

# deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s  $\pi=3,141592\dots$

NR 2 (585) 2023

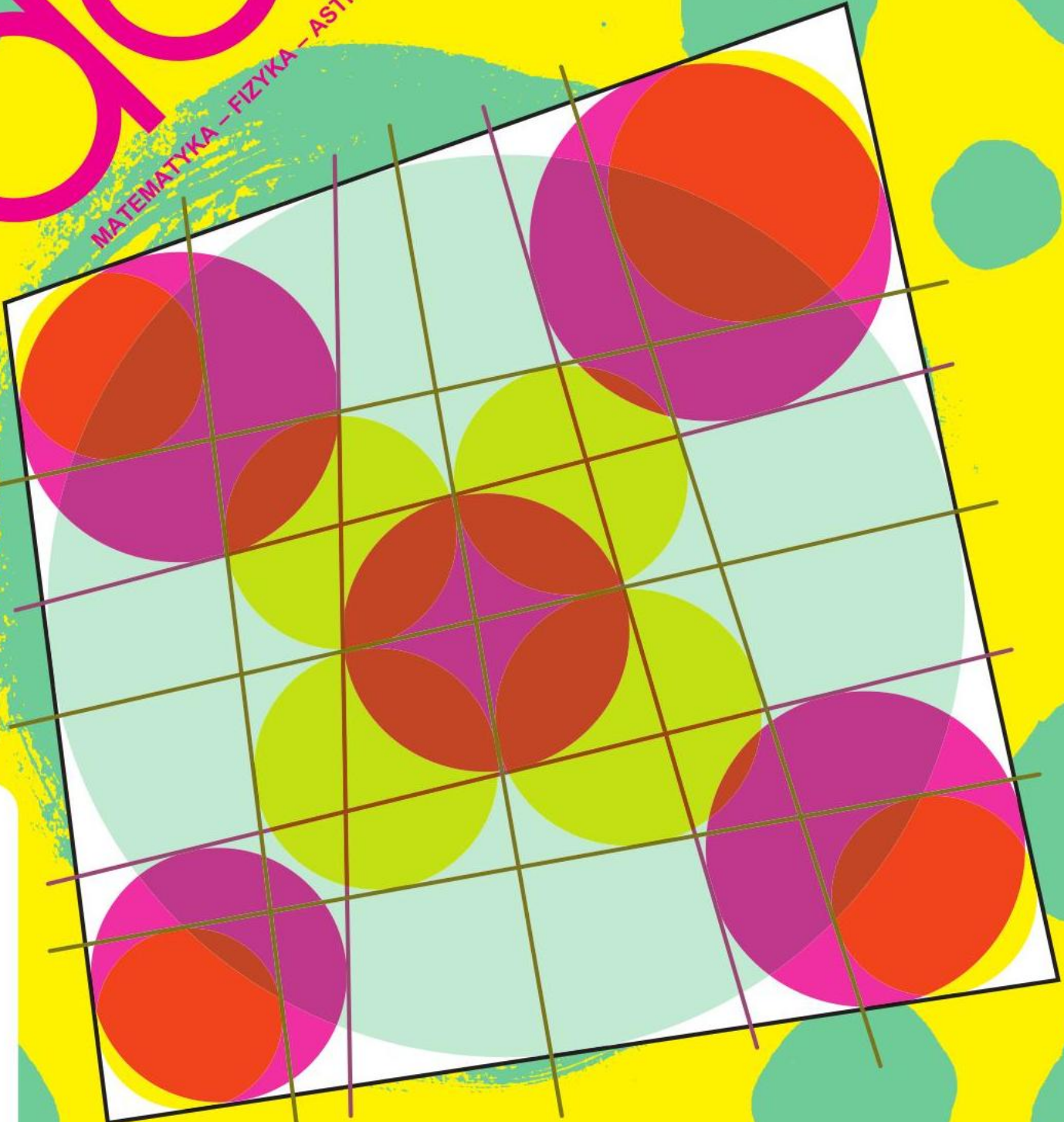
CENA 6 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

O okręgach  
wpisanych  
w czworokąty

str. 4






UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 2 (585)

Czarna skrzynka <i>Oskar Skibski</i>	str. 1
O okręgach wpisanych w czworokąty <i>Dominik Burek, Tomasz Cieśla</i>	str. 4
 Zadania	str. 7
Wielomiany, logika i geometria <i>Lorenzo Clemente</i>	str. 8
Kilka słów na temat twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu <i>Aleksander Pawlewicz</i>	str. 10
Modele Wszechświata dla początkujących Część 2: Upraszczamy, ile się da <i>Szymon Charzyński</i>	str. 12
 Kucharze plejstocenu <i>Magdalena Fikus</i>	str. 16
Klub 44	str. 17
Prosto z nieba: Galaxy Zoo, Cosmic Down – świat nauki na wyciągnięcie ręki!	str. 22
Niebo w lutym	str. 22
Aktualności Ciemność w tunelu	str. 24
 Twierdzenie OMGa <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:  
Z butelki Kleina  
i Salomon nie należy?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Marta Gródek, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

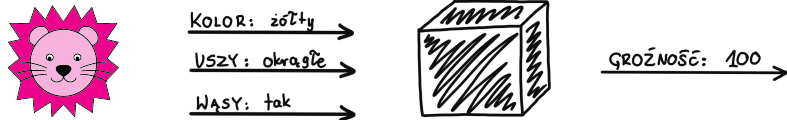
# Czarna skrzynka

Oskar SKIBSKI\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czarną skrzynką nazywa się teoretyczny model, w którym nie wiadomo nic o budowie wewnętrznej, a obserwować możemy jedynie „wejście” i „wyjście”.

Wyobraźmy sobie, że przechadzając się po lesie, znaleźliśmy czarną skrzynkę. Nie pochodzi ona jednak z samolotu (zresztą samolotowe „czarne skrzynki” są zwykle pomarańczowe). Po oględzinach okazuje się, że skrzynka potrafi robić jedną rzecz: kiedy pokaże się jej jakieś zwierzę (lub jego zdjęcie), to rozpoznaje jego kolor, kształt uszu i to, czy ma wąsy, i na podstawie tych atrybutów wyświetla informację, jak groźne jest to zwierzę.



Pokazujemy skrzynce zaprzyjaźnionego lwa. Lew jest żółty, ma okrągłe uszy, ma wąsy. Skrzynka pokazuje wynik 100 – zgadza się! Wszyscy wiemy, że lwy są groźne, a 100 to całkiem spora liczba. Pokazujemy zdjęcie świni. Świnia jest różowa, ma spiczaste uszy i nie ma wąsów. Wynik: 30 – też się zgadza (świnia nie jest zbyt groźna, chociaż łatwo mogłaby nas stratować).

Ale skąd ta skrzynka to wie? Jest to czarna skrzynka, zgodnie z zasadami nie możemy więc, niestety, zajrzeć do środka. Pewnie zaszyty jest tam jakiś algorytm uczenia maszynowego – na etapie produkcji pokazano mu wiele, wiele zwierząt i wprowadzono informację, jak bardzo są groźne, a on na tej podstawie wypracował w sobie przekonanie, że wie, po czym poznać groźność zwierzęcia. No i teraz, widząc żółte zwierzę z okrągłymi uszami i wąsami, swoją inteligencją (może trochę sztuczną, ale jednak) ocenia je na 100 punktów.

Nadzieję na to, że w pełni zrozumiemy działanie skrzynki, musimy niestety porzucić. Ale czy przynajmniej jest jakiś sposób, aby zrozumieć, dlaczego otrzymujemy taki a nie inny rezultat? Na przykład dowiedzieć się, która cecha lwa spowodowała tak wysoki wynik? Czy to przez kolor, czy uszy, czy wąsy?

Pierwszym pomysłem byłoby oberwanie lwu wąsów albo przemalowanie go na inne kolory, pokazanie skrzynce i porównanie wyników ze zwykłym lwem. Pomysł ten trzeba jednak uznać za ryzykowny. Ponadto opieralibyśmy się wówczas na sztucznych, a nie prawdziwych danych. Dla nich algorytm uczenia maszynowego w ogóle nie musi przecież dobrze działać. Moglibyśmy też spróbować kupić skrzynkę, która nie bierze konkretnej cechy pod uwagę. Ten pomysł jest kosztowny i dla nas niedostępny – jesteśmy przecież w lesie. Ograniczymy się zatem do pokazywania skrzynce różnych zwierząt i zapisywania wyników. Tylko czy da się z tych wyników wyciągnąć jakieś sensowne wnioski?

Na nasze szczęście w krzakach niedaleko czarnej skrzynki znajdujemy pracę autorstwa Scotta Lundberga i Su-In Lee z 2017 roku. Opisują oni w niej metodę SHAP, która mimo swojej nazwy, przypominającej raczej o obiedzie, szybko stała się standardowym narzędziem wykorzystywanym w analizie algorytmów uczenia maszynowego. Użyjemy jej także my.

Załóżmy, że pokazaliśmy maszynie 1000 różnych zwierząt. Średnia ocena groźności tych zwierząt wyszła 20. Okazuje się, że żółte zwierzęta miały średnią groźność 50, te z okrągłymi uszami 10, a te z wąsami 80. Czy to nam wystarczy? Coś nam to już mówi, ale cechy są często komplementarne lub substytucyjne, tzn. uzupełniają się albo są wymienne. Na przykład sama długość zębów nie mówi za wiele, jeżeli nie znamy długości całego zwierzęcia (trzycentymetrowe zęby u dwumetrowego kotowatego to nic ciekawego, jednak u zwierzęcia wielkości żaby zwróciłyby naszą uwagę).

Dlatego lepszym podejściem jest rozpatrzenie także grup cech. Żółte zwierzęta z okrągłymi uszami mają średnią groźność 40 (Kubuś Puchatek pewnie zaniża tu średnią). Żółte zwierzęta z wąsami – 90, a zwierzęta z wąsami i okrągłymi



Lundberg, Scott M., and Su-In Lee, „A unified approach to interpreting model predictions”, *Advances in Neural Information Processing Systems* 30 (2017).



## Rozwiązanie zadania M 1735.

Dla pewnej liczby całkowitej  $d$  mamy:

$$a_2 = a_1 + d, \dots, a_n = a_1 + (n-1)d.$$

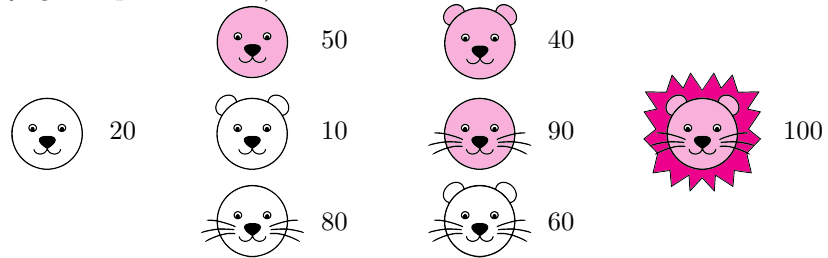
Dla  $1 \leq i \leq n-1$  mamy

$$i \mid a_i = a_1 + (i-1)d, \text{ zatem } i \mid a_1 - d.$$

Podobnie uzasadniamy  $n \nmid a_1 - d$ .

Gdyby  $n = ab$  dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych  $1 < a, b < n$ , to  $a \mid a_1 - d$  oraz  $b \mid a_1 - d$ , skąd  $n \mid a_1 - d$ , a to jest sprzeczność. Zatem  $n$  jest potęgą liczby pierwszej.

uszami – 60. Wyniki te podsumowuje następujący diagram (lwa musieliśmy trochę ogolić i przemalować):



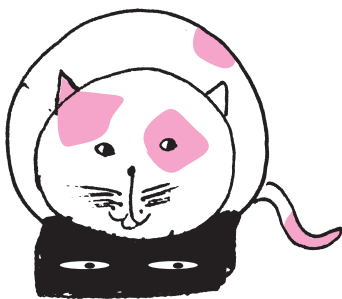
Gry koalicyjne pojawiały się już w *Delcie* w analizie sieci terrorystycznych,  $\Delta_{16}^{11}$ , siły partii politycznych,  $\Delta_{20}^{11}$ , i podziału lodów,  $\Delta_{22}^4$ .

W naszej sytuacji mamy:  
 $C = \{(k)olor, (u)szy, (w)ąsy\}$ ,  
 $X = \{(z)ółty, okrągłe, tak\}$ ,  
 $(r)óżowy, spiczaste, nie, \dots\}$ .

Czarna skrzynka  $B$  działa tak:  
 $B(\text{żółty, okrągłe, tak}) = 100$ ,  
 $B(\text{różowy, spiczaste, nie}) = 30, \dots$

Grę  $f_x$  definiujemy dla  $x = (\text{żółty, okrągłe, tak})$  jak na obrazku:  
 $f_x(\emptyset) = 20$ ,  $f_x(k) = 50$ ,  $f_x(u) = 10$ ,  
 $f_x(w) = 80$ ,  $f_x(ku) = 40$ ,  $f_x(kw) = 90$ ,  
 $f_x(uw) = 60$ ,  $f_x(kuw) = 100$ .

Powyżej i też dalej używamy skrótego zapisu zbiorów, np.  $abc$  reprezentuje zbiór  $\{a, b, c\}$  itp.



Te dziwne wagi w wartości Shapleya biorą się z następującej interpretacji: Wyobraźmy sobie, że dodajemy cechy jedna po drugiej i każdą z nich oceniamy, patrząc na jej wkład marginalny do obecnego już zbioru cech. Np. dla kolejności kolor-uszy-wąsy mamy następujące oceny:  $\phi_k = 50 - 20 = 30$ ,  $\phi_u = 40 - 50 = -10$  i  $\phi_w = 100 - 40 = 60$ . Patrzenie na jedną kolejność nie byłoby jednak sprawiedliwe, dlatego rozpatrujemy średnią po wszystkich kolejnościach i wychodzą nam takie właśnie wagi: jest  $|C|!$  różnych kolejności i dokładnie w  $|S|!(|C| - |S| - 1)!$  cechę  $c$  dodajemy do cech  $S$ .

Oczytany Czytelnik już wie, na co patrzy – jest to przecież (prawie) gra koalicyjna! Graczami są nasze trzy cechy: żółty kolor, okrągłe uszy i wąsy, a grę opisuje funkcja, nazywana *funkcją charakterystyczną*, która każdej niepustej grupie graczy przypisuje pewną wartość. No właśnie, niepustej, a pusta koalicja powinna mieć wartość zero. Dlatego aby uzyskać grę koalicyjną, musieliśmy od wszystkich wartości odjąć 20.

Do poznania istotności każdej z cech wystarczy, że użyjemy jednej z metod podziału w grach koalicyjnych. Dostaniemy wtedy informację, że na groźność lwa składa się w jakiejś części kolor, w jakiejś – uszy, a w jakiejś – wąsy. Metod jest wiele, ale jak przychodzi co do czego, stosowana jest jedna: wartość Shapleya. Tak jest też w metodzie SHAP, co tłumaczy jej nazwę.

Wprowadźmy trochę notacji do naszej leśnej historii. Mamy pewien zbiór  $m$  cech  $C$  i pewien zbiór  $m$ -krotek  $X$ . Naszym wejściem są właśnie owe  $m$ -krotki – kolejne ich pozycje odpowiadają kolejnym cechom, jak w przykładzie na marginesie. Nasza znaleziona czarna skrzynka to funkcja  $B$ , która dla każdej krotki zwraca liczbę rzeczywistą. Dla ustalonej krotki  $x \in X$  definiujemy grę  $f_x : 2^C \rightarrow \mathbb{R}$  następująco: dla każdej grupy cech  $S \subseteq C$  mamy:

$$f_x(S) = \text{avg}_{y \in X: x_S = y_S} B(y),$$

gdzie  $x_S$  to krotka  $x$  obcięta do elementów z  $S$ . Wartość  $f_x(S)$  to zatem średnia wartość zwracana przez czarną skrzynkę dla wszystkich możliwych krotek z  $X$ , które mają te same wartości dla cech z  $S$ . W szczególności  $f_x(C)$  to ocena groźności zwierzęcia stojącego za krotką  $x$ .

Naszym celem jest przedstawienie wyniku  $B(x)$  w następującej postaci:

$$(*) \quad B(x) = \phi_0 + \sum_{c \in C} \phi_c,$$

gdzie  $\phi_c$  to wpływ cechy  $c$ , a  $\phi_0$  to wartość bazowa równa po prostu  $f_x(\emptyset)$ , czyli średnia groźność wszystkich zwierząt.

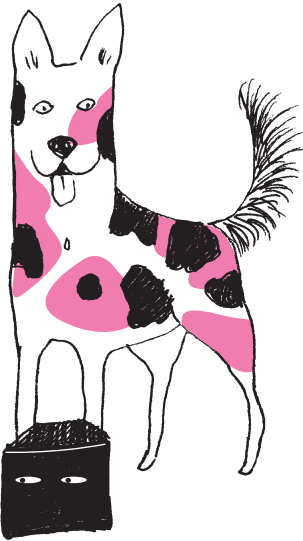
Naturalnym pomysłem przy ocenie danej cechy jest patrzenie na to, ile ona wnosi do wartości innych grup. Wkład marginalny cechy  $c$  do grupy  $S \subseteq C \setminus \{c\}$  to po prostu różnica między wartością grupy z daną cechą i bez niej:  $f_x(S \cup \{c\}) - f_x(S)$ . Wartość Shapleya to właśnie ważona suma wkładów marginalnych:

$$\phi_c(f_x) = \sum_{S \subseteq C \setminus \{c\}} \frac{|S|!(|C| - |S| - 1)!}{|C|!} (f_x(S \cup \{c\}) - f_x(S)).$$

W standardowych grach koalicyjnych suma ocen wszystkich graczy, czyli u nas cech, jest równa  $f_x(C)$ . Skoro  $f_x(\emptyset)$  niekoniecznie jest zerem, to tak zdefiniowane oceny nie zsumują się do  $f_x(C)$ , tylko do  $f_x(C) - f_x(\emptyset)$ , czyli tak, jak chcemy, biorąc pod uwagę wartość bazową.

A czemu mamy używać akurat wartości Shapleya do wyznaczenia  $\phi_c$ ? Powyższy wzór wygląda mało intuicyjnie. Jeżeli ma być dobrze, to inaczej się jednak nie da! Dowodzi tego szereg aksjomatycznych charakterystyki wartości Shapleya, czyli wyników, które pokazują, że jest to jedyna metoda mająca wiele pożądaných własności.

W naszym przypadku szukamy wartości  $\phi_c$ , które będą spełniać równanie (\*). Naturalna jest także symetria – mówiąca, że cechy, które są symetryczne



Przykładowo:  $u_{ku}(T) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } T = ku, kuw, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$

Naszą oryginalną grę możemy teraz przedstawić tak:

$$f_x = 20u_\emptyset + 30u_k - 10u_u + 60u_w - 20u_{kw} - 10u_{uw} + 30u_{kuw}.$$

Zdefiniujmy na przykład grę  $f' = 30u_k - 20u_{kw} + 30u_{kuw}$  powstałą przez wykasowanie z  $f_x$  gier  $u_S$  t.ż.  $k \notin S$ . Dostajemy następujące wkłady marginalne dla żółtego koloru:  $f'(k) - f'(\emptyset) = 30 - 0 = 30$ ,  $f'(ku) - f'(u) = 30 - 0 = 30$ ,  $f'(kw) - f'(w) = 10 - 0 = 10$ ,  $f'(kuw) - f'(uw) = 40 - 0 = 40$ . Łatwo sprawdzić, że w oryginalnej grze  $f_x$  wkłady marginalne są takie same (50 - 20, 40 - 10, 90 - 80 i 100 - 60).

Przykładowo, dla żółtego koloru mamy:

$$\phi_k = \frac{1}{3}(50 - 20) + \frac{1}{6}(40 - 10) + \frac{1}{6}(90 - 80) + \frac{1}{3}(100 - 60) = 30.$$

w grze  $f$ , powinny dostać taką samą ocenę (tzn. jeżeli  $f(S \cup \{c\}) = f(S \cup \{c'\})$  dla każdego  $S \subseteq C \setminus \{c, c'\}$ , to  $\phi_c = \phi_{c'}$ ). Autorzy metody SHAP powołali się także na monotoniczność zaproponowaną przez Peytona Younga, która mówi, że jeżeli w grze  $f$  cecha  $c$  wypada lepiej niż w  $f'$ , to powinna mieć w tej grze wyższą ocenę. To, gdzie cecha wypada lepiej, mierzymy, porównując wkłady marginalne koalicja po koalicji; jeżeli do wszystkich koalicji w  $f$  wnosi co najmniej tyle co w  $f'$ , a do którejś koalicji nawet więcej, to wtedy wypada lepiej. Formalnie, dla dowolnych gier  $f, f'$ :

$$(\forall S \subseteq C \setminus \{c\} f(S \cup \{c\}) - f(S) \geq f'(S \cup \{c\}) - f'(S)) \Rightarrow \phi_c(f) \geq \phi_c(f').$$

Okazuje się teraz, że wartość Shapleya jest jedyną metodą oceny, która zapewni nam te trzy własności. Dowód jest naprawdę elegancki, przedstawimy go zatem.

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli wartości  $(\phi_c)_{c \in C}$  spełniają równanie (\*), symetrię i monotoniczność, to muszą być to oceny zwracane przez wartość Shapleya.*

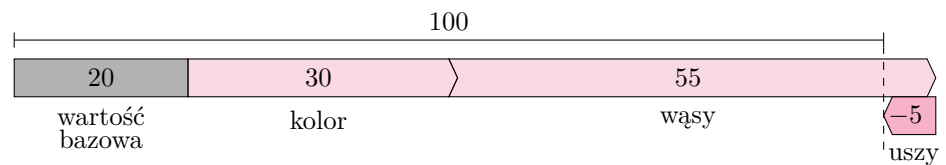
*Dowód.* Łatwo sprawdzić, że wartość Shapleya spełnia wszystkie trzy własności. Pokażemy, że jest tylko jedna metoda oceny, która je spełnia.

Dla dowolnej grupy  $S \subseteq C$  zdefiniujmy prostą grę  $u_S$  tak:  $u_S(T) = 1$ , jeżeli  $S \subseteq T$ ,  $u_S(T) = 0$ , wpp. Łatwo zauważyć, że cechy spoza  $S$  mają zerowe wkłady marginalne do dowolnej grupy  $T$ . Dowolną grę  $f$  możemy teraz jednoznacznie przedstawić jako  $f = \sum_{S \subseteq C} \alpha_S u_S$  dla pewnych stałych  $(\alpha_S)_{S \subseteq C}$ . *Złożonością gry,  $Z(f)$* , nazwiemy liczbę niezerowych stałych  $\alpha_S$ . Przeprowadźmy indukcję po złożoności gry.

Jeżeli  $Z(f) = 0$ , to w grze wszystkie wartości są zerowe i z symetrii oraz równania (\*) mamy  $\phi_c(f) = 0$  dla każdego  $c \in C$ . Załóżmy, że udało nam się udowodnić tezę dla gier o złożoności mniejszej niż  $k$  (dla pewnego  $k > 0$ ). Weźmy grę o złożoności  $k$  i niech  $S_1, \dots, S_k$  będą grupami z niezerowymi wagami. Rozpatrzmy najpierw cechę  $c$ , która nie należy do wszystkich grup  $S_1, \dots, S_k$ . W takiej sytuacji możemy, opierając się na grze  $f$  i jej wagach  $(\alpha_S)_{S \subseteq C}$ , zdefiniować grę  $f' = \sum_{S \subseteq C, c \in S} \alpha_S u_S$ . Gra  $f'$  powstała przez usunięcie z  $f$  gier  $u_S$  takich, do których cecha  $c$  ma zerowy wkład marginalny (bo  $c \notin S$ ), więc wkłady marginalne cechy  $c$  są w niej takie same jak w grze  $f$ . Z monotoniczności ocena  $c$  jest więc taka sama, czyli znana, bo  $f'$  ma przecież niższą złożoność.

Pozostaje nam zatem rozpatrzeć cechy, które należą do wszystkich koalicji  $S_1, \dots, S_k$ . One są jednak symetryczne w grze  $f$  i możemy wyznaczyć sumę ich ocen z równania (\*) oraz ocen cech, które nie pojawiają się we wszystkich zbiorach  $S_1, \dots, S_k$ . Oceny tych cech też są zatem jednoznacznie wyznaczone, co kończy dowód.  $\square$

Nie mamy już więc wątpliwości, że to wartości Shapleya powinniśmy użyć, aby odpowiedzieć na pytanie, czemu lew otrzymał aż 100 punktów. Stosując równanie do naszej gry, otrzymujemy następujące wyniki:



A więc to głównie przez wąsy lew wydaje się taki groźny! Czegoś nowego się dzisiaj dowiedzieliśmy.

A co, jak zastosujemy naszą metodę do innego zwierzęcia? Wyniki mogą być kompletnie inne. Może się na przykład okazać, że wąsy w zestawieniu z innymi cechami dodają obliczu zwierzęcia łagodności (np. przypominają nam o naszym pocziwym dziadku). Może też być tak, że kluczową rolę odegrają akurat uszy. Wszystko też zależy od konkretnych danych: gdybyśmy pokazali skrzynce inne zwierzęta, moglibyśmy dostać zupełnie inne wyniki. Niewątpliwie nasza czarna skrzynka skrywa jeszcze wiele tajemnic, ale udało nam się chociaż trochę zajrzeć do jej środka, i to tylko patrząc na nią z zewnątrz.

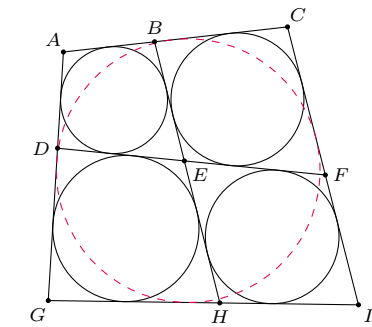
# O okręgach wpisanych w czworokąty

Dominik BUREK\*, Tomasz CIEŚLA\*\*

\*Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego  
 \*\* Uniwersytet Lipski

Francuski inżynier Henri Pitot w 1725 roku udowodnił, że w czworokącie opisanym na okręgu sumy długości przeciwległych boków są równe. Stwierdzenie odwrotne okazuje się również prawdziwe, jak pokazał szwajcarski matematyk Jakob Steiner w 1846 roku. Obecnie twierdzenie to stanowi jedno z głównych narzędzi przy dowodzeniu istnienia okręgu stycznego do danych czterech prostych lub ogólnie – przy badaniu problemów angażujących odcinki styczne do okręgu. Weźmy pod uwagę następujące zadanie:

**Zadanie 1.** Czworokąt  $ACIG$  podzielono dwoma odcinkami na cztery mniejsze czworokąty, tak jak przedstawiono na rysunku 1. Załóżmy, że w czworokąty  $ABED$ ,  $BCFE$ ,  $DEHG$ ,  $EFIH$  można wpisać okręgi. Udowodnić, że w czworokąt  $ACIG$  również można wpisać okrąg.



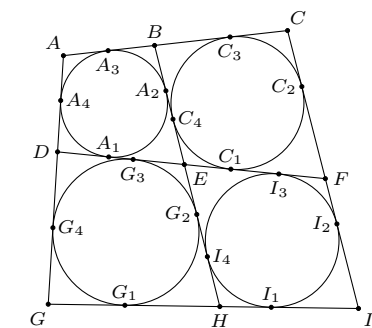
Rys. 1

*Dowód.* Oznaczmy punkty styczności okręgów, tak jak pokazano na rysunku 2.

Wystarczy pokazać, że  $AC + GI = AG + CI$ . Ze względu na równości  $AA_3 = AA_4$ ,  $CC_3 = CC_2$ ,  $GG_1 = GG_4$  oraz  $II_1 = II_2$  wystarczy uzasadnić, że  $A_3C_3 + G_1I_1 = A_4G_4 + C_2I_2$ . Jednakże  $A_3C_3 = A_1C_1$ ,  $G_1I_1 = G_3I_3$ ,  $A_4G_4 = A_2G_2$  oraz  $C_2I_2 = C_4I_4$ , skąd pozostaje do wykazania równość  $A_1C_1 + G_3I_3 = A_2G_2 + C_4I_4$ . Tę równość łatwo dostajemy na podstawie równości odcinków stycznych z punktu  $E$  do czterech okręgów. □

Rozważmy sytuację, w której czworokąt dzielimy na dziewięć mniejszych czworokątów, wykorzystując cztery odcinki. W podobny sposób rozwiążemy następujące, bardzo popularne zadanie:

**Zadanie 2.** Czworokąt  $ADPM$  podzielono czterema odcinkami na dziewięć mniejszych czworokątów, tak jak przedstawiono na rysunku 3. Załóżmy, że w czworokąty  $ABFE$ ,  $CDHG$ ,  $FGKJ$ ,  $IJNM$  oraz  $KLPO$  można wpisać okręgi. Udowodnić, że w czworokąt  $ADPM$  również można wpisać okrąg.



Rys. 2

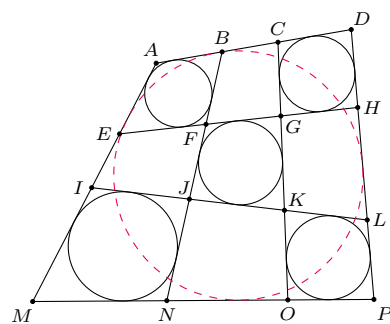
*Dowód.* Oznaczmy punkty styczności okręgów, tak jak pokazano na rysunku 4.

Wystarczy pokazać, że  $AD + MP = AM + DP$ . Ze względu na równości  $AA_3 = AA_4$ ,  $DD_3 = DD_2$ ,  $PP_2 = PP_1$  oraz  $MM_1 = MM_4$ , wystarczy uzasadnić, że  $A_3D_3 + M_1P_1 = A_4M_4 + P_2D_2$ . Jednakże  $A_3D_3 = A_1D_1$ ,  $M_1P_1 = M_3P_3$ ,  $A_4M_4 = A_2M_2$  oraz  $D_2P_2 = D_4P_4$ , skąd pozostaje do wykazania równość  $A_1D_1 + M_3P_3 = A_2M_2 + D_4P_4$ , którą łatwo dostajemy na podstawie kryterium wpisalności okręgu w czworokąt  $FGKJ$  oraz równości odcinków stycznych poprowadzonych z punktów  $F, G, K, J$  do narożnych okręgów. □

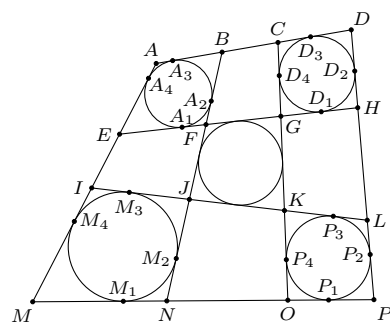
Powyższe rachunki pokazują też, że jeśli w duży czworokąt oraz w cztery narożne czworokąty można wpisać okręgi, to w środkowy też można. Zauważmy również, że w przypadku granicznym, gdy odcinek  $BN$  pokrywa się z odcinkiem  $CO$  oraz odcinek  $EH$  pokrywa się z odcinkiem  $IL$ , dostajemy zadanie 1.

Prosta indukcja daje następujące uogólnienie:

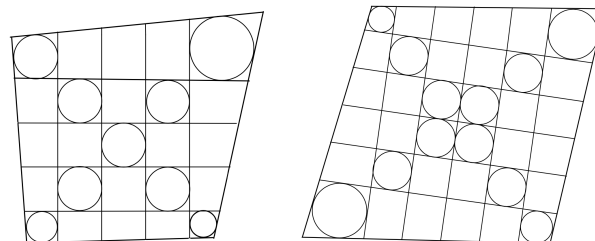
**Zadanie 3.** Czworokąt podzielono  $2n$  odcinkami na  $(n + 1)^2$  małych czworokątów. Załóżmy, że w czworokąty „leżące na diagonalach” można wpisać okrąg. Wówczas w wyjściowy czworokąt również można wpisać okrąg (rys. 5).



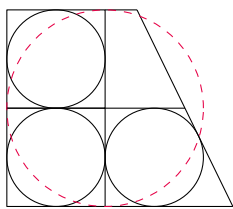
Rys. 3



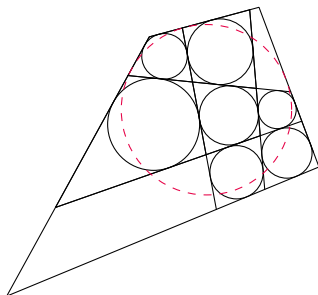
Rys. 4



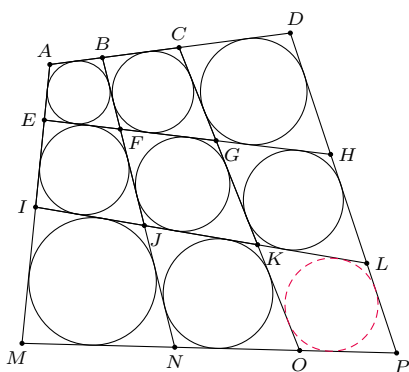
Rys. 5



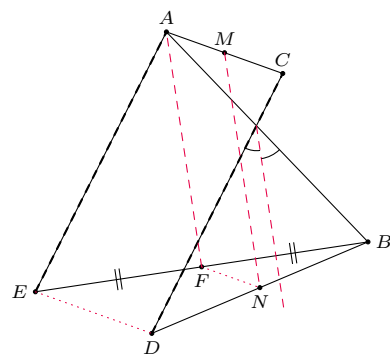
Rys. 6



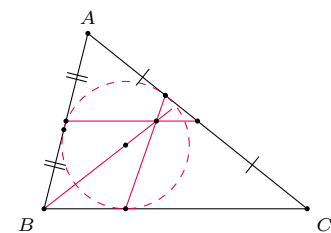
Rys. 7



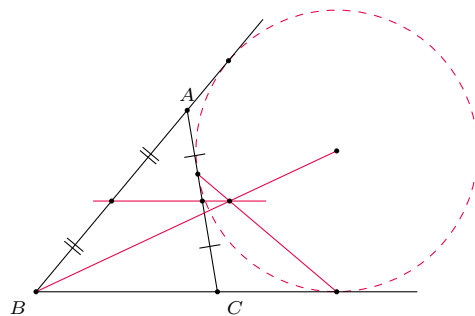
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Nasuwa się pytanie, czy można wpisać okrąg w duży czworokąt przy innych założeniach dotyczących wpisowości okręgów w mniejsze czworokąty. Szybko stwierdzamy, że w konfiguracji z czterema czworokątami założenie o opisowości trzech czworokątów na okręgu nie wystarcza, co pokazuje przykład przedstawiony na rysunku 6.

Rozważmy teraz konfigurację z dziewięcioma czworokątami. Widzieliśmy wyżej, że założenie o opisowości pięciu czworokątów „na diagonalach” wystarcza do opisowości na okręgu dużego czworokąta. Założenie, że w siedem czworokątów (wszystkie poza dwoma przy przeciwległych rogach) można wpisać okrąg, jest niewystarczające, co widać na rysunku 7.

W konfiguracji z dziewięcioma czworokątami założmy, że we wszystkie czworokąty poza jednym narożnym można wpisać okrąg. Okazuje się, że wówczas w ostatni czworokąt też można wpisać okrąg (a co za tym idzie, okrąg można wpisać także w duży czworokąt), co jest bardzo interesującym, ale zdaniem autorów tego artykułu trudnym problemem!

**Zadanie 4.** Czworokąt  $ADPM$  podzielono czterema odcinkami na dziewięć mniejszych czworokątów, tak jak przedstawiono na rysunku 8. Załóżmy, że w czworokąty  $ABFE$ ,  $BCGF$ ,  $CDHG$ ,  $EFJI$ ,  $FGKJ$ ,  $GHLK$ ,  $IJNM$  i  $JKON$  można wpisać okręgi. Udowodnić, że w czworokąt  $KLPO$  również można wpisać okrąg.

Nie jest nam znany dowód wykorzystujący wyłącznie rachunki na odcinkach stycznych, jak to miało miejsce w poprzednich zadaniach. Poniżej przedstawimy rozwiązanie korzystające z dość głębokich rezultatów geometrycznych. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że żaden z małych czworokątów nie jest rombem. Poniższe rozumowanie można rozszerzyć na ogólny przypadek, do czego Czytelnika zachęcamy.

Zacznijmy od sformułowania i udowodnienia kilku lematów.

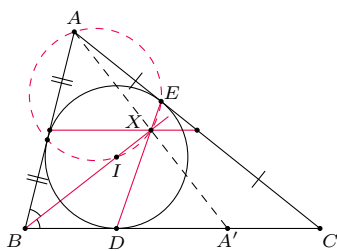
**Lemat 1.** W sytuacji z zadania 1 zachodzi równość  $BH = DF$ .

*Dowód.* Przy oznaczeniach z rozwiązania zadania 1 mamy  $BE = BA_2 + EA_2 = BA_3 + EA_1$  i  $BE = BC_4 + EC_4 = BC_3 + EC_1$ . Po dodaniu stronami otrzymujemy  $2BE = A_3C_3 + A_1C_1$ , skąd  $BE = A_1C_1$ . Analogicznie  $EH = G_3I_3$ . Zatem długość odcinka  $BH$  jest równa sumie długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu  $E$  do danych czterech okręgów. Analogicznie dowodzimy, że długość odcinka  $DF$  też jest tyle równa.  $\square$

**Lemat 2.** Dane są nierównoległe odcinki  $AB$  i  $CD$  tej samej długości. Wtedy prosta przechodząca przez środki odcinków  $AC$  i  $BD$  jest równoległa do dwusiecznej kąta między prostymi  $AB$  i  $CD$ .

*Dowód.* Oznaczmy środki odcinków  $AC$  i  $BD$  przez  $M$  i  $N$  (rys. 9). Przesuńmy punkt  $D$  o wektor  $\vec{CA}$ , otrzymując punkt  $E$ . Niech  $F$  będzie środkiem odcinka  $BE$ . Wówczas  $\vec{NF} = \frac{1}{2}\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{CA} = \vec{MA}$ . W takim razie odcinek  $MN$  jest równoległy do  $AF$ . Ponieważ  $AB = CD = AE$ , a  $F$  jest środkiem  $BE$ , więc  $AF$  jest dwusieczną kąta  $BAE$ . Z kolei ta dwusieczna jest równoległa do dwusiecznej kąta między  $AB$  i  $CD$ , gdyż  $AE \parallel CD$ .  $\square$

**Lemat 3.** W trójkącie  $ABC$  następujące cztery proste są współpękowe: linia środkowa równoległa do  $BC$ , dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $B$ , prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu wpisanego z bokami  $BC$  i  $CA$  oraz prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu dopisanego do boku  $CA$  z prostymi  $BC$  i  $CA$  (rys. 10).

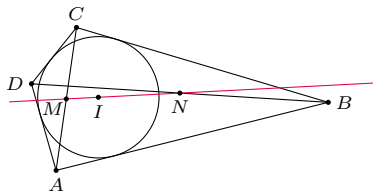


Rys. 11

*Dowód.* Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego z bokami  $BC$  i  $AC$  przez  $D$  i  $E$ , a środek okręgu wpisanego przez  $I$  (rys. 11). Oznaczmy punkt przecięcia prostych  $BI$  i  $DE$  przez  $X$ . Mamy:

$$\angle BXD = \angle CDE - \angle CBI = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle IAE,$$

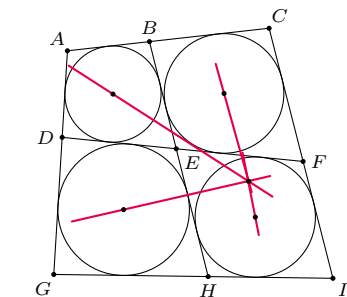
więc punkty  $A, E, X, I$  leżą na jednym okręgu. Wobec tego  $\angle AXI = \angle AEI = 90^\circ$ . Niech  $A'$  będzie odbiciem  $A$  względem  $BI$ . Wtedy  $A'$  leży na  $BC$ , a punkt  $X$  jest środkiem  $AA'$ . Wynika stąd, że  $X$  leży na linii środkowej trójkąta  $ABC$  równoległej do  $BC$ .



Rys. 12

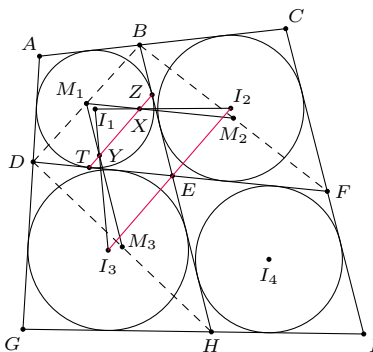
*Dowód* tego, że  $X$  leży na czwartej z wymienionych w twierdzeniu prostych, jest analogiczny i przeprowadzenie go pozostawiamy Czytelnikowi.  $\square$

Zanim przedstawimy kolejny lemat, wprowadzimy nowe pojęcie: w czworokącie, który nie jest równoległobokiem, prostą przechodzącą przez środki jego przekątnych nazwiemy *prostą Newtona*. Okazuje się, że jeśli w czworokąt można wpisać okrąg, to prosta Newtona tego czworokąta przechodzi przez środek okręgu wpisanego (rys. 12). Czytelnika zainteresowanego uzasadnieniem odsyłamy do 33. Kącika Początkującego Olimpijczyka z  $\Delta_{21}^9$ . Przyda się nam również twierdzenie Desarguesa, które mówi, że dwa trójkąty mają środek perspektywiczny (tzn. proste przechodzące przez pary ich wierzchołków przecinają się w jednym punkcie) wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną (tzn. punkty przecięcia par prostych zawierających ich boki są współliniowe). Więcej na temat tego twierdzenia można przeczytać w  $\Delta_{15}^4$ .



Rys. 13

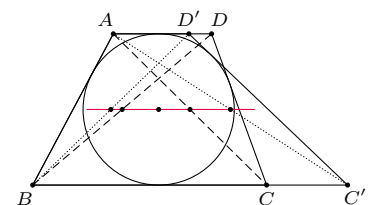
**Lemat 4.** Czworokąt  $ACIG$  podzielono odcinkami na czworokąty  $ABED$ ,  $BCFE$ ,  $DEHG$  i  $EFIH$ , tak jak przedstawiono na rysunku 13. Załóżmy, że te cztery czworokąty nie są rombami oraz można wpisać w nie okręgi. Wówczas proste Newtona tych czworokątów przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 14

*Dowód.* Oznaczmy środki okręgów wpisanych w czworokąty  $ABED$ ,  $BCFE$ ,  $DEHG$  i  $EFIH$  przez  $I_1, I_2, I_3$  i  $I_4$  oraz środki odcinków  $BD, BF, DH$  i  $FH$  przez  $M_1, M_2, M_3$  i  $M_4$  (rys. 14). Należy udowodnić, że proste  $I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3$  i  $I_4M_4$  przecinają się w jednym punkcie. Wystarczy pokazać, że  $I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3$  przecinają się w jednym punkcie – dowód, że  $I_4M_4$  przechodzi przez punkt wspólny  $I_2M_2$  i  $I_3M_3$ , jest w pełni analogiczny.

Z lematu 1 wynika, że  $BH = DF$ , a z lematu 2 dostajemy  $M_2M_3 \parallel I_2I_3$ . Niech  $X$  będzie punktem przecięcia prostych  $I_1I_2, M_1M_2$ , a  $Y$  przecięciem prostych  $I_1I_3, M_1M_3$ . Korzystając z twierdzenia Desarguesa dla trójkątów  $I_1I_2I_3$  i  $M_1M_2M_3$ , widzimy, że wystarczy udowodnić, że  $XY \parallel I_2I_3$ .



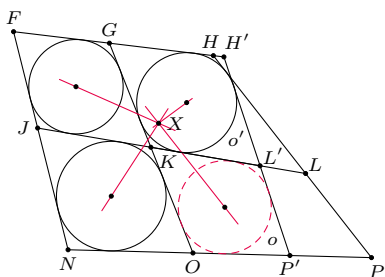
Rys. 15

Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w czworokąt  $ABED$  z bokami  $BE$  i  $DE$  przez  $Z$  i  $T$ . Prosta  $M_1M_2$  jest linią środkową równoległą do  $EF$  w trójkącie wyznaczonym przez proste  $BC, BE, EF$ , a prosta  $I_1I_2$  dwusieczną kąta między  $BC$  i  $EF$ . W takim razie na mocy lematu 3 punkt  $X$  leży na prostej  $ZT$ . Analogicznie dowodzimy, że punkt  $Y$  leży na  $ZT$ . Do zakończenia dowodu pozostaje odnotować, że  $ZT \parallel I_2I_3$ , gdyż obie te proste są prostopadłe do  $EI_1$ .  $\square$

**Lemat 5.** Jeśli czworokąty  $ABCD$  i  $ABC'D'$  są opisane na tym samym okręgu i mają tę samą prostą Newtona, to  $BC \parallel DA$  (rys. 15).

*Dowód.* W takiej sytuacji środki odcinków  $AC, AC', BD, BD'$  leżą na jednej prostej  $\ell$ , będącej wspólną prostą Newtona rozważanych czworokątów. Ta prosta jest linią środkową trójkątów  $ACC'$  i  $BDD'$ , więc  $CC' \parallel \ell \parallel DD'$ .  $\square$

Uzbrojeni w lematy 4 i 5 możemy przystąpić do rozwiązania zadania 4.



Rys. 16

**Rozwiązanie zadania 4.** Z lematu 4 wynika natychmiast, że proste Newtona ośmiu czworokątów  $ABFE, BCGF, CDHG, EFJI, FGKJ, GHLK, IJNM$  i  $JKON$  przecinają się w jednym punkcie, który oznaczmy przez  $X$  (rys. 16). W dalszej części będziemy wykorzystywać jedynie to, że proste Newtona czworokątów  $FGKJ, GHLK$  i  $JKON$  przecinają się w punkcie  $X$ .



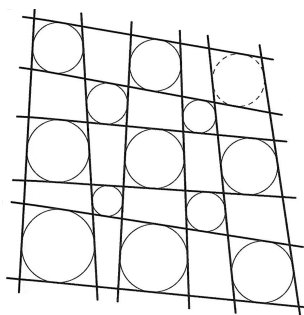
Ponieważ środkowy czworokąt nie jest rombem, więc ma parę nierównoległych boków. Bez straty ogólności rozumowania przyjmijmy, że  $FG \nparallel JK$ .

Oznaczmy przez  $o$  okrąg styczny do odcinka  $KO$  oraz półprostych  $KL^{\rightarrow}$  i  $OP^{\rightarrow}$ . Oznaczmy okrąg wpisany w czworokąt  $GHLK$  przez  $o'$ . Niech wspólna styczna zewnętrzna do  $o$  i  $o'$  różna od  $KO$  przecina proste  $GH$ ,  $KL$ ,  $OP$  w punktach  $H'$ ,  $L'$ ,  $P'$ . Z lematu 4 wynika, że proste Newtona czworokątów  $FGKJ$ ,  $GH'L'K$ ,  $JKON$ ,  $KL'P'O$  przecinają się w jednym punkcie. Jest nim punkt  $X$ .

Czworokąty  $GHLK$  i  $GH'L'K$  mają zatem tę samą prostą Newtona (mianowicie prostą przechodzącą przez  $X$  i środek okręgu  $o'$ ). Gdyby  $H'$  i  $L'$  były różne od  $H$  i  $L$ , to na mocy lematu 5 mielibyśmy  $GH \parallel KL$ , co przeczyłoby wcześniej poczynionemu założeniu. W takim razie  $H = H'$  i  $L = L'$ , więc okrąg  $o$  jest styczny do prostej  $HL$ , co kończy rozwiązanie.  $\square$

Na zakończenie przedstawimy uogólnienie zadania 4, które znaleźliśmy w książce Arseniya Akopyana „Geometria na rysunkach” (zadanie 5.4.7). (Uogólnia je w taki sam sposób, jak zadanie 2 uogólnia zadanie 1). Niestety nie znamy rozwiązania tego zadania i nie byliśmy w stanie zastosować przedstawionych wyżej metod w tym zadaniu. Czytelnika Lubiącego Wyzwania zachęcamy do zmierzenia się z tym trudnym problemem.

**Zadanie 5.** Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 17. Udowodnić, że jeśli okręgi zaznaczone ciągłą kreską są styczne do zaznaczonych prostych, to w prawy górny czworokąt można wpisać okrąg.



Rys. 17



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1735.** Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będzie ciągiem arytmetycznym liczb całkowitych takim, że  $i \mid a_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n-1$  oraz  $n \nmid a_n$ . Udowodnić, że  $n$  jest potęgą liczby pierwszej.

Rozwiązanie na str. 1

**M 1736.** Na planszy o wymiarach  $15 \times 15$  umieszczono 15 wież, które nie atakują się nawzajem. Następnie każda wieża została przesunięta ruchem skoczka. Udowodnić, że teraz pewne dwie wieże atakują się nawzajem.

Rozwiązanie na str. 14

**M 1737.** Dane są dwie równoległe proste  $a, b$  oddalone o  $h$  oraz nieskończony zbiór  $C$  wzajemnie rozłącznych okręgów jednostkowych znajdujących się pomiędzy  $a$  i  $b$ . Załóżmy, że każda prosta przecinająca obie proste równoległe przecina również co najmniej dwa okręgi ze zbioru  $C$ . Udowodnić, że  $h \geq 2 + \sqrt{3}$ .  
Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1065.** Ile wynosi stosunek wartości  $p_f$ , pędu fotonu o energii  $E = 1,17$  eV do wartości  $p_e$ , pędu elektronu o energii kinetycznej równej  $E$ ?

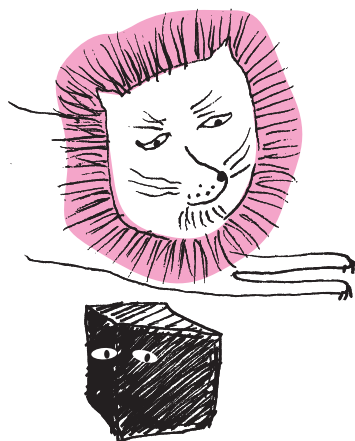
Masa spoczynkowa elektronu wynosi  $m_e = 511$  keV/ $c^2$ .

Rozwiązanie na str. 9

**F 1066.** Podczas skraplania pary wodnej uwalniana jest energia parowania. Różnica energii kropli ciekłej wody i energii takiej samej masy pary składa się z energii parowania i energii powierzchniowej – tj. energii potrzebnej do utworzenia powierzchni rozdziału faz między parą i ciekłą wodą kropli. Proces skraplania pary rozpoczyna się od powstawania kropelek cieczy w wyniku przypadkowych zderzeń cząsteczek pary. W zależności od rozmiarów takie kropelki dalej rosną lub odparowują, gdy są zbyt małe. Ile wynosi maksymalny promień kropli, która „spontanicznie” wyparuje (tzn. wyparuje bez pobierania ciepła z otoczenia)?

W temperaturze  $25^\circ\text{C}$  ciepło parowania wody  $L = 44 \cdot 10^3$  J/mol, napięcie powierzchniowe  $\sigma = 72$  J/ $\text{m}^2$ , gęstość ciekłej wody  $\rho = 10^3$  kg/ $\text{m}^3$ . Molowa masa wody  $\mu = 18$  g/mol.

Rozwiązanie na str. 8



\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wszyscy kochamy wielomiany. Celem tego artykułu jest wyjaśnienie, dlaczego. Jako przykład rozważmy rozwiązywalność ogólnego równania wielomianowego drugiego stopnia. W języku logiki zapisujemy to następującą formułą:

$$(1) \quad \varphi(a, b, c) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

gdzie „ $\exists x \in \mathbb{R}$ ” nazywamy *kwantyfikatorem egzystencjalnym* i czytamy: „istnieje liczba rzeczywista  $x$  taka, że...”. Jak dobrze wiadomo – to, czy formuła (1) jest spełniona, zależy od tego, jakie dokładnie są wartości liczb rzeczywistych  $a, b, c$ . Dla niektórych wyborów  $a, b, c$  powyższe równanie ma rozwiązanie w  $\mathbb{R}$ , a dla innych takiego rozwiązania nie ma.

Czy możemy dokładnie scharakteryzować *wszystkie* wartości  $a, b, c$ , dla których istnieje  $x \in \mathbb{R}$  będący rozwiązaniem? Rzeczywiście możemy, a co więcej – nasz cel można osiągnąć, pozostając w języku wielomianów:

$$(2) \quad \psi(a, b, c) \equiv (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)) \vee (a \neq 0 \wedge 0 \leq \underbrace{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}_{\Delta}).$$

Symbol „ $\vee$ ” czytamy jako „lub”, zaś „ $\wedge$ ” czytamy jako „i”. Tak więc (2) mówi, że albo  $a = 0$  i gdy  $b = 0$ , to również  $c = 0$  (nieciekawy przypadek brzegowy), albo  $a \neq 0$  i w tym przypadku musi być spełniony dobrze znany warunek nieujemności wyróżnika:  $\Delta \geq 0$ . Zauważamy, że nie znajdujemy w ten sposób wartości rozwiązania  $x$  jako funkcji zmiennych  $a, b, c$ , a tylko warunek istnienia takiego rozwiązania.

Należy poczynić dwie uwagi. Po pierwsze, formuły  $\varphi(a, b, c)$  i  $\psi(a, b, c)$  są *logicznie równoważne*. To znaczy, że formuła  $\forall a, b, c : \varphi(a, b, c) \leftrightarrow \psi(a, b, c)$  jest spełniona w  $\mathbb{R}$ . Symbol „ $\forall$ ” nazywamy *kwantyfikatorem uniwersalnym* i czytamy: „dla wszystkich”, natomiast „ $\leftrightarrow$ ” czytamy „wtedy i tylko wtedy, gdy”. Innymi słowy, dla każdego wyboru  $a, b, c \in \mathbb{R}$  albo  $\varphi(a, b, c)$  i  $\psi(a, b, c)$  są obie spełnione, albo obie nie są spełnione. Po drugie,  $\psi(a, b, c)$  nie mówi już o  $x$ , w przeciwieństwie do  $\varphi(a, b, c)$ . W gruncie rzeczy w  $\psi(a, b, c)$  nie ma w ogóle kwantyfikatorów „ $\exists$ ” ani „ $\forall$ ”. Mówimy, że  $\psi(a, b, c)$  *nie zawiera kwantyfikatorów* oraz że  $\psi$  jest uzyskiwane z  $\varphi$  w procesie *eliminacji kwantyfikatorów*. Musieliśmy jednak zapłacić pewną cenę za usunięcie kwantyfikatora, a mianowicie wprowadziliśmy relację porządku „ $\leq$ ” (wcześniej  $\varphi(a, b, c)$  używała tylko równości „ $=$ ”).

Możemy teraz się zastanawiać, czy to tylko przypadek. Okazuje się, że nie. Powyższy przykład jest w pewnym sensie szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

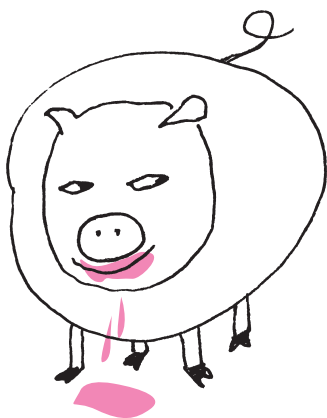
**Twierdzenie** (Tarski–Seidenberg). *Teoria liczb rzeczywistych pierwszego rzędu* ( $\mathbb{R}, +, 0, 1, \cdot, \leq$ ) *posiada efektywną eliminację kwantyfikatorów*.

Brzmi to dość skomplikowanie! Wyjaśnijmy bardziej szczegółowo. Twierdzenie mówi, że każda formułę zbudowaną przy użyciu kwantyfikatorów, spójników logicznych „i”, „lub” itp. oraz nierówności postaci  $p(x_1, \dots, x_n) \leq q(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $p, q$  są wielomianami zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ , można efektywnie przekształcić (tzn. istnieje pewien algorytm, który to robi) do równoważnej formuły *bez kwantyfikatorów*.

Piękno i moc tego twierdzenia możemy docenić, stosując je do ogólnego równania stopnia 6:

$$\exists x \in \mathbb{R} : a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0.$$

Również w tym przypadku twierdzenie gwarantuje, że istnieje formuła bez kwantyfikatorów  $\xi$  zawierająca  $a_0, \dots, a_6$ , która dokładnie charakteryzuje, czy istnieje rzeczywiste rozwiązanie. Warto zauważyć, że nie ma sensownego sposobu wyrażenia pierwiastków wielomianów stopnia 6 (a nawet 5) jako funkcji ich współczynników  $a_0, \dots, a_6$  (w przeciwieństwie do wielomianów stopni 1, 2, 3 i 4). Formuła  $\xi$  jest dość skomplikowana i zbyt obszerna, aby ją tu zamieścić. Ale istnieje. W rzeczy samej, dla wielomianów dowolnego stopnia  $n$  istnieje formuła bez kwantyfikatorów, wyrażająca istnienie  $x \in \mathbb{R}$  będącego rozwiązaniem. Powyższe rozważania możemy zakończyć następującym wnioskiem: rozwiązywalność wielomianowych (nie)równości ze współczynnikami



**Rozwiązanie zadania F 1066.**  
Różnica energii kropli wody o promieniu  $R$  i takiej samej masy pary wodnej wynosi:

$$\Delta E(R) = 4\pi R^2 \sigma - \frac{4\pi R^3 L\rho}{3\mu}.$$

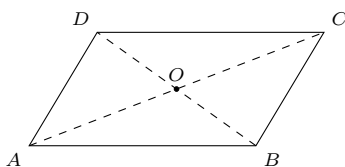
$\Delta E = 0$  dla  $R_1 = 0$  i  $R_2 = 3\sigma\mu/(L\rho)$ . Utworzeniu kropli o promieniu  $R_2$  nie towarzyszy zmiana energii. Zauważmy jednak, że odparowanie kropli oznacza zmniejszanie jej promienia, a pochodna  $\Delta E(R)$  względem  $R$  jest w  $R_2$  mniejsza od zera, czyli zmniejszanie promienia wymaga dostarczenia energii z otoczenia. Zmniejszaniu promienia kropli towarzyszy oddawanie energii otoczeniu dopiero dla  $R$  mniejszego od  $R_{cr}$ , odpowiadającego maksimum  $\Delta E(R)$ . Krople o  $R < R_{cr}$  odparowują, a te o  $R > R_{cr}$  rosną –  $R_{cr}$  nazywane jest promieniem krytycznym. Łatwo sprawdzić, że

$$R_{cr} = \frac{2\sigma\mu}{L\rho}.$$

Dla podanych wartości liczbowych (w temperaturze 25°C)  $R_{cr} \approx 5,9 \cdot 10^{-11}$  m – mniej niż wynoszą rozmiary cząsteczki wody (około  $1,5 \cdot 10^{-10}$  m). Powstanie takiej kropli nie jest więc możliwe. W tym miejscu Czytelnik Dociekliwy słusznie zauważy, że używaliśmy modelu „makroskopowego”, który nie opisuje tak małych kropli (sytuacji mikroskopowej). Poprawny opis tworzenia i rozpadu najmniejszych kropli polega na analizie zderzeń molekuł gazu (wody i powietrza). W wielu przypadkach opisany tu „klasyczny model nukleacji” nieleże opisuje procesy kondensacji i krystalizacji (tworzenie i wzrost kryształów z fazy ciekłej lub gazowej).

rzeczywistymi może być wyrażona wielomianami zawierającymi tylko te współczynniki. Jest to własność o fundamentalnym znaczeniu, ukazująca samoreferencyjny charakter liczb rzeczywistych.

Możemy zrobić jeszcze więcej. Twierdzenie Tarskiego–Seidenberga otwiera drzwi do *automatycznego dowodzenia twierdzeń geometrycznych*. Pokażemy to na przykładzie. Rozważmy czworokąt  $ABCD$ .



Jednym z twierdzeń elementarnej geometrii jest to, że

(†) „jeśli  $AC$  i  $BD$  (linie przerywane) przecinają się w połowie, to  $ABCD$  jest równoległobokiem”.

Udowodnimy to teraz za pomocą twierdzenia Tarskiego–Seidenberga. Naprawdę! Pomysł polega na przekształceniu powyższego stwierdzenia w formułę logiczną mówiącą o liczbach rzeczywistych. Idąc za przykładem Kartezjusza, reprezentujemy punkt  $P \in \{A, B, C, D, O\}$  przez jego współrzędne na płaszczyźnie  $(x_P, y_P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Zacznijmy od prostych obserwacji.

1. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, kwadrat odległości między dwoma punktami  $P, Q$  możemy wyrazić jako wielomian:

$$|PQ|^2 := (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2.$$

2. Możemy także wyrazić, że dwa odcinki  $PQ, RS$  są równoległe, przyrównując ich nachylenia:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R}.$$

Mnożąc obustronnie przez mianowniki, otrzymujemy równanie wielomianowe:

$$PQ \parallel RS := (y_Q - y_P)(x_S - x_R) = (y_S - y_R)(x_Q - x_P).$$

Przy założeniu, że te dwa odcinki są niezdegenerowane, tj.  $|PQ| > 0$  i  $|RS| > 0$ , powyższe równanie jest poprawne również w przypadkach brzegowych:

- 1) gdy  $PQ$  jest pionowe ( $x_P = x_Q$ ), to także  $RS$  musi być pionowe ( $x_R = x_S$ );
  - 2) gdy  $PQ$  jest poziome ( $y_P = y_Q$ ), to także  $RS$  musi być poziome ( $y_R = y_S$ ).
3. Dla uproszczenia oznaczeń będziemy mówić, że dwa odcinki  $PQ, RS$  są *kongruentne*, kiedy mają taką samą długość i są równoległe:

$$PQ \sim RS := |PQ| = |RS| \wedge PQ \parallel RS.$$

Łącząc razem kawałki, możemy wyrazić (†) jako następującą formułę logiki nad liczbami rzeczywistymi:

$$(3) \quad \underbrace{\forall x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, x_O, y_O \in \mathbb{R} : \varphi_{\text{nietrywialne}} \wedge AO \sim OC \wedge BO \sim OD}_{\text{przesłanka}} \rightarrow \underbrace{BC \sim AD \wedge AB \sim CD}_{\text{wniosek}}$$

gdzie warunek  $\varphi_{\text{nietrywialne}}$  to  $|AO|, |BO|, |AB|, |CD|, |AD|, |BC| > 0$ .

Strzałka „ $\rightarrow$ ” jest czytana „implikuje” i oznacza, że jeśli przesłanka jest prawdziwa, to również wniosek jest prawdziwy. Stało się coś zaskakującego. Stwierdzenie geometrii zostało przekształcone w formułę logiki.

A teraz dzieje się magia. Formuła (3) nie ma parametrów (w przeciwieństwie do (1)), więc korzystając z twierdzenia Tarskiego–Seidenberga, możemy znaleźć równoważną jej formułę  $\varphi$  bez żadnej zmiennej. Innymi słowy,  $\varphi$  może składać się tylko z boolowskich kombinacji logicznych formuł atomowych postaci  $m \leq n$ , gdzie  $m, n$  są konkretnymi liczbami naturalnymi, np.  $5 \leq 3$  i  $7 \leq 23$ . To, czy  $\varphi$  jest prawdziwe, można teraz ustalić, po prostu sprawdzając ją bezpośrednio. W omawianym przypadku okazuje się, że  $\varphi$  jest trywialnie prawdziwe, co jest dowodem, że (3) jest prawdziwym twierdzeniem liczb rzeczywistych. Z kolei to pokazuje, że (†) jest prawdziwym twierdzeniem geometrii, co było naszym początkowym celem.

Ten przykład ilustruje, że każde stwierdzenie geometrii, które można wyrazić jako kombinację (nie)równości wielomianowych, można na mocy twierdzenia Tarskiego–Seidenberga sprowadzić do układu nierówności między konkretnymi liczbami naturalnymi. To urzeczywistnienie starego marzenia o zredukowaniu geometrii do kwestii czysto rachunkowej, gdzie intuicja geometryczna nie jest w ogóle potrzebna. A podstawą tego osiągnięcia są wielomiany. Więc kto teraz nie kocha wielomianów?



#### Rozwiązanie zadania F 1065.

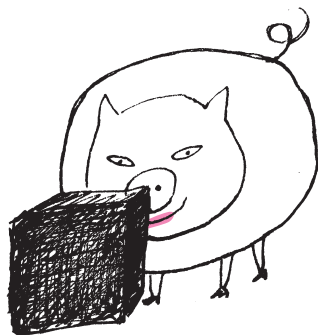
Pęd  $p_f$  fotonu o energii  $E$  wynosi  $p_f = E/c$  ( $c$  oznacza prędkość światła). Stosunek podanej w treści zadania energii kinetycznej elektronu do jego energii spoczynkowej ( $m_e c^2$ ) wynosi około  $2 \cdot 10^{-9}$ . Ze znakomitym przybliżeniem możemy więc opisywać energię kinetyczną elektronu w ramach mechaniki klasycznej:

$$E = \frac{p_e^2}{2m_e} \rightarrow p_e = \sqrt{2m_e E}.$$

Stosunek pędów wynosi więc:

$$\frac{p_f}{p_e} = \frac{E}{c\sqrt{2m_e E}} = \sqrt{\frac{E}{2m_e c^2}}.$$

Liczbowo:  $p_f/p_e \approx 1,07 \cdot 10^{-3}$ . Podana wartość energii  $E$  odpowiada przerwie energetycznej między pasmem walencyjnym i pasmem przewodnictwa w krzemie, a otrzymana wartość stosunku pędów wyjaśnia, dlaczego w półprzewodnikach optyczne wzbudzenie elektronu do pasma przewodnictwa odbywa się praktycznie bez zmiany jego pędu.



# Kilka słów na temat twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu

Aleksander PAWLEWICZ

Chciałbym opowiedzieć w tym artykule o pewnym wyniku zdolnego, młodego polskiego matematyka Józefa Marcinkiewicza. Piszę „młodego”, ponieważ zmarł w wieku zaledwie 30 lat, w roku 1940. Został zamordowany, jak bardzo wielu polskich oficerów, w Charkowie lub Katyniu. Historia życia J. Marcinkiewicza miała niewątpliwie smutne zakończenie, ale jego działalność matematyczna była bardzo intensywna, o czym świadczyć może na przykład fakt uzyskania tytułu doktora habilitowanego w wieku 27 lat. Działalność naukowa bohatera tego artykułu związana była z Uniwersytetem Stefana Batorego w Wilnie. Te i wiele innych ciekawych informacji o życiu i pracy J. Marcinkiewicza można znaleźć w obszernym artykule Lecha Maligrandy (zob. margines).

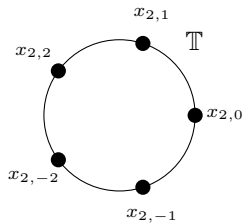
L. Maligranda,  
*Józef Marcinkiewicz (1910–1940)*  
 — on the centenary of his birth,  
 Banach Center Publications 95 (1),  
 Institute of Mathematics Polish Academy  
 of Science, Warszawa 2011.

Niewątpliwie najbardziej znanym twierdzeniem związanym z tym wybitnym polskim matematykiem jest twierdzenie Marcinkiewicza o interpolacji. Ścisłe sformułowanie wymaga, by najpierw powiedzieć coś o przestrzeniach funkcji  $L^p$  (indeksowanych parametrem  $p \geq 1$ ), ograniczmy się więc – na razie – do następującego uproszczenia. Jeśli mamy dany operator liniowy, którego argumentami i wartościami są funkcje, to z wiedzy o zachowaniu owego operatora w ograniczeniu do przestrzeni  $L^p$  i  $L^q$  wspomniane twierdzenie pozwala wnioskować o jego zachowaniu na  $L^r$  dla wszystkich pośrednich  $r$  (czyli  $p < r < q$ ) – stąd też określenie „interpolacja”. Do tego tematu jeszcze wrócimy.

## Twierdzenie o próbkowaniu

Przejdźmy teraz do sedna tego artykułu, czyli do twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu (więcej informacji można znaleźć we wspomnianym artykule L. Maligrandy, paragraf 4.5.3). Samo słowo „próbkowanie” odnosi się do wyciągania wniosków o całej populacji na podstawie ograniczonej próbki. W kontekście twierdzenia Marcinkiewicza rolę populacji odgrywa funkcja  $f$  określona na okręgu jednostkowym  $\mathbb{T}$ , a interesować będzie nas średnia z funkcji  $|f|^p$  dla pewnego  $p \geq 1$ . Można ją wyznaczyć jako wartość całki  $\int_{\mathbb{T}} |f|^p$  podzielonej przez  $2\pi$ , czyli długość okręgu jednostkowego – intuicja związana ze *średnią* powinna jednak Czytelnikowi wystarczyć, jeśli nie zna pojęcia całki.

Ustalmy liczbę naturalną  $n$  i powiedzmy, że znamy wartości funkcji  $f$  w  $2n + 1$  punktach  $x_{n,0}, x_{n,\pm 1}, \dots, x_{n,\pm n}$  równo rozmieszczonych na okręgu (jak na rysunku obok). Dysponując taką „próbką”, możemy mieć nadzieję, że średnią z  $|f|^p$  po całym okręgu będzie dobrze przybliżać średnia z liczb  $|f(x_{n,k})|^p$  dla  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ . Oczywiście tę drugą można wyliczyć jako wartość sumy  $\sum_k |f(x_{n,k})|^p$  podzielonej przez  $2n + 1$ . Na potrzeby dalszej analizy wprowadźmy oznaczenia na obie średnie:



Próbka punktów na okręgu  $\mathbb{T}$  w przypadku  $n = 2$

$$\|f\|_{L^p} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f|^p \right)^{1/p}, \quad \|f\|_{\ell_n^p} = \left( \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |f(x_{n,k})|^p \right)^{1/p}.$$

Podniesienie jednej i drugiej średniej do potęgi  $1/p$  pozwala wykorzystać te formuły do określenia odległości między dwiema funkcjami  $f, g$  za pomocą wzoru  $\|f - g\|_{L^p}$  (lub też  $\|f - g\|_{\ell_n^p}$ ). Dzięki temu bowiem odległość między funkcją  $2 \cdot f(x)$  a funkcją zerową jest dwa razy większa niż odległość między  $f(x)$  i zerem, a nie  $2^p$  razy większa.

Wróćmy do samego twierdzenia. Byłoby naiwnością oczekiwać, że wielkości  $\|f\|_{L^p}$  i  $\|f\|_{\ell_n^p}$  są porównywalne – wszak średnia z  $|f|^p$  może być duża nawet wtedy, gdy funkcja  $f$  zeruje się w  $2n + 1$  punktach  $x_{n,k}$ . Dlatego ograniczymy się do wielomianów trygonometrycznych stopnia  $n$ , czyli funkcji postaci

$$f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k, \quad z \in \mathbb{T},$$

dla pewnych współczynników  $a_k$ . We wzorze tym utożsamiliśmy punkt  $(a, b)$  na okręgu  $\mathbb{T}$  z liczbą zespoloną  $a + bi$ ; wielomiany trygonometryczne można też jednak opisać bez liczb zespolonych (zob. margines).

Alternatywnie, punkt  $(\cos t, \sin t)$  na okręgu  $\mathbb{T}$  można utożsamić z liczbą  $t \in [0, 2\pi]$ . Wyrażone poprzez zmienną  $t$  wielomiany trygonometryczne mają postać:

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n d_k \cos(kt) + e_k \sin(kt).$$

Odnajmy, że dla  $p = 1$  pierwsza nierówność w  $(\star)$  pozostaje prawdziwa, ale druga nie, tzn. nie istnieje stała  $C_1$  spełniająca odpowiednią nierówność dla dowolnego  $f$ .

W oryginalnym sformułowaniu twierdzenie Marcinkiewicza mówi, że dla takiej funkcji oraz  $p > 1$  zachodzą nierówności:

$$(\star) \quad \frac{1}{3} \|f\|_{\ell_n^p} \leq \|f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{\ell_n^p},$$

przy czym stała  $C_p$  może zależeć od  $p$ , ale nie od  $f$ .

### Szerszy punkt widzenia – przestrzenie Orlicza

Na pierwszy rzut oka nie widać związków między twierdzeniami Marcinkiewicza o próbkowaniu i interpolacji. Jednak takie związki istnieją. Aby to dostrzec, potrzebujemy spojrzeć na powyższe rezultaty w szerszym kontekście.

Jednym z trzech głównych kierunków rozwoju teorii matematycznych, obok rozwiązywania aktualnych problemów i szukania analogii między istniejącymi rezultatami, jest uogólnianie dotychczasowych wyników na bardziej abstrakcyjne struktury. Przykładem tego trzeciego nurtu są przestrzenie Orlicza. Ich nazwa pochodzi od nazwiska polskiego matematyka Władysława Orlicza (1903–1990), wykształconego we Lwowie, a po wojnie działającego głównie w Poznaniu.

Jednym z najprostszych przykładów przestrzeni funkcji są przestrzenie Lebesgue’a  $L^p(\mathbb{T})$ . Dla zadanego  $p \geq 1$  przestrzeń  $L^p(\mathbb{T})$  to zbiór tych wszystkich funkcji  $f$  określonych na  $\mathbb{T}$ , dla których zdefiniowana wcześniej wielkość  $\|f\|_{L^p}$  jest skończona. Jak już wspomnieliśmy, wielkość tę można wykorzystać do opisu geometrii przestrzeni  $L^p$ , gdyż posiada ona kilka ważnych własności składających się na definicję *normy* (zob. margines).

Nieujemną funkcję  $f \mapsto \|f\|$  nazywamy normą, jeśli dla dowolnych  $f, g$  oraz  $a \in \mathbb{R}$  spełnia warunki:

$$(n1) \quad \|f\| = 0 \iff f = 0,$$

$$(n2) \quad \|a \cdot f\| = |a| \cdot \|f\|,$$

$$(n3) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Więcej o normach można przeczytać w artykule Jarosława Górnickiego z  $\Delta_{21}^5$  oraz w tekstach:  $3 \leq \pi \leq 4$  i *Podejrzane twierdzenie o ciągach z  $\Delta_{21}^6$* .

Jak można uogólnić powyższą definicję? Pewnie na wiele sposobów, ale jednym z ważnych uogólnień są wspomniane już przestrzenie Orlicza. Idea polega na zastąpieniu występującej w definicji  $L^p(\mathbb{T})$  funkcji (rosnącej, wypukłej)  $t \mapsto t^p$  przez inną (rosnącą, wypukłą) funkcję  $\varphi$ , którą będziemy nazywać *N-funkcją*. Jako zbiór przestrzeni Orlicza  $L^\varphi(\mathbb{T})$  będzie zawierać wszystkie funkcje  $f$ , dla których średnia z  $\varphi(|f|)$  jest skończona, czyli  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f|) < \infty$ .

By nadać  $L^\varphi(\mathbb{T})$  jakąś geometrię, powinniśmy jeszcze zdefiniować odpowiednią normę. W tym przypadku nie możemy jednak powtórzyć zabiegu podnoszenia do potęgi  $1/p$  (bo czym miałyby być potęga  $1/\varphi$ ?). Zamiast tego zwróćmy uwagę, że w przypadku  $L^p$  zachodzi równoważność: norma  $\|f\|_{L^p}$  nie przekracza 1 wtedy i tylko wtedy, gdy średnia z  $|f|^p$  nie przekracza 1. Analogiczną równoważność możemy zapostulować dla  $L^\varphi$ :

$$\|f\|_{L^\varphi} \leq 1 \iff \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f|) \leq 1.$$

Z warunku (n2) na marginesie wynika, że istnieje najwyżej jedna norma  $\|\cdot\|_{L^\varphi}$  o powyższej własności (zwykle się ją nazywa normą Luxemburga). Da się ją też zapisać jawnym wzorem:

$$\|f\|_{L^\varphi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f|/\lambda) \leq 1 \right\}.$$

Na potrzeby dalszej części będziemy zakładać, że  $\varphi$  jest funkcją wypukłą i rosnącą, a także  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$  oraz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$ , a więc  $\varphi$  jest tak zwaną *N-funkcją*. Przyjmijmy ponadto, że zachodzi warunek  $\Delta_2$ : istnieje stała  $D > 0$  taka, że  $\varphi(2t) \leq D\varphi(t)$  dla wszystkich  $t > 0$ .

### Próbkowanie w przestrzeni Orlicza a interpolacja

Wiele dotychczasowych rezultatów dotyczących przestrzeni  $L^p$  zostało bądź też zostanie uogólnionych na przestrzenie Orlicza  $L^\varphi$ . Także autor tego artykułu wraz z Michałem Wojciechowskim starali się uogólnić twierdzenie Marcinkiewicza o próbkowaniu na przypadek przestrzeni Orlicza, czyli zastąpić pojawiającą się w klasycznym sformułowaniu tego twierdzenia funkcję  $t \mapsto t^p$  przez *N-funkcję*. A dokładniej, odpowiedzieć na pytanie:

Dla jakich *N-funkcji* zachodzą nierówności  $(\star)$  z twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu?

Uwaga dla ekspertów: warunek  $\Delta_2$  gwarantuje, że zdefiniowana wcześniej klasa  $L^\varphi$  jest przestrzenią liniową. Warunek  $\Delta_2$  nie jest spełniony np. dla *N-funkcji*  $\varphi(t) = e^t - t - 1$ ; w tym przypadku nietrudno znaleźć funkcję  $f$ , dla której średnia z  $\varphi(|f|)$  jest skończona, ale średnia z  $\varphi(|2f|)$  już nie.

Czytelnika zainteresowanego wyczerpującą odpowiedzią zachęcam do przeczytania naszej wspólnej pracy (szczegóły na marginesie), a tutaj przytoczę dwa – być może zaskakujące – wyniki na ten temat. W analogii do przypadku  $L^p$ , wprowadźmy normę Orlicza opartą na próbkę  $2n + 1$  punktów:

$$\|f\|_{\ell_n^\varphi} \leq 1 \iff \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \varphi(|f(x_{n,k})|) \leq 1.$$

Prawdziwe są wówczas następujące twierdzenia:

**Twierdzenie 1** (pierwsza nierówność). *Dla dowolnej  $N$ -funkcji  $\varphi$  spełniającej warunek  $\Delta_2$  oraz dowolnego wielomianu trygonometrycznego  $f$  stopnia  $n$  zachodzi nierówność  $\frac{1}{3}\|f\|_{\ell_n^\varphi} \leq \|f\|_{L^\varphi}$ .*

**Twierdzenie 2** (druga nierówność). *Dla dowolnej  $N$ -funkcji  $\varphi$  spełniającej warunek  $\Delta_2$  następujące warunki są równoważne:*

1. *Istnieje stała  $C_\varphi > 0$  taka, że dla dowolnego  $n$  oraz dowolnego wielomianu trygonometrycznego  $f$  stopnia  $n$  zachodzi nierówność  $\|f\|_{L^\varphi} \leq C_\varphi \|f\|_{\ell_n^\varphi}$ .*
2. *Istnieje  $p > 1$  takie, że każdy operator liniowy  $T$  (którego argumentami i wartościami są funkcje na  $\mathbb{T}$ ), który jest słabego typu  $(1, 1)$  i  $(p, p)$ , jest również ciągły jako operator  $T: L^\varphi(\mathbb{T}) \rightarrow L^\varphi(\mathbb{T})$ .*

Z konieczności, jako objaśnienie założenia „słabego typu” niech wystarczy nam, że  $T$  zachowuje się „przyzwoicie” na przestrzeniach  $L^1$  i  $L^p$ . Istotne jest jednak to, że warunek 2 to dokładnie sformułowanie twierdzenia Marcinkiewicza o interpolacji, w którym przestrzeń  $L^\varphi$  zajmuje miejsce „pośredniej” przestrzeni  $L^r$  ( $1 < r < p$ ). Okazuje się więc, że w świecie przestrzeni Orlicza twierdzenie o próbkowaniu jest niejako *równoważne* twierdzeniu o interpolacji!



## Modele Wszechświata dla początkujących

### Część 2: Upraszczamy, ile się da

Szymon CHARZYŃSKI\*

\*Katedra Metod Matematycznych Fizyki,  
 Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

W Internecie krąży wiele sentencji, których autorstwo (nie zawsze słusznie) przypisuje się Albertowi Einsteinowi. Jedną z nich jest: “Make everything as simple as possible, but not simpler”. (Wszystko należy upraszczać, jak tylko się da, ale nie bardziej). Jest to prawdopodobnie *uproszczona* wersja zdania z wykładu Einsteina z 1933 roku, które brzmi: “It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience”.

W poprzednim numerze *Delt*y analizowaliśmy ruch mrówek po rozciągającej się nici. Taka jednorodnie rozciągająca się na całej długości nić jest pomocna jako analogia naszego rozszerzającego się Wszechświata. Z obserwacji wiemy, że galaktyki oddalają się od nas, przy czym prędkość oddalania jest proporcjonalna do odległości danej galaktyki. Tę proporcjonalność nazywamy *prawem Hubble’a–Lemaître’a*. Jeżeli na nici postawimy kropki, to z punktu widzenia jednej wybranej kropki wszystkie inne będą się od niej oddalały zgodnie z prawem Hubble’a–Lemaître’a. Tę analogię można uogólniać na wyższe wymiary: możemy wyobrazić sobie kropki na powierzchni nadmuchiwanej balonu albo rodzynki w rosnącym cieście.

Analogie są pouczające, ale trzeba z nimi uważać. Jeżeli chcemy utrzymać stały współczynnik proporcjonalności między prędkością a odległością, to jeśli nić będzie wystarczająco długa, dojdziemy nieuchronnie do punktu na nici, który będzie się oddalał z prędkością większą od prędkości światła (prędkość tę zwyczajowo oznaczamy przez  $c$ ). Jest oczywiste, że doświadczenia z nicią, która w przestrzeni rozciąga się w ten sposób, nie da się wykonać. Jest to sprzeczne z naszą wiedzą skodyfikowaną w formie szczególnej teorii względności. Jednak astronomowie twierdzą, że obserwują obiekty oddalające się od nas z prędkością większą od  $c$ . Takiego zjawiska nie da się opisać jako ruchu galaktyk w przestrzeni z taką prędkością. Rozszerzającego się Wszechświata nie da się opisać w ramach szczególnej teorii względności. To z przestrzenią pomiędzy nami a tą galaktyką dzieje się coś, co powoduje, że odległość do galaktyki rośnie tak szybko. Czasoprzestrzeń nie jest statyczną sceną, na której rozgrywa się historia Wszechświata, ale sama jest dynamicznym obiektem, który podlega ewolucji, tak jak opisuje to ogólna teoria względności Einsteina (OTW). Jak się wkrótce przekonamy, aby uratować naszą analogię, musimy nić utożsamić z przestrzenią, która sama się rozciąga, a nie z czymś, co w przestrzeni się porusza. To rozróżnienie jest kluczowe.

Mówimy w liczbie mnogiej o równaniach Einsteina, ponieważ w istocie jest to układ równań numerowanych dwoma indeksami  $\mu$  oraz  $\nu$ , z których każdy przebiega zbiór czteroelementowy – tak jak czasoprzestrzeń jest czterowymiarowa. Oznacza to, że występujące w równaniach obiekty  $R_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  oraz  $T_{\mu\nu}$  to macierze 4 na 4. Dodatkowo macierze te są symetryczne, czyli np.  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , to znaczy, że liczba niezależnych składowych wynosi 10.

O symulowaniu zlewania się czarnych dziur w OTW i pewnych aspektach dynamiki czasoprzestrzeni pisałem w  $\Delta_{15}^{12}$ . Warto zwrócić uwagę na pewną koincydencję związaną z publikacją tego tekstu. Kończy się on stwierdzeniem: *LIGO przez 8 lat nasłuchiwania (2002–2010) nie zarejestrował promieniowania grawitacyjnego. Być może teraz Advanced LIGO dostarczy tych przełomowych obserwacji, które byłyby kolejnym wielkim sukcesem przewidywań OTW sto lat po jej opublikowaniu.* Tak się składa, że publikacja tekstu (grudzień 2015) miała miejsce już po pierwszej detekcji fal grawitacyjnych (14 września 2015), ale przed oficjalnym ogłoszeniem tego odkrycia (11 lutego 2016). Nasz redakcyjny kolega Michał Bejger (członek konsorcjum LIGO-Virgo) wiedział o wszystkim, ale nie puścił pary z ust.

Zasadność wymienionych założeń bywa oczywiście kwestionowana i jest przedmiotem naukowych dyskusji, którymi nie będziemy zajmować się w tym artykule. Zainteresowanych zapraszamy do zajrzenia chociażby do tekstów Andrzeja Krasińskiego w  $\Delta_{16}^1$  oraz Krzysztofa Turzyńskiego, także w  $\Delta_{16}^1$ .

**Równania Einsteina.** Nie będziemy wchodzić w szczegóły, co znaczą poszczególne symbole w tych równaniach. To, co będzie nas interesować, to że występuje w nich matematyczny opis trzech różnych fizycznych obiektów:

$$(4) \quad \underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{geometria}} + \Lambda g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{materia}}.$$

Mamy część podpisaną: *geometria*, czyli matematyczny opis mierzenia odległości, upływu czasu i zakrzywienia czasoprzestrzeni. Po prawej stronie mamy część podpisaną: *materia*, czyli matematyczny opis rozkładu materii i energii w czasoprzestrzeni razem z oddziaływaniami innymi niż grawitacyjne (ciśnienie, pole elektromagnetyczne itp.). Mamy wreszcie w środku niepodpisany niepozorny człon, w którym występuje stała  $\Lambda$  zwana *stałą kosmologiczną* – nim zajmijmy się później.

Jeśli na razie zapomnimy o  $\Lambda$  (albo przyjmijmy  $\Lambda = 0$ ), to dostaniemy następujący obrazek: zadany rozkład materii i energii opisany po prawej stronie równań zmusza czasoprzestrzeń do zakrzywiania się, tak aby jej krzywizna spełniała równania Einsteina. Gdy już mamy rozwiązanie, czyli jakąś daną czasoprzestrzeń, to możemy do niej „wpuścić” masę próbną (czyli obiekt o masie zaniedbywalnej w porównaniu z tym, co stoi po prawej stronie równań). Wtedy równania ruchu powiedzą nam, jak taka masa próbna porusza się w tej konkretnej zakrzywionej czasoprzestrzeni. Do opisu zjawisk takich, jak ruch planet wokół Słońca, układy podwójne (gwiazd, gwiazd neutronowych, czarnych dziur), a nawet zlewanie się czarnych dziur i dynamika gwiazd w galaktykach wstawia się do równań Einsteina  $\Lambda = 0$ , i wszystko się zgadza. Co więcej, do większości zastosowań wystarczy nierelatywistyczne przybliżenie równań Einsteina, jakim jest prawo powszechnego ciężenia Newtona. Nawet jeżeli stała  $\Lambda$  jest różna od zera, to jej wartość jest na tyle mała, że we wszystkich zjawiskach tego typu nie jesteśmy w stanie zaobserwować odstępstwa jej wartości od zera.

Po co więc wprowadzać  $\Lambda$  do równań grawitacji, jeżeli doskonale możemy się bez niej obejść? Okazuje się, że jej wartość (choć bardzo mała) staje się istotna, kiedy równań Einsteina używamy do opisu całego Wszechświata. Warto podkreślić, że w równaniach Einsteina występują dwie stałe: stosunek  $G/c^4$  ( $c$  to prędkość światła, a  $G$  to stała grawitacji) i stała kosmologiczna  $\Lambda$ . Pierwsza z nich, czyli stosunek  $G/c^4$ , jest wyznaczana w eksperymentach w skali laboratoryjnej i kosmicznej na wiele różnych sposobów i jej wartość jest znana dosyć dokładnie. Natomiast  $\Lambda$  wyznacza się tak, aby dopasować model całego Wszechświata do obserwacji – nie potrafimy jej zmierzyć w laboratorium czy w skali układu słonecznego. Znaczenie  $\Lambda$  przeanalizujemy dokładniej za miesiąc.

**Założenia w modelach kosmologicznych.** Równania Einsteina (4) są skomplikowane i trudne do rozwiązywania. Jednak aby stworzyć modele opisujące cały Wszechświat, standardowo przyjmuje się szereg upraszczających założeń dotyczących poszukiwanego rozwiązania. Przede wszystkim zakłada się, że można wprowadzić uniwersalny wspólny dla całego Wszechświata wyróżniony czas. Następnie zakłada się, że czasoprzestrzeń można rozwarstwić na powierzchnie równoczesności względem tego wyróżnionego czasu. Inaczej mówiąc, każdej ustalonej wartości tego czasu odpowiada pewna trójwymiarowa przestrzeń, którą nazywamy właśnie *przestrzenią równoczesności*. Kolejne założenia dotyczą tych przestrzeni. Zakłada się, że te przestrzenie są jednorodne i izotropowe. Inaczej mówiąc, zakłada się, że w danej chwili przestrzeń wygląda w każdym punkcie tak samo: żaden punkt ani żaden kierunek nie jest wyróżniony. Jeżeli przestrzeń ma jakąś niezerową krzywiznę, to ta krzywizna jest taka sama wszędzie. Aby takie założenie miało sens, trzeba również o materii we Wszechświecie założyć, że jest idealnie równomiernie rozłożona, czyli jej gęstość jest stała.

Wszystkie te założenia wymagają oczywiście uzasadnienia. Wiemy, że materia nie jest rozłożona we Wszechświecie równomiernie. Istnieją skomplikowane struktury: gwiazdy, galaktyki, gromady galaktyk itp. Jednak z obserwacji astronomicznych nie wynika, aby jakiś kierunek w przestrzeni był wyróżniony



### Rozwiązanie zadania M 1736.

Ponumerujemy wiersze i kolumny liczbami od 1 do 15. Jeśli wieże nie atakują się nawzajem, to w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest dokładnie jedna wieża, a więc suma współrzędnych wszystkich wież to  $2(1 + 2 + \dots + 15) = 240$ .

Gdy wieża zostanie przesunięta ruchem skoczka, suma jej współrzędnych zmienia się o 1 lub 3, czyli zmienia się parzystość tej sumy. Ponieważ liczba wież jest nieparzysta, po ich przesunięciu suma współrzędnych wszystkich wież będzie nieparzysta. Zgodnie z poprzednią obserwacją oznacza to, że pewne dwie wieże muszą się atakować.

Fizycy mają w zwyczaju przestrzeń euklidesową nazywać „płaską”, co prowadzi czasem do nieporozumień. W języku fizyków „płaska przestrzeń” to nie płaszczyzna, ale po prostu przestrzeń trójwymiarowa o stałej zerowej krzywiznie, czyli euklidesowa. „Płaskość” odróżnia ją od przestrzeni o niezerowej krzywiznie, czyli zakrzywionych.

Bardzo przystępne wyprowadzenie równania Friedmana można znaleźć w klasycznym podręczniku *Wstęp do ogólnej teorii względności* Bernarda F. Schutzta.

albo aby jakiś duży obszar był istotnie gęstszy lub rzadszy niż inne obszary, dlatego przyjmuje się, że w wystarczająco dużej skali uśredniona po dużych obszarach gęstość Wszechświata jest w przybliżeniu stała. Kiedy opisujemy gaz lub ciecz w naczyniu, o których wiemy, że nie są jednorodny, a składają się z cząsteczek, to nie śledzimy ruchów każdej pojedynczej cząsteczki, ale operujemy pojęciami makroskopowymi, takimi jak gęstość, ciśnienie i temperatura. Podobnie postępujemy, gdy opisujemy Wszechświat, traktując galaktyki (lub ich gromady) jako drobiny pyłu rozrzuconego mniej więcej równomiernie.

Założenia te tłumaczymy na język matematyki i wykonujemy odpowiednie podstawienia w równaniach (4). Mamy wyróżniony czas  $t$  oraz tzw. *funkcję skali* oznaczaną  $a(t)$ , która determinuje, w jaki sposób zmieniają się odległości w czasie pomiędzy nieruchomymi punktami w przestrzeni. To, co w równaniu (4) zostało określone mianem „geometria”, w konsekwencji przyjętych założeń, zależy tylko od jednej funkcji  $a(t)$  i jej pochodnych oraz pewnej stałej, którego znaczenie wyjaśnimy za chwilę. Z kolei to, co zostało określone mianem „materia”, zależy jedynie od gęstości  $\rho(t)$  i ciśnienia  $p(t)$ , które zależą tylko od czasu  $t$  (a nie od współrzędnych przestrzennych, co jest konsekwencją założenia o jednorodności i izotropowości).

Jak już wcześniej zostało wspomniane, w każdej chwili przestrzeń ma stałą krzywiznę. Ta krzywizna może być dodatnia – odpowiada to geometrii sfery (w tym wypadku trójwymiarowej, czyli brzegu czterowymiarowej kuli), w której suma kątów w trójkącie jest większa niż  $180^\circ$ . Krzywizna może być ujemna, czyli przestrzeń może być hyperboliczna (żeby lepiej zrozumieć, co to znaczy, warto zajrzeć do dwóch artykułów: Doroty Celińskiej–Kopczyńskiej w  $\Delta_{20}^5$  oraz Eryka Kopczyńskiego, też w  $\Delta_{20}^5$ ). W takiej przestrzeni suma kątów w trójkącie jest mniejsza niż  $180^\circ$ . Krzywizna może być równa zero, co odpowiada znanej nam ze szkoły geometrii euklidesowej. O tym, z którym przypadkiem mamy do czynienia, decyduje wspomniana wcześniej stała, która razem z funkcją skali  $a(t)$  opisuje geometrię. Obserwacje astronomiczne wskazują, że nasza przestrzeń jest w dobrym przybliżeniu euklidesowa, czyli ma krzywiznę zero (lub bardzo bliską zero). Tak się właśnie przyjmuje w standardowym, używanym obecnie modelu kosmologicznym. Przyjmujemy więc, że stała ta jest równa zero.

Ostatnie uproszczenie, z którego się wytłumaczamy, jest takie: przyjmujemy, że materia wypełniająca Wszechświat zachowuje się jak pył, czyli ciśnienie jest równe zero. Oznacza to, że materia wypełniająca Wszechświat oddziałuje tylko grawitacyjnie. To założenie nie było spełnione we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata, kiedy był on gorący i gęsty. Ten etap jest oczywiście trudniejszy do opisanego i musimy pamiętać, że równania, które tu się pojawiają, nie stosują się do tego początkowego etapu ewolucji Wszechświata.

**Równanie Friedmana.** Kiedy zrobimy aż tak wiele upraszczających założeń, to nie powinno nikogo dziwić, że opis, który dostajemy, jest bardzo prosty. Równania Einsteina (4) sprowadzają się do jednego zaledwie równania (zwanego równaniem Friedmana):

$$(5) \quad \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{c^2}{3} \Lambda.$$

Kropka oznacza pochodną po czasie. Iloraz  $\dot{a}/a$  tradycyjnie nazywa się parametrem Hubble’a, oznaczanym  $H(t)$ , a jego interpretację analizowaliśmy miesiąc temu. Jak się za chwilę przekonamy, to, co otrzymujemy, jest ładując podobne do rozważanych wtedy modeli Wszechświatów mrówek. Tylko poprzednio funkcje  $a(t)$  we Wszechświatach Karoliny i Ksymeny były z góry arbitralnie zadane. Tutaj natomiast widzimy, że funkcja skali  $a(t)$  jest rozwiązaniem pewnego równania określającego jej dynamikę.

Rozwiązywaniem równania (5) i własnościami pewnych jego rozwiązań (czyli konkretnych funkcji  $a(t)$ ) zajmujemy się za miesiąc. Teraz omówimy ogólnie własności, które nie zależą od tego, jaka jest postać czynnika skali  $a(t)$ . Jak powiązać własności takiego modelu czasoprzestrzeni z naszymi obserwacjami Kosmosu i naszą analizą sprzed miesiąca?



O badaniach kosmicznego promieniowania tła pisaliśmy już w *Delcie* wielokrotnie. Polecamy np. teksty: Pawła Bielewicza,  $\Delta_{17}^{10}$ , Piotra Zalewskiego,  $\Delta_{11}^9$  i Michała Bejgera,  $\Delta_{14}^3$  i  $\Delta_{13}^7$ .

Galaktyki, które obserwował Edwin Hubble i których prędkość wyznaczył, znajdują się stosunkowo blisko Drogi Mlecznej. Prędkości ucieczki wyznaczone przez Hubble'a są bardzo małe w porównaniu z prędkością światła. Do tej pory astronomowie używają pojęcia *prędkości ucieczki* zazwyczaj w odniesieniu do galaktyk niezbyt odległych od nas. Do charakteryzowania własności obiektów znajdujących się w odległościach kosmologicznych raczej nie używa się prędkości ucieczki, tylko parametru oznaczanego literą  $z$ , zwanego *redshiftem*, który ma dużo lepszą interpretację fizyczną i jest bliższy temu, co tak naprawdę się mierzy. O *redshiftcie* można przeczytać między innymi w  $\Delta_{19}^4$ . Wrócimy też do tego pojęcia w czwartej części tego cyklu, za dwa miesiące.



### Rozwiązanie zadania M 1737.

Ze zbioru  $C$  wybierzmy dowolny okrąg  $\Omega$  i przez jego środek  $O$  poprowadźmy prostą  $\ell$ , prostopadłą do prostych równoległych z treści zadania. Wiemy, że  $\ell$  przecina jeszcze drugi okrąg z  $C$ , który nazwiemy  $\Omega'$ . Niech  $P$  będzie rzutem prostopadłym środka  $O'$  okręgu  $\Omega'$  na prostą  $\ell$ . Ponieważ  $\ell$  i  $\Omega'$  mają punkt wspólny, to  $PO' \leq 1$ . Z faktu, że  $\Omega$  i  $\Omega'$  są rozłączne, wnioskujemy, że  $OO' \geq 2$ . Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dostajemy więc

$$PO = \sqrt{OO'^2 - PO'^2} \geq \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Wobec tego

$$h \geq 1 + 1 + PO \geq 2 + \sqrt{3}.$$

**Wyróżniony układ odniesienia.** Opisana wcześniej struktura czasoprzestrzeni, rozwarstwiona na euklidesowe przestrzenie numerowane kosmologicznym czasem  $t$ , wyróżnia w każdym punkcie pewien układ odniesienia, w którym upływ czasu pokrywa się z tym kosmologicznym. Z lekcji fizyki wiemy, że żaden układ inercjalny nie powinien być wyróżniony, skąd więc mamy wiedzieć, czy np. nasza Galaktyka porusza się, czy spoczywa względem tego wyróżnionego układu odniesienia? Odpowiedzią jest obserwacja kosmicznego promieniowania tła. Jest to promieniowanie dochodzące do nas ze wszystkich stron, wyemitowane niedługo (około 380 000 lat) po Wielkim Wybuchu, a zarejestrowane po raz pierwszy w 1964 roku. Jest to jeden z najważniejszych dowodów eksperymentalnych potwierdzających teorię Wielkiego Wybuchu, jak również źródło informacji o wczesnych etapach ewolucji Wszechświata. Dosyć szybko odkryto, że promieniowanie to nie jest izotropowe, ale jeżeli założyć, że Ziemia (a raczej nasza Galaktyka wraz z całą Grupą Lokalną Galaktyk) porusza się, to można tak dobrać prędkość tego ruchu, aby promieniowanie było izotropowe w układzie, względem którego lecimy z prędkością szacowaną obecnie na około 600 km/s. Jeżeli więc Wszechświat jest jednorodny i izotropowy, to w każdym jego punkcie mamy metodę wyróżnienia układu odniesienia, który spoczywa względem promieniowania tła. Czas, który będziemy mierzyć w tym układzie, będzie właśnie tym kosmologicznym czasem z naszego modelu.

**Prędkość ucieczki.** Wyobraźmy sobie, że wyróżniamy dwie odległe od siebie galaktyki. Wiemy już, co to znaczy, że te galaktyki spoczywają – to znaczy, że żadna z nich nie porusza się względem układu odniesienia, w którym promieniowanie tła jest izotropowe. Funkcja skali  $a(t)$  mówi nam wtedy, jak zmienia się odległość pomiędzy tymi spoczywającymi galaktykami. Tempo zmiany tej odległości możemy nazwać prędkością, ale musimy podchodzić z pewną ostrożnością do takiego określenia. Czym innym jest prędkość np. jednej galaktyki względem drugiej, wtedy kiedy mijają się w niewielkiej odległości – ta nigdy nie może przekroczyć prędkości światła. Jest to prędkość zdefiniowana lokalnie, do której stosuje się zasady szczególnej teorii względności. Natomiast kiedy mówimy o przyroście odległości pomiędzy obiektami, które dzielą kosmologiczne odległości, to jest to zupełnie inny rodzaj prędkości. Jest to pomiar pewnej *nielokalnej* wielkości, na którą nie ma żadnego fizycznego ograniczenia. Każda z galaktyk spoczywa w pewnym lokalnie określonym układzie odniesienia, a odległość między nimi rośnie na skutek tego, że dzieląca je przestrzeń puchnie. Tempo wzrostu tej odległości może być dowolnie duże, w szczególności większe niż prędkość światła. Nie ma tu jednak żadnej sprzeczności z teorią względności. Obie wyróżnione przez nas galaktyki mają jakieś swoje lokalne otoczenia. Obiekty znajdujące się w każdym z tych małych obszarów mogą poruszać się względem siebie z prędkościami nie większymi niż  $c$ , ale odległość między tymi obszarami może zmieniać się dowolnie szybko, pod warunkiem, że obszary te znajdują się wystarczająco daleko od siebie. Prawa szczególnej teorii względności możemy stosować tylko lokalnie. Kiedy rozważamy zdarzenia, które dzieli duża (kosmologiczna) odległość, to musimy stosować opis ogólnej teorii względności, uwzględniający dynamikę samej czasoprzestrzeni.

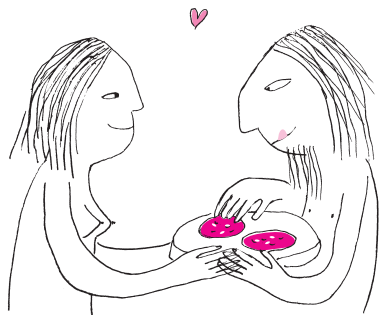
**Jak to wszystko ma się do mrówek?** Szczęśliwie okazuje się, że czasoprzestrzeń rozważana w tych modelach (zwanym modelami FLRW, od nazwisk Friedman–Lemaître–Robertson–Walker) ma stosunkowo prostą strukturę i naiwnie stosowany przez nas opis Wszechświata mrówek z poprzedniej części artykułu działa tutaj bardzo dobrze. W szczególności równania opisujące rozchodzenie się sygnałów świetlnych w czasoprzestrzeni FLRW, wynikające z ogólnej teorii względności, są dokładnie takie same jak te, które „na palcach” wyprowadziliśmy miesiąc temu dla opisu mrówek chodzących po rozciągającej się nici. Opisujemy wtedy kwestie, takie jak utrata możliwości komunikowania się pomiędzy oddalającymi się galaktykami, rejestrowanie sygnałów od źródeł oddalających się w tempie szybszym niż prędkość światła czy definicja parametru Hubble'a – cała ta analiza przenosi się bez zmian na modele FLRW.

Za miesiąc omówimy własności pewnych konkretnych rozwiązań równania (5), których używa się do modelowania naszego Wszechświata.

## Kucharze plejstocenu

O naszych kuzynach neandertalczykach wiemy coraz więcej. Między innymi dzięki poznaniu całego genomu (świetne prace tegorocznego noblisty, Svante Pääbo). Ale oczywiście chciałoby się też poznać szczegóły ich życia – poza znajomością genów – co jedli, jak się porozumiewali, z kim utrzymywali kontakty, wiedzieć więcej także o ich działaniach. Dzięki porównawczej analizie genomów sądzimy, iż porozumiewali się za pomocą dźwięków (słów). Żyli w różnych rejonach półkuli północnej. Nie wiemy, dlaczego zniknęli zaledwie 20 tysięcy lat temu i jaki był w tym udział nasz, homo sapiens.

Co jedli? Od lat uważamy, że zapewne głównie mięso. Wiemy, że przetwarzali pokarm z użyciem ognia, ale bez garnków. Badano pozostałości ognisk, a kilkadziesiąt lat temu wymyślono metodę oceny ich pożywienia z rozróżnieniem na zwierzęce i roślinne poprzez analizę obecnego w kościach neandertalczyków kolagenu. To charakterystyczne białko, trwałe chemicznie, o helikalnej budowie i dość monotonna powtórzenia kilku aminokwasów: glicyny (30%), proliny (20–25%) i hydroksyproliny. Metoda polega na pomiarach proporcji między trwałymi atomami węgla i azotu a ich długożyjącymi izotopami. Z porównań danych dla roślin i zwierząt z tamtej epoki oraz neandertalczyków udało się ocenić ogólny skład żywności tych ostatnich. Wynaleziona metoda izotopowa po odpowiednich przeliczeniach pozwala wnioskować o składzie pożywienia (zwierzęcia lub człowieka). Tak też obliczono, że mniej więcej 30 tysięcy lat temu neandertalczyki znacznie wzbogacili swój jadłospis o pokarmy roślinne. Ostatnio okazało się jednak, że tę granicę dietetyczną można przesunąć w głąb epok. Przebadano najstarszy (do dziś znaleziony), zachowany w częściowo tylko zwęglonym stanie, płaski placek – protoplastę chleba. Znaleziono go w jaskini zamieszkiwanej przez neandertalczyków w górach północnego Iraku. Analizy dokonali naukowcy brytyjscy z Uniwersytetu w Liverpoolu. Wiek znaleziska wyliczyli na 70 tysięcy lat. Kierująca zespołem dr Ceren Kabukcu specjalizuje się w analizach pozostałości spożywanych i palnych częściach roślin w późnym paleolicie południowo-zachodniej Azji. Badała liczne jaskinie, m.in. jedną (jaskinia Shanidar) słynącą z miejsca neandertalskiego pochówku udekorowanego kwiatami. W swoich pracach dr Kabukcu poszukuje danych o przedrolniczych grupach ludzi, wpływie klimatu i otoczenia na ich kulturę oraz osiągnięcia technologiczne.



Dane z jaskini w Iraku dr Kabukcu porównała z podobnymi znaleziskami sprzed 13 tysięcy lat z jaskini Franchthi na Peloponezie, dokumentującymi zwyczaj „kuchenne” człowieka sprzed 13 tysięcy lat. Techniki obróbki podobnych produktów zachowały się w niewiele zmienionej wersji, ludzie-łowcy korzystali z tradycji wcześniejszych mieszkańców Ziemi, jeszcze przed tzw. przejściem neolitycznym 10 tysięcy lat temu.

Neandertalczyk stosował różnorodne zabiegi, przetwarzając materiał roślinny, a także regulował smak pożywienia, dodając orzechy, nasiona (soczewica, gorczyca), nie unikając lekko gorzkich produktów. W badaniach płytek nazębnych europejskich neandertalczyków oznaczono także mleko i produkty fermentacji. Te i inne badania wskazują też na różnice w diecie przedstawicieli tego gatunku w zależności od otoczenia (Europa Północna – głównie mięso stepowych zwierząt, Hiszpania – pożywienie roślinne i zbiory runa leśnego).

Chris Hunt, który analizował znaleziska z Iraku, zaproponował przepis, stosując współczesne analogiczne produkty:

- Weź 2 części nasion traw lub starych gatunków pszenicy i jęczmienia,
- 1 część nasion soczewicy.
- Namocz przez noc, odsącz wodę.
- Ucieraj w moździerzu tak długo, aż powstanie masa z cząstkami o przekroju 1–2 mm. Dodawaj po trochu wody do uzyskania gęstej pasty. Uwaga: do potrawy nie dodaje się soli.
- Rozsmaruj na patelni (oryginalnie robiono to zapewne na płaskich kamieniach). Delikatnie podgrzewaj z obu stron przez 15–20 min, uważając, żeby nie spalić, co zdarzyło się kuzynowi 70 tysięcy lat temu.

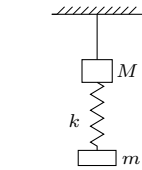
Smacznego! Tygodnik *Nature* chętnie opublikuje zdjęcia z tych „kuchennych rewolucji”.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

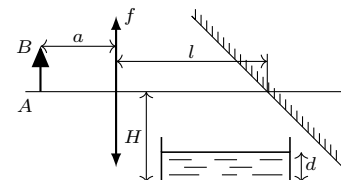
## Klub 44 F



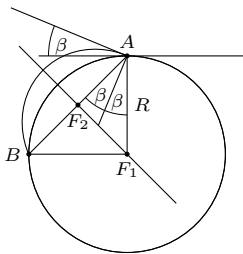
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023



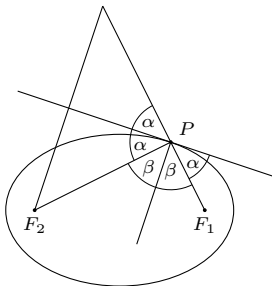
Rys. 1



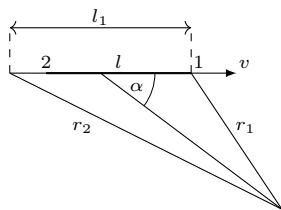
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

do obserwatora dociera światło wysłane przez przedni koniec pręta w chwili  $t_1$ , a przez tylny koniec w chwili  $t_2$  (rys. 5). Zachodzi związek  $t_1 + \frac{r_1}{c} = t_2 + \frac{r_2}{c}$ .

Widziana długość pręta wynosi

$$l_1 = l + v(t_1 - t_2) = l + v \frac{r_2 - r_1}{c}.$$

$r_1, r_2 \gg l_1$ , bo obserwator znajduje się daleko, zatem

$$r_2 - r_1 = l_1 \cos \alpha.$$

### Zadania z fizyki nr 752, 753

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**752.** Na nieważkiej nici wiszą w jednorodnym polu ciężkości dwa ciężarki o masach  $M$  i  $m$ , połączone sprężyną o współczynniku sprężystości  $k$  i zaniedbywalnej masie (rys. 1). Nicię przepalono. Po jakim czasie siła naciągu sprężyny po raz pierwszy osiągnie wartość zero? Zakładamy, że do tego momentu dolny ciężarek nie uderzy jeszcze w podłoże.

**753.** Przedmiot  $AB$  znajduje się w odległości  $a = 36$  cm od ciennej soczewki o ogniskowej  $f = 30$  cm. W odległości  $l = 1$  m za soczewką umieszczono zwierciadło płaskie nachylone do osi optycznej soczewki pod kątem  $\pi/4$  (rys. 2). W jakiej odległości  $H$  od osi optycznej soczewki należy umieścić dno naczynia z wodą, aby otrzymać na nim ostry obraz przedmiotu? Wysokość warstwy wody w naczyniu wynosi  $d = 20$  cm, współczynnik załamania wody  $n = 4/3$ .

### Rozwiązania zadań z numeru 10/2022

Przypominamy treść zadań:

**744.** Z północnego bieguna Ziemi chcemy wystrzelić pocisk balistyczny (poruszający się pod wpływem siły ciężkości), który trafi w punkt na równiku, nadając mu najmniejszą możliwą prędkość początkową. Znaleźć wartość tej prędkości oraz kąt, pod którym należy oddać wystrzał. Opory ruchu zaniedbujemy, przyjmujemy, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu  $R$ .

**745.** Długi cienki pręt porusza się ze stałą prędkością wzdłuż swojej osi. Obserwator znajduje się w dużej odległości od osi. W chwili, gdy promień skierowany na środek pręta utworzył kąt  $\alpha$  z kierunkiem jego ruchu, widziana długość pręta okazała się równa jego długości spoczynkowej. Znaleźć prędkość pręta.

**744.** Pocisk porusza się po fragmencie  $AB$  elipsy (rys. 3), której jedno z ognisk  $F_1$  znajduje się w środku Ziemi, a oś wielka leży na symetrycznej odcinka  $AB$  łączącego punkty startu i lądowania. Z zasady zachowania energii mamy związek:

$$(1) \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a},$$

gdzie  $a$  jest półosią wielką elipsy,  $M$  masą Ziemi, a  $v$  prędkością początkową pocisku o masie  $m$ . Prędkość ta jest najmniejsza, gdy minimalna jest energia całkowita, a tym samym minimalna jest oś wielka elipsy. Zatem drugie ognisko elipsy  $F_2$  leży na odcinku  $AB$ , a oś wielka elipsy wynosi:

$$(2) \quad 2a = |AF_1| + |AF_2| = R + \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Podstawiając (2) do (1), otrzymujemy minimalną wartość prędkości początkowej pocisku:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R(\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{2gR(\sqrt{2}-1)} = 7,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Styczna do elipsy w dowolnym punkcie  $P$  (rys. 4) jest prostopadła do dwusiecznej kąta utworzonego przez odcinki łączące ogniska elipsy z punktem  $P$ . Kąt  $F_1AF_2 = 45^\circ$ , dwusieczna tego kąta tworzy z odcinkiem  $F_1A$  kąt  $\beta = 22,5^\circ$ , z rysunku 3 widać, że kąt, jaki tworzy wektor prędkości początkowej pocisku z powierzchnią Ziemi, wynosi również  $22,5^\circ$ .

**745.** Niech długość spoczywającego pręta wynosi  $l_0$ . Jego długość w układzie, w którym pręt porusza się z prędkością  $v$  równoległe do swojej osi, jest równa  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła. Załóżmy, że w pewnej chwili

Obserwowana długość pręta

$$l_1 = \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}.$$

Podstawiając  $l_1 = l_0$ , otrzymujemy szukaną prędkość pręta

$$v = \frac{2c \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klubu 44 F**  
po zakończeniu  
roku szkolnego 2021/22

Sławomir Buć (Mystków)	43,90
Jacek Konieczny (Poznań)	33,42
Jan Zambrzycki (Białystok)	3 - 32,98
Ryszard Woźniak (Kraków)	32,96
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	2 - 32,56
Paweł Perkowski (Ożarów Maz.)	4 - 32,13
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 - 18,61
Paweł Kubit (Kraków)	15,73
Tomasz Wietecha (Tarnów)	16 - 12,94

Lista obejmuje uczestników ligi, których stan konta wynosi co najmniej 12 punktów i którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Zadanie **728** (WT = 3,23) dotyczyło ruchu cząstki naładowanej w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym z zadaną prędkością początkową. Maksymalne oceny uzyskali za nie **Piotr Adamczyk**, **Konrad Kapcia** i **Tomasz Wietecha**. Pozostałe rozwiązania zawierały błędy, a niektórzy uczestnicy nadesłali tylko drugie zadanie z tej serii, stąd stosunkowo wysoki współczynnik trudności.

W zadaniu **733** (WT = 3,06) zmienne pole magnetyczne w obszarze wewnątrz przewodzącego pierścienia w kształcie okręgu wytwarzało w nim stałą siłę elektromotoryczną. Należało znaleźć napięcie między dwoma punktami tego okręgu, do których na zewnątrz drutami oporowymi dołączony był amperomierz. Bez błędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk**. Pozostali uczestnicy często nie brali pod uwagę, że siła elektromotoryczna indukcji powstawała w każdym elemencie okręgu.

Zadanie **738** (WT = 2,71) było zadaniem z kinematyki. Stożek toczył się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej, a jego oś obracała się z zadaną prędkością kątową wokół osi pionowej przechodzącej przez wierzchołek stożka. Polecenie brzmiało: „Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej”. Miałam na myśli

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2021/2022

Współczynniki trudności tegorocznych zadań rozłożyły się dosyć symetrycznie – średnia wyniosła 2,22, pięć przekroczyło trójkę, cztery były mniejsze od dwóch.

Najwięcej problemów sprawiło zadanie **723** (WT = 3,77), gdzie relatywistyczna cząstka o znanej masie i energii kinetycznej zderza się niesprężysto z taką samą cząstką spoczywającą. Należało znaleźć maksymalną energię, jaka mogła być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Energia ta jest różnicą między energiami spoczynkowymi produktów i substratów reakcji, tymczasem większość uczestników przyjęła założenie, że całkowita masa układu nie zmienia się.

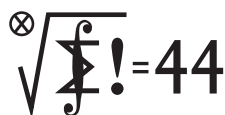
Trudności sprawiły też zadania z elektromagnetyzmu. Zadanie **727** (WT = 3,27), gdzie również nikt nie zdobył maksymalnej oceny, polegało na znalezieniu wytrzymałości drutu, z którego wykonano zwojnicę, aby nie uległ on rozerwaniu podczas przepływu prądu. Nadesłane rozwiązania zawierały założenie, że indukcja pola magnetycznego, w którym znajduje się pojedynczy zwój, jest w przybliżeniu taka sama, jak od całej zwojnicy. W rzeczywistości stanowi ona połowę tej wielkości.

płaszczyznę pionową zawierającą oś stożka oraz jego tworzącą styczną do podłoża – i tak zrozumiała to większość uczestników, ale nie zostało to doprecyzowane w treści zadania. Dlatego nie obniżałam punktów za przyjęcie innej interpretacji. Kluczowe w tym zadaniu było znalezienie związku między prędkościami kątowymi obrotu stożka wokół własnej osi i obrotu tej osi wokół osi pionowej. Poprawnie zrobili to **Piotr Adamczyk** i **Piotr Łaba**, którzy uzyskali oceny maksymalne.

Nie było oceny maksymalnej w zadaniu **734** (WT = 2,63), gdzie nitka odwijana ze szpulki toczącej się po stole wyciągana była stałą siłą przez otworek powyżej szpulki. Prawie wszyscy poradzi sobie z dynamiką zadania, gorzej było z kinematyką, czyli z odpowiedzią na pytanie, jaka długość nici została wyciągnięta przez otwór. Najbliższy prawidłowej odpowiedzi był **Paweł Perkowski**.

Czterech uczestników przekroczyło w tym roku granicę 44 punktów – **Tomasz Wietecha** po raz szesnasty (!), **Piotr Adamczyk** i **Konrad Kapcia** po raz drugi, **Ryszard Baniewicz** po raz pierwszy. Podobnie jak w roku ubiegłym, najbardziej skuteczny okazał się **Piotr Adamczyk**, który przysłał rozwiązania wszystkich zadań, a za 15 z nich otrzymał oceny maksymalne.

## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023

## Zadania z matematyki nr 855, 856

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**855.** Rozważamy funkcje  $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  spełniające warunki:  $f(1) = 1$  oraz

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad \text{gdy } x, y, x+y \in [0, 1].$$

Wyznaczyć najmniejszą liczbę  $C > 0$  o tej własności, że dla każdej rozważanej funkcji  $f$  ma miejsce oszacowanie:  $f(x) \leq Cx$  (dla  $x \in [0, 1]$ ).

**856.** Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  oraz  $(d_1, d_2, d_3, \dots)$ , gdzie  $d_i = |a_i - a_{i+1}|$ .

Zadanie 856 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Lista uczestników ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**  
 po zakończeniu sezonu  
 (roku szkolnego) 2021/22

Stanisław Bednarek	2 – 42,60
Krzysztof Maziarz	40,67
Tomasz Wietecha	13 – 39,23
Paweł Najman	8 – 38,88
Mikołaj Pater	2 – 38,30
Krzysztof Zygan	38,26
Marcin Kasperski	4 – 37,65
Adam Woryna	3 – 36,14
Radosław Kujawa	35,83
Janusz Olszewski	22 – 34,88
Norbert Porwol	34,16
Tomasz Czajka	33,74
Paweł Kubit	7 – 28,03
Marian Łupieżowicz	1 – 27,63
Piotr Sołtan	27,12
Janusz Wojtal	25,48
Jędrzej Biedrzycki	24,36
Janusz Fiett	3 – 23,73
Szymon Tur	22,47
Marcin Małogrosz	4 – 20,62
Michał Kieza	4 – 20,46
Piotr Kumor	15 – 20,31
Karol Matuszewski	1 – 19,74
Grzegorz Wiączkowski	19,44
Roksana Słowik	2 – 17,94
Semen Slobodianuk	17,86
Łukasz Merta	2 – 17,69
Krzysztof Kamiński	3 – 17,36
Marek Prauza	4 – 16,62
Piotr Łaba	14,50

Legenda (przykładowo):  
 stan konta 7 – 28,03 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 28,03 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:  
 – stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;  
 – przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

**Weterani Klubu 44 M**

(w kolejności uzyskiwania statusu weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałęcki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (22), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (13), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. PeczarSKI, M. Adamaszek (7), P. Kubit (7), J. Cisło (16), W. Bednarek (9), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedziej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (4), A. Kurach  
 (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2022

Przypominamy treść zadań:

**847.** Dana jest funkcja ciągła  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o następującej własności: dla każdej pary liczb  $a, b$ , gdzie  $a < b$ , istnieją liczby  $u, v$  takie, że  $a \leq u < v \leq b$  oraz  $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$  dla  $x \in [a, b]$ . Udowodnić, że funkcja  $f$  jest niemalejąca.

**848.** Niech  $n$  będzie ustaloną liczbą naturalną,  $n \geq 3$ . Niech  $X$  będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych  $(x_1, x_2, \dots)$  o wyrazach  $x_i \in \{1, \dots, n\}$  i niech  $B$  będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych  $(b_1, b_2, \dots)$  o wyrazach  $b_i \in \{0, 1\}$ . Wyjaśnić, czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie zbioru  $X$  na cały zbiór  $B$  takie, że (dla każdej liczby naturalnej  $k$ ): jeżeli dwa ciągi  $(x_i), (y_i)$  ze zbioru  $X$  pokrywają się na odcinku początkowym długości  $k$  (tzn.  $x_i = y_i$  dla  $i \leq k$ ), to ich obrazy także pokrywają się na odcinku początkowym długości  $k$ .

**847.** Weźmy dowolne liczby  $a < b$ ; należy dowieść, że  $f(a) \leq f(b)$ . Oznaczmy przez  $m$  i  $M$  najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ . Z założenia istnieją liczby  $u, v \in [a, b]$ ,  $u < v$ , dla których  $f(u) = m$ ,  $f(v) = M$ . Przyjmijmy, że  $u$  jest najmniejszą, zaś  $v$  – największą liczbą (w przedziale  $[a, b]$ ) o powyższej własności (ich istnienie wynika z ciągłości funkcji  $f$ ).

Przypuśćmy, że  $a < u$ ; więc  $f(x) > m$  dla  $x \in [a, u)$ . W myśl założenia, istnieją w przedziale  $[a, u]$  liczby  $u' < v'$ , w których  $f$  przyjmuje (odpowiednio) swoją najmniejszą i największą wartość na  $[a, u]$ . To jednak niemożliwe, bo najmniejszą wartością jest  $m = f(u)$ , i nie jest ona osiągnięta w żadnym punkcie przedziału  $[a, u)$ . Sprzeczność pokazuje, że  $u = a$ . Analogiczne rozumowanie pokazuje, że  $v = b$ . Zatem  $f(a) = m \leq M = f(b)$ .

**848.** Istnieje. Jako przykład niech posłuży kodowanie z użyciem bloków (słów binarnych):

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 01, \beta_3 = 001, \beta_4 = 0001, \dots,$$

$$\beta_{n-1} = \underbrace{00 \dots 0}_{n-2} 1, \quad \beta_n = \underbrace{00 \dots 00}_{n-1}.$$

Weźmy dowolny ciąg  $\mathbf{x} \in X$  (słowo nieskończone):  $\mathbf{x} = xyz \dots$  (zapis bez nawiasów i przecinków;  $x, y, z, \dots \in \{1, \dots, n\}$ ). Przyporządkujmy mu ciąg (słowo)  $\mathbf{b} = F(\mathbf{x}) \in B$ :  $\mathbf{b} = \beta_x \beta_y \beta_z \dots$  (bloki napisane jeden za drugim – konkatencja słów  $\beta_i$ ). Jasne, że jeśli dwa słowa z  $X$  pokrywają się na odcinku początkowym, to ich  $F$ -obrazy pokrywają się na odcinku początkowym co najmniej tej samej długości.

Weźmy teraz dowolny ciąg zerojedynkowy  $\mathbf{b} \in B$  i zauważmy, że *dokładnie jedno* ze słów  $\beta_i$  jest jego odcinkiem początkowym. Odrzucamy ten odcinek; to, co zostaje, jest znów długim słowem binarnym, rozpoczynającym się dokładnie jednym ze słów  $\beta_i$ ; itd. Indukcyjnie uzyskujemy jednoznaczne przedstawienie rozważanego (nieskończonego) słowa binarnego w postaci konkatencji  $\mathbf{b} = \beta_x \beta_y \beta_z \dots$ . Ciąg  $\mathbf{x} = xyz \dots$  jest elementem zbioru  $X$ , zaś  $\mathbf{b} = F(\mathbf{x})$ . Opisane odwzorowanie  $B \rightarrow X$  jest odwróceniem przyporządkowania  $F$  i uzasadnia jego bijektywność.

Przykład ilustrujący metodę „rozkodowania”, gdy  $n = 4$  (więc  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 01, \beta_3 = 001, \beta_4 = 000$ ):

$$\mathbf{b} = 01010000111001 \dots = 01|01|000|01|1|1|001| \dots \mapsto 2242113 \dots = F^{-1}(\mathbf{b}).$$

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2021/2022

Jak co roku o tej porze, przyjrzymy się wybranym zadaniom z minionego sezonu – więc głównie tym, które okazały się trudniejsze (wysoki współczynnik trudności  $WT$  i/lub niewielka liczba poprawnych rozwiązań  $LPR$ ). Przedstawiamy ciekawe pomysły rozwiązań oraz komentarze uczestników. Niektóre ich fragmenty umieszczamy w e-wydaniu (w zakładce „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

\* \* \*

**Zadanie 825.** [Graf ważony,  $n \geq 4$  wierzchołków, krawędzie o wagach  $\neq 0$ , suma wag  $= \pm 1$ ; tak samo w każdym grafie uzyskanym przez zmianę znaku wag krawędzi z wybranego wierzchołka; także przy powtórzeniu tej operacji; możliwe wartości iloczynu wag?] ( $WT = 2,50$ ;  $LPR = 6$ ).

**Pozostali członkowie Klubu 44 M**  
(alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, E. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, M. Pater, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Slowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski, B. Żmija;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwiak, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, K. Morawski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

$$(1) \quad \triangle CPR \sim \triangle COM \sim \triangle CBD \sim \triangle CED,$$

w którym środkowa relacja wynika z izogonalności  $\sphericalangle MCO = \sphericalangle DCB$ , a pozostałe są oczywiste; wniosek:

$$\frac{CP}{CE} = \frac{CR}{CD}, \quad \sphericalangle PCR = \sphericalangle ECD, \quad \text{więc też } \sphericalangle PCE = \sphericalangle RCD,$$

zatem  $\triangle PCE \sim \triangle RCD$ ; stąd

$$(2) \quad \sphericalangle CEP = \sphericalangle CDR = \sphericalangle QDR = \sphericalangle QOR$$

oraz (wobec (1)):

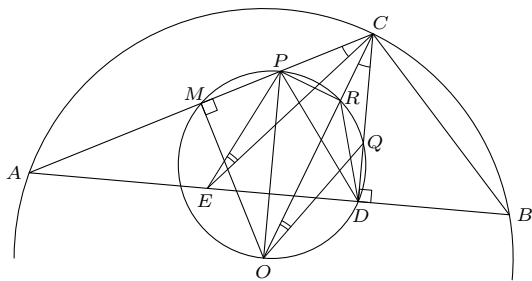
$$(3) \quad \sphericalangle CED = \sphericalangle COM = \sphericalangle ROM$$

i przez dodanie (2) i (3) (z wykorzystaniem równości  $MC = MD$ ):

$$\sphericalangle PED = \sphericalangle QOM = \sphericalangle QDM = \sphericalangle CDM = \sphericalangle PCD$$

– a to już w zasadzie teza zadania. Tylko uwaga: tu wszystko gra przy konfiguracji jak na rysunku; jednak nazwane punkty mogą leżeć w różnych uporządkowaniach (na prostych  $CA$ ,  $CD$  i na okręgu  $ODM$ ); przy każdym uporządkowaniu rachunek przechodzi po kosmetycznych zmianach (np.  *dodanie* (2), (3) może się okazać  *odjęciem* itp.).

W podobnym stylu, angażując nieco więcej trygonometrii, zrobił zadanie **Janusz Olszewski**; zaś w pełni rachunkowo: **Mikołaj Pater** i **Marian Łupieżowiec**.



Rysunek do zadania 829

Odpowiedź:  $-1, -\frac{1}{16}, +1$ . Bezbledne rozwiązania, w stylu zbliżonym do firmowego: **M. Adamaszek** (najbardziej zwięzły opis), **J. Olszewski**, **A. Kurach**; a z niewielkimi usterkami (łatwo poprawialnymi, choć zmieniającymi odpowiedź): **J. Fiett**, **P. Łaba**, **M. Spychała**. Ponadto dwie prace z wieloma istotnymi spostrzeżeniami, ale z tak znaczącymi lukami, że trudno je uznać za pełne rozwiązania.

Zadanie 827.  $[T_m = \underbrace{33 \dots 3}_m]$ ; czy istnieją  $n, m$  takie, że  $nT_m$  ma sumę

cyfr  $< 3m$ ? ( $WT = 2,35$ ;  $LPR = 7$ ). Nie istnieją. **Piotr Kumor** udowodnił, że (ogólniej) jeśli  $m, n, B, g \in \mathbb{N}$ ,  $B \mid g-1$ , to w zapisie przy podstawie  $B$  liczba  $n \cdot \underbrace{BB \dots B}_m$  ma sumę cyfr  $\geq mB$ ; dowód używa niebanalnych faktów

pomocniczych ( $\rightarrow$  e-wydanie). Inne dobre prace: **M. Adamaszek**, **A. Kurach**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **B. Żmija** oraz (z niejasnościami w opisie) **N. Porwol**.

Zadanie 829.  $[\triangle ABC : \sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C; CD - \text{wysokość};$

$O - \text{środek okręgu opisanego}; M - \text{środek } AC; E = \text{sym}_D(B);$

$(\text{okrąg } ODM) \cap (\text{prosta } AC) = \{M, P\} \Rightarrow \text{okręgi } DCP, DEP \text{ przystające}]$

$(WT = 3,29; LPR = 5)$ . Najzwięźlej: **Michał Adamaszek** – rozwiązanie

firmowe, skrócone dzięki odwołaniu do twierdzenia „o motylku” (opcja sygnalizowana w „firmówce”,  $\Delta_{22}^3$ ). Popatrzmy teraz na efektowne rozwiązanie, jakie przedstawił **Miłosz Kwiatkowski**: niech okrąg  $ODM$  (o średnicy  $OP$ ) przecina proste  $OC$ ,  $CD$  odpowiednio w punktach  $R (\neq O)$ ,  $Q (\neq D)$ ; mamy ciąg podobieństw trójkątów prostokątnych:

Zadanie 831.  $[A = a^{2022} + b^{2021} + c^{2021} + d^{2022}$ ,  
 $B = a^{2021} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2021}$ , gdzie  $a \geq b \geq c \geq d \geq 1$ ,  
 $bc < ad$ ; (a)  $A < B$ ?  $A > B$ ?

(b)  $\forall a > d \geq 1 \forall q > 1 \exists b, c \in (d, a) : bc < qad$ ; relacja między  $A, B$  przeciwna niż w (a)] ( $WT = 2,52$ ;  $LPR = 6$ ). Dobrą odpowiedź na pytanie (a) ( $A > B$ ) uzyskało więcej osób; ale (nieoczekiwanie) część (b) okazała się bardziej wymagająca: tylko **M. Adamaszek**, **P. Kumor**, **A. Kurach**, **M. Spychała**, **B. Żmija** oraz (z usterką łatwo poprawialną) **M. Pater**.

Zadanie 832.  $[n\text{-kąt wypukły}, n \geq 3$ ; znaleźć  $(\max k)$ , dla którego można tak ponumerować wierzchołki  $1, \dots, n$ , że  $\forall \ell \in \{1, \dots, n-1\} \exists i, j - \text{numery sąsiednich wierzchołków} : |i - j| = \ell$ , przy czym dla  $\ell = k$  są dwie takie pary  $i, j$ ] ( $WT = 2,24$ ;  $LPR = 8$ ). Odpowiedź:  $\max k = \lfloor n^2/2 \rfloor$ . **Michał Adamaszek**, autor zadania, opatrzył je ciekawymi uwagami, które zamieściliśmy wraz z rozwiązaniem firmowym ( $\Delta_{22}^4$ ); na przykład spostrzeżeniem, że dla *każdej* permutacji  $(a_1, \dots, a_n)$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$ :  $\sum_{\text{cykl}} |a_i - a_{i+1}| \leq \lfloor n^2/2 \rfloor$ . To samo *spostreżenie* zostało wyodrębnione w pracach, które przysłali **K. Morawski** i **P. Kumor**; ale faktycznie jest ono obecne (bez wyeksponowania, jako fragment dowodu) także w pozostałych dobrych pracach (**J. Cisko**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **B. Żmija**, **K. Maziarz**).

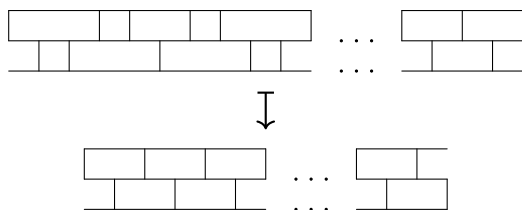
**Piotr Kumor**, swoim zwyczajem, dołączył obszerny komentarz, a w nim uwagi, jak u autora zadania; przy tym wzmiankowane *spostreżenie* jest rozszerzone do wskazania maksimum sumy  $\sum_{\text{cykl}} |a_i - a_{i+1}|$ , gdy  $(a_1, \dots, a_n)$  jest permutacją dowolnie ustalonego ciągu rosnącego długości  $n$  (niekoniecznie  $(1, \dots, n)$ ); szczegóły w e-wydaniu.

Zadanie 833.  $[\triangle CEG$  wewnątrz okręgu  $\Omega$ , przecinającego proste  $CE$ ;  $CG$ ;  $EG$  odpowiednio w punktach  $B, F$ ;  $A, I$ ;  $D, H$ ; okrąg wpisany w figurę  $ABC$  styczny do  $\Omega$  w punkcie  $K$ ; analogiczna definicja punktów  $L, M$  (przy figurach  $DEF, GHI$ )  $\Rightarrow$  proste  $CK, EL, GM$  mają punkt wspólny] ( $WT = 3,29$ ;  $LPR = 4$ ). Rozumowanie firmowe (składanie jednokładności) zastosował **Michał Adamaszek** oraz **Janusz Olszewski**. Również **Marek Spychała** użył tej samej (faktycznie) metody, choć bez użycia słowa *jednokładność*: wprowadzając punkty styczności różnych okręgów i prostych oraz stosując twierdzenie sinusów do kilku trójkątów, które się pojawiły, scharakteryzował szukany punkt przez jego położenie na odcinku łączącym środek okręgu  $\Omega$  ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $CEG$ , dzielące ów odcinek w określonej proporcji.

Na odrębną uwagę zasługuje rozwiązanie, jakie przedstawił **Jerzy Cisło**. Zamieszczamy w e-wydaniu kopię tej pracy, bez żadnego retuszu, i zachęcamy do jej przestudiowania. Nie jest to łatwe – objaśnienia są bardzo lakoniczne w środkowym fragmencie (w którym ponadto trzeba „romb” zamienić na „równoległobok”). Kto zdoła przejść przez tę nieco wyboistą ścieżkę, w nagrodę zobaczy naprawdę ładny i niebanalny dowód.

Zadanie 835.  $[x_1, \dots, x_n \in \{1, 2, 3\}; n \equiv 0 \pmod{3}; |\{i: x_i = k\}| = n/3$  dla  $k = 1, 2, 3 \Rightarrow \exists k, l: x_k + \dots + x_l = n]$  ( $WT = 2,59$ ;  $LPR = 9$ ).

Trudność zasadzała się w tym, jak zapisać rozumowanie zgrabnie i czytelnie. **Jerzy Cisło** pokazał, że to jak najbardziej wykonalne: układamy w linii klocki długości 1, 2, 3, tyle samo ( $n/3$ ) każdego rodzaju; linia ma długość  $2n$ ; należy wykazać, że pewien fragment ma długość  $n$ . Przypuśćmy, że tak nie jest; przetnijmy pasek klocków w połowie (przecinając przy tym pewien klocek) i umieśćmy jedną połowę nad drugą. Przerwy pomiędzy górnymi klockami muszą wypaść wewnątrz dolnych i odwrotnie; każdy klocek długości 1 znajdzie się nad lub pod środkiem klocka długości 3. Usuńmy klocki długości 1 oraz środkowe fragmenty klocków długości 3.



Widzimy teraz tylko klocki długości 2, w ilości nieparzystej (bo jeden przecięty). Jest ich jednak tyle, ile (początkowo) było łącznie klocków długości 2 i 3; to oczekiwana sprzeczność, bo jednych i drugich było wszak tyle samo. To jest to!

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

Czytelny zapis – również dzięki wizualizacji „geometrycznej” – uzyskali **Radosław Kujawa** i **Janusz Olszewski** (który ponadto zwrócił uwagę, że prawie to samo zadanie znajduje się w książce Musztańskiego *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*; zad. 353). Pozostałe rozwiązania (w tym firmowe:  $\Delta_{22}^6$ ) – to bardziej lub mniej zgrabna formalizacja algebraiczna.

Zadanie 838. [Równanie  $x^4 + y^4 = z^2 + 1$  ma nieskończenie wiele rozwiązań  $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ] ( $WT = 2,24$ ;  $LPR = 10$ ). **Witold Bednarek** zaproponował to zadanie, wraz ze zgrabnym rozwiązaniem, które zostało opublikowane ( $\Delta_{22}^7$ ) jako firmowe (prosta rekurencja liniowa z pitagorejskimi parametrami 8, 15). Taką właśnie metodą zrobili to zadanie **Jerzy Cisło** i **Janusz Olszewski**. Jednak większość prac polegała na odwołaniu do tożsamości  $X^4 + Y^4 = Z^2 + P^4$ , gdzie  $X, Y = 17p^2 \pm 12pq - 13q^2$ ,  $Z = 289p^4 + 14p^2q^2 - 239q^4$ ,  $P = q^2 - 17p^2$ .

Wystarczy tutaj wstawić jako  $p, q$  dowolne liczby całkowite, dla których  $P = \pm 1$  (a to równanie Pella, spełnione przez nieskończenie wiele par  $p, q$ ) i przyjmując  $x = |X|$ ,  $y = |Y|$ ,  $z = |Z|$ . Podaną tożsamość można znaleźć w sieci; uczestnicy najczęściej powoływali się na <http://sites.google.com/site/tpiezas/009> (niektórzy wypisali tożsamość bez żadnego odsyłacza, więc zapewne należy domniemywać(!), że samodzielnie ją odkryli).

Metoda „firmowa” też jest podatna na uogólnienia (notka redaktora ligi w e-wydaniu).

Równanie z zadania w ogóle okazało się znane. Listę wszystkich 87 rozwiązań z  $x, y < 10^4$  znalazł w sieci **Marek Spychała** ( $\rightarrow$  e-wydanie) oraz **Tomasz Wietecha**, który zwrócił uwagę, że tylko jedno z nich uzyskuje się ze wspomnianej tożsamości (dla  $p = 1, q = 4$ ).

Zadanie 842. [Trzy koła:

$$K(A, r_A) \cap K(B, r_B) \cap K(C, r_C) \neq \emptyset;$$

$\triangle A'B'C'$ :  $A'B' \leq AB$ ;  $A'C' \leq AC$ ;  $B'C' \leq BC \Rightarrow K(A', r_A) \cap K(B', r_B) \cap K(C', r_C) \neq \emptyset]$  ( $WT = 2,98$ ;  $LPR = 5$ ). Rozwiązania uznane za poprawne

(w kolejności precyzji, pełności argumentacji oraz czytelności opracowania): **J. Olszewski**, **K. Zygan**, **W. Malinowski**, **J. Cisło**, **P. Łaba**; zastosowane metody ustępują jednak prostotą rozwiązaniu, jakie znalazł autor zadania, **M. Adamaszek**, i które zostało wydrukowane jako firmowe ( $\Delta_{22}^9$ ). Ponadto jedna praca z bardzo dobrym pomysłem, ale ze znaczącym niedopatrzeniem w dowodzie.

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: Galaxy Zoo, Cosmic Down – świat nauki na wyciągnięcie ręki!

*Chcesz mieć dostęp do najnowszych zdjęć galaktyk na różnych przesunięciach ku podczerwieni? Masz trochę wolnego czasu i chciałbyś spróbować swoich sił w klasyfikacji galaktyk? A może po prostu chciałbyś pomóc grupie astrofizyków z Warszawy? W takim razie ten tekst jest dla Ciebie!*

Galaktyki bardzo ogólnie można zdefiniować jako duże formacje gwiazd, czarnych dziur, pyłu, gazu itp. Można poetycko powiedzieć, że galaktyki to takie chmury, tyle że składające się z gwiazd, pyłu i gazu zamiast pary wodnej. Podobnie jak chmury obserwowane przez nas na Ziemi, tak i galaktyki przybierają różne kształty i rozmiary, choć jednocześnie każda z nich jest podobnym tworem.

Do najpopularniejszych, ze względu na swój kształt, należą galaktyki spiralne, tak jak nasza galaktyka – Droga Mleczna.

*Ponieważ nie możemy spojrzeć na Drogę Mleczną z zewnątrz, więc próby opisu jej struktury są dominowane przez różnego rodzaju symulacje komputerowe oparte na obserwacjach niezliczonej ilości innych galaktyk spiralnych. Analiza właściwości naszej Galaktyki i innych obserwowanych galaktyk spiralnych pozwoliły nam ostatecznie zrozumieć, jaki kształt ma Droga Mleczna.*

Jest także wiele innych typów galaktyk identyfikowanych ze względu na ich kształt: poza spiralnymi najczęściej spotykanym rodzajem są galaktyki eliptyczne. Nie mają one charakterystycznych spiralnych ramion obracających się wokół płaskiego dysku, lecz przybierają formę elipsoidy: przypominają jajko albo piłkę do rugby. Jeszcze inne galaktyki wchodzą w interakcje między sobą, przez co ich kształt jest zaburzony i często trudny do opisania – zjawisko to nazywane jest zderzaniem się galaktyk.

*O zderzających się galaktykach i metodach ich klasyfikacji pisaliśmy już w  $\Delta_{22}^6$ . Poszukiwanie zderzających się galaktyk, W. Pearson.*

Oczywiście takie zderzenia trwają wiele milionów lat, a cały proces łączenia się galaktyk można podzielić na wiele bardzo istotnych faz. Ostateczny kształt galaktyki powstałej w wyniku tego procesu przypomina kształtem dwie chmury.

W Departamencie Badań Podstawowych Narodowego Centrum Badań Jądrowych (NCBJ), razem z dr. Williamem Pearsonem, prof. Agnieszką Pollo oraz mgr. Dawidem Chudym z Uniwersytetu Jagiellońskiego, pracujemy nad poszukiwaniem oraz identyfikacją

zderzających się galaktyk. Łączymy nowoczesne metody identyfikacji z prostą oceną wzrokową. Przykładowo, gdy stwierdzamy, że dana galaktyka „wygląda dziwnie” (albo używając bardziej naukowego określenia, jest zniekształcona), oznacza to prawdopodobnie, że jest ona w procesie łączenia się z inną galaktyką. Przeprowadzenie wzrokowej oceny galaktyk umożliwia strona [www.galaxyzoo.org](http://www.galaxyzoo.org). Platforma Galaxy Zoo jest obywatelskim projektem naukowym (*Citizen Science*), w którym każdy z odrobiną wolnego czasu oraz motywacji może wziąć udział. Trzeba tylko wpisać URL do przeglądarki i rozpocząć klasyfikację, nawet bez uprzedniej rejestracji, choć zalecamy, dla uzyskania wyższej jakości wyników oraz statystyk, założenie konta na platformie.

Obecnie w Galaxy Zoo klasyfikować (i podziwiać) można galaktyki z projektu Cosmic Down. Jest to duży astronomiczny przegląd w zakresie fal optycznych wykonany za pomocą japońskiego teleskopu Subaru ulokowanego na Hawajach. Cosmic Down składa się ze zdjęć nieba wykonanych w ramach różnych projektów naukowych, między innymi z katalogu wyselekcjonowanego za pomocą algorytmów samouczących trenowanych przez dr. Williama Pearsona z NCBJ. Dzięki Galaxy Zoo każdy, kto ma dostęp do Internetu, komputer albo smartfona, może uzyskać dostęp do zdjęć około 20 000 galaktyk i ocenić, jakiego są typu. Ty, Czytelniku, też możesz pomóc w pracy astronomom wykorzystującym klasyfikacje końcowe z Galaxy Zoo. Przy okazji nauczysz się dużo o Wszechświecie, galaktykach i o tym, jak je badamy. Co więcej, możesz odkryć jakąś niezwykle interesującą galaktykę i zostać uwzględnionym w publikacji naukowej. Jeśli takiego odkrycia dokonasz, koniecznie skontaktuj się z nami w zakładce astrofizyki NCBJ!

Galaxy Zoo można używać za pośrednictwem strony internetowej, również dostępnej w wersji na smartfona. Niestety, dla użytkowników dostępna jest jedynie angielska wersja językowa, ale instrukcje w samouczku są na tyle proste, że do ich zrozumienia wystarczy najprostszy translator!

*Luis SUELVES*

Narodowe Centrum Badań Jądrowych  
Tłumaczenie: *Paulina TRESZCZOTKO*

## Niebo w lutym

W lutym przez 28 dni Słońce zdąży zwiększyć wysokość górowania nad widnokregiem o ponad 9°. Przekłada się to na wydłużenie dnia w środkowej Polsce do 11 godzin.

Głównym czynnikiem określającym widoczność przebywających blisko ekliptyki i jednocześnie blisko Słońca ciał niebieskich jest jej nachylenie do widnokregu. Szczególnie dotyczy to planet **Merkury** i **Wenus**, które nigdy nie oddalają się zanadto od Słońca ani Księżycy w okolicach nowiu. Dlatego bliżej biegunów ich dobre warunki obserwacyjne występują

wieczorem na przełomie zimy i wiosny oraz rano na przełomie lata i jesieni. Stąd planeta Merkury jest w praktyce niewidoczna z dużych północnych szerokości geograficznych, mimo tego że 30 stycznia oddaliła się od Słońca o 25° na zachód. Nie pomaga nawet całkiem spora jasność, wynosząca  $-0,1^m$ .

Dobre warunki obserwacyjne planet panują na niebie wieczornym, gdzie znajdują się łatwe do zaobserwowania gołym okiem Wenus, Jowisz i Mars, a także widoczne w lornetkach i teleskopach Uran i Neptun.



Z wymienionych w poprzednim akapicie ciał niebieskich najszybciej porusza się **Wenus**, która przez cały miesiąc pokona ponad  $35^\circ$  na tle gwiazdozbiorów Wodnika, Wieloryba i Ryb. Na początku lutego, godzinę po zachodzie Słońca, Wenus zajmuje pozycję na wysokości  $9^\circ$ , by do końca miesiąca o tej samej porze zwiększyć ją do ponad  $15^\circ$ . Wygląd tarczy planety w ciągu miesiąca niewiele się zmieni. Przez cały miesiąc utrzyma ona jasność na poziomie  $-4^m$ , średnica kątowa wyniesie  $12''$ , a faza zmniejszy się z 91% do 86%.

W połowie miesiąca, 15 lutego, Wenus zbliży się na zaledwie  $46''$  do Neptuna, niestety stanie się to około godziny 13:20 naszego czasu, gdy obie planety giną w świetle dnia. Do godziny 18:30 dystans między planetami urośnie do ponad  $15'$ . W kolejnych dniach Wenus podąży ku Jowiszowi, którego dogoni 2 marca, zbliżając się na około  $40'$ .

Planetę **Neptun** można obserwować tylko w pierwszej połowie miesiąca, ponieważ 15 marca spotka się ona ze Słońcem, i jej warunki obserwacyjne będą się szybko pogarszać. Do zmniejszającej się odległości kątowej planety od Słońca doda się coraz później zapadający zmierzch. W pierwszych dniach lutego na początku nocy astronomicznej (godz. 18:30) planeta zajmuje pozycję na wysokości  $15^\circ$  nad horyzontem, ale w dniu spotkania z Wenus Neptun zbliży się do widnokregu na  $4^\circ$  i może już stać się niewidoczny.

**Jowisz** zacznie i skończy miesiąc w gwiazdozbiornie Ryb, jednak w dniach 6–19 lutego odwiedzi gwiazdozbiór Wieloryba (Wenus zagości w tym gwiazdozbiornie między 25 a 27 lutego). Planeta również szybko zbliża się do koniunkcji ze Słońcem, przez którą przejdzie w kwietniu. Najpierw wysokość Jowisza na początku nocy astronomicznej przekroczy  $25^\circ$ , lecz do końca miesiąca spadnie poniżej  $10^\circ$ . W tym czasie jasność planety zmniejszy się od  $-2,2^m$  do  $-2,1^m$ , a jej średnica kątowa – z  $36''$  do  $34''$ .

**Uran** i **Mars** w lutym nadal widoczne są bardzo dobrze. Pierwsza z wymienionych planet po zapadnięciu ciemności przebywa na wysokości  $50^\circ$  po południowej stronie nieba. W lutym Uran tworzy trójkąt prostokątny ze świecącymi podobną doń jasnością gwiazdami  $\alpha$  i  $\sigma$  Arietis, z kątem prostym przy planecie. Uran znika za widnokregiem około północy.

Mars przebywa w gwiazdozbiornie Byka, zaczynając miesiąc około  $8^\circ$  na północ od Aldebarana. Ostatniego dnia miesiąca planeta dotrze na  $5^\circ$  do drugiej co do jasności gwiazdy Byka – El Nath. W tym czasie jasność Marsa spadnie od  $-0,2^m$  do  $+0,4^m$ , a jej średnica kątowa – z  $11''$  do  $8''$ . Mars góruje mniej więcej o godzinie 19 na wysokości przekraczającej  $60^\circ$ , a znika za widnokregiem po godzinie 3.

W ubiegłym miesiącu, 12 stycznia, przez peryhelium swojej orbity, 1,1 AU od Słońca, przeszła kometa C/2022 E3 (ZTF). Z obliczeń wynika, że 1 lutego kometa zbliży się do Ziemi na minimalną odległość 0,28 AU. Prognozuje się, że jasność komety

przekroczy wtedy  $+5,5^m$ , czyli powinno dać się ją dostrzec przez lornetkę.

W lutym kometa pokona ponad  $70^\circ$  od gwiazdozbioru Żyrafy, poprzez Woźnicę i Byka do Erydana. Po drodze 5 lutego przejdzie niecałe  $2^\circ$  na zachód od Capelli w Woźnicy, 11 lutego – niecałe  $2^\circ$  na wschód od Marsa i 14 lutego  $1,5^\circ$  na zachód od Aldebarana w Byku. W kolejnych dniach kometa podąży dalej na południe wzdłuż granicy Byka z Orionem. Na początku miesiąca kometa góruje około godziny 21 niedaleko zenitu, a zatem jej warunki obserwacyjne pod tym względem są u nas znakomite.

Obserwacje komety, tak jak i innych obiektów rozciągniętych, może popsuć Księżyc w dużej fazie. A w lutym jego tarcza rozświetli niebo, niestety, właśnie na początku miesiąca. Orbita Księżyca w najbliższych miesiącach osiągnie maksymalne wychylenie od ekliptyki, stąd Księżyc osiągnie najbardziej na północ i południe wysunięte deklinacje, przekraczające  $\pm 28^\circ$ . Początek miesiąca zastanie Srebrny Glob na pograniczu gwiazdozbiorów Byka, Woźnicy i Bliźniąt, w fazie 87%. Tarcza Księżyca znajdzie się wtedy jakieś  $20^\circ$  na wschód od Marsa i jednocześnie  $45^\circ$  na południe od komety C/2022 E3. W kolejnych dniach naturalny satelita podąży ku pełni, przez którą przejdzie 5 lutego. Dwa dni wcześniej jego tarcza przejdzie nieco ponad  $2^\circ$  od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. Niestety oznacza to, że kometa stanie się bardzo trudna do dostrzeżenia nawet w teleskopach.

Dzień po pełni jasna tarcza Księżyca minie Regulusa w Lwie w odległości  $4^\circ$ , a 11 lutego rano zbliży się na  $3^\circ$  do Spiki w Pannie. Do tego czasu jego faza spadnie do 76%. Kolejne dwa dni później Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, wędrując  $4^\circ$  od Zuben Elgenubi, gwiazdy  $\alpha$  w gwiazdozbiornie Wagi, a dobę później dotrze do gwiazdozbioru Skorpiona, świecąc  $1,5^\circ$  od Dschubby. Tarcza Księżyca 15 lutego pokaże się  $6^\circ$  na wschód od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona.

Srebrny Glob przejdzie przez now 20 lutego, ale ze względu na położenie prawie  $5^\circ$  pod ekliptyką już 3 dni przed spotkaniem ze Słońcem zniknie on w zorzy porannej. Po nowiu, gdy Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, bardzo szybko nabierze wysokości. Już 21 lutego można próbować dostrzec bardzo cienki sierp Księżyca w fazie zaledwie 3%. Tego wieczora do odszukania jego tarczy przyda się planeta Wenus, gdyż Księżyc znajdzie się  $10^\circ$  pod nią. Dobę później sierp Księżyca zgrubieje do 8% i o tej samej porze zajmie pozycję na wysokości już  $17^\circ$  między Wenus a Jowiszem.

W kolejnych dniach Srebrny Glob podąży ku pierwszej kwadrze, przez którą przejdzie 27 lutego. Dwa dni wcześniej, Księżyc zbliży się na  $2^\circ$  do Urana, kolejnej zaś doby przejdzie podobnie blisko na południe od Plejad. Dwa ostatnie dni miesiąca Księżyc ma zarezerwowane na spotkanie z Marssem. Najpierw pokaże się on  $5^\circ$  na zachód, a następnie  $5^\circ$  na wschód od Czerwonej Planety.

*Ariel MAJCHER*

## Ciemność w tunelu

*[Amerykańscy] fizycy twierdzą, że po raz pierwszy w historii stworzyli tunel czasoprzestrzenny, przewidziany teoretycznie w 1935 roku przez Alberta Einsteina i Nathana Rosena, łączący odległe punkty przestrzeni przejściem w dodatkowym wymiarze.*

W taki oto sposób *Quanta*, poważany serwis poświęcony popularyzacji nauki, w artykule zatytułowanym *Fizycy stworzyli tunel czasoprzestrzenny za pomocą komputera kwantowego* opisał zawartość pracy Daniela Jafferisa i współpracowników opublikowanej w *Nature* [1].

W podsumowaniu samej pracy możemy zaś przeczytać:

*Udało nam się zaobserwować w warunkach doświadczalnych dynamikę drożnych tuneli czasoprzestrzennych.*

Entuzjastyczny artykuł na temat pracy wydrukował *The New Yorker*, opisując to osiągnięcie jako *najmniejszy, tyciuteńki tunel czasoprzestrzenny, jaki możemy sobie wyobrazić*. Publikacji pracy towarzyszyła również konferencja prasowa i wykłady na konferencjach branżowych.

W mediach społecznościowych zawrzało. Do głosów zachwyty dołączyły krytyczne wypowiedzi badaczy stanowczo kwestionujących sposób prezentacji wyników przez Jafferisa *et consortes*. Matt Strassler z Uniwersytetu Harvarda, od kilkunastu lat prowadzący bloga poświęconego popularyzacji fizyki teoretycznej, napisał:

*Czy fizycy stworzyli tunel czasoprzestrzenny w laboratorium? Nie. Czy fizycy stworzyli mały tunel czasoprzestrzenny w laboratorium? Nie. Czy fizykom udało się zbadać kwantową grawitację w laboratorium? Nie. Czy fizycy symulowali tunel czasoprzestrzenny w laboratorium? Nie.*

Peter Woit, który od wielu lat publicznie krytykuje odważne stwierdzenia teoretyków zajmujących się teorią strun i napisał o nich książkę o tytule *Nawet nie błędna* (jak słynna obelga autorstwa Fermiego) – skwitował sprawę krótko:

*To ustawka pod media.*

Magazyn *Scientific American* spróbował podejść do sprawy na chłodno i zamówić u poważanego specjalisty omówienie sytuacji, które nie byłoby ani przesadnie pochwalne, ani przesadnie krytyczne. Nie udało się.

A co się właściwie stało?

Naukowcy wykorzystali dziewięć qubitów należącego do Google komputera kwantowego *Sycamore* do obliczenia bardzo uproszczonej wersji modelu Sachdeva, Ye i Kitaeva (SYK), używanego do badania układów kwantowych, takich jak np. grafen, ale uważanego także za matematycznie równoważny opisowi dwuwymiarowej grawitacji we Wszechświecie o ujemnej krzywiznie czasoprzestrzennej. Przypuszcza się, że ta równoważność może nam coś podpowiedzieć na temat grawitacji kwantowej w naszym Wszechświecie (jakkolwiek

nasza czasoprzestrzeń ma cztery wymiary i dodatnią krzywiznę).

Dlaczego się tak przypuszcza? Aby choć z grubsza odpowiedzieć na to pytanie, trzeba przywołać kilka pojęć, jakie zostały wprowadzone do teorii strun w ostatnich trzech dekadach.

Pierwszą z nich jest *zasada holograficzna*, czyli postulowana własność kwantowej grawitacji, stwierdzająca, że opis objętości przestrzeni może być „zakodowany” na brzegu tej przestrzeni, a zatem na obszarze niższego wymiaru. Po raz pierwszy została zaproponowana przez Gerarda 't Hoofta, a w teorii strun otrzymała dokładną interpretację dzięki Leonardowi Susskindowi.

Druga to zaproponowana przez Juana Maldacene *korespondencja AdS/CFT*, czyli coś w rodzaju słownika, który pozwala tłumaczyć pojęcia jednej teorii na pozornie różne pojęcia zupełnie innej teorii – modelu czasoprzestrzeni znanego jako przestrzeń anty-de Sittera (AdS) i konforemnej teorii pola (CFT), w której nie ma, co prawda, grawitacji, ale układy nią opisywane mogą wykazywać splątanie kwantowe.

Trzecim elementem układanki jest zaproponowana dekadę temu przez Maldacene i Susskinda hipoteza ER = EPR, łącząca własności tuneli czasoprzestrzennych (ER od nazwisk Einsteina i Rosena) oraz splątania kwantowego (EPR od nazwisk Einsteina, Podolsky'ego i Rosena, którzy w głośnej pracy sprzed niemal wieku zaproponowali eksperyment myślowy mający wykazać absurdalność splątania kwantowego; przyroda wszakże nie przejęła się tym argumentem, więc Nagroda Nobla z fizyki została w 2022 roku przyznana badaczom zgłębiającym tajniki splątania).

Hipoteza ER = EPR została w 2017 roku rozszerzona przez Jafferisa oraz Pinga Gao i Arona Walla w sposób pozwalający powiązać własności drożnych tuneli czasoprzestrzennych z teleportacją kwantową. Ta konstrukcja teoretyczna umożliwiła zinterpretowanie obliczeń na komputerze kwantowym w języku teorii grawitacji.

Cała ta historia skłania do postawienia kilku pytań. Czy „interpretacja” jest synonimem „symulacji”? Czy Jafferis ze współpracownikami oraz działły promocji ich instytucji naukowych w uczciwy sposób przedstawili wyniki badań szerszej publiczności? I bardziej ogólnie, gdzie w komunikacji naukowej przebiega granica między hiperbolą a hucpą?

Krzysztof TURZYŃSKI

[1] D. Jafferis *et al.*, „Traversable wormhole dynamics on a quantum processor”, *Nature* **612** (2022) 51



# Twierdzenie OMGa

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

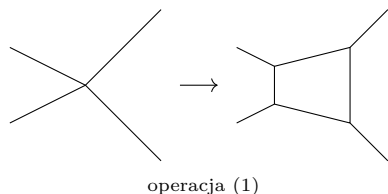
Z okazji jubileuszu w 50. Kąciku Początkującego Olimpijczyka zajmę się pewnym twierdzeniem bezpośrednio związanym z Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów (obecnie pod nazwą Olimpiada Matematyczna Juniorów)...

W OMG było sporo zadań, w których pytano: *czy istnieje wielościan, który...* Odpowiedź na ogół była pozytywna i stąd powstał żart – niestety nieznanego mi autora. Jego treść wyraża

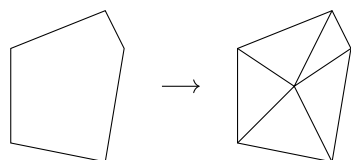
**Twierdzenie OMGa.** *Wielościan istnieje.*

A teraz już na poważnie. Aby wykazać, że istnieje jakiś obiekt, wystarczy go pokazać. Taki dowód nazywamy konstruktywnym i właśnie tym się w niniejszym kąciku zajmujemy. Będziemy dowodzić istnienia wielościanów, konstruując je.

Wspomniane zadania z OMG są bardzo różnej natury i każdemu z nich w zasadzie można by poświęcić oddzielny kącik. Ograniczę się tutaj do dwóch trików, które pozwalają zbudować wielościany o żądanej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian, a także wielościany z narzuconymi warunkami na liczby boków, ścian i stopnie wierzchołków (*stopniem* wierzchołka wielościanu nazywamy liczbę wychodzących z niego krawędzi). Wybierzmy dowolny wielościan wypukły jako punkt wyjścia. Będziemy wykonywać na nim następujące operacje:



operacja (1)



operacja (2)

- (1) Ścięcie wierzchołka  $P$  stopnia  $d$  w taki sposób, by płaszczyzna cięcia przechodziła przez wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka  $P$ , ale nie przechodziła przez żaden wierzchołek tego wielościanu. Takie cięcie zagwarantuje płaszczyzna położona wystarczająco blisko wierzchołka  $P$ . Ta operacja spowoduje:
  - wzrost liczby ścian o 1 (powstaje ściana  $d$ -kątna);
  - wzrost liczby krawędzi o  $d$  (są to krawędzie nowo powstałej ściany);
  - wzrost liczby wierzchołków o  $d - 1$  (na miejsce wierzchołka  $P$  przychodzi  $d$  wierzchołków stopnia 3).

Ponadto wszystkie ściany, których wierzchołkiem był punkt  $P$ , zwiększają liczbę boków o 1.

- (2) Dobudowanie ostrosłupa, którego podstawą jest ściana  $S$  mająca  $b$  boków, w taki sposób, by kąty dwuścienne między ścianami tego ostrosłupa a sąsiednimi ścianami wielościanu były miary mniejszej niż  $180^\circ$ . Można to zrobić, dobudowując wystarczająco niski ostrosłup. Ta zmiana powoduje:
  - wzrost liczby ścian o  $b - 1$  (na miejsce  $b$ -kąta pojawi się  $b$  trójkątów);
  - wzrost liczby krawędzi o  $b$  (są to krawędzie boczne dobudowanego ostrosłupa);
  - wzrost liczby wierzchołków o 1 (stopnia  $b$ ).

Ponadto wszystkie wierzchołki dawnej ściany  $S$  zwiększą stopień o 1.

Możemy bawić się dalej i budować na ścianach wielościanu bardziej złożone konstrukcje albo ścinać nie tylko wierzchołki, ale krawędzie lub nawet całe ściany. Zabawę oraz wnioski z niej pozostawiam Czytelnikowi.

## Zadania

### Czy istnieje wielościan wypukły,

1. w którym liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi? (II Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów)
2. który ma tyle samo wierzchołków i ścian, ale nie jest ostrosłupem?
3. którego liczba krawędzi jest cztery razy większa od wartości bezwzględnej różnicy liczby jego ścian i wierzchołków?
4. w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej? (XI OMG)
5. który ma dokładnie siedem ścian sześciokątnych?
6. w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 i każde dwie ściany o wspólnej krawędzi mają różną liczbę boków?
7. który ma nieparzystą liczbę ścian i wszystkie wierzchołki parzystego stopnia? (VIII OMG)

**Rozwiązania zadań**

1. Po zastosowaniu operacji (1) do wszystkich wierzchołków ostrosłupa sześciokątnego otrzymamy bryłę o 13 ścianach i 19 wierzchołkach.
2. Po zastosowaniu operacji (2) do jednej z ścian sześciokątnych otrzymamy bryłę o 9 wierzchołkach i 9 ścianach.
3. Ściana po zastosowaniu operacji (1) na czterech jego wierzchołkach staje się bryłą o 24 krawędziach, 16 wierzchołkach i 10 ścianach.
4. Stosujemy operację (1) do wszystkich wierzchołków sześciokątnych z wyjątkiem dwóch, które są konicami jego dowolnej przekątnej. Otrzymana bryła ma ściany siedmiokątne i siedmiokątne, ponadto żadne dwie ściany trójkątne nie mają wspólnej krawędzi.
5. Jeden z wielościanów półforemnych, dwudziestoscián ścięty (przy pominięciu wygładzającym piłkę nożną), ma 12 ścian sześciokątnych. Za pomocą operacji (2) nadmiarowe sześciokątne ściany zastępujemy trójkątnymi.
6. W graniastostupie, którego podstawą jest osmiościán  $ABCDEFGH$ , wykonujemy operację (1) na wierzchołkach  $A, B, E, F$ .
7. Po zastosowaniu operacji (2) do drugiej ściany bocznej graniastostupa sześciokątnego otrzymamy bryłę ma stopień 4. w której każdy wierzchołek

# Maths Beyond Limits



Rusza ósma edycja międzynarodowego obozu matematycznego Maths Beyond Limits! Obóz odbywa się we wrześniu w polskich Beskidach i jest przeznaczony dla uczniów w wieku licealnym. Jeśli interesujesz się matematyką i chciałbyś poznać jej pasjonatów z innych krajów, ten obóz jest właśnie dla Ciebie! Wszystkich chętnych zapraszamy do wzięcia udziału w rekrutacji, która rozpocznie się **1 kwietnia** 2023 i będzie trwała przez miesiąc.

## Dowiedz się więcej!



[mathsbeyondlimits2023@gmail.com](mailto:mathsbeyondlimits2023@gmail.com)



<https://mathsbeyondlimits.eu/>



Maths Beyond Limits



[maths\\_beyond\\_limits](https://www.instagram.com/mathsbeyondlimits)

