla $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że takich podmacierzy w całej macierzy A będzie $O(n^2 \log^2(n))$, ponieważ w każdym polu jest zaczepionych $\log^2(n)$ podmacierzy ($1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 4, \dots, 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 4, \dots, 4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 4, \dots$).

Wartości wyżej opisanych podmacierzy będziemy obliczali od tych, które mają najmniejszą liczbę pól, do tych, które mają największą liczbę pól. Wartość podmacierzy o wymiarach 1×1 to liczba zapisana w tym polu. Wartość podmacierzy o wymiarach $a \times b$ to or wartości dwóch mniejszych podmacierzy o wymiarach $a \times \frac{b}{2}$, jeśli $b > 1$ lub or wartości dwóch mniejszych podmacierzy o wymiarach $\frac{a}{2} \times b$ w przeciwnym przypadku. Przykładowo: wartością podmacierzy o wymiarach 2×4 jest or wartości dwóch mniejszych podmacierzy o wymiarach 2×2 każda.

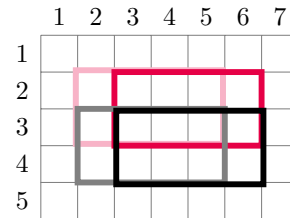


Konstrukcja struktury zajmuje $O(n^2 \log^2(n))$ pamięci i odbywa się w czasie $O(n^2 \log^2(n))$.

Pozostało nam jeszcze opisanie, w jaki sposób znaleźć wartość dowolnej podmacierzy. Nazwijmy ją M i niech ma wymiary $a \times b$. Jej wartość obliczymy na podstawie znanych wartości innych podmacierzy. Ustalmy takie największe $c = 2^i$ i największe $d = 2^j$, że $i, j \in \mathbb{N}$,

$c \leq a$ oraz $d \leq b$. Weźmy takie cztery podmacierze M o wymiarach $c \times d$, że każde pole M będzie należało do przynajmniej jednej z tych czterech podmacierzy. Wówczas wartością M będzie or wartości tych czterech podmacierzy.

Przykład: chcemy obliczyć wartość podmacierzy, której lewe górne pole to $(2, 2)$, a prawe dolne to $(4, 6)$. Zauważmy, że tę podmacierz możemy pokryć czterema podmacierzami o wymiarach 2×4 , dla których wyniki znamy. Zatem wartością tej podmacierzy jest or wartości czterech mniejszych podmacierzy.



Rozwiązanie $O(n^4)$

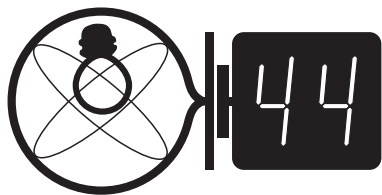
Zauważmy, że dzięki powyższej strukturze danych potrafimy w czasie $O(1)$ obliczyć wartość dowolnej podmacierzy. Zatem w naturalny sposób możemy przyspieszyć rozwiązanie z $O(n^6)$ do $O(n^4)$. Wystarczy przejrzeć wszystkie $O(n^4)$ podmacierzy macierzy A i spośród tych o wartości p wybrać najmniejszą.

Rozwiązanie $O(n^3)$

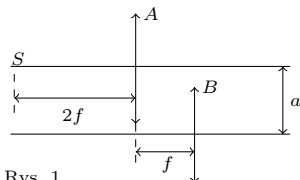
W tym rozwiązaniu iterujemy po każdym przedziale wierszy. W ustalonym przedziale wierszy szukamy najmniejszej podmacierzy o wartości p i wysokości równej liczbie wierszy w tym przedziale. Od teraz możemy o tym myśleć jak o problemie jednowymiarowym, ponieważ wysokość jest ustalona. Szukamy najkrótszego fragmentu, który będzie miał wartość p . Ten problem możemy rozwiązać za pomocą techniki o nazwie „gąsienica”. Na początku ustawiamy dwa wskaźniki (początek i koniec gąsienicy) w pierwszej kolumnie. Następnie symulujemy ruch gąsienicy. Jeśli aktualna wartość jest mniejsza od p i może jeszcze osiągnąć p , wtedy rozszerzamy gąsienicę o kolejną kolumnę. W przeciwnym przypadku skracamy gąsienicę. W każdym stanie, za pomocą powyżej opisanej struktury, w czasie $O(1)$ obliczamy wartość aktualnie rozpatrywanej podmacierzy. Dla każdego rozpatrywanego przedziału wierszy gąsienica wykona liniowo wiele ruchów. Wszystkich przedziałów wierszy do rozpatrzenia jest $O(n^2)$, zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^3)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

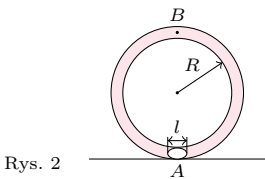
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2019



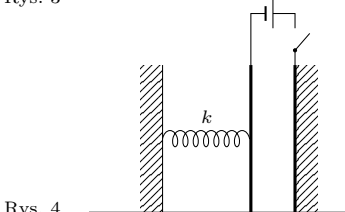
Rys. 1



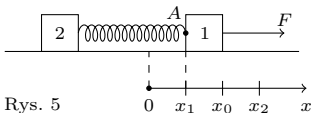
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

662. Załóżmy, że po przyłożeniu siły F do pierwszego klocka (rys. 5) klocek drugi nie ruszy z miejsca. Niech oś x skierowana będzie wzdłuż sprężyny. Gdy sprężyna jest nieodkształcona, jej koniec A przyczepiony do pierwszego klocka ma współrzędną $x = 0$. Oznaczmy przez x_1 współrzędną punktu A w chwili początkowej. Zachodzi związek $kx_1 = \pm N$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny. Znaki „ \pm ” odpowiadają sytuacjom, gdy sprężyna jest początkowo rozciągnięta lub ściśnięta. Po przyłożeniu siły klocek najpierw przyspiesza, mija położenie równowagi $x = x_0$, gdzie $kx_0 = F - \mu mg$, następnie jego prędkość maleje. W chwili, gdy prędkość klocka osiąga wartość zerową w punkcie $x = x_2$, zmiana energii sprężystości równa jest pracy siły F oraz tarcia $\frac{k(x_2^2 - x_1^2)}{2} = (F - \mu mg)(x_2 - x_1)$, stąd $\frac{k(x_2 + x_1)}{2} = F - \mu mg$. Ostatnie równanie wyraża warunek równowagi sił w położeniu $x = x_0$. Ponieważ klocek drugi nie rusza z miejsca, a siła F jest maksymalna, mamy dodatkowy warunek $kx_2 = \mu mg$. Szukana siła F dana jest wzorem $F = \frac{3\mu mg \pm N}{2}$.

663. W chwili początkowej kondensator jest naładowany ładunkiem $Q_1 = \frac{\epsilon_0 S U}{d}$, a jego energia wynosi $W_1 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d}$, gdzie U jest napięciem między okładkami a ϵ_0 przenikalnością elektryczną próżni. Załóżmy, że ruchoma

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 670, 671

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

670. Znaleźć odległość między źródłem światła S i jego obrazem w układzie optycznym przedstawionym na rysunku 1. Ogniskowe soczewek A i B są jednakowe i równe f .

671. Rurkę o średnicy dużo mniejszej od długości zwinięto w pierścien o promieniu R . Pierścien napełniono wodą, z wyjątkiem niewielkiego odcinka o długości l , gdzie znajduje się kropla oleju, i postawiono pionowo. W chwili początkowej (rys. 2) kropla zaczyna wypływać z punktu A w kierunku punktu B . Znaleźć jej prędkość, gdy mijają punkt B . Gęstość wody wynosi ρ_w , oleju $\rho_o < \rho_w$. Długość kropli oleju jest dużo mniejsza od promienia pierścienia. Tarcie zaniedbujemy. Nie zachodzi przesączanie przez olejowy „korek”.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2018

Przypominamy treść zadań:

662. Na poziomej płaszczyźnie leżą dwa klocki o jednakowych masach m , połączone nieważką sprężyną (rys. 3). Współczynnik tarcia klocków o płaszczyznę wynosi μ . Napięcie sprężyny ma wartość N . Jaką maksymalną stałą siłą F można przyłożyć do jednego z klocków, aby drugi nie ruszył z miejsca?

663. W kondensatorze płaskim jedna okładka jest nieruchoma, a druga może poruszać się bez tarcia i jest połączona ze ścianą za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k (rys. 4). Pole powierzchni każdej okładki wynosi S , początkowa odległość między nimi d . Okładki podłączono do źródła napięcia stałego. Przy jakiej maksymalnej wartości tego napięcia okładki nie zetkną się, jeżeli są stale równoległe względem siebie?

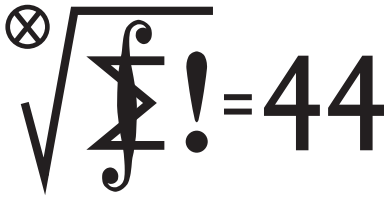
okładka zatrzyma się, gdy sprężyna zostanie rozciągnięta o $x = x_0 < d$. Do chwili zatrzymania ładunek na kondensatorze wzrośnie do wartości $Q_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{d - x}$, energia osiągnie wartość $W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d - x)}$, a źródło wykona pracę $W = (Q_2 - Q_1) U$.

Zasada zachowania energii ma postać $W_1 + W = W_2 + \frac{kx_0^2}{2}$. Otrzymujemy stąd równanie $x_0^2 - x_0 d + \frac{\epsilon_0 S U^2}{kd} = 0$. Ma ono rozwiązanie, gdy $\Delta = d^2 - \frac{4\epsilon_0 S U^2}{kd} \geq 0$. Stąd szukana maksymalna wartość napięcia $U_{max} = \sqrt{\frac{d^3 k}{4\epsilon_0 S}}$. Odpowiadająca jej odległość między okładkami ma wartość $\frac{d}{2}$.

Zadanie możemy też rozwiązać, rozważając siły działające na ruchomą okładkę kondensatora. Są to: siła sprężystości $F_1(x) = -kx$ i siła przyciągania elektrostatycznego między okładkami $F_2(x) = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d - x)^2}$. Jeżeli okładka zatrzyma się, gdy $x = x_0 \leq d$, to jej zmiana energii kinetycznej wynosi 0, a z drugiej strony równa jest pracy wypadkowej siły działającej na okładkę:

$$0 = -\frac{kx_0^2}{2} + \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{(d - x)^2}.$$

Stąd otrzymujemy takie samo równanie na x_0 jak w poprzednim rozwiązaniu.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2019

Zadania z matematyki nr 773, 774

Redaguje Marcin E. KUCZMA

773. Dana jest liczba nieparzysta $n \geq 3$. W każde pole kwadratowej planszy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb $-1, +1$ tak, że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Wyznaczamy sumę liczb w każdym wierszu oraz sumę liczb w każdej kolumnie; dostajemy ciąg $2n$ liczb nieparzystych. Ile maksymalnie może być w tym ciągu liczb ujemnych?

774. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych m, n , że nierówność

$$\lfloor (m+n)a \rfloor + \lfloor (m+n)b \rfloor \geq \lfloor ma \rfloor + \lfloor mb \rfloor + \lfloor n(a+b) \rfloor$$

zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b .

Zadanie 774 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2018

Przypominamy treść zadań:

765. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma wierzchołek A . Zakładamy, że proste AD i BC przecinają się w punkcie P , zaś proste AB i DC przecinają się w punkcie Q , przy czym $AP \perp PQ$. Niech M będzie środkiem przekątnej BD . Wykazać, że $PM \perp AB$.

766. Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > 5/2$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

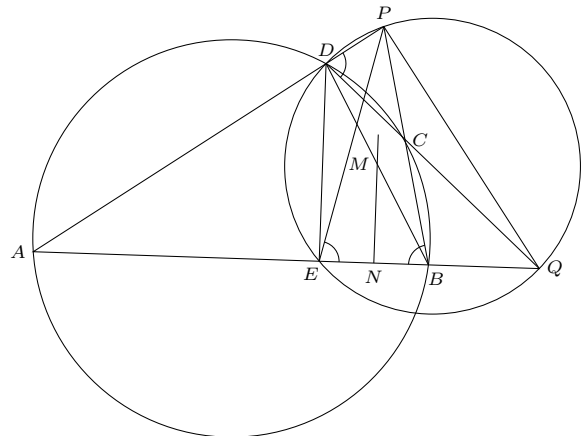
$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geq M.$$

Im większa liczba M , tym lepsze rozwiązanie.

765. Z założenia, że $\sphericalangle DAB$ jest najmniejszym kątem czworokąta $ABCD$, nietrudno wywnioskować, że punkt B leży między A i Q , a punkt D między A i P . Weźmy pod uwagę okrąg o średnicy DQ ; ów okrąg przechodzi przez punkt P (bo $AP \perp PQ$) oraz przecina odcinek AQ w punkcie, który nazwiemy E ; zatem $DE \perp QE$.

Każdy z czworokątów $ABCD$ i $PDEQ$ ma okrąg opisany. Wynikają stąd równości kątów $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PDQ| = |\sphericalangle PEQ|$. Zatem trójkąt PEB jest równoramienny.

Niech N będzie środkiem odcinka EB . Skoro M jest środkiem odcinka DB , prosta NM jest równoległa do prostej DE – która jest prostopadła do AB . To znaczy, że prosta NM jest symetralną podstawy EB trójkąta równoramiennego PEB ; przechodzi więc przez punkt P , i mamy tezę $PM \perp AB$.



766. Oznaczmy ilorazy widoczne pod symbolem pierwiastka kolejno: A, B, C, D, E (więc $A = a/(b+c)$, itd.). Wobec cykliczności można przyjąć, że $a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Dalej oznaczmy

$$p = \max\{b, c\}, \quad q = \max\{c, d\}, \quad r = \max\{d, e\}$$

i odnotujmy dolne oszacowania:

$$A \geq \frac{a}{2p}, \quad B \geq \frac{b}{2q}, \quad C \geq \frac{c}{2r}, \quad \max\{C, D\} \geq \frac{q}{2a}, \quad \max\{D, E\} \geq \frac{r}{2a}.$$

Jeśli teraz $b \geq c$ (czyli $b = p$), wówczas

$$A^{1/5} + B^{1/5} + (C^{1/5} + D^{1/5}) \geq \left(\frac{a}{2p}\right)^{1/5} + \left(\frac{p}{2q}\right)^{1/5} + \left(\frac{q}{2a}\right)^{1/5}.$$

Jeśli natomiast $b \leq c$ (czyli $c = p$), wówczas

$$A^{1/5} + C^{1/5} + (D^{1/5} + E^{1/5}) \geq \left(\frac{a}{2p}\right)^{1/5} + \left(\frac{p}{2r}\right)^{1/5} + \left(\frac{r}{2a}\right)^{1/5}.$$

W obu przypadkach mamy po lewej stronie liczbę mniejszą niż rozważana suma $S = A^{1/5} + B^{1/5} + C^{1/5} + D^{1/5} + E^{1/5}$; zaś po prawej stronie – sumę trzech liczb, których iloczyn wynosi $2^{-3/5}$. Z nierówności między średnimi dostajemy oszacowanie $S > 3 \cdot 2^{-1/5}$. Liczba $M = 3 \cdot 2^{-1/5}$ spełnia wymagany warunek $M > 5/2$.

(Tę wartość M , wraz z powyższym uzasadnieniem, zaproponował pan Piotr Kumor, autor zadania; kto da więcej?).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 763 ($WT = 1,63$) i 764 ($WT = 1,00$) z numeru 6/2018

Michał Miodek	Warszawa	44,28
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Piotr Kumor	Olsztyn	39,63
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,00
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69

Michał Miodek – po raz trzeci!
To trzydziesty ósmy Weteran Klubu 44 M.

Prosto z nieba: Einstein w centrum Galaktyki

Coś niezwykle tajemniczego znajduje się w centrum naszej Galaktyki. To coś nie emituje światła, ale jest bardzo masywne (ponad 4 miliony M_{\odot}), a jednocześnie na tyle małych rozmiarów, że bez trudu zmieściłoby się wewnątrz orbity Merkurego. Astronomowie, którzy od lat analizują centrum Galaktyki, nazywają ten tajemniczy obiekt Sgr A*. Jest to najprawdopodobniej ogromna czarna dziura; jej parametry ustala się przez obserwacje trajektorii gwiazd, w szczególności bardzo ekscentrycznej orbity gwiazdy S2, która znajduje się najbliżej Sgr A*, krążąc wokół niej z okresem około 16 lat.

W maju 2018 roku S2 znalazła się w odległości 20 miliardów kilometrów (około cztery razy dalej niż odległość Słońce–Neptun) od Sgr A*, a jej przejście przez peribothron (po grecku *bothros* oznacza dziurę), było bardzo skrupulatnie obserwowane przez zespoły Europejskiego Obserwatorium Południowego w Chile. Wykorzystano cztery teleskopy VLT (Very Large Telescope) połączone w systemie interferometrii optycznej i wyposażone w system optyki adaptatywnej NACO (Nasmyth Adaptive Optics System [NAOS] – Near-Infrared Imager and Spectrograph [CONICA]). Obserwacje polegały na dokładnym pomiarze pozycji gwiazdy S2 na niebie zaprojektowanym do tego celu niezwykle czułym astrometrem GRAVITY. Obserwujący w tym samym czasie linie widmowe S2 spektrometr SINFONI mierzył, jak szybko gwiazda przemieszcza się w odniesieniu do Ziemi. W najszybszym momencie poruszała się ona z prędkością ponad 7600 km/s, czyli z 3% prędkości światła.

Efektom tej współpracy jest pomiar grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni światła gwiazdy S2 podczas jej ruchu wokół Sgr A*. Obserwacja zmiany długości fali fotonu pod wpływem pola grawitacyjnego lub, równoważnie, obserwacja zmiany tempa biegu

zegarów w miejscach o różnej sile pola grawitacyjnego jest jednym z klasycznych testów teorii grawitacji. W warunkach ziemskich pierwszy tego typu eksperyment został przeprowadzony przez Roberta Pounda i Glena Rebkę w 1959 roku – pokazali oni, że w silniejszym polu grawitacyjnym (na parterze budynku laboratorium Jeffersona w Uniwersytecie Harvarda) zegar tyka wolniej w porównaniu do zegara w słabszym polu (na dachu budynku).

Podobnie do efektu Dopplera, którego doświadczamy w życiu codziennym, słysząc przesunięcie ku wyższym dźwiękom sygnału emitowanego przez zbliżającą się karetkę (oraz ku dźwiękom niższym, gdy karetką się od nas oddala), zmiana długości fali światła emitera znajdującego się w polu grawitacyjnym innego masywnego ciała zmienia się wraz z prędkością ruchu emitera – światło będzie bardziej niebieskie, gdy gwiazda-emiter porusza się w kierunku do Ziemi, i bardziej czerwone, gdy się od niej oddala.

Otrzymana dzięki astrometrii GRAVITY historycznie pierwsza obserwacja z pobliza masywnej czarnej dziury nie daje się wytłumaczyć „zwykłą” mechaniką Newtona i ruchem gwiazdy w euklidesowej (albo, jak mówią astronomowie, płaskiej) czasoprzestrzeni, natomiast bardzo dobrze odpowiada przewidywaniu modelu, w którym gwiazda porusza się w czasoprzestrzeni zakrzywionej dużą masą, i zgadza się z przewidywaniami ogólnej teorii względności. Planowane kolejne obserwacje gwiazdy S2 oraz poszukiwania świecących obiektów orbitujących jeszcze bliżej Sgr A* posłużą do przetestowania innych przewidywań teorii grawitacji, na przykład do pomiaru tempa rotacji centralnej czarnej dziury i efektów z tym związanych, takich jak „wleczenie” czasoprzestrzeni w kierunku ruchu rotacji (efekt Lense’a–Thirringa).

Michał BEJGER

Niebo w styczniu

Na początku każdego roku Ziemia przechodzi przez peryhelium, czyli najbliższy Słońcu punkt swojej orbity, a także przez resztki kometarne, tworzące rój meteorów Kwadrantydów. Przejście Ziemi przez peryhelium ma miejsce 3 stycznia, tak samo jak maksimum aktywności Kwadrantydów, promieniujących tylko przez dwa tygodnie, od 28 grudnia do 12 stycznia, z maksimum trwającym zaledwie kilka godzin. W zeszłym roku w obserwacjach tego roju przeszkadzała superpełnia Księżyca, w tym zaś warunki obserwacyjne Kwadrantydów są bardzo dobre, gdyż 6 stycznia Księżyc przejdzie przez nów, okraszony częściowym zaćmieniem Słońca o dużej fazie maksymalnej 71%. Niestety,

szczęście uśmiechnie się tylko do mieszkańców północnej części Pacyfiku, od Japonii do Aleutów – tym razem to oni będą mieli możliwość jego obserwacji. Maksimum Kwadrantydów prognozowane jest na około 3:20 naszego czasu, co jest dobrą wiadomością dla mieszkańców Europy. O tej porze radiant roju, znajdujący się na pograniczu gwiazdozbiorów Wolarza, Smoka i Herkulesa, jakieś 15° na wschód od ostatniej gwiazdy dyszla Wielkiego Wozu, wznosi się na wysokość około 40° nad północno-wschodnim widnokregiem. Prędkość zderzenia Kwadrantydów z naszą atmosferą wynosi 41 km/s, a w nocy maksimum można liczyć na ponad 130 zjawisk na godzinę.

W 2019 r. oprócz styczniowego czeka nas jeszcze całkowite zaćmienie Słońca 2 lipca oraz obrączkowe 26 grudnia, ale pasy widoczności obu zjawisk przebiegną jeszcze dalej od granic Polski. Zdarzą się również dwa zaćmienia Księżyca – i tym razem mamy więcej szczęścia, gdyż oba będą widoczne z naszego kraju. Już 21 stycznia Księżyc zanurzy się w cieniu Ziemi w całości. Srebrny Glob znajdzie się wtedy na pograniczu gwiazdozbiorów Bliźniąt i Raka, a zjawisko zacznie się w drugiej części nocy, od zaćmienia półcieniowego o 3:36, faza częściowa zacznie się o 4:34, całkowita – o 5:41, kończąc się o 6:43. Faza częściowa skończy się około godziny 7:50, w momencie zachodu Księżyca w środkowej Polsce, tuż po wschodzie Słońca. Mniej niż 8° na wschód od zaćmionego Księżyca znajduje się znana gromada otwarta gwiazd M44, a 40° nad nim – Kometa Wirtanena (o niej więcej za chwilę), jest zatem okazja do wykonania efektownych zdjęć. Drugie z zaćmień – tym razem częściowe, o fазie 65% – zdarzy się 16 lipca wieczorem, ale o nim napiszę więcej za pół roku.

Jednak wydaje się, że najbardziej wyczekiwany przez astronomów zjawiskiem związanym ze Słońcem jest w tym roku przejście Merkurego na jego tle 11 listopada. Zjawisko zacznie się o 13:35 naszego czasu i potrwa do 19:04. Niestety, Słońce u nas zajdzie 3 godziny wcześniej, stąd z Polski da się obserwować tylko początek przejścia. W całości zobaczą je mieszkańcy Ameryki Południowej, wschodniej części Ameryki Północnej oraz wysp oblewających je oceanów, a także naukowcy i turyści na Antarktydzie. Kolejne takie zjawisko zdarzy się dopiero w 2032 r.

Jeśli sprawdzą się prognozy odnośnie komety 46P/Wirtanena, na początku roku wciąż pozostanie ona widoczna gołym okiem, choć wyraźnie zwolni swój ruch względem gwiazd, zwłaszcza w drugiej części miesiąca, przemierzając 20-kilka stopni na tle gwiazdozbiorów Rysia i Wielkiej Niedźwiedzicy, kończąc styczeń około 4° na północny zachód od gwiazdy 3. wielkości θ UMa. Kometa Wirtanena szybko oddala się już zarówno od Ziemi, jak i od Słońca, stąd warto wykorzystać styczniowy nów Księżyca do jej obserwacji. Kometa góruje między 1 a 2 w nocy na wysokości ponad 80°, a zatem na jej warunki obserwacyjne nie można narzekać.

Z planet Układu Słonecznego w styczniu niewidoczny jest Merkury, dążący do koniunkcji górnej ze Słońcem pod koniec miesiąca. Saturn spotka się ze Słońcem 2 stycznia i zacznie wyłaniać się z zorzy porannej w ostatnich dniach miesiąca jako gwiazda o jasności 0,6^m, przy średnicy tarczy 15'', zaś 2 lutego zakryje go Księżyc w fazie 6%. W tym sezonie obserwacyjnym Saturn zakreśli zygzak niedaleko wianuszka gwiazd w północno-wschodniej części Strzelca oraz Plutona. Przez cały miesiąc na niebie porannym dość ciasną parę utworzą planety Wenus i Jowisz. Druga planeta od Słońca 6 stycznia znajdzie się w maksymalnej elongacji zachodniej, oddalając się od Słońca na 47°, a największa

z planet pokaże się po złączeniu ze Słońcem pod koniec listopada zeszłego roku. 22 stycznia Wenus minie Jowisza w odległości 2,5 stopnia. W trakcie miesiąca Wenus przejdzie od środka gwiazdozbioru Wagi, gdzie Jowisz był w zeszłym sezonie obserwacyjnym, poprzez Skorpiona do pogranicza Wężownika i Strzelca. W tym czasie jej jasność zmniejszy się od -4,5 do -4,2^m, tarcza – z 26 do 19'', natomiast faza urośnie z 48 do 62%. Da się zauważyć przy tym zmianę nachylenia ekliptyki na niebie porannym na niekorzystne, przez co im bliżej wiosny, tym Wenus niżej nad widnokregiem, mimo wciąż dużej elongacji. W styczniu na godzinę przed świtem Wenus zdąży się wznieść na wysokość ponad 20°. Tymczasem Jowisz przeniesie się do gwiazdozbioru Wężownika, gdzie 3 lata temu znajdował się Saturn. W styczniu jasność planety wyniesie -1,8^m, a średnica jej tarczy – 33''.

Na niebie wieczornym wyraźnie pogarszają się warunki obserwacyjne Neptuna, nieco wolniej – Marsa i Urana. W trakcie miesiąca Mars zmniejszy dystans do Urana z ponad 28 do 8°, jednocześnie słabnąc z 0,5 do 0,9^m i kurcząc się z 7 do 6''. Neptun przez cały miesiąc wędruje przez wnętrze trójkąta utworzonego przez gwiazdy 5. i 6., wielkości 81, 82 i 83 Aqr, mniej więcej w połowie drogi między jaśniejszymi o ponad 2^m gwiazdami λ i φ Aqr, sam świecąc blaskiem +7,9^m. Uran 7 stycznia zmieni kierunek ruchu na prosty, kończąc tym samym okres najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Zwrotu dokona jakieś 75' od gwiazdy 4. wielkości σ Psc, mając jasność +5,8^m.

Srebrny Glob zacznie i skończy miesiąc w postaci cienkiego sierpa, w towarzystwie pary planet Wenus–Jowisz. 1 i 2 stycznia w fazie, odpowiednio, 21 i 13% znajdzie się najpierw 8° na zachód, a później 4° na wschód od Wenus. Kolejnego poranka oświetlony w 7% dotrze na 2,5 stopnia od Jowisza. Już po nowiu, 10 i 11 stycznia, w fazie 18 i 25% spotka się z Neptunem, a dobę później, w fazie 34% przejdzie 7° pod Marsem. 14 stycznia Księżyc w I kwadrze minie Urana w odległości 5,5 stopnia. 17 stycznia wieczorem, już bliski pełni Księżyc przejdzie niecały stopień na północ od Aldebarana w Byku, zaś 23 stycznia nad ranem zabraknie mu 100' do Regulusa w Lwie. Wreszcie ostatniego dnia stycznia rano Księżyc ponownie w postaci cienkiego sierpa, w fazie 18%, znajdzie się między Wenus a Jowiszem, tworząc malowniczy układ.

W styczniu blisko maksimum swojej jasności znajdą się trzy mirydy, przekraczające granicę widoczności gołym okiem. Jeszcze w grudniu maksymalny blask osiągnęły χ Cygni oraz Mira Ceti i zwłaszcza druga z nich powinna być jeszcze całkiem jasna. Natomiast pod koniec miesiąca swoje maksimum osiągnie gwiazda R Leo, łatwa do odnalezienia jakieś 5° na zachód od Regulusa. R Leo może osiągnąć jasność nawet +4,4^m, a ponadto wyróżnia się wiśniową barwą, trudno ją zatem pomylić z inną gwiazdą.

Ariel MAJCHER

Ze stałą Plancka po ziemniaki

Nie znamy wszystkich powodów, dla których rok 2019 zaznaczy się w historii nauki. Jeden jest jednak już pewny – od 20 maja wejdą w życie nowe definicje niektórych jednostek układu SI. Zmiany zostały przyjęte pół roku wcześniej przez obradującą w Wersalu Generalną Konferencję Miar (*Conférence générale des poids et mesures*). Decyzja ta jest w pewnym sensie zwieńczeniem procesu zapoczątkowanego wprowadzeniem metrycznego układu jednostek w 1790 roku, który miał wyrazić je w oparciu o uniwersalne i ściśle związane z przyrodą definicje jednostek fizycznych. Przypatrzmy się zatem, jak już niebawem będziemy opisywać masę, natężenie prądu, temperaturę i ilość substancji.

Kilogram. Przez 130 lat masa 1 kg była zdefiniowana jako masa wykonanego ze stopu platyny i irydu wzorca. Istnienie jednego uniwersalnego obiektu wyznaczającego jednostki masy na całym świecie było jednak niepraktyczne, wykonano więc szereg kopii wzorca, które w miarę upływu czasu poczynają różnić się masą od swojego protoplasty. Nie trzeba mówić, jakie problemy praktyczne czy prawne stwarzała taka sytuacja. Nowa definicja kilograma jest zupełnie inna. Stała Plancka jest z definicji równa dokładnie

$$6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

i, znając definicję sekundy (obowiązującą od 1967 roku) oraz metra (obowiązującą od 1983 roku), możemy stwierdzić, czym jest kilogram.

Amper. Od 63 lat natężenie prądu 1 A było określone w następujący sposób. Braliśmy dwa nieskończone, równoległe przewodniki prostoliniowe umieszczone w próżni w odległości 1 m i przepuszczaliśmy przez nie stały prąd. Jeżeli siła działająca na 1 m takiego przewodnika była równa $2 \cdot 10^{-7}$ N, natężenie prądu było równe jednemu amperowi. Definicja ta była w oczywisty sposób problematyczna, gdyż trudno jest zrealizować doświadczalnie z dużą dokładnością przedstawioną w niej koncepcję pomiaru. W rzeczywistości najdokładniejsze pomiary pozwalające na wyznaczenie ampera opierały się na równowadze między siłami grawitacyjnymi i magnetycznymi. Nowa definicja jednostki natężenia prądu bazuje na wyznaczeniu ładunku elementarnego (np. elektronu lub protonu) jako

$$1 e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C} ;$$

wówczas prąd 1 A odpowiada przepływowi $\frac{1}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}}$ ładunków elementarnych w ciągu sekundy.

Kelwin. Od ponad półwiecza 1 K równał się $\frac{1}{273,16}$ temperatury bezwzględnej punktu potrójnego wody (w którym może istnieć zarówno faza stała, ciekła, jak i gazowa). Nowa definicja określa stałą Boltzmanna jako

$$k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}} ,$$

zatem, znając definicję metra, sekundy i kilograma, możemy wyznaczyć także jednostkę temperatury.

Mol. Dotąd 1 mol dowolnej substancji liczył sobie tyle cząsteczek, ile jest ich w 0,012 kg węgla ^{12}C . Według

nowej definicji będzie to ilość substancji zawierającej $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ cząsteczek. Oznacza to, że liczbę Avogadro przyjmujemy jako znaną dokładnie i względem niej wyznaczamy ilości dowolnych substancji.

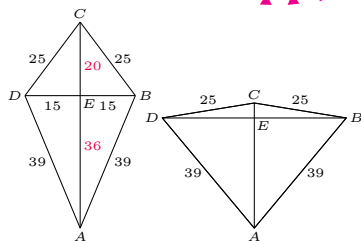
Wprowadzenie nowych definicji jednostek jest wyrazem zmian, jakie dokonały się w fizyce w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat. Ustępujące definicje odnoszą się do badania własności obiektów makroskopowych, podczas gdy te nowe są mocno osadzone w badaniach mikroświata. Oznacza to, że obecnie to właśnie doświadczenia w mikroskali są dokładniejsze i łatwiejsze do przeprowadzania w porównywalny sposób w laboratoriach na całym globie.

Zmiana ma też charakter filozoficzno-poznawczy. Dotychczasowe definicje odpowiadały wyobrażeniom i intuicjom, jakie można w łatwy sposób wytworzyć, gdy myślimy o tym, czym jest masa, prąd, temperatura czy ilość substancji. Nowe wzorce rezygnują z tych intuicji i odnoszą się bezpośrednio do wartości stałych fizycznych. Dołączają w ten sposób do trendu wyznaczonego przez sekundę i metr: ta pierwsza to 9 192 631 770 okresów drgań fali elektromagnetycznej odpowiadającej promieniowaniu elektromagnetycznemu przy przejściu między dwoma poziomami struktury nadsubtelnej stanu podstawowego atomu cezu ^{133}Cs ; ten drugi jest zaś drogą pokonywaną w próżni przez światło w ciągu $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekundy.

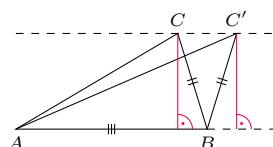
Ma to jeszcze jedną konsekwencję. Już nigdy nie wyznaczymy dokładniej stałej Plancka, ładunku elementarnego, stałej Boltzmanna czy liczby Avogadro – będziemy mogli co najwyżej coraz dokładniej wyznaczać, czym jest kilogram, amper, kelwin i mol. Co więcej, nowe definicje odchodzą od konkretnych układów pomiarowych. Oznacza to, że jeśli w przyszłości naukowcy obmyślą nowe, dokładniejsze metody pomiarowe parametrów mikroświata, nie będzie trzeba się zastanawiać, czy jednostki fizyczne są wyznaczone z dokładnością zgodną z tymi pomiarami.

A zatem – żegnajcie, już na zawsze, wzorce z Sèvres! Fizyka jest przecież bardziej fundamentalna od jakichkolwiek obiektów rządzonych jej prawami.

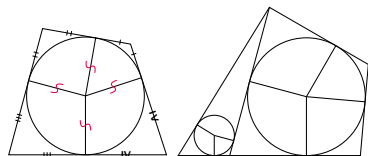
Krzysztof TURZYŃSKI



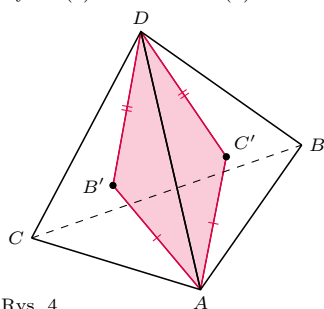
Rys. 1 (a) $BD = 30$ (b) $AC = 30$



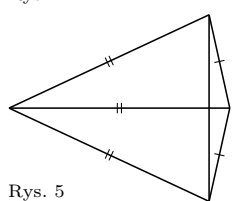
Rys. 2. Trójkąt ABC jest ostrokątny, $AB \neq BC = BC'$, $CC' \parallel AB$



Rys. 3 (a) (b)



Rys. 4



Rys. 5

Niniejszy odcinek *Deltooidu o okrągłym* (w systemie jedenastkowym) numerze jest odcinkiem ostatnim. Nie kryjemy smutku z tego powodu, cieszymy się jednocześnie, że na naszych łamach ta wspaniała seria ukazywała się przez okrągłych 10 lat. Mamy nadzieję, że jeszcze wiele razy nazwisko Autorki zagości w naszym spisie treści.

Joasiu, za Twoją nienaganną punktualność w dostarczaniu materiałów, zegarmistrzowską dokładność przy ich korekcji, a przede wszystkim za deltoidową fantastyczność serdecznie dziękujemy!

Redakcja

1. Deltoid wypukły ma boki długości 25 i 39, a jego krótsza przekątna ma długość 30. Wyznacz długość dłuższej przekątnej tego deltoиду.
2. Czy istnieją nieprzystające czworokąty wypukłe $ABCD$, $PQRS$ o równych polach i takie, że $AB = PQ$, $BC = QR$, $CD = RS$, $DA = SP$?
3. Wykaż, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na siedem deltoidów.
4. Wykaż, że powierzchnię dowolnego czworościanu można rozciąć na sześć części, z których każda po rozłożeniu na płasko jest deltoidem.
5. Czy istnieje taki czworokąt wypukły, który nie jest rombem i którego każda przekątna dzieli go na dwa trójkąty równoramienne?
6. Stół do bilarda ma kształt deltoиду $ABCD$ o osi symetrii AC i kątach prostych przy B i D . Billa wybita z wierzchołka A po odbiciu od boku BC , a następnie od AD trafia w wierzchołek C . Wykaż, że środek drogi bili leży na AC .
7. Dany jest deltooid $ABCD$ o osi symetrii BD . Punkty K, M, N są odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego z bokami AB, BC, DA ; proste BD i MN przecinają się w punkcie P . Wykaż, że punkty A, K, P, N leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania i wskazówki

R1. Przy oznaczeniach jak na rysunku 1 (a), korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy $AE = 36$ oraz $CE = 20$, więc $AC = 56$.

Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie! Oś symetrii AC deltoиду może zawierać jego krótszą przekątną (rys. 1 (b)). Wówczas $25^2 - CE^2 = 39^2 - (30 - CE)^2$, co prowadzi do równości $CE = 1/15$ oraz $BD = 2 \cdot BE = 2\sqrt{25^2 - (1/15)^2}$. \square

R2. Trójkąty ABC , ABC' z rysunku 2 mają równe pola i nie są przystające. Niech D, D' będą obrazami B w symetrii odpowiednio względem AC i AC' . Wówczas deltoidy $ABCD$ i $ABC'D'$ spełniają warunki zadania: mają równe pola i odpowiednie boki oraz nietrudno sprawdzić, że są nieprzystające i wypukłe. \square

R3. Jeśli w dany czworokąt da się wpisać okrąg, to można go rozciąć na cztery deltoidy, jak na rysunku 3 (a), a następnie jeden z nich na kolejne cztery (bo w każdy deltooid wypukły można wpisać okrąg), łącznie uzyskując siedem deltoidów.

Jeśli zaś w dany czworokąt nie da się wpisać okręgu, to wpiszmy mały okrąg w dowolny z jego kątów i powiększajmy ten okrąg, aż dotknie jednego z pozostałych boków. Pozwala to podzielić dany czworokąt na czworokąt opisany na okręgu i trójkąt, a następnie na siedem deltoidów, jak na rysunku 3 (b). \square

R4. Niech B', C' będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan ze ścianami odpowiednio ADC, ADB (rys. 4). Wówczas $AB' = AC'$ i $DB' = DC'$ jako odcinki stycznych do tej sfery, więc $AB'DC'$ po rozplaszczeniu jest deltoidem. Podobnie uzyskujemy pozostałe deltoidy. \square

R5. Taki czworokąt istnieje (rys. 5). \square

Inny przykład to czworokąt utworzony przez cztery z wierzchołków pięciokąta foremnego.

W6. Warto rozważyć romb $ACA'C'$ o środku w punkcie B . Oznaczmy przez E punkt przecięcia drogi bili z odcinkiem AC , niech E' będzie obrazem E w symetrii względem BC . Wystarczy dowieść, że $AE' = E'C'$ i że odcinki te są równe rozprostowanym odpowiednim fragmentom drogi bili. Przyda się fakt, iż kąt padania bili równy jest kątowi odbicia.

W7. Twierdzenie Brianchona dla czworokąta opisanego na okręgu orzeka, że przekątne i proste łączące przeciwległe punkty styczności przecinają się w jednym punkcie. Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle APK = \sphericalangle ANK$, korzystając np. z $AP \parallel KM$, z równoramienności trójkąta KPM i z twierdzenia o stycznej i cięciwie.

Zad. 1 pochodzi z *Autorskiego Tygodnika Matematycznego TRAPEZ* Jarosława Wróblewskiego, zad. 3 z LXII Olimpiady Matematycznej, zad. 5 ze zbiorów Jerzego Bednarczuka, a zad. 7 z 18 Rosyjskiej Olimpiady Matematycznej. Dziękuję Łukaszowi Bożykowi i Krzysztofowi Ciesielskiemu za pomoc w gromadzeniu materiałów do tego artykułu.



Delta to Marek, Marek to *Delta*. Jego wpływu na merytoryczną zawartość *Delty*, jakość zawartych w niej materiałów, dobór autorów nie da się przecenić. Osobiście jestem wdzięczny Markowi, że od pierwszego numeru informatyka była w niej reprezentowana na równych prawach z innymi dziedzinami z obszaru nauk ścisłych i przyrodniczych. W numerze pierwszym ze stycznia 1974 r. znalazł się artykuł poświęcony algorytmom autorstwa Andrzeja Skowrona. To było zapowiedzią, że informatyka w *Delcie* to nie szybko zmieniająca się błyskotka technologiczna, ale jej istota. Tak jest do dzisiaj. Dziękuję, Marku.

Krzysztof DIKS
informatyk, Uniwersytet Warszawski

Jeśli Marek uzna, że jakiś pomysł jest ważny, że trzeba go zrealizować, to go realizuje. Nie odkłada na bliżej nieokreśloną przyszłość, kiedy będzie miał więcej czasu. Nigdy nie zniechęca go ogrom dodatkowej pracy organizacyjnej. Potrafi opowiadać o swoich pomysłach tak, że jego entuzjazm udziela się współpracownikom.

Maria DONTEN-BURY
matematyk, Uniwersytet Warszawski

Uznanie i wdzięczność na jakie zasługuje Marek Kordos trudno jest wyrazić w kilku słowach. Jako twórca i redaktor naczelny *Delty* oraz inicjator i organizator Szkół Matematyki Poglądowej, w których miałem ogromną przyjemność wielokrotnie uczestniczyć, zaszczepił wielu osobom pasję do matematyki. Za to i wszystko inne – wielkie i szczerze: DZIĘKUJĘ!

Andrzej GRZESIK
informatyk, Uniwersytet Jagielloński

Pisywałem do *Delty* rzadko, ale zawsze ceniłem ją bardzo wysoko. Gratuluję prof. Kordosowi satysfakcji, z jaką może pomyśleć o tych wszystkich matematykach, fizykach i astronomach, którzy dzięki niemu odnaleźli swoje powołanie.

Michał RÓŻYCZKA
astronom, Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

W dotychczasowych 45 rocznikach *Delty* było około 110 artykułów z teorii liczb (w tym cztery moje, a jeden wspólny z Andrzejem Paszkiewiczem), a więc przeciętnie ponad dwa na rocznik. Zasługa za ten stan rzeczy przypada między innymi redaktorowi naczelnemu *Delty*, profesorowi Markowi Kordosowi. Dziękuję.

Andrzej SCHINZEL
matematyk, Instytut Matematyczny PAN

Szkoła obecna nie opiera się na rozwoju talentów swoich uczniów; operuje skostniałym werbalnym przekazem fragmentów wiedzy skatalogowanych w sztywnych okładkach podstaw programowych. Tak prowadzona działalność edukacyjna staje się coraz bardziej czymś w rodzaju niezrozumiałego utrapienia. W tej sytuacji wszelka działalność rozwijająca wśród młodych ludzi podstawę wykształcenia i przygotowania do zmierzenia się z współczesnością, to znacząca umiejętność samodzielnego myślenia i samodzielnego poznawania prawdy ma niebywałą wartość.

Delta, formalnie czasopismo dla młodych entuzjastów nauk ścisłych, w swej działalności odgrywała i odgrywa rolę wykraczającą poza formalne granice. Była i jest ośrodkiem społeczności młodzieży i dorosłych naukowców, dla których nauka stanowi sedno życia.

Delta nie osiągnęłaby tych sukcesów gdyby nie jej redaktor naczelny Profesor Marek Kordos i jego umiejętność aktywizowania, przez wiele, wiele lat, działań redakcji, autorów tekstów i, przede wszystkim, rzesz czytelników. Redaktor Kordos zakończył swoją działalność w *Delcie*. Nie wyobrażam sobie by tak zupełnie zniknął z kręgu Deltowiczów. Cokolwiek jednak postanowi, zawsze będzie mu towarzyszyła nasza wdzięczność za wszystko co zrobił dla tego byśmy wszyscy nie stracili zdolności i chęci do myślenia.

Panie Redaktorze, redakcjo *Delty*, dobrze przysłużyliście się myślącej części naszego społeczeństwa.

Łukasz TURSKI
fizyk, Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Znam Marka od dzieciństwa, był moim instruktorem w harcerstwie. Najpierw uczył mnie, jak być człowiekiem a potem jego książki, artykuły i wykłady uczyły, jak piękna jest matematyka, jak na nią patrzeć i jak o niej mówić. Dziękuję, Marku.

Bronisław WAJNRYB
matematyk, Politechnika Rzeszowska