

ISSN 1663-1074 | ISRN 173441592

NR 12 (583) 2022

CENA 6 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 1663-1074 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

MATEMATYKA FIZYKA ASTRONOMIA INFORMATYKA

**Paradoks  
informacyjny**  
a zasady zachowania  
w fizyce

str. 12




UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.



## SPIS TREŚCI NUMERU 12 (583)

Czym właściwie jest informacja? <i>Anna Durkalec</i>	str. 1
Ukrywanie się w sieciach społecznych <i>Marcin Waniek</i>	str. 2
Steganografia – jak ukryć galaktykę w Babiej Górze <i>William J. Pearson</i>	str. 4
 Zadania	str. 5
Plotki, ploteczki, plotunie <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 6
O sztuce zadawania pytań <i>Damian Niwiński</i>	str. 8
Paradoks informacyjny a zasady zachowania w fizyce <i>Kacper Dębski</i>	str. 12
Krótko o skracaniu <i>Tomasz Kazana</i>	str. 15
Prąd elektryczny, fotony i fale ciśnienia <i>Szymon Charzyński</i>	str. 18
 Starość roślin <i>Magdalena Fikus</i>	str. 20
Prosto z nieba: I Ty możesz odkryć asteroidę! Nie patrz w górę – użyj Zooniverse	str. 21
Klub 44	str. 22
Niebo w grudniu	str. 22
Aktualności Pochód stalowych kogutów	str. 24
 Różności w kolorowej rzeczywistości <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

## W następnym numerze: Gwiazdy zombie



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 2	<b>Komitet Redakcyjny:</b> dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.
str. 8	<b>Redaguje kolegium w składzie:</b> Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Marta Gródek, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

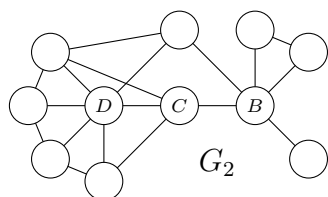
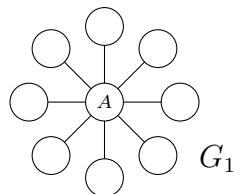


# Ukrywanie się w sieciach społecznych

Marcin WANIEK\*

\*New York University Abu Dhabi

Choć możemy nie zdawać sobie z tego sprawy, niemal wszystkie działania, które podejmujemy w Internecie (i bardzo wiele poza nim), pozostawiają po sobie cyfrowe ślady. Nieistotne, czy rozmawiamy z przyjaciółmi przez telefon, oglądamy film na YouTube, czy zamieszczamy komentarz pod zdjęciem kota, informacje o tych wydarzeniach są gdzieś skrzętnie rejestrowane. Bardzo często tego rodzaju dane wygodnie jest reprezentować w postaci sieci społecznej, gdzie każdy wierzchołek odpowiada pojedynczej osobie, wierzchołki zaś połączone są krawędzią, jeżeli zachodzi między nimi określona relacja (na przykład jeżeli te osoby są znajomymi na Facebooku albo jeżeli doszło między nimi do spotkania w ciągu ostatniego roku).



O tych i innych miarach centralności pisaliśmy już w  $\Delta_{08}^{08}$ ,  $\Delta_{16}^{11}$  oraz  $\Delta_{21}^{09}$ .

Co można zrobić z tak skonstruowaną siecią społeczną? Można na przykład próbować wyciągnąć z niej dodatkowe informacje przy użyciu różnego rodzaju narzędzi analizy sieci społecznych (*social network analysis*). Jednym z najpopularniejszych typów takich narzędzi są miary centralności. Pozwalają one określić na podstawie struktury sieci, który z wierzchołków jest najważniejszy. Warto w tym momencie zwrócić uwagę, że mogą kierować się przy tym bardzo różnorodnymi kryteriami. O ile w przypadku sieci  $G_1$ , pokazanej na marginesie, każdy z was zgodzi się pewnie, że wierzchołek  $A$  wydaje się najistotniejszy, o tyle w przypadku sieci  $G_2$  trudno o tak oczywistego kandydata. *Miara centralności stopnia* (*degree*) stwierdziłaby na przykład, że najważniejszy jest wierzchołek  $D$ , ponieważ ma najwięcej przyjaciół. *Miara centralności bliskości* (*closeness*) doszłaby z kolei do wniosku, że to wierzchołek  $C$  jest najbardziej znaczący, ponieważ średnio najmniej „uścisków dłoni” dzieli go od innych członków sieci. *Miara centralności pośredniczenia* (*betweenness*) orzekłaby zaś, że to  $B$  jest kluczowy, pośredniczy bowiem w przekazywaniu informacji między różnymi częściami sieci.

Super, zatem wiemy, że miary centralności potrafią wskazać najważniejszy (w jakimś sensie) wierzchołek w sieci społecznej. Dlaczego mielibyśmy się tym przejmować? Pamiętajmy, że sieci, których jesteśmy częścią, można konstruować i analizować bez naszej wiedzy i zgody. Wyobraźmy sobie na przykład, że jesteśmy opozycyjnymi blogerami w autorytarnym społeczeństwie, a rząd wykorzysta miary centralności, aby wybrać tych spośród nas, wobec których zastosowane zostaną surowe represje. Miary centralności mogą też zostać wykorzystane przez grupy hakerskie, aby wybrać najbardziej kuszące cele ataków, albo przez firmy marketingowe, aby wyselekcjonować użytkowników, którzy nękami będą ciągłymi telefonami. Czy istnieje zatem jakiś sposób na ukrycie się przed miarami centralności?

Załóżmy, że jesteśmy wierzchołkiem w sieci i naszym celem jest sprawienie, że będziemy wydawać się mniej istotni, niż jesteśmy naprawdę. Aby to zrobić, możemy dodawać i usuwać z sieci krawędzie. Dodanie krawędzi można zinterpretować jako zawarcie nowej znajomości lub odbycie z kimś rozmowy telefonicznej, pozbycie się krawędzi zaś jako usunięcie kogoś z grona znajomych lub zaniechanie kontaktów z określoną osobą.

Okazuje się, że problem optymalnego ukrywania się jest NP–zupełny dla większości popularnych miar centralności. Tłumacząc z informatycznego na polski, znalezienie najbardziej efektywnego sposobu na ukrycie się przed miarami centralności jest niemożliwe dla większych sieci. Co więcej, nawet gdyby taki optymalny algorytm istniał, byłby pewnie trudny do zastosowania w praktyce. Wymagałby bowiem wiedzy na temat struktury całej sieci. Większość z nas posiada natomiast informacje na temat swojego bezpośredniego sieciowego otoczenia (wiemy zazwyczaj, czy dwoje z naszych przyjaciół zna siebie nawzajem), ale nie na temat bardziej odległych fragmentów sieci (nie wiemy nic na temat znajomości przypadkowego przechodnia).

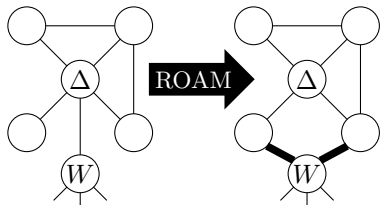
Co jednak, jeżeli nie aspirujemy do znalezienia optymalnego sposobu na ukrycie się, a wystarczy nam metoda skuteczna w praktyce, którą będziemy w stanie zastosować, posiadając jedynie ograniczoną wiedzę o sieci? Wówczas dobrym



Mamy tu na myśli problem optymalizacyjny odpowiadający następującemu problemowi decyzyjnemu: czy dla danej centralności, grafu  $G = (V, E)$ , wierzchołka  $v \in V$ , liczby  $k \in \mathbb{N}$  oraz progu  $r \in \mathbb{R}$  istnieje  $k$  krawędzi, które możemy dodać lub usunąć w  $G$ , aby zmniejszyć centralność  $v$  o co najmniej  $r$ ?

Marcin Waniek, Tomasz P. Michalak, Michael J. Wooldridge and Talal Rahwan. *Hiding individuals and communities in a social network*. „Nature Human Behaviour” (2018).

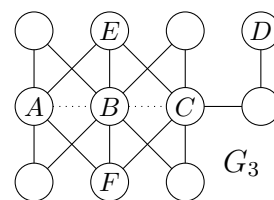
wyborem jest użycie algorytmu ROAM (*Remove One, Add Many*, „usuń jedną, dodaj wiele”). Aby go zastosować, trzeba najpierw zidentyfikować swojego sąsiada, który ma najwyższy stopień (tj. ma najwięcej znajomych), nazwijmy go  $W$ . Następnie należy utworzyć krawędzie pomiędzy  $W$  a kilkoma naszymi sąsiadami z niewielką liczbą znajomych, po czym usunąć swoje własne połączenie z  $W$  (przykład zastosowania ROAM możecie zobaczyć poniżej, ukrywający się węzeł to  $\Delta$ ). W ten sposób nie tylko możemy obniżyć swoją centralność, stając się mniej narażonymi na wykrycie, ale również podtrzymać swój wpływ na sieć (zamiast łączyć się z  $W$  bezpośrednio, czynimy to za pośrednictwem naszych nowych wspólnych znajomych).



Aby zilustrować skuteczność ROAM, posłużmy się przykładem. Pokazuje on, jak niebezpieczne mogą być algorytmiczne techniki ukrywania się, gdy wykorzystane są przez nieodpowiednie osoby. W sieci trzydziestu sześciu terrorystów odpowiedzialnych za przygotowanie i przeprowadzenie ataków z 11 września 2001 roku ich przywódca, Mohamed Atta, jest identyfikowany jako najważniejszy wierzchołek przez wszystkie trzy wspomniane wyżej miary centralności. Po zaledwie dwukrotnym zastosowaniu ROAM (a więc usunięciu dwóch i dodaniu czterech krawędzi) Atta spada na, odpowiednio, piąte miejsce dla centralności stopnia, czwarte dla centralności bliskości i jedenaste dla centralności pośredniczenia.

Mniejsza wersja tej sieci, uwzględniająca tylko zamachowców-samobójców, pojawiła się w artykule *Rozbijanie sieci terrorystycznych za pomocą teorii gier*,  $\Delta_{16}^{11}$ .

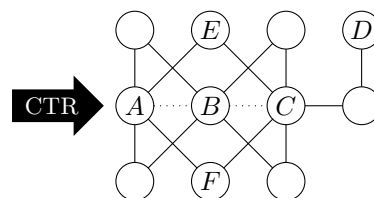
Świetnie, potrafimy zatem poradzić sobie (przynajmniej do pewnego stopnia) z miarami centralności. Czy istnieją jakieś inne narzędzia analizy sieci społecznych, których powinniśmy się obawiać? Jednym z przykładów mogą być algorytmy przewidywania połączeń (*link prediction algorithms*). Pozwalają one, na podstawie aktualnego stanu sieci, wydedukować, które pary wierzchołków nawiążą znajomość w przyszłości albo też są połączone krawędzią, która już istnieje, ale o niej nie wiemy. Jak działają tego rodzaju algorytmy? Spójrzmy na sieć  $G_3$  przedstawioną na górze po prawej stronie. Wierzchołki  $A$  i  $B$  (jak również  $B$  i  $C$ ) są położone bardzo blisko siebie i mają wielu wspólnych znajomych, większość algorytmów przewidywania połączeń przypisałaby im zatem wysokie prawdopodobieństwo nawiązania znajomości w przyszłości (albo istnienia niewidocznej krawędzi pomiędzy nimi). W szczególności fakt posiadania dużej liczby wspólnych znajomych często jest bardzo znaczący. Kiedy natomiast spojrzymy na wierzchołki  $A$  i  $D$ , nie wydaje się, aby miały ze sobą zbyt wiele wspólnego, większość algorytmów przypisałaby krawędzi między nimi niskie prawdopodobieństwo istnienia (lub zaistnienia w przyszłości).



Wszystko to brzmi bardzo niewinnie, czy mogą istnieć zatem powody, dla których mielibyśmy się obawiać algorytmów przewidywania połączeń? Mają one w końcu wiele pozytywnych zastosowań, na przykład za każdym razem, kiedy Facebook sugeruje nam „osobę, którą możemy znać”, widzimy efekt działania algorytmu. Co jednak, jeżeli nie jesteśmy gotowi dzielić się z całym światem niektórymi z naszych znajomości? A nawet gdy nie mamy absolutnie nic do ukrycia, co jeżeli algorytm omyłkowo powiąże nas z osobą, z którą absolutnie nie chcielibyśmy być kojarzeni? Czy możemy jakoś zmylić algorytmy przewidywania połączeń?

Marcin Waniek, Kai Zhou, Yevgeniy Vorobeychik, Esteban Moro, Tomasz P. Michalak and Talal Rahwan. *How to hide one's relationships from link prediction algorithms*. „Scientific reports” (2018).

Podobnie jak dla miar centralności, również i w tym przypadku okazuje się, że znalezienie sposobu na optymalne ukrycie kilku krawędzi jest problemem NP-pełnym. Jest to prawda nawet dla stosunkowo prostych algorytmów przewidywania połączeń. Na szczęście i tutaj da się zastosować heurystyczną (czyli niegwarantującą znalezienia optymalnego rozwiązania) metodę ukrywania się o nazwie CTR (*Closed Triad Removal*, usuwanie zamkniętych triad). Polega ona na usuwaniu z sieci krawędzi, które należą do największej liczby takich „trójkątów”, czyli cykli długości 3 (w nomenklaturze sieciowej zwanych triadami), w których dokładnie jedną z krawędzi chcemy ukryć. Na rysunku poniżej przykład zastosowania CTR w sytuacji, gdy chcemy ukryć krawędzie  $AB$  oraz  $BC$  w sieci  $G_3$ . Usunięcie każdej z krawędzi  $BE$  i  $BF$  spowodowało, że zarówno para węzłów  $AB$ , jak i para  $BC$  straciły wspólnego sąsiada, zmniejszając w ten sposób ryzyko wykrycia krawędzi pomiędzy nimi. Czy potrafisz, Czytelniku, wskazać, do jakich „zamkniętych triad” należały krawędzie  $BE$  i  $BF$ ?



Dowiedzieliśmy się, jak możemy (próbować) ukryć się przed miarami centralności i algorytmami przewidywania połączeń. Jest jednak jeszcze jeden wniosek płynący z naszych rozważań. Bądźmy świadomi, że ślady, które pozostawiamy online, mogą zostać użyte do wydedukowania na nasz temat informacji, których nigdzie nie zamieściliśmy (a którymi nie chcielibyśmy się dzielić). Być może przed wrzuceniem kolejnego kawałka naszego prywatnego życia na nowy portal społecznościowy warto zastanowić się, czy przebiegły obserwator nie odkryje dzięki temu czegoś, co wolelibyśmy zachować dla siebie.



# Steganografia – jak ukryć galaktykę w Babiej Górze

\*Narodowe Centrum Badań Jądrowych

William J. PEARSON\*

Tłumaczenie: Anna DURKALEC

Ukrytą wiadomość można napisać fenolofaleiną, a odczytać dzięki oparom amoniaku lub węgla sodu. Nie próbujcie tego w domu.



Babia Góra. Zdjęcie z wakacji.  
Autorzy: A. Durkalec / W.J. Pearson



Galaktyka ukryta w Babiej Górze  
Autorzy: W.J. Pearson / T. Goto /  
H. Matsuhara w ramach przeglądu nieba  
HSC/AKARI-NEP

Zdarza się, że chcemy komuś przekazać informację w tajemnicy. Ukrytą tak sprytnie, żeby żadna niepożądana osoba nie mogła jej zrozumieć, a nawet zauważyć. Może to być poufna wiadomość od szpiega, informacje przekazywane pomiędzy sojusznikami w czasie działań wojennych albo sekretny list miłosny. Od czasu do czasu zwariowany astrofizyk chciałby też mieć możliwość ukrycia zdjęcia galaktyki w typowym zdjęciu przedstawiającym pejzaż górski.

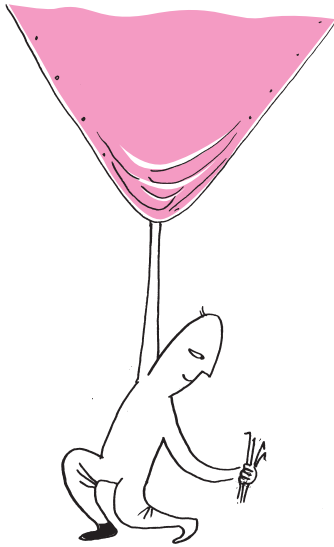
Przekazywanie ukrytych wiadomości nie jest nowym problemem – dobrze ponad 2000 lat temu Juliusz Cezar używał prostej metody „przesuwania” alfabetu do szyfrowania swoich listów i notatek. Oczywiście w miarę upływu czasu techniki szyfrowania stały się bardziej zaawansowane, a tajne wiadomości trudniejsze do wykrycia. Każdy z nas wie, że tak prosta rzecz jak sok z cytryny pozwala na napisanie niewidzialnej wiadomości. Są na to również bardziej wyszukane sposoby, wykorzystujące rzadziej spotykane substancje chemiczne. A to był dopiero początek. Wraz z pojawieniem się komputerów metody umożliwiające zaszyfrowanie i ukrycie wiadomości stały się jeszcze bardziej skomplikowane. Przedstawię tu jedną z nich. Pozwala ona na ukrycie informacji w obrębie cyfrowego obrazu.

Współcześnie większość zdjęć, zarówno tych wykonywanych telefonem komórkowym, jak i zdjęć galaktyk wykonywanych za pomocą teleskopów, zapisuje się na matrycy CDD (*charge-coupled device*). W obu przypadkach zdjęcia są zapisywane i przechowywane w postaci dwuwymiarowych tablic pikseli. Każda z tych tablic zawiera informację o kolorze w postaci trzech lub czterech wartości: koloru czerwonego, zielonego i niebieskiego (RGB), RGB z przezroczystością (RGBA) albo kolorów cyjanu, magenty, żółtego i czarnego (CMYK). W przypadku RGB każdy kolor przyjmuje jedną z 256 wartości, od 0 do 255, która przechowywana jest jako wartość 8 bitów ( $2^8 = 256$ ). Niewielkie zmiany tych wartości są niezauważalne dla ludzkiego oka. Na przykład zmiana wartości czerwieni piksela o 2 odpowiada zmianie barwy o 1%. I właśnie ten fakt możemy wykorzystać do ukrycia wiadomości w obrazie – dokonując niewielkich zmian w wartościach liczb niosących informację o kolorze.

Rozważmy obraz, dla którego kolor lewego górnego piksela ma wartości RGB 123, 151 i 188. W 8-bitowym kodzie binarnym te liczby zapisuje się jako 01111011, 10010111 i 10111100. Dla uproszczenia rozważmy tylko kanał czerwony, czyli kanał R: 01111011. Zamieniając ostatnie cztery cyfry tej liczby na zera, otrzymamy 01110000, czyli w systemie dziesiętnym liczbę 112. W przybliżeniu zmieniliśmy więc wartość koloru czerwonego o około 10% (oryginalny kolor w systemie RGB miał wartość 123). Oczywiście moglibyśmy zmienić pierwsze cztery cyfry binarne na zero, wówczas otrzymalibyśmy 00001011 lub w systemie dziesiętnym 11, co jest w przybliżeniu zmianą o 90% w stosunku do oryginalnej wartości. Ponieważ zmiana pierwszych czterech cyfr binarnych powoduje dużą różnicę w kolorze, a zmiana ostatnich czterech małą, możemy uznać pierwsze cztery cyfry binarne za znaczące, a ostatnie cztery za nieistotne. Tylko zmiana cyfr nieistotnych nie rzuci się za bardzo w oczy.

Jeśli zastosujemy ten sam pomysł dla wszystkich pikseli obrazu, wówczas zmiana koloru będzie niezauważalna dla przeciętnego obserwatora (poza pewnymi problemami, o których za chwilę). Sprytny Czytelnik już pewnie wie, jak tę słabość wykorzystać. Obraz pozornie nie zmieni się, jeżeli pozostawimy nienaruszone cztery pierwsze cyfry z 8-bitowych wartości binarnych opisujących kanały RGB. Pozostałe cztery cyfry możemy więc dowolnie zmieniać i wykorzystać je do przekazania tajnej wiadomości. W ten sposób możemy na przykład ukryć zdjęcie galaktyki wewnątrz niepozornego zdjęcia z wakacji.

Patrząc na zamieszczone na marginesie zdjęcie Babiej Góry, można by pomyśleć, że jest to po prostu niskiej jakości zdjęcie, być może nadmiernie skompresowane. W rzeczywistości ukrywa ono w sobie obraz galaktyki. Wystarczy wziąć znaczące cyfry binarne zdjęcia galaktyki i odrzucić cyfry nieistotne. W kolejnym kroku



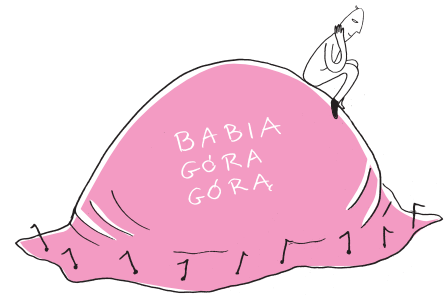
podmienić nieistotne cyfry binarne zdjęcia Babiej Góry na istotne cyfry binarne zdjęcia galaktyki. I voila! Ukryliśmy obraz galaktyki w zdjęciu z wakacji.

Niestety cała procedura, zarówno ukrycie zdjęcia galaktyki, jak i jej odkodowanie, powoduje utratę jakości obu obrazów. Zastąpienie czterech nieistotnych cyfr binarnych oryginalnego zdjęcia spowodowało, że góra stała się blokowa, a gładkie przejścia kolorów stały się gwałtowne i ostre. To samo widać na odzyskanym obrazie ukrytej galaktyki, gdzie gładkie ramiona spiralne stają się zbite i szorstkie.

To nie jedyna wada tej metody. Ukryta informacja może zostać przechwycona, jeśli niepożądana osoba ma dostęp do oryginalnego obrazu. Odjęcie oryginalnego obrazu od tego, który edytowaliśmy poprzez zmiany kolorów, w prosty sposób ujawni naszą tajną informację. Niska rozdzielczość edytowanego obrazu może również nas zdemaskować, skłaniając kogoś do bliższego przyjrzenia się zawartym w nim danym. Wówczas wszystkie nasze tajemnice mogą zostać ujawnione.

Oczywiście możemy naszą wiadomość ukryć bardziej dyskretnie. Edytując mniejszą liczbę nieistotnych cyfr: na przykład zmieniając tylko ostatnie dwie cyfry binarne zamiast czterech ostatnich. Wtedy obraz będzie mniej uszkodzony. Niestety w takim przypadku znacznie zmniejszymy przestrzeń do ukrycia informacji, co oznacza, że będziemy mogli przesłać mniej danych lub będziemy musieli rozbić naszą sekretną wiadomość na więcej obrazów.

Ostatecznie jednak możemy ukryć galaktykę w Babiej Górze.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1729.** Prostokąt został podzielony na kilka przystających trójkątów prostokątnych. Czy zawsze pewne dwa sąsiadujące trójkąty z podziału tworzą (bez przemieszczania) prostokąt?

Rozwiązanie na str. 8

**M 1730.** Liczby  $1, 2, \dots, 2022$  są wypisane na tablicy. W każdej sekundzie zmazujemy cztery liczby postaci  $a, b, c, a + b + c$  i zastępujemy je liczbami  $a + b, b + c, c + a$ . Udowodnić, że proces ten musi skończyć się po mniej niż 9 minutach.

Rozwiązanie na str. 9

**M 1731.** Liczby całkowite dodatnie  $a$  i  $n$  są takie, że  $n$  dzieli  $a^2 + 1$ . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia  $b$  taka, że  $n(n^2 + 1)$  dzieli  $b^2 + 1$ .

Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1061.** Metalową kulę o promieniu  $R$  umieszczono w jednorodnym polu elektrycznym  $\vec{E}$ . Po wyłączeniu pola w kuli wydzielilo się ciepło  $Q$ . Ile ciepła wydzieliliby się w metalowej kuli o promieniu równym  $2R$  po wyłączeniu pola  $\vec{E}$ ?

Rozwiązanie na str. 15

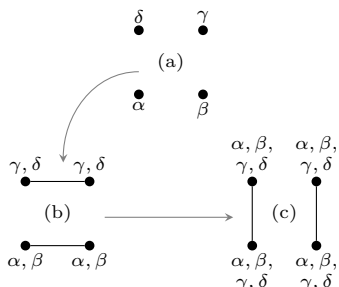
**F 1062.** Dwie gwiazdy o masach  $m_1$  i  $m_2$  tworzą układ podwójny. Okres, z jakim obiegają ich wspólny środek masy, wynosi  $T$ . Ile wynosi odległość między gwiazdami  $R$ ?

Rozwiązanie na str. 17

# Plotki, ploteczki, plotunie

Łukasz RAJKOWSKI\*

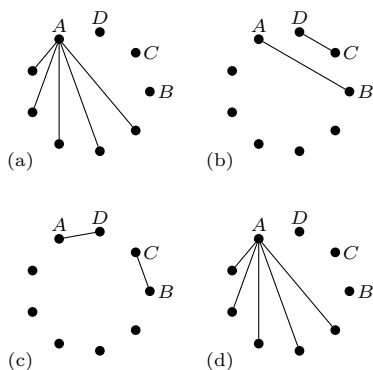
W pewnym mieście mieszka  $n$  plotkarzy. Niestety po wprowadzeniu całkowitego lockdownu mogą oni komunikować się wyłącznie telefonicznie. Kiedy dwoje plotkarzy rozmawia ze sobą, wymieniają się wszystkimi posiadanymi informacjami. Tuż przed wprowadzeniem lockdownu każdy z nich dysponował pewną ceną plotką, nieznaną pozostałym. Ilu połączeń telefonicznych potrzeba do pełnej wymiany plotek między plotkarzami?



Rys. 1

Przyjrzyjmy się przypadkowi  $n = 4$ . Naszymi plotkarzami będą Antek, Basia, Celina i Damian; przez  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  oznaczmy informacje posiadane przez nich na początku (rys. 1a). Jeśli  $A$  zadzwoni do  $B$ , to po tej rozmowie oboje będą świadomi  $\alpha$  i  $\beta$ . W tym czasie  $C$  może zadzwonić do  $D$ , dzięki czemu każde z nich będzie wiedziało o  $\gamma$  i  $\delta$  (rys. 1b). Wystarczy teraz, aby  $B$  dzwoniła się z  $C$ , a  $D$  z  $A$ , i każde z nich wie już o  $\alpha, \beta, \gamma$  i  $\delta$  (rys. 1c). Oznacza to, że cztery połączenia wystarczą. Czytelnikowi pozostawiamy uzasadnienie, że trzy połączenia to za mało, aby nasycić głód plotek czterech plotkarzy.

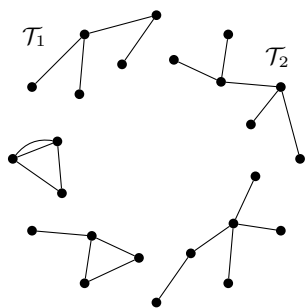
Pokażemy teraz, że  $n \geq 4$  plotkarzom wystarczy  $2n - 4$  połączeń. Można się o tym przekonać, stosując rozumowanie indukcyjne, a można też postąpić odrobinę bardziej konstruktywnie. Wśród  $n \geq 4$  rozmówców wyróżnijmy czterech, podobnie jak poprzednio oznaczmy ich przez  $A, B, C$  i  $D$ . Spośród nich największą gadułą jest  $A$  i to on na początku zbiera informacje od wszystkich poza  $B, C$  i  $D$ , wykonuje zatem  $n - 4$  połączeń (rys. 2a). Następnie wykonywany jest ciąg 4 połączeń:  $A-B, C-D$  (rys. 2b),  $B-C$  i  $D-A$  (rys. 2c), po którym wyróżniona czwórka plotkarzy wie wszystko o wszystkich. Wystarczy teraz, by jeden z nich (powiedzmy, że znowu  $A$ ) podzielił się swą wszechwiedzą, dzwoniąc do pozostałych  $n - 4$  plotkarzy (rys. 2d). W ten sposób dokonała się pełna wymiana informacji za pomocą  $(n - 4) + 4 + (n - 4)$ , czyli  $2n - 4$ , połączeń.



Rys. 2

Okazuje się, że powyższy, dość banalny, schemat połączeń jest optymalny – nie jest możliwa pełna wymiana informacji za pomocą mniejszej liczby rozmów telefonicznych. Uzasadnieniu tego faktu poświęcona jest dalsza część artykułu. Niech  $X$  będzie szukaną, optymalną liczbą połączeń; chcemy wykazać nierówność  $X \geq 2n - 4$ . Rozważmy dowolny ciąg  $X$  połączeń prowadzących do pełnej wymiany informacji (takie ciągi będziemy nazywać *optymalnymi*). Jeśli na rysunku zaznaczymy wszystkie wykonane połączenia, to dowolnych dwóch plotkarzy będziemy mogli połączyć drogą utworzoną z narysowanych kresek (gdyż inaczej nie poznaliby wzajemnie swoich tajemnic). Profesjonalnie rzecz ujmując, uzyskany w ten sposób graf jest *spójny*. Grafy spójne mają zaś to do siebie, że liczba występujących w nich krawędzi nie może być mniejsza od liczby wierzchołków pomniejszonej o 1, skąd wnioskujemy nierówność  $X \geq n - 1$ .

Zaznaczymy teraz na rysunku pierwsze  $n - 2$  połączenia. Tak uzyskany graf jeszcze nie jest spójny, ma co najmniej dwie *spójne składowe*, czyli spójne zbiory wierzchołków. Można powiedzieć nawet więcej – istnieją co najmniej dwie spójne składowe będące *drzewami* (co oznacza, że nie mają cykli). Spośród tych drzewiastych składowych wybierzmy dwie o najmniejszej liczbie wierzchołków i oznaczmy je  $\mathcal{T}_1$  oraz  $\mathcal{T}_2$  (przy czym  $\mathcal{T}_1$  jest nie mniejsze od  $\mathcal{T}_2$ , tzn.  $|\mathcal{T}_1| \leq |\mathcal{T}_2|$ , por. rys. 3). W ten sposób każdemu optymalnemu ciągowi połączeń możemy przypisać dwie liczby:  $|\mathcal{T}_1|$  oraz  $|\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$ . Wybierzmy teraz taki optymalny ciąg, który



Rys. 3. Graf połączeń po 22 rozmowach między 24 plotkarzami (niektóre rozmowy mogły odbyć się więcej niż raz).

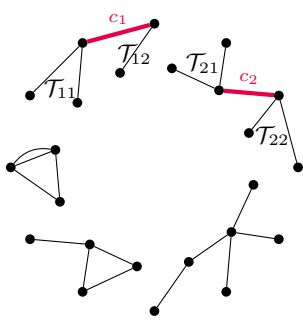
(•) minimalizuje  $|\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$ ,

a jeśli takich ciągów jest więcej niż 1, to spośród nich wybierzmy dowolny, który

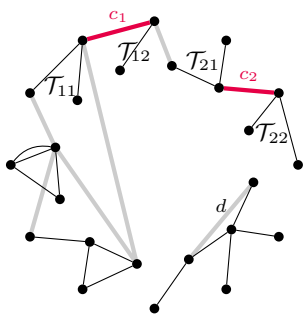
(••) minimalizuje  $|\mathcal{T}_1|$ .

Udowodnimy najpierw, że przy takim wyborze optymalnego ciągu zachodzi  $|\mathcal{T}_1| > 1$ . Przypuśćmy przeciwnie. Składowa  $\mathcal{T}_1$  składa się z jednego plotkarza, nazwijmy go Antkiem. Po  $n - 2$  połączeniach nie zdradził on jeszcze nikomu swojego sekretu. Rozważany ciąg jest jednak optymalny, więc tajemnica  $A$  musi w kolejnych rozmowach zostać rozpowszechniona wśród wszystkich plotkarzy.

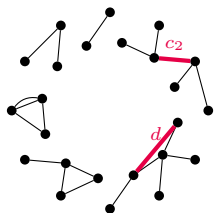




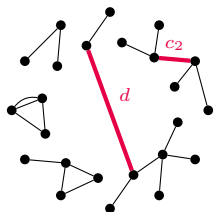
Rys. 4



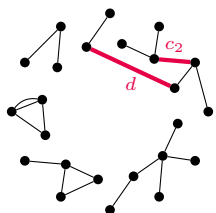
Rys. 5. Pierwszych 28 połączeń. Półprzezroczyste połączenia nastąpiły po 22. połączeniu. Połączenie  $d$  jest 28. i jako pierwsze nie „rozrasta się” z  $c_1$



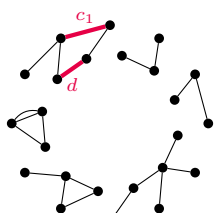
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

W szczególności, graf złożony z tych kolejnych połączeń musi być spójny, jest ich zatem co najmniej  $n - 1$ . Wraz z początkowymi połączeniami daje to w sumie  $2n - 3$  rozmów. Na początku artykułu wykazaliśmy jednak nierówność  $X \leq 2n - 4$  (wskazując ciąg  $2n - 4$  rozmów skutkujących wymianą informacji), zatem przypuszczenie  $|\mathcal{T}_1| = 1$  doprowadziło nas do sprzeczności.

Dalsza część rozumowania oparta jest na następującej, dość oczywistej, obserwacji, którą nazwiemy Zasadą Wymiany (w skrócie ZW, nie mylić z „Zaraz Wracam”):

*Jeśli w optymalnym ciągu rozmów występują bezpośrednio po sobie dwa połączenia, angażujące czterech różnych rozmówców, to te dwa połączenia możemy zamienić kolejnością, a otrzymany w ten sposób ciąg wciąż będzie optymalny.*

Aby ugruntować oczywistość ZW, dodajmy jeszcze, że oba opisane w niej połączenia równie dobrze mogłyby odbyć się równocześnie – ich kolejność nie może mieć zatem znaczenia dla rozpowszechniania się plotek.

Wiemy już, że w opisanym przez wymogi  $(\bullet)$  i  $(\bullet\bullet)$  optymalnym ciągu zachodzi  $|\mathcal{T}_1| > 1$ . Niech  $c_i$  będzie ostatnim połączeniem (wśród pierwszych  $n - 2$ ) wykonanym przez plotkarzy przynależnych do  $\mathcal{T}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Po zabraniu  $c_i$  drzewo  $\mathcal{T}_i$  rozpada się na dwa poddrzewa; oznaczmy je  $\mathcal{T}_{i1}$  oraz  $\mathcal{T}_{i2}$  (rys. 4). Zgodnie z ZW możemy przesunąć połączenia  $c_1$  i  $c_2$  „na koniec kolejki” bez straty optymalności. Załóżmy zatem, że  $c_1$  i  $c_2$  były połączeniami o numerach odpowiednio  $n - 2$  oraz  $n - 3$ . Pokażemy teraz, że wszystkie następne połączenia „rozrastają się” z  $c_1$ , tzn. w każdej kolejnej rozmowie co najmniej jeden z rozmówców może zostać połączony ciągiem wcześniejszych rozmów z którymiś z uczestników  $c_1$ .

Przypuśćmy, że jest inaczej. Niech  $d$  będzie pierwszą rozmową, która o tym świadczy (tzn. wcześniejsze, aż do  $c_1$ , „rozrastały się” z  $c_1$  i  $c_2$ , patrz rys. 5). Na mocy ZW możemy (bez straty optymalności) zamienić rozmowę  $d$  z poprzedzającą... i jeszcze poprzedzającą... i jeszcze... i tak aż dojdziemy do rozmów  $c_1$  i  $c_2$ . Dokonajmy jeszcze zamiany z  $c_1$ , tak by mieć w ręku optymalny ciąg rozmów, w którym  $c_2$  i  $d$  są rozmowami o numerach odpowiednio  $n - 3$  i  $n - 2$  (rys. 6). Przyjrzyjmy się plotkarzom, którzy uczestniczyli w rozmowie  $d$ . Co najmniej jeden z nich musi być częścią  $\mathcal{T}_1$ , inaczej nasz nowy optymalny ciąg rozmów przeczyłby wymogowi  $(\bullet)$ , gdyż  $|\mathcal{T}_{11} \cup \mathcal{T}_{12}| < |\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$ . Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że jeden z rozmówców należy do  $\mathcal{T}_{12}$ . A co z drugim?

→ Gdyby **nie** należał do  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  (rys. 7), to znów otrzymujemy sprzeczność z  $(\bullet)$ , gdyż  $|\mathcal{T}_{11} \cup \mathcal{T}_2| < |\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$ . W ten sam sposób odrzucamy możliwość przynależenia drugiego rozmówcy do  $\mathcal{T}_{12}$ .

→ Gdyby należał do  $\mathcal{T}_2$  (rys. 8), to warunek  $(\bullet)$  nie jest co prawda naruszony, gdyż drzewa  $\mathcal{T}_{11}$  oraz  $\mathcal{T}_{12} - \mathcal{T}_2$  (tzn. „zrośnięcie” drzew  $\mathcal{T}_{12}$  i  $\mathcal{T}_2$ ) mają sumarycznie tyle samo wierzchołków co  $\mathcal{T}_1$  oraz  $\mathcal{T}_2$ . Nasz wyjściowy optymalny ciąg połączeń miał jednak w drugiej kolejności realizować  $(\bullet\bullet)$ , co jest w tym przypadku naruszone, gdyż  $|\mathcal{T}_{11}| < |\mathcal{T}_1|$ .

Ostatecznie drugi rozmówca musi być częścią  $\mathcal{T}_{11}$ . Ale wtedy możemy znów skorzystać z ZW i przesunąć połączenie  $c_2$  na tuż po  $c_1$  (tak, aby połączenia  $d$  i  $c_1$  były wykonane jako  $(n - 3)$ -cie i  $(n - 2)$ -gie, rys. 9). Uzyskany optymalny ciąg połączeń przeczy jednak  $(\bullet)$ , gdyż  $|\mathcal{T}_{21} \cup \mathcal{T}_{22}| < |\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$  (rys. 8).

Uf, pracowicie uzasadniliśmy, że począwszy od połączenia o numerze  $(n - 1)$  wszystkie „rozrastają się” od  $c_1$  i  $c_2$ . Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą prywatnymi sekretami plotkarzy, którzy wzięli udział w rozmowie  $c_1$ . Zastanówmy się nad liczbą plotkarzy, którzy jednocześnie wiedzą o  $\alpha$  i  $\beta$ . Przed rozmową  $c_1$  nie ma takich osób. Bezpośrednio po rozmowie  $c_1$  mamy dokładnie dwóch takich plotkarzy, czyli uczestników  $c_1$ . Z naszego odkrycia dotyczącego „rozrastania z  $c_1$  i  $c_2$ ” wynika, że z każdą kolejną rozmową liczba interesujących nas plotkarzy wzrasta o co najwyżej 1. Plotkarze nie spoczną, dopóki wszyscy nie dowiedzą się wszystkiego, w szczególności po zakończeniu wszystkich rozmów nasza liczba jest równa  $n$ . Wynika stąd, że po rozmowie  $c_1$  musiały mieć miejsce co najmniej  $n - 2$

rozmowy, wszystkich rozmów musiało być zatem co najmniej  $2n - 4$ . Ponieważ mieliśmy do czynienia z ciągiem optymalnym, nierówność  $X \geq 2n - 4$  została udowodniona.

Przedstawiony problem zaczął krążyć wśród matematyków na początku lat 70. XX wieku i bardzo szybko doczekał się rozwiązania (np. [1]). Powyższy dowód zaczerpnięty został z pracy [2], w której w pełni przeanalizowano sytuację bliższą współczesnym udogodnieniom technologicznym, mianowicie plotkarze mogą wymieniać się informacjami podczas konferencji, w których może uczestniczyć co najwyżej  $K$  osób. Możliwych uogólnień i związanych z tematem pytań jest zresztą bardzo wiele i do dziś pojawiają się publikacje (np. [3]), których źródła można doszukać się w naszej wdzięcznej zagadce. Plotka głosi, że nie jest to ostatni raz, kiedy pojawia się ona w *Delcie*.

**Literatura:**

[1] Robert Tijdeman, *On a telephone problem*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XIX, (1971), 188–192.  
 [2] Daniel Kleitman, James Shearer, *Further gossip problems*, Discrete Mathematics 30.2 (1980): 151-156.  
 [3] Krzysztof Apt, Eryk Kopczyński, Dominik Wojtczak, *On the Computational Complexity of Gossip Protocols*, IJCAI (2017), 765–771.

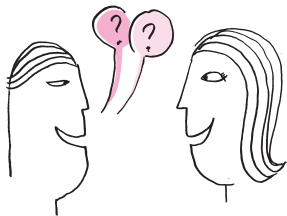
## O sztuce zadawania pytań

Damian NIWIŃSKI\*

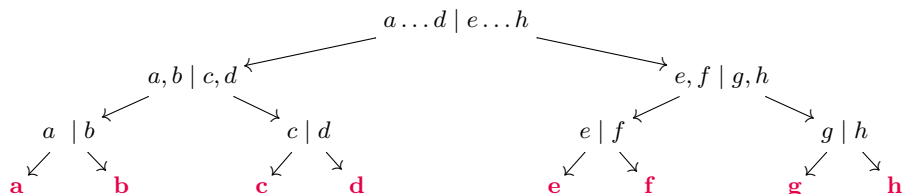
\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

- *No to do jutra! Czy spotkamy się znów o dziesiątej rano?*
- *Niestety, Jasiu, rano nie mogę, mam próbę orkiestry. . .*
- *Aa. . . Nie wiedziałem, Małgosiu, że grasz w orkiestrze! Na jakim instrumencie?*
- *Zgadnij! – Małgosia uśmiechnęła się. – Myślę, że wystarczy ci trzy pytania. Jesteś przecież matematykiem.*
- *No cóż. . . współczesna orkiestra liczy kilkadziesiąt różnych instrumentów. Ale, choć znamy się już od tygodnia, jeszcze nie widziałem cię z futerałem. Chyba więc twój instrument nie jest łatwo przenośny. Może kontrabas, może fortepian, może perkusja. . . – Jaś zamyslił się.*
- *Czy Twój instrument ma struny?*
- *Nie!*
- *A klawiaturę?*
- *Tak!*
- *A zatem są to organy. . . muszę koniecznie cię usłyszeć!*
- *Zapraszam na koncert, za tydzień gramy Symfonię Organową Saint-Saënsa!*

\*\*\*



Jaś poradził sobie w dwóch pytaniach, choć zapewne miał trochę szczęścia. Zadawanie pytań tak, by wyciągnąć maksimum wiedzy, będzie tematem naszych rozważań. Będziemy zwykle dopuszczać tylko dwie odpowiedzi: tak lub nie. Większość pytań da się sprowadzić do tej postaci, czasem przez zastąpienie jednego pytania serią, jak to było z pytaniem o instrument w powyższej rozmowie. Spójrzmy na rzecz abstrakcyjnie. Chcemy obmyślić taką strategię zadawania pytań, by jak najszybciej dojść do celu. Gdy poszukiwany obiekt pochodzi ze zbioru o  $n$  elementach, o których niewiele wiemy, to rozsądną strategią jest podzielenie naszego zbioru na dwie części o tej samej liczebności (być może z dokładnością do jednego elementu) i zapytanie, czy nasz obiekt znajduje się w pierwszej części (jeśli nie – jest w drugiej). Dalej postępujemy w ten sam sposób, aż nasz zbiór stanie się jednoelementowy. Proces ten można przedstawić jako drzewo, gdzie węzłami są pytania, a przejścia w lewo lub w prawo zależą od otrzymanych odpowiedzi. Na przykład, gdy poszukiwany obiekt jest jedną z 8 liter  $a, b, c, d, e, f, g, h$ , nasza strategia może wyglądać tak:

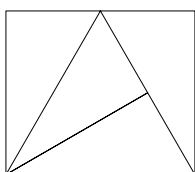


Kiedy otrzymamy odpowiedzi: tak, nie, tak, wiemy, że poszukiwanym obiektem jest  $c$ . W każdym przypadku zadamy 3 pytania, czyli binarny logarytm z  $n = 8$ .

Ogólnie, gdy  $2^k < n \leq 2^{k+1}$ , wtedy postępując w podobny sposób zadamy  $k$  lub  $k + 1 = \lceil \log_2 n \rceil$  pytań, co można łatwo sprawdzić przez indukcję po  $n$ .

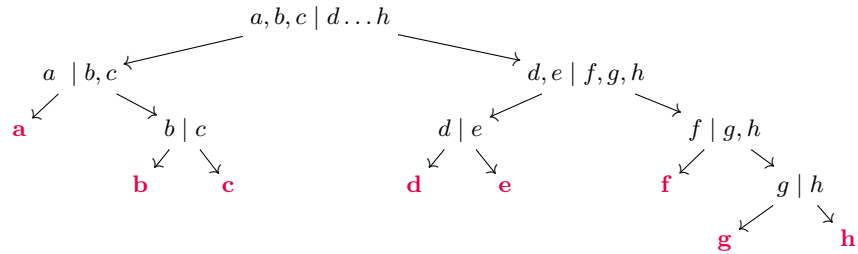


**Rozwiązanie zadania M 1729.**  
 Nie. Rozważmy prostokąt o bokach 2 i  $\sqrt{3}$  podzielony w następujący sposób:





Gdyby jednak Jaś użył tej strategii dla instrumentów w orkiestrze symfonicznej, nie osiągnąłby szybko celu. Pozostając przy przykładzie z literami – spróbujmy innych strategii. Możemy stawiać pytania mniej symetrycznie, na przykład



Wtedy dla litery  $a$  zadamy tylko 2 pytania. Jednak średnia liczba pytań jest równa

$$(2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4) \cdot \frac{1}{8} = 3\frac{1}{8},$$

a więc gorzej; podobnie będzie dla każdej innej niesymetrycznej strategii.

Co innego, gdy o naszych obiektach już coś wiemy i niektórych spodziewamy się bardziej niż innych. Tak bywa w rzeczywistym świecie, a także w popularnej grze w 20 pytań, o której w  $\Delta_{88}^{07}$  pisał Wojciech Guzicki. Ujmując rzecz matematycznie, poszukiwany obiekt jest wartością pewnej *zmiennej losowej*  $X$ , przyjmującej wartości w skończonym zbiorze  $\mathcal{X}$ , wartość  $x$  z *prawdopodobieństwem*  $\Pr(X = x)$ , w skrócie  $\Pr(x)$ . Gdy rozkład jest jednostajny, wartość oczekiwana liczby pytań jest średnią arytmetyczną. Jeśli jednak na przykład

$$\Pr(a) = \frac{1}{4}, \quad \Pr(b) = \Pr(c) = \Pr(d) = \Pr(e) = \Pr(f) = \frac{1}{8}, \quad \Pr(g) = \Pr(h) = \frac{1}{16},$$

to *oczekiwana* liczba pytań przy naszej drugiej strategii jest równa

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{16} = 2\frac{7}{8},$$

a więc lepiej niż dla strategii symetrycznej!

Jaka idea kryje się za naszą nową strategią? Otóż zamiast dzielić zbiór na części o równej (lub prawie równej) licznosci, dzielimy go teraz na części o możliwie bliskich prawdopodobieństwach. W naszym przykładzie są to nawet równości:  $\Pr(X \in \{a, b, c\}) = \Pr(X \in \{d, e, f, g, h\})$ ,  $\Pr(X \in \{d, e\}) = \Pr(X \in \{f, g, h\})$ , i podobnie jest w każdym węzle drzewa.

Zapamiętajmy: pytanie jest najpomocniejsze wtedy, gdy obie dopuszczalne odpowiedzi są jednakowo prawdopodobne.

Wracając do przykładu: czy wartość  $2\frac{7}{8}$  jest dla zadanego rozkładu optymalna?

Zauważmy, że prawdopodobieństwa są tu szczególnej postaci:  $(\frac{1}{2})^\ell$ , gdzie  $\ell$  jest liczbą naturalną. Natomiast liczba pytań prowadząca do obiektu o takim prawdopodobieństwie jest przy naszej strategii właśnie równa  $\ell$ . Wartość oczekiwaną liczby pytań wyraziliśmy więc formułą:

$$(1) \quad H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \Pr(x) \cdot \log_2 \frac{1}{\Pr(x)}$$

(do oznaczenia  $H(X)$  powrócimy za chwilę). Widzimy, że im bardziej prawdopodobny jest dany obiekt, tym szybciej zostanie odgadnięty, co wydaje się rozsądne. Istotnie, dla prawdopodobieństw będących całkowitymi potęgami  $\frac{1}{2}$  formuła (1) gwarantuje optymalność, co można sprawdzić przez indukcję po  $n$ . Co jednak z przypadkiem ogólnym? Problemem może być  $\Pr(x) = 0$ , co załatwiamy konwencją, że  $0 \cdot \log_2 \frac{1}{0} = 0$ , gdyż  $\lim_{y \rightarrow 0} y \log_2 \frac{1}{y} = 0$ . Wtedy formuła (1) ma zawsze sens, ale liczby  $\log_2 \Pr(x)$  mogą nie być całkowite – i wtedy nie są liczbami pytań w żadnej strategii.

Otóż metodami analitycznymi można wykazać, że oczekiwana liczba pytań  $S(X)$  spełnia przy każdej strategii nierówność

$$(2) \quad H(X) \leq S(X),$$

a przy optymalnej odległość między tymi wielkościami jest nie większa niż 1. Zależność tę odkrył Claude Shannon, który w swojej pionierskiej pracy

Dla dowolnego  $n$  strategia symetryczna zawsze gwarantuje najlepszą średnią, ale dla  $n$  niebędących potęgami 2 strategia niesymetryczna może czasem być równie dobra.



#### Rozwiązanie zadania M 1730.

Na początku zauważmy, że w każdym ruchu liczba liczb na tablicy zmniejsza się o 1. Ponadto suma liczb się nie zmienia, gdyż

$$a + b + c + (a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a).$$

Równość

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2$$

pokazuje, że suma kwadratów również nie ulega zmianie. Wobec tego jeśli  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oznaczają liczby, które są w pewnym momencie wypisane na tablicy, to

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2} \cdot 2022 \cdot 2023,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{1}{6} \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 4045.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$n \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2,$$

więc

$$n \geq \frac{(\frac{1}{2} \cdot 2022 \cdot 2023)^2}{\frac{1}{6} \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 4045} \approx 1516,9.$$

Oznacza to, że proces musi skończyć się po mniej niż  $2022 - 1516 = 506$  sekundach, a to mniej niż 9 minut.

z 1948 roku *A Mathematical Theory of Communication* wprowadził funkcję  $H$  i nadał jej nazwę *entropii*, podobno za radą Johna von Neumanna.

Anegdota podana za: Jimmy Soni & Rob Goodman, *A Mind at Play. How Claude Shannon Invented the Information Age*, Simon & Schuster, 2017.

„Po pierwsze, jest to solidny termin w fizyce – miał powiedzieć wybitny matematyk młodszemu koledze – a co ważniejsze, nikt do końca nie wie, co to jest, co da panu atut w dyskusji”.

Kodowanie to taka funkcja  $c$  przyporządkowująca literom (lub innym obiektom) ciągi bitów, że z ciągu  $c(s_1)c(s_2)\dots c(s_m)$  można jednoznacznie odtworzyć ciąg  $s_1s_2\dots s_m$ .

W istocie nierówność (2) odnosi się nie tylko do strategii zadawania pytań, ale także do kodowania wartości zmiennej losowej przez ciągi bitów o zmiennej długości. Na przykład nasze powyższe strategie wyznaczają takie kodowania:

a	b	c	d	e	f	g	h
000	001	010	011	100	101	110	111
00	010	011	100	101	110	1110	1111

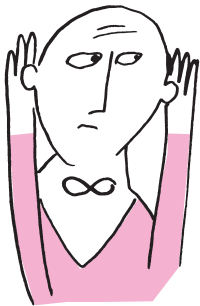
Celem jest tu osiągnięcie minimalnej średniej długości zapisu, co stanowi zagadnienie kompresji, o którym w obecnym numerze *Delty* pisze na stronie 15 Tomasz Kazana, a w  $\Delta_{21}^{11}$  pisał Jarosław Duda.

### Teoria informacji

Co właściwie wyraża funkcja  $H$ ?

Shannon podjął pytanie, jakie w połowie XX wieku nabrało szczególnej wagi: jak skutecznie przesyłać informację pomimo zakłóceń na łączu. Nie chodzi tu o eliminację przekłamań, ale o komunikację pomimo nich: np. gdy w ciągu zer i jedynek przekłamanie ulegnie każdy bit, oryginalną wiadomość odtworzymy bez trudu! Studia nad tym problemem doprowadziły Shannona do matematycznej definicji *informacji*, niezależnej od treści, jakich dana informacja dotyczy.

Dla ilustracji przypuśćmy, że rzucamy dwukrotnie kostką do gry i chcielibyśmy poznać wyniki obu rzutów, ale dane jest nam jedynie poznać ich sumę lub ich iloczyn. Która opcja da nam więcej informacji? Intuicja podpowiada, że to pytanie ma jakiś sens – teoria Shannona pozwala ściśle na nie odpowiedzieć.



Użyteczne jest pojęcie entropii zmiennej losowej  $Y$  (przyjmującej wartości w zbiorze  $\mathcal{Y}$ ) *pod warunkiem* zadanym przez zmienną losową  $X$ . Otóż jeśli ustalimy wartość  $x$  przyjmowaną przez zmienną  $X$  (z niezerowym prawdopodobieństwem) i rozważymy prawdopodobieństwa warunkowe  $\Pr(Y = y | X = x)$ , w skrócie  $\Pr(y | x)$ , to możemy utworzyć wielkość analogiczną do formuły (1):

$$(3) \quad H(Y | x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \Pr(y | x) \cdot \log_2 \frac{1}{\Pr(y | x)}.$$

Jeśli teraz uśrednimy tę wielkość po  $x$ , otrzymamy *entropię warunkową*:

$$(4) \quad H(Y | X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} H(Y | x) \cdot \Pr(X = x).$$

Zauważmy, że gdy  $Y$  zależy funkcyjnie od  $X$ , tzn. dla każdego  $x$  takiego, że  $\Pr(x) > 0$ , istnieje  $y$  takie, że  $\Pr(y | x) = 1$ , wtedy  $\Pr(y | x) \cdot \log_2 \frac{1}{\Pr(y | x)}$  jest zawsze zerem i w konsekwencji  $H(Y | X) = 0$ . Kiedy natomiast  $X$  i  $Y$  są niezależne (czyli  $\Pr(y | x) = \Pr(y)$ ), wtedy  $H(Y | X) = H(Y)$ . Otóż Shannon zdefiniował wzajemną informację między zmiennymi  $X$  i  $Y$  jako różnicę:

$$(5) \quad I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X).$$

Można udowodnić, że wielkość ta jest zawsze nieujemna, a także że  $I(X; Y) = I(Y; X)$ . Z własności entropii warunkowej wynika, że dla  $X$  i  $Y$  niezależnych wzajemna informacja jest zerem, a maksymalną wartość  $\min(H(X), H(Y))$  osiąga przy zależności funkcyjnej między nimi. W pewnym sensie  $I(X; Y)$  jest miarą zależności między  $X$  i  $Y$ . Czytelnik ma prawo uważać tę definicję informacji za nieco abstrakcyjną, dlatego zilustrujemy ją jeszcze jednym przykładem, powracając do tytułowego problemu: sztuki zadawania pytań.

Pamiętamy o naszej konwencji, że  $0 \cdot \log \frac{1}{0} = 0$ .



**Rozwiązanie zadania M 1731.**

Niech  $b = (n^2 + 1)a + n$ . Wówczas

$$b^2 + 1 \equiv a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

oraz

$$b^2 + 1 \equiv n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n^2 + 1}.$$

Ponieważ  $n$  i  $n^2 + 1$  są względnie pierwsze, więc  $n(n^2 + 1)$  dzieli  $b$ .



Hobbit ma przed sobą  $n$  ponumerowanych skrytek. W jednej z nich znajduje się pierścień. Dla ułatwienia przyszłych rachunków zakładamy, że  $n$  jest podzielne przez 6. Hobbit chce znaleźć pierścień, ale nie ma dość czasu, by przejrzeć wszystkie skrytki. Z pomocą śpieszą dwatrolle, z których pierwszy gotów jest wskazać, w której połowie skrytek znajduje się pierścień: czy o numerach w przedziale  $[1, \frac{n}{2}]$ , czy w  $[\frac{n}{2} + 1, n]$ . Drugi troll gotów jest wskazać, w której części trzeciej, czyli w którym z przedziałów  $[1, \frac{n}{3}]$ ,  $[\frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3}]$  lub  $[\frac{2n}{3} + 1, n]$  znajduje się pierścień. Problem w tym, że pierwszy troll co trzeci raz kłamie, a drugi kłamie co drugi raz. Hobbit może zadać tylko jedno pytanie. Którego trolla bardziej warto pytać?

Jak widzimy, drugi troll daje dokładniejszą informację, ale niestety częściej kłamie. Czytelnik może zastanowić się przez chwilę, jak sam podszedłby do tego zagadnienia. Możemy zauważyć, że gdyby hobbit przyszukiwał skrytki po kolei, a pierścień znajdował się – pechowo – w ostatniej skrytce, to przy wskazówce pierwszego trolla oczekiwany czas byłby  $\frac{2}{3} \cdot \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \cdot n = \frac{2}{3} \cdot n$ , a przy wskazówce drugiego  $\frac{1}{2} \cdot (\frac{n}{3} + n)$ , a więc tyle samo. Gdyby natomiast losował ze wskazanego obszaru, to w pierwszym przypadku szansa sukcesu byłaby  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{3n}$ , a w drugim  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{2n}$ , a więc lepiej. Ale możliwych jest wiele innych strategii...

Otóż nasz hobbit postanowił obliczyć, która odpowiedź da mu więcej informacji. Położenie pierścienia opisuje zmienna losowa  $R$  o wartościach  $1, 2, \dots, n$ , odpowiedź pierwszego trolla zmienna  $T_1$  o wartościach  $1, 2$  (która połówka), a drugiego trolla zmienna  $T_2$  o wartościach  $1, 2, 3$ . Nie wiedząc nic więcej, hobbit założył, że rozkład zmiennej  $R$  jest jednostajny, a pierwszy troll decyduje się na kłamstwo z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  niezależnie od wartości  $R$ , czyli

$$\Pr\left(T_1 = \left\lceil \frac{2r}{n} \right\rceil \mid R = r\right) = \frac{2}{3},$$

ponieważ prawdziwą podpowiedzią jest  $T_1 = \lceil \frac{2R}{n} \rceil$ . Wynika stąd, że

$$\Pr(T_1 = 1) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2},$$

czyli  $T_1$  ma rozkład jednostajny. Poszukiwaną wartością jest

$$I(R; T_1) = H(T_1) - H(T_1 | R),$$

przy czym, jak łatwo sprawdzić,

$$H(T_1) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 = 1.$$

Żeby obliczyć  $H(T_1 | R)$ , przypomnijmy formułę (3).

W naszym przypadku dla każdej wartości  $R = r$  mamy

$$H(T_1 | r) = \frac{1}{3} \log_2 3 + \frac{2}{3} \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - \frac{2}{3}$$

i w konsekwencji

$$I(R; T_1) = \frac{5}{3} - \log_2 3.$$

Przypadek drugiego trolla jest nieco bardziej skomplikowany. Jeśli nawet przyjmiemy, że troll decyduje się na kłamstwo z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  niezależnie od wartości  $R = r$ , to złe wartości są dwie i wybór jednej z nich w zależności od  $r$  może nawet coś hobbitowi podpowiadać. Nie wiedząc nic więcej, hobbit zakłada, że decydując się na kłamstwo troll rzuca (uczciwą!) monetą i w zależności od wyniku wskazuje jedną z dwóch części trzecich, w której pierścienia nie ma. Intuicja podpowiada, że jest to – z punktu widzenia hobbita – najgorszy przypadek; do tego szczegółu jeszcze wrócimy. Przy tym założeniu łatwo sprawdzić, że rozkład zmiennej  $T_2$  jest również jednostajny i

$$H(T_2) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 = \log_2 3.$$

Natomiast dla każdej wartości  $R = r$  wartości zmiennej  $T_2$  przyjmowane są z prawdopodobieństwami warunkowymi, odpowiednio,  $\frac{1}{2}$  (dobra),  $\frac{1}{4}$  (zła),  $\frac{1}{4}$  (zła). Dlatego, podobnie jak poprzednio, możemy obliczyć

$$H(T_2 | r) = \frac{1}{2} \log_2 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \log_2 4 = \frac{3}{2},$$

i taka jest też wartość  $H(T_2 | R)$ . W konsekwencji

$$I(R; T_2) = \log_2 3 - \frac{3}{2}.$$

Otóż okazuje się, że  $I(R; T_2) > I(R; T_1)$ , co możemy sprawdzić dość prostym rachunkiem, choć różnica jest mniejsza niż 0,01. Tak więc drugi troll ma – wprawdzie niewielką – przewagę. Wrócimy jeszcze do założenia o rzucie monetą. Czytelnik może sprawdzić, że przy każdym innym „sposobie kłamania” (ale utrzymując prawdopodobieństwo prawdy  $\frac{1}{2}$ ) entropia warunkowa  $H(T_2 | R)$  może się jedynie zmniejszyć; problem w tym, że zmniejszyć może się również  $H(T_2)$ , kiedy rozkład  $T_2$  nie będzie jednostajny. Można jednak wykazać, że  $\log_2 3 - \frac{3}{2}$  pozostaje ograniczeniem dolnym, czyli drugi troll jest nadal lepszy.

Daliśmy tu jedynie przedsmak teorii informacji, która powiązana jest z wieloma dziedzinami wiedzy: informatyką, fizyką, biologią, lingwistyką... Ale może się nam przydać, ilekroć jesteśmy gdzieś pomiędzy całkowitą pewnością a kompletną niewiedzą. Rozciąga się tu bowiem *continuum* możliwości, które warto brać pod uwagę – nie wyolbrzymiając, ale i nie pomniejszając ich znaczenia.

Nierówność sprowadza się do  $2 \log_2 3 - \frac{19}{6} > 0$ , czyli  $3^{12} > 2^{19}$ .

# Paradoks informacyjny a zasady zachowania w fizyce

\*Doktorant na Wydziale Fizyki  
Uniwersytetu Warszawskiego

Kacper DEBSKI\*

– Chciałbym przejrzeć tę pańską powieść. – I wyciągnął otwartą dłoń.  
– Niestety, nie mogę tego zrobić – odparł mistrz – spaliłem ją w piecu.  
– Przepraszam, nie mogę w to uwierzyć – odpowiedział Woland – to niemożliwe, rękopisy nie płoną. – Odwrócił się do Behemota i powiedział: – Ano, Behemocie, daj no tu tę powieść.  
Kot momentalnie zerwał się z krzesła i wszyscy zobaczyli, że siedział na grubym pliku maszynopisów.

Michaił Bułhakow, „Mistrz i Małgorzata”

Jeszcze kilka lat temu zacytowany fragment powieści Michaiła Bułhakowa mógł być zrozumiany tylko w sposób metaforyczny. Przyjrzyjmy mu się jednak naszym, współczesnym okiem, przywykłym do spoglądania na ekrany komputerów. W czasach, w których pisanie powieści kojarzy się nam bardziej z terkotem klawiatury niż z kałamarzem i gęsim piórem, łatwo zrozumieć, że cytat ten nie jest już tak zupełnie absurdalny, jak mogłoby się nam początkowo wydawać. Obecnie prawdopodobnie większość dostępnej literatury powstaje przy użyciu komputera. Pojedyncze słowa składają się z ciągów bitów zapisanych na twardym dysku. Czy w takich realiach faktycznie nie można dostrzec namiastki obowiązywania zasady zakazującej zupełnego zniszczenia pliku „rękopisu”? Dobrze wiemy, że sprawny informatyk bez trudu będzie w stanie przywrócić pochopnie usunięty plik. Informacje (bity) zapisane na dysku wciąż przecież fizycznie na nim istnieją, a użytkownik jedynie traci do nich dostęp, przez co faktycznie wygląda to, jakby dokonał się proces niszczenia. Gdy myślimy współczesnymi kategoriami, cytat ten nie zaskakuje nas już tak bardzo. To zupełnie oczywiste, że po zapisanym pliku zostaje jakiś ślad. Nawet jeżeli jest on trudny do znalezienia, to okiem fachowca można dostrzec jego istnienie. Jednak czy nie to samo tyczy się każdego obiektu, który kiedyś istniał? Co w takim razie z oryginalnym zdaniem z powieści? Czy faktycznie rękopisy nie płoną? Postarajmy się wcielić w rolę detektywa mającego ustalić utraconą treść spalonego rękopisu.

Piszac swą powieść, tytułowy mistrz posługiwał się maszyną do pisania, ale puśćmy wodze wyobraźni i przypuśćmy, że posługiwał się staromodnym piórem, starannie kreśląc słowa powieści. Czy w takim wypadku nie moglibyśmy spodziewać się, że na blacie stołu pozostały jakieś ślady? Dociskając stalówkę pióra do kartki papieru spoczywającej na polakierowanym blacie biurka, mógł on minimalnie zarysować jego powierzchnię. Nic poza ewentualnymi trudnościami technicznymi nie stoi na przeszkodzie, aby takie ślady zarysowań zebrać, przeanalizować, a następnie po wielu godzinach żmudnych obliczeń odtworzyć każde słowo utraconej powieści. W tym miejscu w ramach uczciwości intelektualnej musimy wyjaśnić, że nawet w przypadku posługiwania się maszyną do pisania możliwa byłaby podobna procedura badania śladów. W tym wypadku należałoby zapewne skupić się na

zużywających się elementach maszyny do pisania, takich jak ruchome czcionki, wałek, w który uderzają, i inne elementy. Jestem przekonany, że możemy się zgodzić, iż odpowiednio dociekliwy detektyw mógłby odtworzyć utracony maszynopis. Idąc dalej w naszych rozważaniach, możemy pokusić się o stwierdzenie, że gdybyśmy tylko byli w stanie zbadać każdy atom, każdy ślad pozostały po procesie pisania, to faktycznie moglibyśmy powiedzieć, że rękopis raz napisany już nigdy nie zostanie utracony. Zawsze znajdzie się metoda pozwalająca go odtworzyć na podstawie zebranych dowodów. Jednak co tak naprawdę pozwala nam formułować tego typu przypuszczenia? Na zupełnie fundamentalnym poziomie jest to wiara w obowiązywanie czegoś, co moglibyśmy roboczo nazwać zasadą zachowania informacji.

W tym miejscu warto zrobić małą dygresję, aby uświadomić sobie, że zasady zachowania w fizyce, które znamy ze szkoły, nie zawsze były tak oczywiste, jak się to może wydawać. Podobnie jeszcze do niedawna świadomość obowiązywania zasady zachowania energii nie była w pełni jasna, tak jak obecnie nie jest w pełni jasne to, czy obowiązuje zasada zachowania informacji. Historycznie jedną z pierwszych zasad zachowania, które udało się zrozumieć w fizyce, była zasada zachowania pędu. Konieczność jej obowiązywania wynikała wprost z definicji pojęcia siły wprowadzonej przez Newtona. Z definicji siła miała odzwierciedlać to, jak zmienia się pęd pewnego układu (jednego obiektu bądź też wielu ciał) wraz z czasem. Oznacza to, że jeżeli jesteśmy w stanie zapewnić, że zewnętrzna siła działająca na cały układ będzie dokładnie równa zero, to zmiana pędu tego układu również będzie zerowa. Innymi słowy, pęd będzie stały. Weryfikacja takiego przypuszczenia jest całkiem prosta. Wystarczy sprawdzić, co dzieje się z ciałem, ewentualnie z wieloma ciałami, kiedy nie działają na nie żadne siły. Czyż faktycznie w naszym życiu codziennym nie obserwujemy, jak raz poruszony przedmiot porusza się cały czas z tą samą prędkością, nie zmieniając swojego pędu? Otóż właśnie nie. W rzeczywistości materialnej istnieją siły tarcia, których praktycznie nie da się w pełni wyeliminować. Dopiero wykonując serię eksperymentów na specjalnie skonstruowanym stole ograniczającym wpływ tarcia na ruch, możemy potwierdzić słuszność wyprowadzonej zasady zachowania pędu.



Bardzo podobnie rzecz miała się z zasadą zachowania energii, której obowiązywanie jeszcze dłużej pozostawało ukryte przed ludzką świadomością. Początkowo jedyną znaną formą energii była energia mechaniczna, tzn. związana bezpośrednio z ruchem (energia kinetyczna) bądź też zależna od położenia ciała (energia potencjalna), która dopiero potencjalnie w pewnych sytuacjach mogła skutkować ruchem; stąd też jej nazwa.

Chcąc zbadać zasadę zachowania energii, moglibyśmy rozpocząć od sprawdzenia, jak jeden rodzaj energii zmienia się w inny. Ciało podrzucone do góry wlatuje, a im wyżej się znajdzie, tym mniejsza jest jego prędkość. Ciało upuszczone spada, nabierając coraz większej prędkości wraz z przebytą drogą. Te i inne proste eksperymenty mogą uzmysłwić nam, że faktycznie coś jest na rzeczy z zasadą zachowania energii mechanicznej. Co jednak w sytuacji, w której ze stołu zrzucimy kubek z herbatą i poczekamy, aż roztrzaskany wylądnie na podłodze? Początkowo kubek miał jedynie energię potencjalną związaną z tym, że został umieszczony na blacie stołu znajdującym się na pewnej wysokości nad poziomem podłogi. W czasie lotu kubek obniżał swoją wysokość względem podłogi, rozpędzając się. Jego energia potencjalna zmieniała się w energię kinetyczną. Co jednak stało się w chwili kontaktu z podłogą? Kubek roztrzaskał się na małe fragmenty, a herbata rozlała się po całej podłodze. Gdzie podzielała się cała energia kinetyczna zgromadzona w kubku? Na pierwszy rzut oka może wydawać się, że zasada zachowania energii przestała obowiązywać.

Z podobnymi problemami interpretacyjnymi borykali się ludzie żyjący kilkaset lat temu. W międzyczasie liczne doświadczenia zdawały się sugerować, że na przykład w wyniku tarcia część energii dostarczonej układowi w postaci pracy może przekształcić się w ciepło. Przykładem, który odegrał pewną historyczną rolę w fizyce, był proces wiercenia armat, który zrewolucjonizował pola bitew w XVIII wieku. Armata przygotowana zgodnie z tzw. systemem Gribeauvala była odlewana w całości pełna, a dopiero później starannie wiercono przewód w jej lufie, aby zapewnić wysoką jakość i precyzję wykonania. Zapewne niejeden pracownik zaangażowany w produkcję tego typu armat zauważył, że produkowane w takim procesie metalowe opilki bardzo się rozgrzewają. Praca wykonana w czasie obracania wiertła mogła pośrednio doprowadzić nawet do wrzenia wody, do której zostały wrzucone skrawki metalu. Liczne prace dające początek współczesnej termodynamice pozwoliły ostatecznie ustalić istnienie kolejnej formy energii, którą to nazwano ciepłem. Początkowo jej istnienie (błędnie) utożsamiano z pewnego rodzaju substancją będącą jej przekazywaczem. Liczne fałszywe tropy zaowocowały takimi egzotycznie brzmiącymi teoriami jak teoria ciepłika czy flogistonu.

Bez wątpienia najważniejszy okazał się jednak fakt, że ludzie utwierdzili się w przekonaniu, iż raz powstała energia nie ginie, tylko zmienia swoją formę. Nawet odkrycie tak zwanego ciepła utajonego związanego z przemianami pomiędzy różnymi fazami skupienia

nie doprowadziły ich do zwątpienia. Współcześni fizycy zrozumieli, że energia może być przekazywana wewnętrznym składnikom materii, co może skutkować zmianą stanu skupienia, na przykład z lodu w wodę. Kolejnym krokiem milowym pozwalającym zrozumieć istotę zasady zachowania energii było opublikowanie przez Einsteina jego słynnej teorii względności. Uczony pokazał, że energia kinetyczna, jaką znamy z fizyki Newtonowskiej, jest tylko drobną częścią energii, jaką obdarzone jest każde ciało posiadające masę. Okazało się, że energia i pęd ciała stanowią jedną nierozdzielalną całość, a zasada zachowania pędu, jak i energii, jest tak naprawdę tylko częścią tak zwanej zasady zachowania czteropędu. Ponadto teoria Einsteina pokazała, że nawet spoczywające ciało ma energię, którą można wykorzystać. Tak narodził się słynny wzór, z którego wynika między innymi olbrzymia śmiercionośność broni atomowej. W wyniku reakcji jądrowej uwalniana jest energia zależąca od tego, jaka masa substancji promieniotwórczej uległa rozpadowi. Wyposażeni w wiedzę z pogranicza historii i fizyki możemy w pełni zrozumieć, jak ważną rolę odgrywają zasady zachowania w nauce. Kolejne odkrycia pokazują, jak coś, co początkowo wymykało się rozumieniu uczonych, wkrótce ujawnia nowe, niezbadane dotychczas rejony nauki. W pewnym sensie współczesna fizyka znajduje się obecnie w podobnej fazie rozwoju co mechanika tuż przed wyjaśnieniem praw termodynamiki stojących za przemianami ciepła. Panuje powszechna wręcz zgoda co do ogólnej słuszności zasady zachowania informacji w świecie przyrody. Wszystkie potwierdzalne eksperymentalnie teorie sugerują jej prawdziwość. Jest jednak jedna kwestia, która wymyka się naszemu rozumieniu w związku z zasadą zachowania informacji. Tym, co stanowi ten twardy orzech do zgryzienia dla współczesnej fizyki teoretycznej, jest przedziwne zachowanie czarnych dziur.

Zanim jednak będziemy w stanie dokładnie zrozumieć, w czym tkwi problem, musimy włożyć nieco wysiłku w zrozumienie tego, czym są same czarne dziury i z czego wynika ich niecodzienne zachowanie.

Zacznijmy od bardzo prostego eksperymentu myślowego. Wyobraźmy sobie raketę startującą z powierzchni planety. Aby mogła ona zupełnie opuścić glob i odlecieć dowolnie daleko, musimy nadać jej odpowiednio dużą prędkość początkową, tym większą, im większa jest siła przyciągania grawitacyjnego. Minimalna prędkość pozwalająca opuścić jakiś obiekt astronomiczny to tzw. *prędkość ucieczki*, która w skrajnym wypadku, dla odpowiednio ciężkiej planety może przekroczyć nawet prędkość światła. Teoria względności uczy nas, że aby rozpędzić jakąkolwiek raketę do prędkości większej od prędkości światła, potrzebowalibyśmy nieskończenie dużo energii, a to jest niemożliwe. Bazując na tak prostym rozumowaniu, możemy przypuszczać, że jeżeli tylko jakiś obiekt astronomiczny będzie wystarczająco masywny, to nic nie będzie mogło opuścić jego powierzchni. Nawet światło okaże się zbyt wolne, ponieważ wymagana prędkość ucieczki będzie jeszcze większa niż prędkość światła.

Eksperyment myślowy Alberta Einsteina ilustrujący, jak grawitacja oddziałuje na światło, wygląda następująco. Wyobraźmy sobie windę. Każdy z nas zna to uczucie, kiedy winda rusza, jadąc do góry, a my czujemy, jak niewidzialna siła wgniata nas w podłogę. Z kolei kiedy winda rozpoczyna ruch w dół, czujemy, jakbyśmy lekko odrywali się od podłogi. Zdaniem twórcy teorii względności te dwa zjawiska są bardzo podobne do działania grawitacji. W pewnym przybliżeniu nie da się wręcz odróżnić grawitacji od ruchu z przyspieszeniem. W fizyce jest to znane pod nazwą *zasady równoważności*. Mając to na uwadze, wyobraźmy sobie promień światła wpadający poziomo do jadącej w górę windy. Zgodnie z naszą wiedzą na temat światła, promień ten będzie poruszał się po linii prostej względem szybu windy. Pamiętajmy jednak, że światło porusza się z pewną skończoną, acz bardzo dużą prędkością, i z perspektywy pasażera windy sytuacja nie będzie już taka prosta. Zwróćmy uwagę na to, co będzie mógł zaobserwować pasażer omawianej windy. W czasie, w którym światło będzie pokonywać szerokość szybu, winda zdąży się trochę przesunąć do góry. Jeżeli udałooby się nam zanotować wysokość, na jakiej znajdowało się światło na początku swego lotu przez windę, to okazałoby się, że wysokość, na jakiej wyleciało ono z windy, byłaby nieznacznie mniejsza ze względu na ruch samej windy. Gdyby winda poruszała się z jednostajną prędkością, to ostatecznie z perspektywy pasażera windy tor światła w windzie nadal pozostałby linią prostą, tyle że skierowaną nieco do dołu względem początkowego poziomu. W skrajnej sytuacji możemy nawet wyobrazić sobie scenariusz, w którym światło wpada do windy, aby następnie uderzyć w podłogę. Co więcej, jeśli winda poruszała się ruchem przyspieszonym, to trajektoria światła przestałaby być liniowa, a swym kształtem zaczęłaby przypominać parabolę. Mając na uwadze zasadę równoważności, ten prosty eksperyment myślowy pokazuje nam, że światło podlega grawitacji jak każdy inny obiekt. Może nawet zostać uwięzione przez silne źródło grawitacji, czyli czarną dziurę. O dowodach na istnienie czarnych dziur, za które przyznano Nagrodę Nobla w 2020 roku, pisaliśmy w  $\Delta_{20}^{12}$ .

O promieniowaniu Hawkinga pisał w  $\Delta_{18}^5$  Sebastian J. Szybka.

Hipoteza zaproponowana przez Gerardusa 't Hoofta i Leonarda Susskinda zakłada, że cała informacja na temat trójwymiarowego ciała lub całego rejonu przestrzeni zawarta jest na powierzchni otaczającej to ciało bądź też region przestrzeni. Zgodnie z tą hipotezą cała informacja na temat czarnej dziury i wszystkiego tego, co do niej wpadło, zawarta jest na powierzchni samej czarnej dziury. Posługując się naszym przykładem rękopisu, moglibyśmy powiedzieć, że pomimo tego, że wpadł on do czarnej dziury, to jego obraz i wszystkie informacje o nim wciąż tkwią „namalowane” na powierzchni horyzontu zdarzeń i wystarczająco docieklivi detektyw wciąż mógłby je

Oczywiście tego typu prosty argument nie udowadnia w żaden sposób, że podobny obiekt faktycznie istnieje, ani nawet tego, że faktycznie światło podlega takim samym prawom grawitacji, jak każdy inny obiekt w przyrodzie. Aby móc wyjaśnić, co dzieje się ze światłem w pobliżu źródła grawitacji, musielibyśmy odwołać się do kolejnej ważnej teorii Alberta Einsteina, tak zwanej ogólnej teorii względności. By przekonać się, że także światło może podlegać wpływowi grawitacji, możemy posłużyć się zaproponowanym przez samego twórcę teorii prostym eksperymentem myślowym, który przytaczamy na marginesie.

Rozumiemy już, czym jest czarna dziura. Jak jednak powiązać ją z zasadą zachowania informacji? Wyobraźmy sobie naszego detektywa badającego sprawę zaginionego rękopisu. Poprzednio ustaliliśmy, że badając ślady pozostałe po napisaniu rękopisu, można będzie ustalić jego pierwotne brzmienie. Wyobraźmy sobie jednak, że cały rękopis wraz z biurkiem i innymi materialnymi dowodami powstania dzieła trafił jakimś cudem do wnętrza czarnej dziury. Zgodnie z tym, co udało się nam wydedukować na temat natury czarnych dziur, odtąd żaden sygnał, żadna informacja na temat rękopisu nie opuści już jej wnętrza. Wygląda na to, że w takiej sytuacji nawet najlepszy detektyw nie zdoła ustalić brzmienia rękopisu. Cała informacja wysłana do czarnej dziury przepada w jej wnętrzu. W tym momencie Docieklivi Czytelnik może zaprotestować, zwracając uwagę na to, że wciąż możliwe jest wysłanie ekspedycji ratunkowej do wnętrza czarnej dziury. Możliwe, że taka ekspedycja już nigdy nie wróci na Ziemię, ale treść rękopisu uda się jej ustalić. Faktycznie istnieje taka hipotetyczna możliwość. Okazuje się jednak, że świat fizyczny jest jeszcze ciekawszy i bardziej niesamowity.

Zgodnie z teorią z pogranicza mechaniki kwantowej i teorii względności czarne dziury nie są jednak tak do końca czarne. Okazuje się, że promieniują one promieniowaniem termicznym, tzn. świecą tak jak każdy rozgrzany obiekt, tylko że temperatura, którą można im przypisać, jest bardzo mała. To promieniowanie, nazywane promieniowaniem Hawkinga, może z czasem doprowadzić do wyparowania całej czarnej dziury. Oznacza to, że czarna dziura może zniknąć, a w jej miejsce pojawi się promieniowanie termiczne tak samo chaotyczne, jak to wydobywające się z rozgrzanej powierzchni Słońca. Promieniowanie wydobywające się z parującej czarnej dziury nie zależy zupełnie od tego, co zostało do niej wrzucone. Zależy jedynie od całkowitej masy zgromadzonej w jej wnętrzu. Wracając do naszego rękopisu – oznacza to, że jeśli tylko zaczekamy wystarczająco długo, to nie będzie nawet gdzie wysłać ekspedycji ratunkowej i cała wiedza na temat rękopisu przypadnie na wieki.

Fakt znikania informacji po wpadnięciu do wnętrza czarnej dziury nazywamy *paradoksem informacyjnym*, ponieważ wygląda na to, że informacja, mająca być kolejną wielkością zachowaną w fizyce, ginie bezpowrotnie po przekroczeniu granicy horyzontu zdarzeń czarnej dziury. Odkąd po raz pierwszy zauważono istnienie tego swoistego paradoksu dotyczącego znikającej informacji, fizycy nie raz starali się podać jakieś alternatywne rozumowanie ratujące zasadę zachowania informacji. Jednym z postulowanych wyjaśnień mających rozwiązać problem paradoksu informacyjnego jest tzw. zasada holograficzna.

W ten sposób wydaje się, że można rozwiązać ten problematyczny paradoks, a także ocalić prawo zachowania informacji, jednak w świecie nauki nie ma co do tego pełnej zgody. Przez ostatnie 50 lat nie udało się wcale przekonujący sposób rozwiązać tego ważnego problemu. Nie wszyscy fizycy są skłonni zaakceptować prawdziwość zasady holograficznej. Istnieją także inne, bardziej egzotyczne rozwiązania tego paradoksu, jednak żadne z nich nie zyskało pełnego uznania. Być może musimy jeszcze trochę poczekać na nowe dane eksperymentalne, które rzuciłyby odrobinę światła na problem zasady zachowania informacji.

Załóżmy, że chcemy zapisać w pliku długi tekst składający się wyłącznie z liter A, B, C i D. Przez plik będziemy w tym artykule rozumieli dowolny ciąg bitów, to znaczy ciąg przeplatających się zer i jedynek.

Najprostszy i chyba naturalnie nasuwający się pomysł jest następujący: umówmy się, że literę „A” będziemy oznaczać na przykład jako 00, literę „B” jako 01, „C” jako 10, a „D” jako 11. Oczywiście, ponieważ jedna litera wymaga do zapisu dwóch bitów, to tak zapisany tekst zajmie  $2n$  bitów, gdy liter było  $n$ . Czy da się lepiej?

W ogólności (to jest wcale nieoczywiste) nie, ale w pewnych szczególnych okolicznościach – jak najbardziej. Na przykład rozważmy sytuację, gdy litery nie występują równie często. Powiedzmy, że litera A znajduje się na aż 85% pozycji całego tekstu, B – na 6%, C – na 5%, a D – na 4% pozycji. Przy takim rozkładzie literek lepszy efekt da następujące kodowanie:

$$A \equiv 0, B \equiv 10, C \equiv 110, D \equiv 111,$$

gdyż wynikowy plik zajmie tym razem:

$$0,85n \cdot 1 + 0,06n \cdot 2 + 0,05n \cdot 3 + 0,04n \cdot 3 = 1,24n$$

bitów.

## Metadane

Gwoli ścisłości – plik opisany wyżej w praktyce zajmie zwykle nieco więcej niż te wyliczone właśnie  $1,24n$ . Dlaczego? Otóż, aby możliwe było odczytanie pliku, gdzieś musi być zapisana informacja o szczegółach wybranego kodowania. Możemy sobie wyobrazić, że jest ono znane z góry (bo na przykład rozkład literek wynika z jakiegoś zjawiska fizycznego, którego przebieg zapisujemy do pliku) i wówczas jest ono specyficzną cechą przyjętego na stałe formatu naszego pliku.

Częściej jednak jest inaczej – zapisujemy jakąś informację do pliku, a wyboru kodowania chcemy dokonywać „na gorąco”, na podstawie oceny aktualnych danych. Wówczas jednak format pliku musi uwzględniać, że to sam plik opisuje najpierw sposób kodowania, a dopiero potem – zawiera już informację właściwą, opisaną za pomocą deklarowanego kodowania. W takim przypadku wszystkie informacje poboczne, a więc te niebezpośrednio opisujące treść pliku, jak chociażby opis kodowania literek w naszym przykładzie, nazywamy *metadanymi* i również one muszą zostać uwzględnione w wyliczeniach rozmiaru pliku wynikowego.

Bardziej konkretnie, nasze przykładowe kodowanie mogłyby opisywać na przykład takie metadane:

$$00011100011111000111111101,$$

które skonstruowaliśmy w następujący sposób: każde słowo kodowe (np. 110) jest zapisane poprzez zdublowanie każdego swojego bitu (w tym przypadku: 111100), a rolę przecinka oddzielającego kolejne słowa kodowe odgrywa sekwencja 01. Łatwo zauważyć, że tak pomyślane metadane daje się jednoznacznie odczytać, w naszym przypadku do oczekiwanego komunikatu 0,10,110,111, (z przecinkiem na końcu).

Ostatecznie, uwzględniając uwagi o metadanych, np. zapis komunikatu „AABAAACADA” przy metodzie opisanej wyżej wyglądałby następująco:

$$0001110001111100011111101001000011001110.$$

Ogólnie: zapis komunikatu o  $n$  literkach w opisany sposób, przy rozkładzie literek (85%, 6%, 5%, 4%), będzie zajmował dokładnie  $(26 + 1,24n)$  bitów.

## Bezprefiksowość

Podany przykład przekonuje nas, że – jeśli chcemy pliki zapisywać skrótowo, czyli, używając fachowej terminologii, je kompresować – warto rozważyć dobrane specyficznego kodowania literek do ich rozkładu. Takie podejście



### Rozwiązanie zadania F 1061.

Na powierzchni przewodnika umieszczonego w polu elektrycznym wytwarza się taki rozkład ładunku, że wewnątrz przewodnika natężenie wypadkowego pola (sumy pola zewnętrznego i pola wytworzonego przez rozkład ładunków na powierzchni) wynosi dokładnie zero. Oznacza to, że ładunki na powierzchni są źródłem jednorodnego pola  $-\vec{E}$  w całej objętości kuli. Energia  $\mathcal{E}$  tego pola wynosi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V,$$

gdzie  $\varepsilon_0$  jest przenikalnością elektryczną próżni, a  $V$  oznacza objętość kuli (obszar występowania pola  $-\vec{E}$ ). Po wyłączeniu zewnętrznego pola ładunki „wracają” w położenia, jakie miały przed włączeniem tego pola. Ich przepływowi towarzyszy wydzielanie ciepła  $Q$  w ilości równej energii pola  $\mathcal{E}$ . W przypadku kuli o promieniu  $2R$  pole  $-\vec{E}$  wypełnia objętość 8 razy większą, a więc po wyłączeniu pola wydzieli się ilość ciepła równa  $8Q$ .



zawiera jednak pewne ryzyko, nad którym prześlizgnęliśmy się w opisie wyżej. Otóż, jeśli różne literki są opisywane słowami kodowymi o różnej długości, to nie mamy pewności co do jednoznaczności odczytu! Spójrzmy chociażby, co by się stało, gdybyśmy wybrali nieco inne kodowanie (względem pierwotnego przykładu zmieniliśmy tutaj tylko jeden bit w słowie kodowym dla litery „B”):

$$A \equiv 0, B \equiv 11, C \equiv 110, D \equiv 111.$$

Przy takim kodowaniu plik (pomijamy metadane) 11011111 mógłby mieć cztery różne interpretacje: BABBB, BADD, CBBB oraz CDD...

Musimy więc zachowywać dużą ostrożność i słowa kodowane dobierać tak, aby niejednoznaczność odczytu nie była możliwa. Na szczęście okazuje się, że aby to osiągnąć, wystarczy (nie jest to warunek konieczny, ale wystarczający i również dość wygodny) upewnić się, że zbiór proponowanych słów kodowych jest *bezprefiksowy*. To znaczy, że żadne słowo kodowe nie jest prefiksem żadnego innego. Widać, że kodowanie z początku tekstu ma taką własność, ale to po modyfikacji już nie – chociażby słowo kodowe dla B jest prefiksem słowa kodowego dla C.

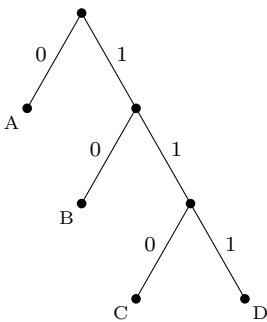
### O co zapyta rasowy matematyk?

Gdy już wiemy (bo mamy przykład), że czasem dobranie kodowania do rozkładu literki *opłaci się*, to powstaje naturalne pytanie: jak szukać w takim razie optymalnego kodowania, powiedzmy, przy założeniu, że ograniczamy się do kodowań bezprefiksowych (można pokazać, że to ograniczenie nie wpływa na efektywność ostatecznego rozwiązania).

Okazuje się, że ten problem jest już rozwiązany, a elegancka konstrukcja pozwalająca zawsze znaleźć najlepsze rozwiązanie nazywa się *kodowaniem Huffmana*. Zanim przejdziemy do jego ekspozycji, wprowadźmy jeszcze pewien wygodny graficzny sposób opisu kodowania bezprefiksowego. Otóż zbiór słów kodowych będziemy reprezentować poprzez drzewo (tzw. *drzewo kodowe*), w którego liściach będą zapisane literki, a ścieżka z korzenia do liści będzie przedstawiała wybrane słowo kodowe. Reguła jest prosta – skręt w lewo to 0, a w prawo – to 1. Drzewko dla kodu, który analizujemy od początku tego artykułu, będzie więc wyglądało jak na rysunku 1.

Czytelnik proszony jest o spróbowanie formalnego pokazania, że istotnie każde bezprefiksowe kodowanie jest jednoznaczne w odczycie.

Anegdota głosi, że David Huffman rozwiązał opisywany problem w ramach studenckiej pracy domowej, w której jedno z zadań było problemem otwartym.



Rys. 1

Mając tę notację, możemy już łatwo opisać algorytm budowania kodu Huffmana:

1. Niech  $X$  będzie strukturą przechowującą pary: (drzewko kodowe; liczba rzeczywista);
2.  $X$  zainicjuj następująco: dla każdej literki  $L$  o prawdopodobieństwie wystąpienia  $p$  włóż do  $X$  parę: (pojedynczy wierzchołek z etykietą  $L$ ;  $p$ );
3. Dopóki  $X$  zawiera co najmniej dwa elementy, wykonuj w pętli:
  - wybierz (i usuń) z  $X$  dwa elementy o najmniejszej drugiej współrzędnej – oznaczmy je przez  $(D_1, p_1)$  oraz  $(D_2, p_2)$ ;
  - dodaj do  $X$  nowy element  $\left( \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ D_1 \quad D_2 \end{array}, p_1 + p_2 \right)$ .
4. Gdy  $X$  ma już tylko jeden element – zwróć go jako wynik ustalania optymalnego kodowania.

Dla czytelności obrazu przedstawimy jeszcze krok po kroku zawartość struktury  $X$  w algorytmie Huffmana dla rozważanego przez nas przypadku:

$$(\dot{A}, 0,85), (\dot{B}, 0,06), (\dot{C}, 0,05), (\dot{D}, 0,04) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\dot{A}, 0,85), (\dot{B}, 0,06), \left( \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dot{C} \quad \dot{D} \end{array}, 0,09 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\dot{A}, 0,85), \left( \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dot{B} \quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dot{C} \quad \dot{D} \end{array} \end{array}, 0,15 \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dot{A} \quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dot{B} \quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dot{C} \quad \dot{D} \end{array} \end{array} \end{array}, 1 \right).$$

Dowód faktu (wcale nie taki trudny!), że podana konstrukcja zwraca wynik optymalny, pozostawimy Czytelnikowi. Napišmy tylko, że uzyskany w ten

Aby zbliżyć się do granicy teoretycznej dowolnie blisko, stosuje się pewne sztuczki, np. tak zwane kodowanie Shannona-Fano, ten temat niestety wykracza poza ramy naszego artykułu. Można go w wielkim uproszczeniu opisać jako zmianę alfabetu poprzez sklejanie literek. A więc – zamiast rozważania alfabetu (A, B, C, D), można analizować (AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD) z odpowiednio dobranym rozkładem. Wówczas metadane opisu kodu będą rosły, ale sam tekst właściwy – dzięki dobraniu kodu Huffmana do „lepszych” danych – może okazać się krótszy niż dla klasycznego kodowania Huffmana dla alfabetu (A, B, C, D).

Dość arbitralne stwierdzenie, że losowych danych nie da się kompresować, może zaintrygować. Czytelnik Złapany proszony jest o dalsze poszukiwania, np. podążając w stronę pojęcia złożoności Kolmogorowa.

sposób stopień kompresji ma silny związek z pojęciem entropii Shannona. Da się bowiem pokazać, że średnia długość słowa kodowego w rozważanym problemie nie może być nigdy mniejsza niż entropia rozkładu literek. Nie dla każdego zestawu danych da się ją uzyskać dokładnie, ale kod Huffmana daje zawsze maksimum tego, co daje się wycisnąć dla danego zbioru i rozkładu literek. Co więcej, daje się pokazać, że ten rezultat jest co najwyżej o 1 gorszy od teoretycznego dolnego oszacowania wynikającego z teorii entropii Shannona.

### Jeszcze inne okoliczności

Zasadniczo losowych danych nie da się kompresować. Aby więc cokolwiek udało się zapisać krócej, musimy znaleźć jakieś sprzyjające okoliczności. Wyżej eksplorowaliśmy okoliczność niejednostajnego rozkładu literek. Oczywiście mogą wystąpić także inne.

Na przykład może się zdarzyć, że rozkład literek jest co prawda ogólnie jednostajny, ale już niekoniecznie w pewnych fragmentach. I mogłoby się też zdarzyć, że w pierwszej ćwiartce danych rozkład wynosi (85%, 6%, 5%, 4%), w drugiej – (4%, 85%, 6%, 5%), w trzeciej – (5%, 4%, 85%, 6%), a w czwartej – (6%, 5%, 4%, 85%). Wówczas widać, że nie opłaca się ustalić jednego kodowania literek w całym pliku, jednak można/warto zmienić go kilka razy. Bardziej trzeba się napracować, aby wymyślić odpowiedni opis metadanych dla takiego przypadku, ale na pewno ostateczny rozrachunek będzie korzystny.

Zupełnie inne jakościowo zjawisko występuje w danych, w których pojawiają się czasem te same, bardzo długie bloki. Na przykład rozważmy tekst książki o taktyce piłkarskiej. W takiej pozycji zapewne frazy „Real Madryt”, „Tiki-Taka”, „Zinedine Zidane” czy „Gegenpressing” wystąpią wyjątkowo często. Może się więc *opłacać* ustalić (w ramach metadanych) dla tego typu częstych fraz specjalne kodowanie, które sprawi, że nie będziemy musieli często powtarzać tych samych długich określeń.

### To jak w końcu działają programy do kompresji?

Współczesne programy do kompresji (takie jak ZIP) są rodzajami kombajnów wyposażonych w wiele różnorodnych algorytmów, przygotowanych na różne potencjalnie sprzyjające kompresji okoliczności. Samo kodowanie zawiera istotną i dość skomplikowaną strukturę metadanych – muszą one wszak opisywać wybór konkretnej metody z dostępnej palety (być może różny dla różnych fragmentów) oraz dodatkowe metadane wewnętrzne, specyficzne dla każdej ustalonej metody. W tym artykule podjęliśmy próbę naszkicowania takiego rozumowania na przykładzie jednej konkretnej, jak to określiliśmy, okoliczności sprzyjającej. Czytelnik Zainteresowany Tematem znajdzie dużo ciekawych informacji w Wikipedii i innych źródłach, które dość szczegółowo opisują zarówno format metadanych, jak i konkretne algorytmy z palety dostępnych możliwości.

Podkreślmy jednocześnie, że – wobec powyższego – dobry program do kompresji nie tylko posiada bogaty zbiór dostępnych narzędzi: musi dysponować również wyrafinowanym algorytmem, który jest w stanie duże dane szybko przeanalizować (metodami stochastycznymi, ale nie tylko) oraz dobrać do nich skuteczną strategię wyboru narzędzi, opisać ją poprzez metadane i ostatecznie zakodować. Nie jest to bynajmniej zadanie proste, a jednak oryginalne pomysły wciąż są możliwe!

### A może coś pomińmy?

W tekście o kompresji wypada dodać coś (choć nie jest to kompletnie tematem tego artykułu) o tak zwanej kompresji stratnej. Otóż zauważono, że dla niektórych danych efekt kompresji można uzyskać nie dzięki zwięzłości zapisu poprzez sprytne kodowanie – czasem godzimy się po prostu na usunięcie części danych. Dzieje się tak, gdy dobrze wiemy, co opisują dane i które informacje są drugorzędne. W plikach muzycznych możemy na przykład wycinać niesłyszalne dla człowieka częstotliwości dźwięku, w grafice możemy próbować zmniejszać paletę barw albo rozmywać fragmenty, których „oko nie zauważy”. Te metody wykraczają poza informatykę teoretyczną, gdyż mają swoje korzenie w fizjologii człowieka. Są natomiast bardzo skuteczne, a ich efektem są chociażby formaty plików MP3 czy JPG.



### Rozwiązanie zadania F 1062.

Niech położenia gwiazd opisują wektory  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$ . Wektor łączący ich środki  $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Gwiazdy przyciągają się wzajemnie siłą grawitacji o wartości:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} = \frac{Gm_1m_2}{R^2}.$$

Równania ruchu mają postać:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = F \frac{\vec{R}}{R},$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -F \frac{\vec{R}}{R}.$$

Dla wektora  $\vec{R}$  łączącego ich środki otrzymujemy równanie ruchu:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Jest to równanie ruchu punktu materialnego w polu grawitacyjnym masy  $m_1 + m_2$ . Na podstawie prawa Keplera możemy więc znaleźć wartość odległości między gwiazdami:

$$R = \left( \frac{G(m_1 + m_2)T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Ścisłe biorąc, powyższy wzór określa wartość długiej półosi orbity, tj. największą odległość między środkami mas gwiazd w ich ruchu względnym.

# Prąd elektryczny, fotony i fale ciśnienia

Szymon CHARZYŃSKI\*

\*Katedra Metod Matematycznych Fizyki,  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Otoczeni technologicznymi gadżetami, które dostarczają nam wielu wygod, łatwo się do nich przyzwyczajamy. Wiele z nich to urządzenia gromadzące i przetwarzające najróżniejsze rodzaje informacji. Za tym gromadzeniem i przetwarzaniem stoją z kolei różne zjawiska i procesy fizyczne, dzięki zrozumieniu których możliwa jest budowa tych wszystkich umilających nam życie urządzeń. Jako przykład niech posłuży nam dostęp do muzyki. Jeżeli dziś ktoś ma kaprys, żeby umilić sobie sprzątanie pokoju słuchaniem jednej z symfonii Ludwiga van Beethovena w wykonaniu orkiestry symfonicznej, to ma do wyboru dziesiątki różnych wykonań, które może z serwisów *streamingowych* odtworzyć za pomocą urządzenia wyposażonego w głośnik (może to być duża lub mała skrzynka albo nawet miniaturowe urządzenie mieszczące się w uchu).

Gdy nasz żyjący 200 lat temu przodek chciał posłuchać tej samej symfonii, to jedynym sposobem, aby ten cel osiągnąć, było zgromadzenie około setki muzyków obsługujących najróżniejsze instrumenty, którzy pod wodzą dyrygenta wykonywali utwór na żywo. Jediną dostępną formą utrwalania informacji o utworze muzycznym był wówczas zapis nutowy. Aby utwór usłyszeć, należało go za każdym razem odegrać na nowo, wydobywając dźwięki z instrumentów. Dźwięk był wówczas bardzo ulotną formą informacji, a droga, jaką pokonywała informacja, była bardzo krótka: muzyk patrzył na zapis nutowy i przy użyciu instrumentu przetwarzał go na falę dźwiękową.

Teraz mamy powszechnie dostępne urządzenia do rejestrowania i odtwarzania dźwięku. Dla nas jest to oczywiste, ale dla naszego przodka sprzed dwustu lat byłoby z pewnością zaskakujące, że skrzynka z membranami śpiewa głosem naszej ulubionej wokalistki albo gra jak cała orkiestra symfoniczna, generując dźwięk wszystkich instrumentów jednocześnie. Każdy typ instrumentu muzycznego ma swoje charakterystyczne brzmienie związane z jego budową i zasadą działania, a barwy głosów wokalistów są niepowtarzalne. Jak się chwilę nad tym zastanowić, to nawet dla współczesnego odbiorcy może być to zaskakujące, jak taki niepozorny głośniczek jest w stanie wydobyć z siebie dźwięk nie tylko każdego instrumentu czy wokalisty, ale nawet dowolnej ich kombinacji.

Kluczem do zrozumienia, jak to wszystko jest możliwe, jest fakt, że wynalazcy urządzeń do utrwalania i odtwarzania dźwięku uświadomili sobie, że jest on po prostu formą informacji. Po pierwsze, kiedy na żywo słuchamy dźwięku pochodzącego z wielu źródeł, to on i tak dociera do nas w postaci pojedynczej fali dźwiękowej, która jest sumą fal pochodzących od wszystkich źródeł. Po drugie głośnik nie musi wiernie odtwarzać takiej samej fali dźwiękowej, jaką generowało pierwotne źródło dźwięku. Wystarczy, że fala ta będzie kopią wyjściowej fali w takim zakresie, w jakim wrażliwe są nasze uszy. Podobnie jak nasze oczy są wrażliwe tylko na fale elektromagnetyczne w ograniczonym zakresie częstości (nie widzimy podczerwieni ani ultrafioletu), nasze uszy są wrażliwe na fale dźwiękowe tylko z pewnego skończonego przedziału częstości. Tymi składowymi dźwiękami, które są spoza tego przedziału, nie musimy zawracać sobie głowy ani w czasie rejestracji, ani odtwarzania, ani utrwalania informacji o dźwięku, co ma kluczowe znaczenie przy konstruowaniu urządzeń wykonujących te zadania.

Wyróżnia się dwa zasadniczo różne sposoby utrwalania dźwięku: analogowy i cyfrowy. Najpierw ludzkość opanowała ten pierwszy, zajmiemy się nim więc w pierwszej kolejności. Kluczowym elementem jest tutaj mikrofon. W dużym uproszczeniu jest to urządzenie, w którym fala dźwiękowa pobudza do drgań jakiś ruchomy element, a ten jest jednocześnie składową obwodu elektrycznego. Ruch tego elementu zmienia jego właściwości elektryczne, co wpływa na to, jak przez ten element przepływa prąd. Takim elementem może być np. kawałek metalowej folii, który do pary z drugą nieruchomą elektrodą stanowi kondensator. Drganie jednej z okładek kondensatora oznacza zmianę odległości między okładkami, a zatem zmianę pojemności kondensatora.

Zapis nutowy niesie oczywiście tylko część informacji o tym, jak utwór powinien brzmieć. Pozwala zakodować wysokość dźwięków, czas ich trwania i w jakimś stopniu zmiany tempa odtwarzania. To, jak utwór ostatecznie zabrzmie, zależy od instrumentu, na którym zostanie odegrany (albo głosu, którym zostanie odśpiewany), i umiejętności muzyka, który dany instrument obsługuje, nie mówiąc już o czymś, co nazywa się „interpretacją”. Nie bez powodu organizuje się konkursy, w których uczestnicy ścigają się o nagrodę za najlepsze wykonanie tego samego utworu muzycznego.

Dźwięk rozchodzi się jako fala ciśnienia, tzn. w danym punkcie, w którym ją rejestrujemy, obserwujemy na zmianę wzrosty i spadki ciśnienia, a tym odpowiadają wzrosty i spadki gęstości powietrza. Fala dźwiękowa jest falą podłużną (o rozróżnieniu między falami podłużnymi i poprzecznymi można przeczytać w  $\Delta_{18}$ ).

Ludzkie ucho jest wrażliwe na częstości z zakresu 16–20000 Hz, przy czym czułość jest największa w okolicach środka tego przedziału (od 1 do 3 kHz). Ponadto czułość zmienia się z wiekiem i zwłaszcza ten górny próg słyszalności się obniża.

Podany tu przykład to tzw. mikrofon pojemnościowy. Istnieje wiele różnych typów mikrofonów, których działanie opiera się na innych zasadach niż opisana tutaj. Ostateczny wynik ich działania jest jednak zawsze taki sam: zamiana sygnału dźwiękowego na elektryczny.



To z kolei powoduje pojawienie się zmian napięcia na kondensatorze, które to zmiany odwzorowują zmienność padającej fali dźwiękowej. Zmienne w czasie ciśnienie powietrza zamieniliśmy tym samym na zmienne w czasie napięcie prądu. Nośnik informacji jest zupełnie inny, ale sama informacja o zależności sygnału od czasu jest taka sama. Sygnał w postaci elektrycznej możemy wzmocnić i za pomocą wbudowanych w nie elektromagnesów możemy pobudzić do drgania membrany głośników, które zamieniają sygnał elektryczny z powrotem na sygnał akustyczny. Jeżeli chcemy dźwięk odtworzyć później, to musimy ten sygnał elektryczny jakoś zapisać. Dawniej robiono to, np. wykorzystując taśmy magnetyczne nawijane na duże szpule lub schowane w małych kasetach magnetofonowych. Sygnał analogowy można też było zapisać w postaci rowka o zmiennej głębokości na płycie winylowej. Odczyt następuje wtedy za pomocą igły, która jest wprawiana w drgania mechaniczne w miarę przesuwania się wzdluż rowka, i dopiero ten sygnał jest przetwarzany na elektryczny, który jest wzmacniany i przesyłany na głośniki. W przypadku płyty winylowej zależność amplitudy dźwięku od czasu tłumaczona jest na zależność głębokości rowka od kąta, co przy stałej prędkości kątowej obrotu płyty odpowiada zależności głębokości rowka od czasu.

Opisany powyżej sposób zapisu nazywa się analogowym, ponieważ próbujemy przebieg jakiejś funkcji (w tym wypadku zależność ciśnienia od czasu) odwzorować również jako funkcję ciągłą, tak wiernie jak się da. Przepływ informacji wygląda w tym przypadku następująco: dźwięk zamieniamy na zależność napięcia prądu od czasu, następnie tłumaczymy na zależność głębokości rowka od kąta na płycie winylowej (albo na funkcję namagnesowania taśmy magnetofonowej). Podstawową wadą takiego sposobu utrwalania informacji jest niestety brak wierności w tłumaczeniu sygnału i jego kopiowaniu. Każdy, kto pamięta kopiowanie kaset magnetofonowych, wie, że kopia brzmi gorzej od oryginału, a kopia kopii jeszcze gorzej itd. Wielokrotne odtwarzanie tej samej płyty czy kasety również prowadziło do ich zużycia i pogorszenia jakości nośnika.

Nietrudno się zatem dziwić, że zapis analogowy został prawie całkowicie wyparty przez zapis cyfrowy. Współcześnie utrwalanie dźwięku najczęściej wygląda następująco. Mikrofon odwzorowujący zależność ciśnienia od czasu na napięcie prądu podłączony jest do przetwornika analogowo-cyfrowego. Ten ostatni zamienia ciągłą funkcję czasu na dyskretną, próbując wartości tej ciągłej funkcji w pewnym skończonym zbiorze punktów. Wartości przypisywane punktom pochodzą również ze skończonego zbioru, powstającego z podziału zbioru wartości funkcji na skończenie wiele małych przedziałów. W przypadku dźwięku takie próbkowanie wykonuje się zwykle 44 100 razy na sekundę (44,1 kHz to między innymi standard płyty CD). Częstotliwość ta jest ponad dwa razy większa niż górna granica częstotliwości, na jakie wrażliwe jest ludzkie ucho, czyli około 20 kHz. Wybór częstotliwości próbkowania wynika z twierdzenia Nyquista-Shannona o próbkowaniu – mówiącego, że sygnał, który jest sumą

sygnałów o częstotliwościach ograniczonych z góry przez pewną największą częstotliwość, można wiernie zakodować i odtworzyć, próbując go z częstotliwością co najmniej dwa razy większą od tej największej częstotliwości. W praktyce oznacza to, że najpierw należy wyjściowy sygnał przepuścić przez filtr tłumiący wszystkie częstotliwości powyżej tych, na które wrażliwe jest ludzkie ucho. Taki sygnał można potem wiernie zakodować, próbując go, a następnie odtworzyć. Nie będzie on oczywiście identyczny z tym wyjściowym, a jedynie z tym odfiltrowanym (pozbawionym wyższych częstotliwości), ale dla ludzkiego ucha oba są nierozróżnialne.

Sygnał zakodowany cyfrowo można przechowywać na dowolnym nośniku (płyty CD, twarde dyski, *pendrive'y* itp.), odtwarzać i kopiować w sposób całkowicie bezstratny, jak każdy inny plik w komputerze (możemy oczywiście stosować stratną kompresję, ale jest to kwestia naszej decyzji).

Prześledźmy więc na zakończenie przykładową drogę, jaką pokonuje informacja, kiedy wykorzystujemy serwis *streamingowy* i słuchamy w bezprzewodowych słuchawkach nagrań z udziałem np. niezującego od kilkudziesięciu lat wokalisty. Najpierw mikrofon przetłumaczył falę dźwiękową na sygnał elektryczny, który został utrwalony na taśmie magnetycznej. Z taśmy wyprodukowano płytę winylową, co samo w sobie jest skomplikowanym procesem, w którym zapis jest wielokrotnie kopiowany – najpierw powstaje tzw. „płyta-matka”, z której odciska się matrycę, a następnie wykorzystuje się je do tłoczenia właściwych kopii trafiających do sprzedaży. Informacja przechowywana przez wiele lat w postaci analogowej (rowek na płycie) musiała być w którymś momencie odtworzona i zdigitalizowana (tak jak to opisywaliśmy wcześniej). Aktualnie informacja w postaci bitowej jest przechowywana na dysku jakiegoś serwera, w nieznanym użytkownikowi miejscu na świecie. Kiedy chcemy danego utworu posłuchać, to zawierający go plik jest przesyłany w postaci impulsów elektrycznych w sieci wewnętrznej serwerowni. Następnie jest tłumaczony na impulsy optyczne i przesyłany światłowodami. W drodze do nas prawdopodobnie kilka razy zmienia się fizyczny nośnik informacji z elektrycznego na optyczny i z powrotem. Na końcu *router Wi-Fi* w naszym domu zamienia sygnał na radiowy i informacja dociera do naszego smartfona w postaci modulacji częstotliwości fali radiowej. Nasz smartfon tłumaczy sygnał na jeszcze inny standard komunikacji radiowej (*bluetooth*) i przesyła do słuchawek, w których znajduje się przetwornik cyfrowo-analogowy przetwarzający sygnał cyfrowy znowu na analogowy w postaci zależności napięcia prądu od czasu. Prąd pobudza do drgań membranę, która generuje z powrotem falę ciśnienia dającą nam złudzenie, że słuchamy śpiewu zarejestrowanego kilkadziesiąt lat temu. Dźwięk nie jest oczywiście identyczny z wyjściowym, ale biorąc pod uwagę, jak długa i skomplikowana jest droga, jaką do nas przebyła informacja o tym, jak ten śpiew wtedy brzmiał, zdecydowanie nie powinniśmy narzekać, tylko docenić wysiłek pokoleń naukowców i inżynierów, dzięki którym to wszystko jest możliwe.

## Starość roślin

Za oknem spadły z drzew ostatnie żółte liście. Śmierć liścia rozpoczyna się od sygnału zwiastującego spowolnienie fotosyntezy, co powoduje reakcje rozkładu tylakoidów (wewnętrznych błon chloroplastów). Dotychczas najcenniejsze składniki odżywcze wytworzone w procesie fotosyntezy na obszarze chloroplastów „wysyłane” były do nasion, owoców, kłączy. Teraz liść przechodzi w fazę degradacji chloroplastów, a po ich całkowitej degradacji komórka wchodzi w stadium terminacji. Liść opada.

„Starzenie” kojarzy się nam z pomarszczoną twarzą starego człowieka. Jak i czy w ogóle starzeją się rośliny?

Nawet laik zauważy, że to, co nazywamy starzeniem się rośliny, będzie prawdopodobnie zjawiskiem różnym w roślinie jednorocznej i w wieloletniej, żyjącej nawet setki lat.

Starzenie się zwierząt regulowane jest przez geny wpływające na przetrwanie organizmu do okresu reprodukcyjnego. Odmienne jest w roślinach – starzenie się (ang. *aging*) jest etapem rozwoju rośliny, nie jej umierania, oznacza wydłużenie czasu życia. Innym etapem jest droga do śmierci (ang. *senescence*). Zestaw licznych procesów w obu typach przemian jest wciąż jeszcze mało poznany, a steruje nimi aż 25% genomu roślinnego.

Właściwie cała wiedza molekularna o starzeniu się roślin pochodzi z badań niewielkiej modelowej roślinki, rzodkiewnika. Jej zaletą są krótkie czasy przejść metabolicznych (czas jej życia to zaledwie 6–8 tygodni, liście zaczynają się starzeć 4–5 dni po rozwinięciu!) i stosunkowo niewielki w pełni poznany chemicznie genom (125 mln nukleotydów i ok. 25,5 tys. genów). Ale... funkcje zostały zidentyfikowane u zaledwie około 35% genów.

Rośliny rosną dzięki specyficznej tkance, nieobecnej u zwierząt – merystematycznej. Merystem apikalny leży na wierzchołkach górnym i dolnym; interkalarny – między węzłami; boczny – sterujący grubością łodygi, pnia.

Tkanki merystematyczne dzielą się przez całe życie rośliny. Mają aktywną telomerazę, zatem telomery chromosomów nie skracają się po każdym podziale. Zatrzymanie podziałów oznacza śmierć rośliny. U wieloletnich roślin etapy podziałów i zamierania merystemów powtarzają się cyklicznie. U roślin zimozielonych też w końcu dochodzi do zatrzymania proliferacji merystemów. W świecie życia nie ma nieśmiertelności.

Leżące poza tkanką merystematyczną komórki ulegają demontażowi i recyklingowi w procesach nieanalogicznych do zwierzęcej apoptozy. Demontaż chloroplastów, w których dochodzi do życiodajnej fotosyntezy, wiąże się ze zwiększonym zapotrzebowaniem rośliny na energię (intensyfikacja oddychania), a w dalszym przebiegu z rozkładem innych niż chloroplasty struktur komórkowych, wreszcie degradacją błon. Gdy procesy demontażu zaczynają przeważać nad recyklingiem, komórki (i cała roślina) umierają, ponieważ produkty demontażu są dla komórki toksyczne. Całością tych procesów sterują liczne hormony, których funkcje często nie są jeszcze poznane.

Rośliny są największą grupą organizmów samożywnych, syntetyzujących składniki odżywcze ze związków nieorganicznych, dlatego też przebieg i etapy ich życia ściśle związane są z warunkami środowiska. Czynniki środowiskowymi wpływającymi na starzenie się roślin są zatem: natężenie światła, zmiany temperatury, skład gleby, skład wody i atmosfery, drapieżnictwo i obecność patogenów. Pogłębieniu wiedzy o starzeniu roślin posłużą niewątpliwie w przyszłości nauki o wspólnej końcówce w nazwie: *-omika*. Dotyczy to m.in. genomiki, epigenomiki, proteomiki, metabolomiki. Takie badania wskazują na złożony i wysoce kontrolowany przebieg kolejnych etapów starzenia oraz ich wzajemną regulację i koordynację.

Życie na Ziemi zależy od dobrostanu roślin. Warto o tym pamiętać, rozwijając nowe technologie. Możemy bowiem skończyć na pustyni z wirującymi wiatrakami...

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

## Prosto z nieba: I Ty możesz odkryć asteroidę! Nie patrz w górę – użyj Zooniverse

Międzynarodowy Dzień Asteroidy, znany także jako Dzień Planetoid, został ustanowiony w roku 2015 przez ONZ na wniosek astronoma, a także współzałożyciela rockowej grupy Queen, Briana Maya oraz Rusty'ego Schweickarta, astronauty z misji Apollo 9. Data ta nie została wybrana przypadkowo: upamiętnia ona katastrofę z 30 czerwca 1908 roku. Tego dnia w syberyjskiej tajdze, nad rzeką Podkamienna Tunguzka, nastąpiła eksplozja, która powaliła drzewa w promieniu 40 km, a silny wstrząs zarejestrowały wówczas sejsmografy na całej Ziemi. Uważa się, że spowodował ją wybuch asteroidy w pobliżu powierzchni Ziemi.

[†] <https://asteroidday.org/about/asteroid-day-100x-declaration/>



Przykład niezidentyfikowanego śladu pochodzącego z obserwacji HST. Źródło: S. Kruk et al., A&A, 2022.

Przykład *Hubble Asteroid Hunter* pokazuje, że naukowe projekty obywatelskie są bardzo skuteczne. Mimo że coraz częściej wykorzystujemy uczenie maszynowe, to nadal w dokonywaniu i potwierdzaniu niezwykłych odkryć niezastąpione jest ludzkie oko.

Na podstawie "Hubble Asteroid Hunter – I. Identifying asteroid trails in Hubble Space Telescope images", S. Kruk, P. García Martín, M. Popescu et al., *Astronomy & Astrophysics*, czerwiec, 2022.

*Sprostowanie:* W numerze 9/2022 na str. 13 błędnie podana została data pojawienia się komety i śmierci Juliusza Cezara. Oba te wydarzenia miały miejsce w 44 r. p.n.e., w odstępnie kilku miesięcy. Wiele lat później, w pierwszych latach naszej ery, pisał o nich m.in. Owidiusz w poemacie *Metamorfozy*. Przepraszamy Czytelników za tę niefortunną pomyłkę.

\* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Dzień 30 czerwca to święto asteroid. Celem jego ustanowienia była popularyzacja wiedzy o asteroidach oraz podniesienie świadomości na temat zagrożeń i tego, co można zrobić, aby uchronić Ziemię przed ewentualnym uderzeniem asteroidy w jej powierzchnię. Zderzenie z asteroidą jest jedną z niewielu katastrof naturalnych, przed którą możemy się obronić (przynajmniej tak się nam wydaje), dlatego niezwykle istotne jest monitorowanie torów lotów znanych asteroid oraz poszukiwanie wcześniej nieznanymi obiektów.

Nic dziwnego, że naukowcy dość poważnie potraktowali trzy główne cele podpisanej w grudniu 2014 roku deklaracji, znanej pod nazwą „100x Asteroid Declaration” [†]. Te cele to: (1) użycie dostępnych technologii do wykrywania i śledzenia bliskich Ziemi planetoid, które mogą stanowić zagrożenie dla populacji ludzkich, (2) gwałtowne przyspieszenie (100x) nowych odkryć i śledzenie do 100 tysięcy planetoid rocznie w ciągu następnej dekady, (3) światowe uznanie Dnia Asteroidy w celu zwiększenia świadomości ryzyka ze strony planetoid, a także podjęcie wysiłków w celu ochrony przed upadkami takich obiektów na powierzchnię Ziemi. Już w 2015 roku został spełniony punkt trzeci, natomiast nad punktami 1–2 wciąż pracujemy.

Astronomowie już od dawna poszukują planetoid, angażując również w poszukiwaniu szerokie grono wolontariuszy z całego świata. W czerwcu 2019 roku, w Międzynarodowym Dniu Asteroidy, międzynarodowa grupa astronomów pod kierownictwem Sandora Kruka z niemieckiego Max Planck Institute of Extraterrestrial Physics i Pabla Garcíi Martína z hiszpańskiego Autonomous University of Madrid uruchomiła na platformie Zooniverse obywatelski projekt *Hubble Asteroid Hunter*. Jego celem była wizualna identyfikacja asteroid w archiwalnych danych pochodzących z Kosmicznego Teleskopu Hubble'a. Badacze poprosili wolontariuszy o identyfikację torów lotów asteroid.

W tym celu użyto ponad 37 000 zdjęć wykonanych przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a w okresie od kwietnia 2002 do marca 2021 roku. Średni czas naświetlania tych zdjęć wynosił około 30 minut, co powoduje, że na obrazach ślady asteroid pojawiają się jako zakrzywione linie/smugi. Ponad 11 400 osób przeanalizowało zdjęcia, identyfikując ponad 1000 śladów asteroid! W kolejnym kroku asteroidy znalezione przez wolontariuszy *Hubble Asteroid Hunter* posłużyły jako zestaw treningowy dla zautomatyzowanego algorytmu opartego na sztucznej inteligencji, który rozpoczął poszukiwania asteroid w archiwalnych bazach danych. Dzięki połączeniu projektu społecznego z uczeniem maszynowym uzyskano ostateczny zbiór danych zawierający 1701 ścieżek asteroid znajdujących się na 1316 zdjęciach pochodzących z Kosmicznego Teleskopu Hubble'a. Ale to nie wszystko. Uczestnicy projektu mieli również możliwość oznaczania innych ciekawych obiektów, takich jak soczewki grawitacyjne, galaktyki i mgławice czy sztuczne satelity.

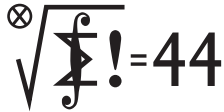
Spośród tych wszystkich odkryć jedynie 670 zaobserwowanych śladów asteroid zostało zidentyfikowanych i przypisanych do znanych wcześniej obiektów skatalogowanych w Centrum Planet Mniejszych Międzynarodowej Unii Astronomicznej, największej bazie danych obiektów Układu Słonecznego. Pozostałych 1031 niezidentyfikowanych śladów asteroid pochodzi prawdopodobnie z Pasa Głównego, znajdującego się pomiędzy Marsem a Jowiszem. Te niezidentyfikowane asteroidy mają niewielką jasność powierzchniową i są prawdopodobnie mniejsze niż asteroidy wykryte w badaniach naziemnych. Mogą one dostarczyć astronomom cennych wskazówek na temat warunków panujących we wczesnym okresie istnienia Układu Słonecznego, kiedy to formowały się planety. Wyniki projektu *Hubble Asteroid Hunter* zostały opublikowane w czerwcu 2022 roku w czasopiśmie *Astronomy & Astrophysics*. Autorzy zapowiadają kolejne publikacje analizujące właściwości fizyczne nowo odkrytych obiektów.

W wolnej chwili odwiedź Zooniverse ([www.zooniverse.org](http://www.zooniverse.org)) i znajdź interesujący Cię projekt. Nauka Cię potrzebuje.

Katarzyna MAŁEK\*



## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 841 ( $WT = 1,42$ ) i 842 ( $WT = 2,98$ ) z numeru 5/2022

Jerzy Cisło	Wrocław	43,97
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Stanisław Bednarek	Łódź	38,92
Paweł Najman	Kraków	38,88
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,64
Krzysztof Zygan	Lubin	36,17
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Mikołaj Pater	Opole	34,62
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74
Norbert Porwol	Essen	32,73

## Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 734 ( $WT = 2,63$ ), 735 ( $WT=1,2$ ), 736 ( $WT=2,0$ ), 737 ( $WT=2,3$ ), 738 ( $WT=2,71$ ), 739 ( $WT=2,11$ ) z numerów 3, 4, 5/2022

Tomasz Wietecha	Tarnów	16-44+7,66
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1-44+4,83
Piotr Adamczyk	Warszawa	2-44+3,75
Sławomir Buć	Mystków	43,68
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2-32,56
Jan Zambrzycki	Białystok	3-30,78
Paweł Perkowski	Ożarów	4-29,93

### Zadania z matematyki nr 851, 852

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**851.** Marcin urządza spotkanie towarzyskie. Zamierza zaprosić 50 gości z szerokiego grona osób, w którym niektórzy znają się wzajemnie, inni nie. Marcin uważa trójkę ludzi za atrakcyjną towarzysko, gdy jest w niej jakaś para znajomych, a także jakaś para niezajomych. Ma chęć, by ten „warunek atrakcyjności” spełniało co najmniej 75% spośród wszystkich  $\binom{50}{3}$  trójek gości. Jaka jest najmniejsza liczba par znajomych (w owej pięćdziesiątce), przy której to nietypowe życzenie daje się zrealizować?

**852.** Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$  oraz liczba rzeczywista  $a$ , przy czym  $a \neq n - 1$ . Niech  $z_1, \dots, z_n$  będą zespolonymi pierwiastkami wielomianu  $z^n - nz + a$ . Wykazać, że

$$\frac{1}{z_1 - 1} + \dots + \frac{1}{z_n - 1} = 0.$$

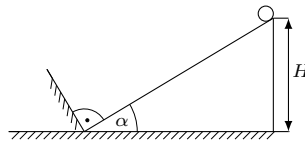
Zadanie 852 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

### Zadania z fizyki nr 748, 749

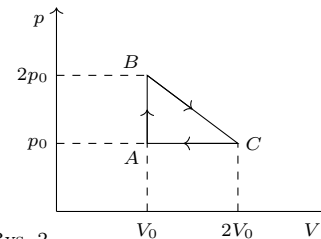
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**748.** Obręcz o promieniu  $r$  stacza się bez poślizgu z wysokości  $H$  ( $r \ll H$ ) po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$  i zderza się sprężystość z gładką ścianką, prostopadłą do powierzchni równi (rys. 1). Na jaką wysokość wzniesie się obręcz po zderzeniu, jeśli współczynnik tarcia poślizgowego między obręczą a równią wynosi  $\mu$ ?

**749.** Jednoatomowy gaz doskonały podlega przemianom A–B–C–A przedstawionym na rysunku 2. Oblicz sprawność cyklu.



Rys.1



Rys. 2

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy

przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Niebo w grudniu

Przez cały miesiąc Słońce wędruje bardzo nisko i przebywa krótko nad widnokregiem. Słońce osiągnie najbardziej na południe wysunięty punkt ekliptyki 21 grudnia i wtedy znacznie się astronomicznie zima. Rozpocznie się także półroczny okres wznoszenia się Słońca na niebie. Wcześniej, 13 grudnia, nastąpi najwcześniejszy zachód Słońca, 30 grudnia zaś – najpóźniejszy wschód. Od początku nowego roku dnia znacznie przybywać zarówno rano, jak i wieczorem.

Najlepiej widoczną planetą w grudniu jest **Mars**. Już 1 dnia miesiąca znajdzie się on najbliżej Ziemi podczas tegorocznego sezonu obserwacyjnego, a tydzień później przejdzie przez opozycję względem Słońca. Niestety nie jest to najmniejsza odległość, ale również nie jest to jeszcze ta największa. Tym razem Ziemia zbliży się do Marsa na nieco ponad 82 miliony kilometrów. W opozycji Czerwona Planeta osiągnie jasność  $-1,9^m$ , a jej tarcza przekroczy średnicę  $17''$ , czyli porównywalnie do średnicy

tarczy Saturna. Do końca miesiąca Mars przemierzy  $10^\circ$  na tle gwiazdozbioru Byka ze wschodu na zachód, mijając Hiady od północy. Pod koniec miesiąca Czerwona Planeta utworzy trójkąt równoramienny prostokątny z Aldebaranem i Plejadami o długości ramion  $9^\circ$ .

W momencie górowania po godzinie 23 Mars znajduje się na wysokości zdecydowanie przekraczającej  $60^\circ$ . Niestety tak samo, jak szybko jego jasność rosła przed opozycją, tak po niej szybko spada. Do końca roku blask Marsa osłabnie do  $-1,2^m$ , a jego tarcza skurczy się do  $15''$ .

Pełnia Księżyca przypada 8 grudnia i (analogicznie, jak to było miesiąc temu z Uranem) tej nocy dojdzie do dużego zbliżenia się tych ciał niebieskich na niebie, a nawet do zakrycia Marsa przez Srebrny Glob. Tym razem szczęście do możliwości obserwacji zjawiska ma Europa, a także prawie cała Kanada i północno-zachodnia część USA. W Polsce zakrycie zacznie się około godziny 6 rano, na jaśniejszym już niebie, i potrwa ponad 50 minut, kończąc się jeszcze przed ich zniknięciem za horyzontem.

Na wieczornym niebie wciąż widoczne są planety Saturn, Neptun i Jowisz oraz planetoida (4) Westa, jednak wyraźnie krócej niż w listopadzie. Saturn świeci na tle gwiazdozbioru Koziorożca i do końca roku przesunie się o prawie  $3^\circ$  na północny wschód, przechodząc  $100'$  na północ od Nashiry ( $\gamma$  Cap). W tym czasie jego jasność utrzyma się na poziomie  $+0,8^m$ , a średnica tarczy – na poziomie  $16''$ . Na początku nocy astronomicznej Saturn zbliży się już do horyzontu i przebywa na wysokości  $18^\circ$ .

Planetoida Westa przesunie się o  $11^\circ$  wzdłuż ekliptyki na północny wschód i 18 grudnia przetnie linię łączącą gwiazdy Skat ( $\delta$  Aqr) i  $\tau$  Aqr. Dwie godziny po zachodzie Słońca Westa znajduje się nadal ponad  $20^\circ$  nad południowo-zachodnim widnokrzem, a znika za nim kolejne 4 godziny później. Do jej dostrzeżenia potrzebny jest już nieco większy sprzęt optyczny, gdyż jej jasność spadnie do około  $8,5^m$ .

Planety Jowisz i Neptun przebywają w odległości około  $7^\circ$  od siebie. Dzieli je jeszcze granica gwiazdozbiórów: Neptun znajduje się w Wodniku, Jowisz zaś – w Rybach. Neptun jest o tyle łatwy do odszukania, że znajduje się wewnątrz równoległoboku jaśniejszych odcień gwiazd 6. i 7. wielkości, zbliżając się do najbardziej na wschód wysuniętej z nich. Jasność samej planety wynosi  $+7,9^m$ . Jowisz zacznie opuszczać okolice układu gwiazd przypominających miniaturowy Mały Wóz. Do końca miesiąca jasność planety spadnie do  $-2,4^m$ , a średnica jej tarczy zmniejszy się do  $40''$ . Jowisza i Neptuna najlepiej obserwować około godziny 18:30, gdy znajdują się niedaleko południka lokalnego, na wysokości przekraczającej  $30^\circ$ .

Przed pełnią Srebrny Glob także jest dominującym obiektem na nocnym niebie. I tak 1 grudnia przejdzie on w odległości mniej więcej  $4^\circ$  od Jowisza i Neptuna w fazie przekraczającej 60%. Cztery dni później, prezentując tarczę oświetloną w 95%, zbliży się do przebywającej na tle gwiazdozbioru Barana planety Uran, która jest tuż po opozycji. Ta planeta również zniknie na godzinę za księżycową tarczą, a owe zjawisko da się dostrzec z całej Europy i północno-zachodniej Azji. Polska znajdzie się tym razem po zachodniej stronie pasa

zakrycia, stąd nad naszym krajem dojdzie doń wieczorem. Księżyc zasłoni Urana około godziny 17:40. Jego bardzo duża faza nie ułatwi jednak obserwacji zjawiska. Jest to zadanie dla najwytrwalszych obserwatorów. Zachęcam jednak do podjęcia próby, gdyż następne takie widoczne z Polski zakrycie zdarzy się za miesiąc, a potem nastąpi przerwa aż do marca 2030 roku.

Po zakryciu Urana Srebrny Glob odwiedzi gwiazdozbiór Byka, 6 grudnia przechodząc  $3^\circ$  na południe od Plejad i dobę później  $8^\circ$  na północ od Aldebarana. Po zakryciu Marsa naturalny satelita Ziemi zawita do gwiazdozbioru Bliźniąt. Tam właśnie 11 grudnia rano przy fazie zmniejszonej do 92% zbliży się na  $3^\circ$  do Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji. Trzy dni później o tej samej porze Księżyc dotrze na odległość  $4^\circ$  do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Do tego czasu faza jego tarczy spadnie do 70%.

Ostatnia kwadra Księżyca przypada 16 grudnia przed południem naszego czasu, a potem Srebrny Glob podąży ku nowiu. W grudniu ekliptyka na porannym niebie nadal tworzy duży kąt z horyzontem, i Księżyc pozostanie widoczny bardzo długo. Rano 19 grudnia jego tarcza w fazie 23% wzejdzie w odległości  $6^\circ$  na godz. 8 względem Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Dobę później natomiast jego sierp zwięzi się do 14% i pokaże się niewiele ponad  $1^\circ$  od Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy Wagi. O świcie 21 grudnia tarcza Księżyca w fazie 7% pokaże się na wysokości  $7^\circ$ . Jakież  $4^\circ$  na lewo od niej znajdą się gwiazdy Graffias i Dschubba, czyli dwie najjaśniejsze gwiazdy charakterystycznego łuku gwiazd z północno-zachodniej części Skorpiona.

Księżyc przejdzie przez now 23 grudnia, a potem przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie w trzeciej dekadzie miesiąca pojawią się obie planety wewnętrzne. Merkury osiągnie maksymalną elongację wschodnią 21 grudnia, wynoszącą  $20^\circ$ . Ekliptyka pod koniec grudnia jest do wieczornego nieba nachylona całkiem sporo, stąd planeta 45 minut po zachodzie Słońca pozostanie na wysokości około  $5^\circ$ . Maksymalną wysokość nad widnokrzem planeta osiągnie 26 grudnia. Wtedy w odległości  $3^\circ$  na godzinie 5 Merkuremu towarzyszą dotrzyma powracająca na niebo wieczorne Wenus, która w styczniu bardzo szybko wzniesie się wysoko ponad horyzont, stając się ozdobą wieczornego nieba. Dobę wcześniej w odległości  $12^\circ$ , lecz na godz. 10 od Merkurego, pokaże się Księżyc w fazie 7%.

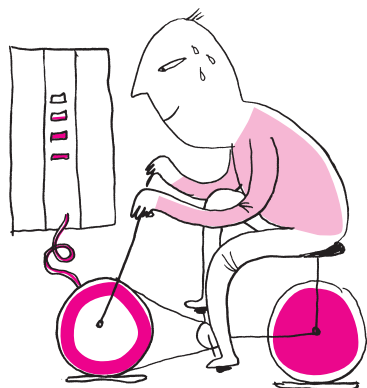
Jak zawsze podczas widoczności wieczornej Merkury z dnia na dzień traci na jasności i fazie, rośnie za to jego tarcza. Dwudziestego grudnia jasność planety wyniesie  $-0,5^m$ , średnica tarczy  $7''$ , faza zaś – 64%. Ostatniej doby grudnia odpowiednie wielkości zmienią się na:  $+1,1^m$ ,  $9''$  i 18%. Wenus w tym czasie pokaże tarczę o jasności  $-3,9^m$ , średnicy  $10''$  i fazie 96%. Wenus i Merkury miną się 29 grudnia w odległości  $1,5^\circ$ . Tego wieczora Merkurego należy szukać na godzinie 1:30 względem bardzo jasnej Wenus.

Do końca roku Księżyc w fazie 15% zbliży się na  $5^\circ$  do Saturna 26 grudnia, a 29 grudnia, tuż przed I kwadrą – na  $3^\circ$  do Jowisza.

*Ariel MAJCHER*

## Pochód stalowych kogutów

S E R W I F R O W N I A



Rosnące ceny energii będące wynikiem agresji Rosji na Ukrainę spędzają ludziom sen z powiek i podduszają gospodarki na całym świecie. Nie pozostają też bez wpływu na badania naukowe, zwłaszcza te wykorzystujące wielkie i energochłonne urządzenia. Międzynarodowe laboratorium naukowe CERN pod Genewą zużywa rocznie 1,3 TWh energii elektrycznej, czyli więcej niż 100 tysięcy polskich gospodarstw domowych. Nie powinno zatem dziwić, że naukowcy na całym świecie podejmują działania zmierzające do ograniczenia poboru energii przez aparaturę badawczą.

W 2022 roku Wielki Zderzacz Hadronów (Large Hadron Collider, LHC), flagowe urządzenie CERN-u, został wyłączony na zimę o dwa tygodnie wcześniej niż planowano, czyli 28 listopada. W kolejnym roku ta przerwa zostanie wydłużona o kolejne dwa tygodnie. Zimowa przerwa techniczna dla LHC nie jest niczym nowym, gdyż corocznie była ona planowana w okresie największego poboru energii elektrycznej, jednak władze laboratorium zdecydowały o jej przedłużeniu, aby zwiększyć moc dostępną dla obywateli Francji i Szwajcarii w okresie chłódów.

Niemieckie laboratorium DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) jest w gorszej sytuacji. Dzięki przeczernemu planowaniu i zakupom energii nawet z trzyletnim wyprzedzeniem DESY już w październiku miało zakontraktowane 80% prądu potrzebnego na 2023 rok, ale na zakup pozostałych 20% nie może sobie pozwolić ze względu na ograniczenia budżetowe. Jeżeli rząd Niemiec nie dofinansuje zakupów prądu dla laboratorium, program badawczy czekają poważne cięcia. Ma to znaczenie nie tylko dla fizyki cząstek elementarnych. To właśnie w laboratoriach rentgenowskich DESY firma BioNTech wykonała badania struktury wirusa SARS-CoV-2 i mechanizmu, dzięki któremu wirus ten wnika do ludzkich komórek.

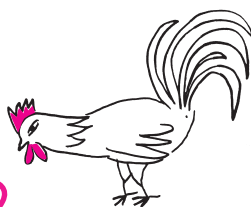
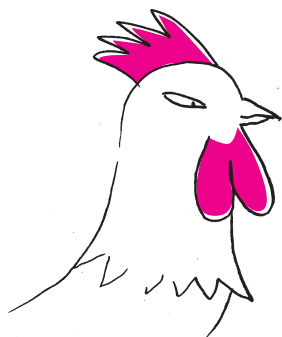
Nie tylko te największe laboratoria borykają się z cenami prądu. Praktycznie w każdym zakątku Europy można znaleźć instytucje badawcze, których budżety mają się nijak do obecnych kosztów. Czy to w synchrotonie ALBA pod Barceloną, czy to w laboratorium ELI Beamlines niedaleko Pragi, dyrekcje muszą stawić czoła niemożliwemu zadaniu utrzymania ciągłości badań bez ogłaszania bankructwa. We wrześniu Uniwersytet Jagielloński ogłosił redukcję godzin dydaktycznych realizowanych w budynkach uczelni, aby nie musieć np. ograniczać działania synchrotonu protonowego Solaris.

Jednymi z bardziej prądożernych urządzeń badawczych są superkomputery. W obliczu rosnących rachunków za energię naukowe centra obliczeniowe w wielu krajach podejmują decyzję o wyłączeniu części maszyn. Działające w ramach Uniwersytetu Warszawskiego Interdyscyplinarne Centrum Modelowania unieruchomiło do odwołania popularny wśród naukowców serwer Okeanos. Także czeskie narodowe centrum obliczeniowe IT4Innovations zdecydowało się na wyłączenie superkomputera Karolina. Pogrom mocy obliczeniowej dotyka też mniejsze farmy komputerów przy instytucjach badawczych, przetwarzające dane astronomiczne czy klimatyczne.

Ta wycieczka nie ma żadnego optymistycznego morału. Długi cień wojny kładzie się praktycznie na wszystkich obszarach życia społecznego i nauka nie jest tu żadnym wyjątkiem. Pozostaje tylko zastanawiać się, czy i z jakimi stratami przetrwa ona ten pochód stalowych kogutów.

Krzysztof TURZYŃSKI

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski







# Różności w kolorowej rzeczywistości

Bartłomiej BZDEGA

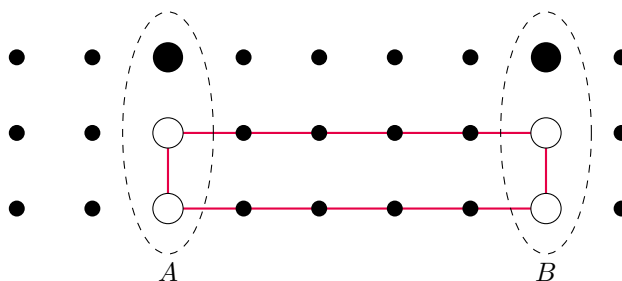
Ze względu na zbliżające się Święta Bożego Narodzenia kacik jest kolorowy, niczym lampki choinkowe. Na stole znajdujemy kolorowe zadania – o dowodzeniu istnienia jednokolorowych obiektów w wielokolorowych rzeczywistościach.

Załóżmy, że mamy dany zbiór  $A$ , którego każdy element pokolorowano jednym z  $k$  kolorów. Chcemy wykazać, że istnieje jakiś podzbiór  $C$  zbioru  $A$ , który ma wszystkie elementy tego samego koloru, a jednocześnie spełnia zadany dodatkowy warunek. Idea dowodu zwykle jest następująca. Wybieramy pewien zbiór  $B \subset A$  i przeprowadzamy dowód istnienia jednokolorowego  $C \subset B$ . Brzmi to dziwnie, ale czasem *zmniejszenie* zbioru powoduje *uproszczenie* rozwiązania.

Pokażę przykład wyżej opisanego postępowania. Należy on do matematycznego folkloru.

**Zadanie.** Jeśli każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czarno lub na biało, to pewne cztery punkty tego samego koloru są wierzchołkami prostokąta.

**Rozwiązanie.** Rozważmy prostokąt złożony z  $9 \times 3$  punktów płaszczyzny.



Każdy *słupek* (trzy punkty w jednym pionie) ma co najmniej dwa punkty w tym samym kolorze. Ponadto pewne dwa słupki są identyczne (niech to będą  $A$  i  $B$ ), gdyż trzy punkty można pokolorować na  $2^3 = 8$  sposobów. Słupek  $A$  ma dwa punkty tego samego koloru na tym samym poziomie, co słupek  $B$  – to daje poszukiwaną prostokąt.

Problemy podobnego typu matematycy nazywają *ramseyowskimi* – są bowiem podobne w sformułowaniu do słynnego twierdzenia Ramseya, które zapewne jeszcze się kiedyś pojawi w tym kaciku. (O twierdzeniu Ramseya pisaliśmy już w  $\Delta_{08}^3$  oraz  $\Delta_{17}^4$ ).

## Zadania

- Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na żółto lub na niebiesko. Udowodnić, że:
  - pewne dwa punkty tego samego koloru są końcami odcinka o długości 1;
  - pewne trzy punkty tego samego koloru są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego (*IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, etap I, zadanie 6*);
  - pewne trzy punkty tego samego koloru są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
- Rozwiązać podpunkt (a) z poprzedniego zadania dla trzech kolorów.
- Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z  $n$  kolorów. Udowodnić, że pewne cztery punkty tego samego koloru są wierzchołkami prostokąta.
- Każdy punkt przestrzeni pokolorowano jednym z  $n$  kolorów. Udowodnić, że pewien prostopadłościan ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.
- Każdy punkt okręgu pokolorowano na czerwono lub zielono. Udowodnić, że pewne trzy punkty tego samego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.
- Rozwiązać zadanie analogiczne do poprzedniego dla trzech kolorów (*LI Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 4*).
- Każdy punkt sfery pomalowano na czarno lub biało. Dowieść, że pewne trzy punkty jednakowego koloru są wierzchołkami trójkąta równobocznego (*IX Mała Olimpiada Matematyczna, etap II, grupa starsza, zadanie 3*).

**Wskazówki do zadań**

1. (a) Rozważmy wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1. (b, c) Znać od dwóch punktów jednakowego koloru, które wymuszają inny kolor kolejnych punktów. Kontynuując takie „wymuszanie”, dojdzie się do tezy: „wymuszanie” takie punkty  $A, B, C, D, E, F, G$ , że trójkąty  $ABC, BCD, EFG$  i  $FGA$  są równoboczne o boku 1 oraz  $|DE| = 1$ .

**Ciekawostka.** Problem znalezienia najmniejszej liczby kolorów, którymi można tak pokolorować płaszczyznę, by nie było odcinka długości 1 o końcach tego samego koloru, nosi nazwę *problemu Hadwiger-Nelsona*. Dziś wiadomo, że liczba ta, zwana *liczbą chromaticzną płaszczyzny*, należy do zbioru  $\{5, 6, 7\}$ .

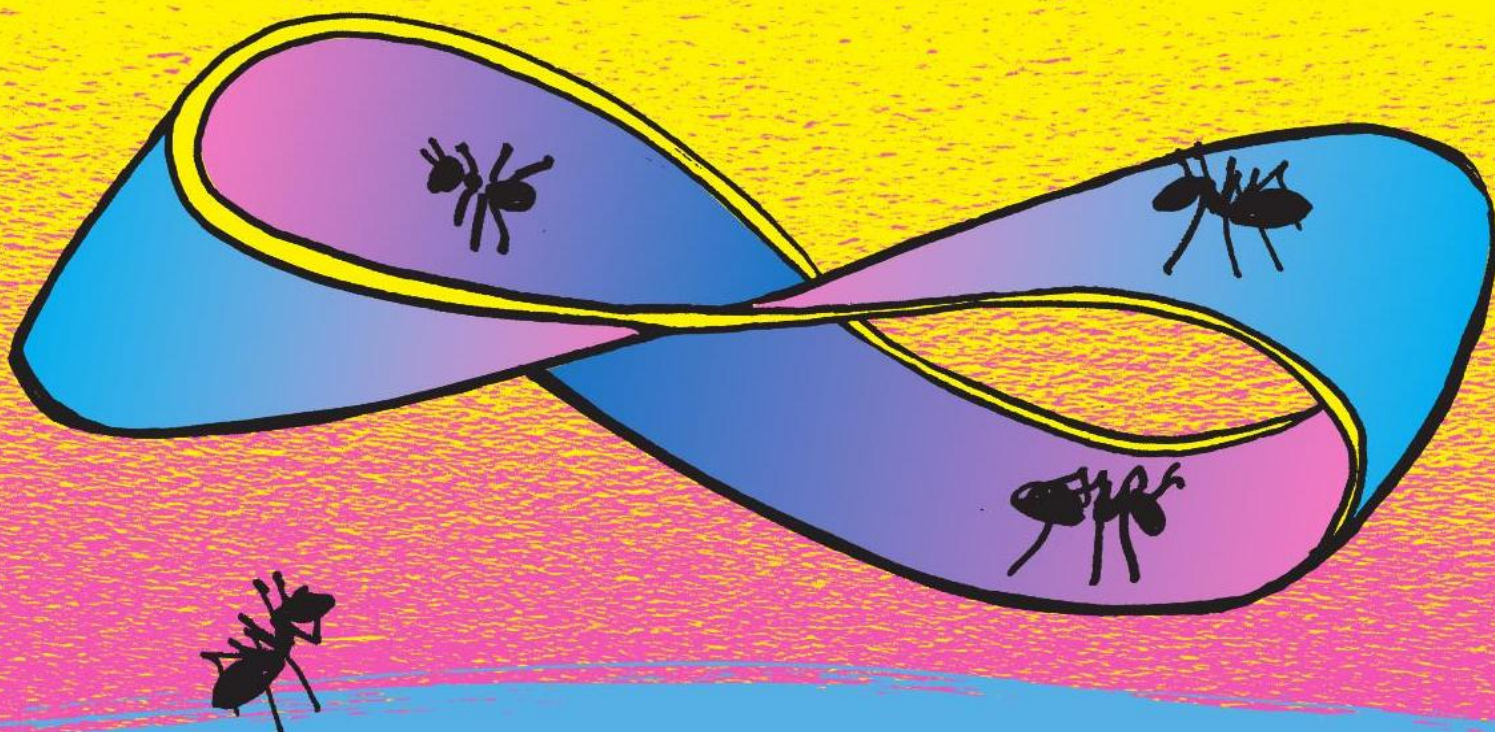
3. Postąpić tak jak w przykładowym zadaniu. Słupki muszą liczyć tyle zagwarantowane dwa punkty tego samego koloru, aby istnienie dwóch identycznych duża, aby istnienie dwóch identycznych było zapewnione.

4. Zbudować dyskretny prostopadłościan, kopując układy punktów z poprzedniego zadania. Liczba odpowiedzi licząc raz, na zadania odpowiednią liczbę razy, na równoległych płaszczyznach.

5. Każde trzy wierzchołki pięciokąta foremnego wyznaczają trójkąt równoramienny.

6. Wśród każdych pięciu wierzchołków trzykątów foremnego znajdują się trzy będnące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Teza zadania (a) nawet coś znaczenie mocniejszego wynika z następującego *twierdzenia van der Waerdena*: Dla każdej pary  $(k, d)$  liczba całkowitych dodatnich istnieje taka liczba  $n$ , że dla każdego kolorowania liczb  $1, 2, 3, \dots, n$  za pomocą  $k$  kolorów znajdziemy jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości  $d$ .

7. Rozważyć dwudziestokąt foremny wpisany w daną sferę. Uwaga – nie tylko ścian dwudziestokąta foremnego są trójkątami równobocznymi wyznaczonymi przez jego wierzchołki.



# 45. KONKURS UCZNIOWSKICH PRAC Z MATEMATYKI IM. PAWŁA DOMAŃSKIEGO

W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7-8.

Mówiąc krótko: należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!



**TERMIN ZGŁASZANIA PRAC:  
30 KWIETNIA 2023 ROKU**



Regulamin konkursu, przykładowe tematy prac, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji:

[www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs\\_prac\\_uczniowskich](http://www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich)



deltami@mimuw.edu.pl  
f Delta.czasopismo