delta

Zdobywca Nagrody Głównej w konkursie Popularyzator Nauki 2024

$h=6{,}63\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ $\pi=3{,}141592\ldots$

NR 4 (611) 2025
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PA ISSN 0137-3005 | NR-ND 85 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Gdzie tu jest graf?
str. 13

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

ISSN 0137-3005

Nakład: 2700 egz.

SPIS TREŚCI
NUMERU 4 (611) 2025

Matematyczne granice? Nie tutaj! str. 1

Prawo Benforda
Owen Barron str. 2

Twierdzenie Hilberta o nierozkładalności
Navid Safaei, Radosław Żak str. 4

Policjanci i złodziej
Alexandru Benescu str. 6

Poza klasycznymi ograniczeniami: moc i potencjał obliczeń kwantowych
Pranav Challa str. 8

Zadania str. 9

Kilka dowodów twierdzenia Fermata o sumie dwóch kwadratów
Maryna Spektrova str. 10

Gdzie tu jest graf?
Sylwia Sapkowska str. 13

Aktualności
Na twardo, na miękko… i w sam raz str. 17

Po pierwsze: śmiać się
Marta Fikus-Kryńska str. 18

Kąt Otwarty: $14 = 2 \cdot 7$
Bartłomiej Pawlik str. 19

Klub 44 str. 20

Niebo w kwietniu str. 22

Prosto z nieba: Znowu ta szczelina str. 23

Obroty o pewne szczególne kąty
Bartłomiej Bzdęga str. 25

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej obchodził niedawno jubileusz ćwierćwiecza. Z tej okazji w przyszłym numerze będziemy gościć autorów z tej uczelni.

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej; dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW; prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem LaTeX wykonała Redakcja.
Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.
www.ado.com.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł; wcześniejsze egzemplarze 4 zł

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Visegrad Fund

Projekt jest współfinansowany przez rządy Czech, Węgier, Polski i Słowacji za pośrednictwem Grantów wyszehradzkich z Międzynarodowego Funduszu Wyszehradzkiego. Misją funduszu jest promowanie pomysłów na zrównoważoną współpracę regionalną w Europie Środkowej.

Matematyczne granice? Nie tutaj!

Matematyka nie zna granic – ani geograficznych, ani intelektualnych. Dowodem na to jest Maths Beyond Limits (MBL) – międzynarodowy obóz dla licealistów pasjonujących się matematyką. To miejsce, gdzie młodzi entuzjaści z całego świata spotykają się, by razem zgłębiać fascynujące, nieszkolne obszary tej dziedziny, rozwijać umiejętności analityczne i kreatywne, a przede wszystkim dzielić się swoją pasją. MBL tworzy otwartą i wspierającą społeczność, w której matematyka jest nie tylko wyzwaniem intelektualnym, ale także inspiracją do odkrywania nowych ścieżek w nauce i w życiu.

Matematyczne wyzwania i nie tylko

MBL 2024, dziewiąta edycja tego niezwykłego wydarzenia, odbyła się w malowniczej Rycerce Dolnej w dniach 8–21 września. Wzięło w niej udział 60 uczestników i 24 tutorów aż z 29 krajów, od Europy po Azję i Amerykę. Każdy dzień obozu wypełniony był intensywną pracą umysłową: poza trzema 80-minutowymi blokami zajęć matematycznych prowadzonych przez doświadczonych tutorów uczestnicy mieli także godzinny TAU (Time Academic Unscheduled) – czas przeznaczony na samodzielne rozwiązywanie problemów i konsultacje z tutorami. Sami uczestnicy mieli też okazję uczyć się od siebie nawzajem – niektórzy z nich prezentowali swoje ulubione zagadnienia w ramach półgodzinnych odczytów. To właśnie z tych wykładów i prezentacji wywodzą się artykuły, które znajdziecie na kolejnych stronach tego numeru. Ich autorami są tutorzy obozu, którzy podzielili się swoją wiedzą na temat fascynujących zagadnień matematycznych omawianych podczas MBL.

Nie tylko matematyka

MBL to jednak coś więcej niż matematyczne wyzwania. Po intensywnym wysiłku intelektualnym następowały wieczorne zajęcia – pełne zabawy, wyzwań i inspiracji, często organizowane przez samych uczestników – od warsztatów artystycznych po dyskusje filozoficzne. Nie zabrakło także sportu – od biegania i ćwiczeń po mecze siatkówki, piłki nożnej i frisbee – oraz pełnego emocji Puzzle Hunt, czyli drużynowego maratonu zagadek logicznych.

Dołącz do społeczności MBL!

Jeśli jesteś w liceum, czujesz, że matematyka to Twoja pasja i chcesz doświadczyć nauki w zupełnie nowym wymiarze, **nie przegap szansy na udział w kolejnej edycji**! Jeśli już skończyłeś szkołę, nic straconego – poszukujemy również prowadzących zajęcia! Rekrutacja ruszyła 1 kwietnia. Więcej informacji znajdziesz na mathsbeyondlimits.eu oraz w mediach społecznościowych.

Przekraczaj granice matematyki – i własne!

Organizatorzy MBL

Uczestnicy MBL 2024

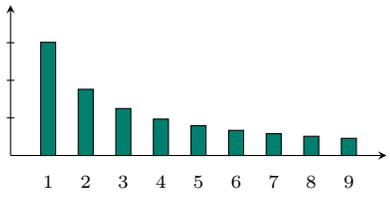
Prawo Benforda

*Owen BARRON**

* Coláiste an Spioraid Naoimh, University College Cork Maths Enrichment Program

Po raz pierwszy natknąłem się na prawo Benforda podczas lektury pewnej książki z matematycznymi ciekawostkami. Zafascynowały mnie prostota i ogólność tej zasady – zwłaszcza że na pierwszy rzut oka wydała mi się zaskakująca, wręcz oderwana od rzeczywistości.

Czym zatem jest prawo Benforda? To interesujące i dla wielu sprzeczne z intuicją zjawisko statystyczne występujące w zbiorach danych, które obejmują kilka rzędów wielkości. Jego podstawowym objawem jest to, że pierwsza cyfra liczb w takich zbiorach znacznie częściej jest mała (np. 1 lub 2) niż duża (np. 8 lub 9). Innymi słowy: częstość występowania poszczególnych cyfr jest zauważalnie przesunięta w stronę mniejszych wartości. Zgodnie z tym prawem cyfra 1 pojawia się jako pierwsza w około 30% przypadków, podczas gdy cyfra 9 jedynie w 5%! W ogólności prawo Benforda stwierdza, że częstotliwość występowania na pierwszym miejscu cyfry d w danych zapisanych w systemie dziesiętnym, obejmujących kilka rzędów wielkości, jest równa w przybliżeniu $\log_{10}(d+1) - \log_{10} d$ (rys. 1). Określone tym wzorem częstości występowania noszą nazwę *rozkładu Benforda*.



Rys. 1. Częstości występowania poszczególnych cyfr według prawa Benforda

Zakres stosowalności prawa Benforda jest zaskakująco szeroki: może dotyczyć zarówno wysokości stu najwyższych budynków, jak i długości rzek. Pojawia się także w czysto matematycznych kontekstach – rozkład Benforda odnajdziemy wśród pierwszych cyfr ciągu Fibonacciego, kolejnych potęg liczby 2 czy ciągu powstałego przez naprzemienne mnożenie przez 2 i 3. Należy tu zaznaczyć, że choć warunek „obejmowania kilku rzędów wielkości" wygląda niepozornie, to jest niezwykle istotny. Dla przykładu, liczba stron w książkach nie spełnia prawa Benforda, ponieważ zdecydowana większość książek ma od 200 do 600 stron.

Po usłyszeniu o prawie Benforda po raz pierwszy byłem zdumiony – jak coś tak jawnie asymetrycznego może być aż tak powszechne? Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie intuicyjnego, a po części również formalnego, wyjaśnienia, dlaczego to prawo obowiązuje. Opowiemy także o jego historii oraz zaskakujących zastosowaniach.

Po raz pierwszy prawo Benforda zostało odkryte w 1881 roku przez... Simona Newcomba, kanadyjsko-amerykańskiego astronoma. Zauważył on, że początkowe strony tablic logarytmicznych, używanych do obliczeń, były znacznie bardziej zużyte niż końcowe. Wysunął hipotezę, że powodem był fakt, iż dane, na których naukowcy przeprowadzali obliczenia, miały tendencję do zawierania liczb o niższych początkowych cyfrach. Newcomb opublikował w *American Journal of Mathematics* krótką notatkę na temat tego zjawiska, zawierającą teoretyczne prawdopodobieństwa wystąpienia kolejnych cyfr, a także nieformalny argument wyjaśniający jego prawdziwość. Notatka nie zyskała jednak większego rozgłosu.

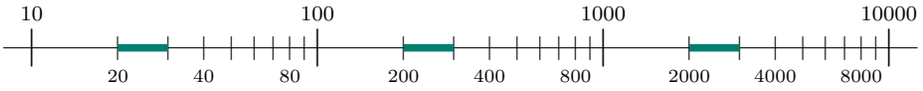
Ponad pięćdziesiąt lat później, w roku 1938, prawo to zostało niezależnie odkryte na nowo przez Franka Benforda. Benford pracował jako fizyk w firmie General Electric, gdy dostrzegł ten sam wzorzec w taki sam sposób jak wcześniej Newcomb (tzn. przez inspekcję tablic logarytmicznych). Poszedł on jednak o krok dalej w swojej analizie i zebrał dane dotyczące kilkunastu różnych cech (np. populacje państw), obejmujące łącznie ponad 20 000 obserwacji. Wykorzystał je w artykule, który opublikował w *Proceedings of the American Philosophical Society*, trafnie zatytułowanym „The Law of Anomalous Numbers". Nazwa ta się nie przyjęła, a prawo zostało nazwane na cześć Benforda, co stanowi kolejny przykład działania tzw. prawa Stiglera w świecie matematyki.

Prawo Stiglera mówi, że odkrycia względnie rzadko noszą nazwiska osób, które ich dokonały. Jednym z przykładów jest właśnie prawo Stiglera.

W tym momencie Czytelnik może wciąż być sceptyczny wobec zasadności prawa Benforda – ale to, co na pierwszy rzut oka może wydawać się niedorzeczne, na szczęście ma proste i intuicyjne wyjaśnienie. Załóżmy, że mamy zbiór liczb obejmujących wiele rzędów wielkości. Powiedzmy, że oczekujemy, iż dane są równomiernie rozłożone pomiędzy możliwymi rzędami wielkości – np. w przedziale $[100, 1000]$ znajduje się mniej więcej tyle samo elementów co w przedziale $[1000, 10\,000]$. Na skali logarytmicznej te dwa przedziały

mają tę samą długość $\log_{10} 10 = 1$. Przez ekstrapolację możemy oczekiwać, że dla dowolnych dwóch odcinków o równej długości na skali logarytmicznej liczba elementów w każdym z nich jest mniej więcej taka sama. Innymi słowy – oczekujemy, że punkty odpowiadające danym są równomiernie rozłożone na skali logarytmicznej. Zbiór liczb, których reprezentacja w systemie dziesiętnym zaczyna się od cyfry d, jest rozłączną sumą odcinków o długości $\log_{10}(d+1) - \log_{10} d$, co prowadzi nas do prawdopodobieństw opisanych przez prawo Benforda.

Odsyłamy Czytelnika do artykułu *Od mnożenia do dodawania* (Δ^1_{25}) w celu uzyskania dodatkowych interesujących informacji na temat skali logarytmicznej.



Rys. 2. Kolorowe odcinki o długości $\log_{10}(3/2)$ odpowiadają liczbom, których pierwszą cyfrą jest cyfra 2

Zaznaczmy, że powyższe rozumowanie nie stanowi pełnego *dowodu poprawności* prawa Benforda. Teoretycy mogą protestować, że nie istnieje „równomierny rozkład" na całej, nieskończonej skali logarytmicznej, zaś praktycy zapytają, czemu *w ogóle* koncentrujemy się na równomiernym rozkładzie w skali logarytmicznej – czy jest to prawo przyrody, czy może wynika to również z matematycznych twierdzeń z rodzaju centralnego twierdzenia granicznego? Czytelnikom, którzy czują w tym względzie niedosyt, polecamy artykuł Teda Hilla *A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law*, opublikowany w „Statistical Science" w 1995 roku.

Jak na obserwację natury matematycznej, prawo Benforda ma zaskakująco wiele bezpośrednich zastosowań. Najważniejsze z nich dotyczą wykrywania oszustw – można go użyć jako wstępnego testu w celu wykrycia ewentualnych nieprawidłowości. Liczby zawarte w księgach rachunkowych zazwyczaj spełniają prawo Benforda, gdyż faktycznie często obejmują kilka rzędów wielkości. Jeżeli natomiast księgi zawierałyby sfałszowane liczby generowane losowo przez komputer lub ręcznie, to można wtedy oczekiwać dość równomiernego rozkładu cyfr wiodących (czyli innego niż rozkład Benforda). Po pierwszym zetknięciu się z prawem Benforda śledczy finansowy Darrell D. Dorrell natychmiast zaczął stosować je w prowadzonych przez siebie sprawach. Doprowadziło to do skutecznego skazania doradcy finansowego Wesley'a Rhodesa, który zdefraudował miliony dolarów z funduszy swoich inwestorów. Prawo Benforda jest regularnie wykorzystywane jako pierwszy wskaźnik lub sygnał ostrzegawczy dotyczący oszustw finansowych – jeśli liczby w rejestrach bankowych go nie spełniają, oznacza to, że warto dokonać ich dokładniejszej analizy.

Innym, niezwykle interesującym zastosowaniem było odkrycie ukrytej sieci botów na Twitterze. Badanie takie wykonała Informatyczka Jennifer Golbeck w 2015 roku. Dla testowanego konta sprawdzano, ile obserwujących ma każde z kont, które je obserwuje, a następnie badano, czy otrzymane liczby pochodzą z rozkładu Benforda. W większości przypadków otrzymano zgodność. Jednak niewielki odsetek badanych kont nie wykazywał zgodności z tym wzorcem. Wskazano 170 takich kont do dalszego zbadania poprzez analizę historii postów oraz kont obserwujących. Spośród wszystkich 170 kont jedynie 2 wydawały się należeć do prawdziwych użytkowników. Reszta kont miała obserwujących wśród pozostałych podejrzanych kont i publikowała wyraźnie zautomatyzowane lub budzące podejrzenia posty.

Jak już podkreślaliśmy, prawo Benforda nie stosuje się do każdego rodzaju danych. Dobrym i nieoczywistym przykładem jest wykrywanie fałszerstw wyborczych. Przyczyna jest następująca: okręgi wyborcze zazwyczaj mają podobną liczbę mieszkańców. Jeśli więc jeden kandydat oczekuje uzyskania określonego poparcia w każdym z tych okręgów, rozkład pierwszych cyfr będzie ograniczony do zakresu, który niekoniecznie pasuje do prawa Benforda. Po wyborach prezydenckich w USA w 2020 roku zwolennicy teorii spiskowych zauważyli, że liczba głosów oddanych na Joe Bidena w niektórych okręgach nie spełniała prawa Benforda. Traktowali tę obserwację jako dowód na sfałszowanie wyborów, jednak – z powodów wymienionych powyżej – ich wątpliwości nie były uzasadnione. Podobną ostrożność należy zachować w przypadku oszustw finansowych – jeśli firma sprzedaje dużą liczbę produktów w tej samej cenie, rozkład cyfr w rachunkach będzie skupiony wokół pierwszej cyfry tej ceny.

Na koniec dodajmy, że prawo Benforda można również sformułować dla drugiej cyfry znaczącej. Wówczas rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia kolejnych cyfr jest bardziej „płaski" – w tym przypadku różnica w częstości występowania między 0 a 9 wynosi już tylko około 3 punktów procentowych – ale nadal powinna być zauważalna w wystarczająco dużych zbiorach danych. W zastosowaniu prawa Benforda do wyborów to właśnie to uogólnienie, w połączeniu z prawem dla pierwszej cyfry, pozwala na znacznie bardziej wiarygodny test, czy doszło do oszustwa. Na drugą cyfrę nie ma już (tak dużego) wpływu podobieństwo populacji wyborców pomiędzy okręgami wyborczymi. Co nie zaskakuje, rozkład dla n-tej cyfry staje się coraz bardziej płaski wraz ze wzrostem n.

Można dość prosto uzasadnić, że prawo Benforda zostaje zachowane, gdy dane zostaną wyrażone w innych jednostkach lub w systemie o innej podstawie liczbowej. Ta tematyka jest bogata w ciekawe wyniki – innym fascynującym przykładem jest prawo Zipfa dotyczące częstości występowania słów w tekstach. Nadal jestem zaskoczony za każdym razem, gdy prawo Benforda pojawia się w moim codziennym życiu – jeśli zaczniesz go szukać, możesz zacząć dostrzegać przykłady wszędzie wokół siebie!

Twierdzenie Hilberta o nierozkładalności

Navid SAFAEI, Radosław ŻAK***

*Dyrektor oddziału Matematyka Olimpijska w Salam Schools Complex, Teheran, Iran
Instytut Matematyki i Informatyki, Bułgarska Akademia Nauk, Sofia
**Doktorant, Uniwersytet Oksfordzki

Teoria liczb jest jedną z dziedzin matematyki najchętniej pożyczających metody z innych obszarów. Jednym ze źródeł takich zapożyczeń jest analiza matematyczna. W ostatnich latach analityczna teoria liczb zyskała na popularności, nawet w kontekście olimpiad matematycznych: ciekawy wybór dostępnych metod przedstawił Tomasz Kobos w Δ^3_{16}. Jednak „obce" teorii liczb pojęcia granic, szeregów, zbieżności i pochodnych mogą nieco onieśmielać osoby rozpoczynające przygodę z tą dziedziną. Jedną z zalet twierdzenia Hilberta o nierozkładalności (w skrócie THN) jest to, że stanowi ono zrozumiałe, teorioliczbowe opakowanie dla głębokich rozważań z zakresu analizy czy też geometrii algebraicznej.

Przypomnijmy, że *wielomian dwóch zmiennych* $P(x,y)$ to skończona suma jednomianów, z których każdy ma postać $a_{ij}x^iy^j$. W dalszej części liczby a_{ij} będą całkowite; zbiór wszystkich takich wielomianów oznaczamy przez $\mathbb{Z}[x,y]$. Wśród przykładów mamy takie wielomiany, jak x^3-y^2, $x^2-2xy+2y^2$ czy $x^3-x^2y+y^4+1$. Innym przykładem jest y^3-2y+1, mimo że nie zawiera on zmiennej x, na co warto zwrócić uwagę. Mamy też odpowiednie pojęcie stopnia dla wielomianów dwóch zmiennych – z definicji, stopień jednomianu $a_{ij}x^iy^j$ to $i+j$, a *stopień wielomianu* to maksimum stopni jego jednomianów. Możemy też zdefiniować *stopień względem konkretnej zmiennej*: stopień $P(x,y)$ względem x to po prostu zwykły stopień, jeśli tylko zapomnimy, że y jest zmienną. Na przykład dla wielomianu $P(x,y)=x^3-x^2y^3+y^4+2$ mamy:

$$\deg P(x,y)=5,\quad \deg_x P(x,y)=3,\quad \deg_y P(x,y)=4.$$

Tak jak w przypadku jednej zmiennej, wielomian $P(x,y)$ nazywamy *rozkładalnym* – jeśli można go zapisać jako iloczyn $P_1(x,y)\cdot P_2(x,y)$ dwóch niestałych wielomianów, oraz *nierozkładalnym* – w przeciwnym przypadku. Znane narzędzie zwane lematem Gaussa implikuje, że jeśli $P(x,y)$ ma współczynniki całkowite i rozkłada się jako iloczyn $P_1(x,y)\cdot P_2(x,y)$ wielomianów o współczynnikach **wymiernych**, to możemy również znaleźć rozkład o współczynnikach **całkowitych**.

Podobnie jak dla liczb pierwszych i całkowitych, wielomiany nierozkładalne można traktować jako cegiełki, z których zbudowane są pozostałe wielomiany. Istotnie, każdy wielomian $P(x,y)$ można zapisać jako iloczyn $Q_1(x,y)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot Q_k(x,y)^{\alpha_k}$, dla pewnych wielomianów nierozkładalnych $Q_1,\ldots,Q_k$ i pewnych dodatnich wykładników całkowitych α_i. Możemy teraz przedstawić tytułowe twierdzenie:

Zainteresowany Czytelnik może znaleźć dowód THN w artykule:
M. Villarino, W. Gasarch, K. Regan, *Hilbert's Proof of His Irreducibility Theorem*, Amer. Math. Monthly (2018), doi.org/10.1080/00029890.2018.1448181, arXiv:1611.06303.

Twierdzenie 1 (Hilbert)**.** *Niech $P(x,y)$ będzie wielomianem nierozkładalnym o współczynnikach całkowitych, zależnym od zmiennej x (tzn. $\deg_x P(x,y)>0$). Wtedy dla nieskończenie wielu liczb całkowitych t wielomian $f_t(y):=P(t,y)$ (jednej zmiennej) również jest nierozkładalny, a ponadto $\deg f_t=\deg_y P(t,y)$.*

Prosty przykład: $Q(x,y)=y^2-x$ jest nierozkładalny. Jeśli podstawimy $t=1$, to otrzymany wielomian $Q(1,y)=y^2-1$ rozłoży się jako $(y-1)(y+1)$. Jednak nietrudno zauważyć, że taki rozkład ma miejsce dokładnie wtedy, gdy t jest kwadratem – wystarczy więc wybrać dowolne t, które kwadratem nie jest, a otrzymamy wielomian nierozkładalny. Możemy pójść o krok dalej.

Stwierdzenie 2. *Załóżmy, że $R(x)$ jest takim wielomianem o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej liczby całkowitej t liczba $R(t)$ jest kwadratem. Wtedy istnieje wielomian $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych spełniający tożsamość $R(x)=Q(x)^2$.*

Dowód. Rozważmy wielomian $P(x,y)=y^2-R(x)$ i przypuśćmy, że jest on nierozkładalny. Wtedy na mocy THN możemy znaleźć taką liczbę całkowitą t, że $P(t,y)$ jest nierozkładalny. Wiemy jednak, że $R(t)=a^2$ dla pewnego a, więc $P(t,y)=y^2-a^2=(y-a)(y+a)$ jest rozkładalny. Otrzymana sprzeczność oznacza, że $P(x,y)$ jest rozkładalny.

Możemy więc tak dobrać niestałe wielomiany P_1, P_2 o współczynnikach całkowitych, by $P(x,y) = P_1(x,y)P_2(x,y)$. Gdyby $\deg_y P_1 = 0$ (tzn. P_1 nie zawiera y), to P_1 zależałby tylko od x i musiałby dzielić współczynnik przy y^2 w $P(x,y)$. Ale ten współczynnik to 1, więc jest to niemożliwe. Jako jedyna możliwość pozostaje, że zarówno P_1, jak i P_2 są liniowe względem y (jako że $\deg_y P(x,y) = 2$). Wtedy jednak, analizując ponownie współczynnik wiodący, otrzymujemy postać $P_1(x,y) = y + Q_1(x)$, $P_2(x) = y + Q_2(x)$ dla pewnych wielomianów Q_1, Q_2 (współczynniki wiodące mnożą się do 1, a w razie potrzeby możemy oba nasze wielomiany domnożyć przez -1). Stąd

$$\begin{aligned} y^2 - R(x) = P(x,y) = P_1(x,y)P_2(x,y) &= (y + Q_1(x))(y + Q_2(x)) \\ &= y^2 + y(Q_1(x) + Q_2(x)) + Q_1(x)Q_2(x). \end{aligned}$$

Porównując współczynniki, dostajemy $Q_1(x) + Q_2(x) = 0$, a więc $R(x) = -Q_1(x)Q_2(x) = Q_1(x)^2$. □

Możemy udowodnić jeszcze mocniejsze sformułowanie. W tym celu jednak będziemy musieli się powołać na następujący niewinnie wyglądający fakt. Warto zaznaczyć, że nie jest wcale łatwy do wykazania; jeden z jego dowodów wykorzystuje twierdzenie Czebotariowa.

Twierdzenie 3. *Jeśli $f(x)$ jest wielomianem nierozkładalnym o współczynnikach całkowitych oraz $\deg f \geqslant 2$, to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, które nie dzielą $f(t)$ dla dowolnej liczby całkowitej t.*

Pozostała część artykułu poświęcona jest dowodowi następującego twierdzenia:

Więcej o twierdzeniu 4 można przeczytać tutaj:
H. Davenport, D. Lewis, A. Schinzel, *Polynomials of certain special types*, Acta Arith. (1964), eudml.org/doc/207456.

Twierdzenie 4. *Niech $P(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ będzie wielomianem o następującej własności: dla dowolnego niestałego ciągu arytmetycznego $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ liczb całkowitych możemy znaleźć indeks $i \in \mathbb{Z}$ oraz liczbę całkowitą y, dla których $P(a_i, y) = 0$. Wówczas istnieje wielomian $R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ spełniający tożsamość $P(x, R(x)) = 0$.*

Uogólnia to nasze stwierdzenie 2 na dwa sposoby. Po pierwsze, założenie nie musi już być spełnione dla wszystkich t, lecz jedynie dla wystarczająco wielu, by pokryć wszystkie możliwe ciągi arytmetyczne. Po drugie, w miejsce wielomianu y^2 możemy przyjąć jakikolwiek inny. Na końcu artykułu proponujemy Czytelnikowi zadanie, które ilustruje tę ostatnią obserwację.

Dowód twierdzenia 4. Zauważmy najpierw, że założenie o ciągach arytmetycznych tak naprawdę daje nam nieskończenie wiele indeksów i, dla których $P(a_i, y) = 0$ ma rozwiązanie y. Istotnie, na pewno możemy znaleźć jedno takie i, ale wtedy ciąg $a'_j := a_{i+1+2j}$ (zawierający nieparzyste wyrazy (a_n), gdy i jest parzyste, a parzyste wyrazy, gdy i jest nieparzyste) również jest arytmetyczny, a jednocześnie stanowi podciąg (a_n) niezawierający a_i. Korzystając z założenia, otrzymujemy w ten sposób nowy indeks, a następnie możemy tę procedurę powtarzać do woli.

Rozłóżmy $P(x,y)$ na iloczyn $Q_1(x,y) \cdot \ldots \cdot Q_k(x,y)$ nierozkładalnych wielomianów Q_j (niekoniecznie różnych). Jeśli któryś z czynników Q_j zależy wyłącznie od x, to możemy go pominąć, gdyż odpowiada jedynie za skończenie wiele wartości t, dla których $P(t,y) = 0$ ma rozwiązanie. Podobnie, gdy równanie $Q_j(x,y) = 0$ ma skończenie wiele rozwiązań (x,y) – w obu tych przypadkach wielomian $P' := P/Q_j$ spełnia zarówno założenia, jak i tezę twierdzenia dokładnie wtedy, gdy spełnia je wyjściowy wielomian P.

Możemy teraz użyć THN i znaleźć odpowiednie t_j $(j = 1, \ldots, k)$, dla których wielomiany $Q_j(t_j, y)$ są nierozkładalne, o tym samym stopniu względem y co $Q_j(x,y)$. Gdyby każdy z tych stopni wynosił 2 lub więcej, to z twierdzenia 3 otrzymalibyśmy liczby pierwsze spełniające $p_j \nmid Q_j(t_j, y)$ dla wszystkich j i y; możemy przy tym dobrać te liczby jako parami różne.

Chińskie twierdzenie o resztach pozwala nam teraz znaleźć rozwiązanie układu kongruencji $t \equiv t_j \pmod{p_j}$ dla $j = 1, \ldots, k$. Rozwiązanie to ma postać $t \equiv c \pmod{p_1 p_2 \ldots p_k}$ dla pewnego c; innymi słowy – zbiór rozwiązań tworzy

ciąg arytmetyczny $a_i = c + ip_1p_2 \dots p_k$. Wiemy, że dla pewnych i oraz y zachodzi $P(a_i, y) = 0$, a więc również $Q_j(a_i, y) = 0$ dla pewnego j. Z drugiej strony:

$$Q_j(a_i, y) \equiv Q_j(t_j, y) \not\equiv 0 \pmod{p_j},$$

więc otrzymujemy sprzeczność.

Stąd wniosek, że któryś czynnik Q_j jest liniowy względem y; bez straty ogólności niech będzie to Q_1. Możemy zapisać go w postaci $A(x)y + B(x)$ dla pewnych wielomianów A, B. Jak wspomnieliśmy, możemy przyjąć, że $Q_1(x, y) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y), zatem $A(x)$ dzieli $B(x)$ dla nieskończenie wielu wartości x. Ale to oznacza, że $A(x)$ dzieli $B(x)$ jako wielomian (żeby to zauważyć, można na przykład podzielić z resztą $B(x)$ przez $A(x)$). W konsekwencji $R(x) = -\frac{B(x)}{A(x)}$ jest wielomianem i ostatecznie $P(x, R(x)) = Q_1(x, R(x)) = 0$. □

Czytelnik Uważny spostrzeże, że w tezie twierdzenia 4 wielomian R ma jedynie współczynniki wymierne, a nie całkowite. Istotnie, na przykład dla $P(x, y) = x^2 + x - 2y$ dostaniemy $R(x) = \frac{x(x+1)}{2}$. Na koniec proponujemy więc zadanie ilustrujące, że w pewnych sytuacjach mimo wszystko R będzie miał współczynniki całkowite.

Zadanie. Załóżmy, że P, Q są dwoma wielomianami o współczynnikach całkowitych i o następującej własności: dla dowolnej liczby całkowitej n możemy znaleźć taką liczbę całkowitą m, że $P(n) = Q(m)$. Udowodnij, że wtedy istnieje wielomian $R(x)$ o współczynnikach wymiernych spełniający tożsamość $P(x) = Q(R(x))$. Jeśli ponadto wielomian $Q(\frac{x}{k})$ nie ma współczynników całkowitych dla żadnego $k \geqslant 2$, wykaż, że $R(x)$ ma współczynniki całkowite.

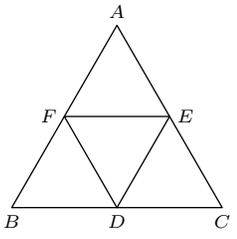
Policjanci i złodziej

*Alexandru BENESCU**

* Uczeń, Colegiul Național de Informatică Tudor Vianu, Rumunia

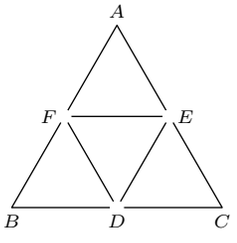
W tym artykule zajmiemy się następującym zagadnieniem.

Policjanci gonią złodzieja w pewnej wiosce, której uliczki tworzą trójkąt równoboczny wraz z jego środkowymi (rys. 1). Maksymalna prędkość złodzieja jest $\kappa > 0$ razy większa niż maksymalna prędkość policjantów. Zakładając, że wszyscy stale się widzą i ruch jest możliwy jedynie wzdłuż uliczek, należy określić, czy policjanci mogą schwytać złodzieja niezależnie od ich początkowego ustawienia.



Rys. 1

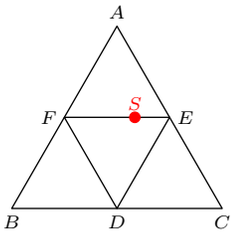
Rozpocznijmy rozwiązanie od analizy kilku prostych przypadków. Oznaczmy liczbę policjantów przez n. Załóżmy, że w wiosce znajduje się tylko jeden policjant, tj. $n = 1$. To banalny przypadek. Jeśli $\kappa < 1$ (tzn. złodziej jest wolniejszy od policjanta), policjant na pewno dościgne i schwyta złodzieja. Analogicznie, jeśli $\kappa \geqslant 1$, to złodziej może dowolnie długo uciekać przed policjantem, choćby biegając w cyklu $A \to B \to C \to A$ (rys. 1).



Rys. 2

Sytuacja zmienia się diametralnie (na korzyść wymiaru sprawiedliwości), gdy w pościgu bierze udział trzech (lub więcej) policjantów. Udowodnimy, że w tym przypadku schwytają oni złodzieja niezależnie od jego prędkości. Jedna ze strategii, które do tego doprowadzą, polega na jednoczesnym zajęciu punktów D, E i F (oznaczenia z rys. 1). W ten sposób policjanci podzielą całą wioskę na sześć spójnych części (składowych), jak pokazano na rysunku 2. W jednej z tych części znajduje się złodziej. Na jej krańcach (podobnie jak każdej innej części) znajdują się policjanci. Wystarczy, aby jeden z nich zaczął poruszać się (w ramach tej części) w stronę drugiego, a złodziej zostanie złapany.

Pozostaje rozważyć przypadek dwóch policjantów – ten jest bardziej wymagający. Udowodnimy najpierw, że dla $\kappa \leqslant 3$ policjanci zawsze złapią złodzieja. W tym celu jeden z policjantów będzie stale gonił rabusia – tego policjanta nazwiemy *gończym*. Jego jedynym zadaniem jest uniemożliwienie złodziejowi przyczajenia się na stałe w jednym miejscu. Dokładniej rzecz ujmując, musi on zadbać o to, by ostatnio odwiedzony przez złodzieja *punkt środkowy* zmieniał się w czasie (*punktami środkowymi* są punkty D, E lub F). Łatwo się przekonać, że aby to osiągnąć, wystarczy tylko jeden policjant.



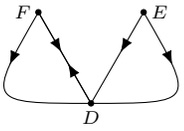
Rys. 3

Drugi policjant, którego nazwiemy *stróżem*, ma bardziej subtelne zadanie. Najpierw musi udać się do „stróżówki” znajdującej się w punkcie S, który dzieli odcinek EF w stosunku $1:2$ (rys. 3). Kiedy już tam dotrze, musi uważnie obserwować poczynania złodzieja. Zadaniem tego policjanta jest odcinanie drogi ucieczki złodzieja, gdy tylko jest to możliwe. Na przykład, jeśli złodziej wejdzie do „górnego naroża” $E-A-F$ przez punkt E, stróż musi uniemożliwić mu ucieczkę przez punkt F. Ma taką możliwość, gdyż $\frac{|EA|+|AF|}{|SF|} = 3 \geqslant \kappa$. Jest też pewien mały haczyk – w tym samym momencie, w którym złodziej powróci do punktu E, stróż musi ponownie znaleźć się w punkcie S. Jest to jednak możliwe

do zrealizowania, wystarczy, że stróż będzie poruszał się z prędkością *dokładnie* trzy razy mniejszą niż złodziej (z zachowaniem odpowiedniego kierunku).

Oto pełna lista możliwości stróża w zakresie kontrolowania ruchu złodzieja:

(a) jeśli złodziej wchodzi do $E-A-F$ przez E, nie może uciec przez F,
(b) jeśli złodziej wchodzi do $E-A-F$ przez F, nie może uciec przez E,
(c) jeśli złodziej wchodzi do $D-B-F$ przez D, nie może uciec przez F,
(d) jeśli złodziej wchodzi do $D-C-E$ *lub* $D-E$ przez D, nie może uciec przez E.



Rys. 4

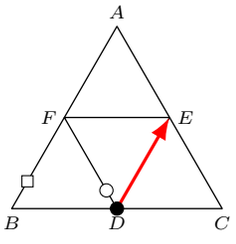
Jak już wiemy, *gończy* zmusza złodzieja do przechodzenia między punktami D, E i F. Warunki (a)–(d) nakładają poważne ograniczenia na kolejność, w jakiej punkty te będą odwiedzane:

- tylko punkt D może być odwiedzony bezpośrednio po E lub F,
- tylko punkt F może być odwiedzony bezpośrednio po D, i to *jedynie* przez krawędź $D-F$.

Te ograniczenia są zilustrowane na rysunku 4. Wynika stąd, że policjanci mogą zmusić złodzieja do biegania w cyklu $D \to F \to D$! Ale jak mogą go ostatecznie schwytać? Wystarczy przekazać gończemu jeszcze jedną instrukcję: ma on poruszać się po bokach trójkąta DFB tylko zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Nie zmienia to jego zdolności do utrzymywania złodzieja w ruchu i zmuszania go do zmiany punktów środkowych, ale w ten sposób gończy w końcu go dopadnie, gdy ten zacznie już poruszać się w cyklu. To kończy uzasadnienie, że w tym przypadku policjanci mają strategię wygrywającą.

Zauważmy, że wbrew swojej nazwie gończy może poruszać się dowolnie wolno. Musi jednak cechować się niemałą wytrwałością.

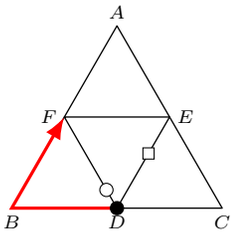
Udowodnimy teraz, że dla $\kappa > 3$ to złodziej jest na wygranej pozycji (przy odpowiednim początkowym ustawieniu). Zasadniczo jego strategia polega na rozpoczęciu w jednym z punktów D, E, F i przechodzeniu do innego z tych punktów za każdym razem, gdy zbliży się do niego któryś z policjantów. Spróbujmy opracować szczegóły tego podejścia.



Rys. 5. Czarny punkt przedstawia złodzieja, zaś białe punkty – policjantów (gończy jest oznaczony kółkiem)

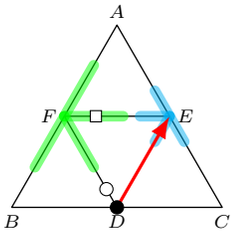
Załóżmy, że złodziej zaczyna w węźle D. Będzie tam czekał, dopóki jeden z policjantów (ponownie nazwijmy go gończym) nie zbliży się do niego na odległość mniejszą niż, powiedzmy, $\varepsilon = 0{,}2$ (zakładamy $|EF| = 1$). Wtedy złodziej próbuje przejść do E lub F. Bez straty ogólności załóżmy, że gończy zbliża się do złodzieja ze strony punktów B lub F. Przyjmijmy, że złodziej pokonuje odległość $|EF|$ w minutę. Rozważmy następujące przypadki:

(I) Jeśli drugi policjant uniemożliwia złodziejowi bezpośrednie przejście do F, to krawędź $D-E$ jest pusta, a zatem złodziej może dotrzeć do E w ciągu minuty – czyli szybciej niż każdy z policjantów (rys. 5).



Rys. 6

(II) Jeśli drugi policjant znajduje się na krawędzi $D-E$, to złodziej może dotrzeć do F w ciągu dwóch minut, zanim dotrze tam którykolwiek z policjantów (rys. 6). Zauważmy, że jeśli gończy znajduje się na odcinku BD, to złodziej może dotrzeć do F w ciągu zaledwie jednej minuty, ale nie ma to znaczenia dla naszej analizy.



Rys. 7

(III) W pozostałych przypadkach złodziej może bezpośrednio dotrzeć do E w minutę i do F maksymalnie w 2 minuty. Zauważmy, że gończy (który początkowo znajduje się blisko D) potrzebuje więcej niż 2 minuty, aby dotrzeć do dowolnego z tych punktów. Jeśli zaś chodzi o drugiego policjanta, rysunek 7 przedstawia dwa zbiory – jasnoniebieski to zbiór punktów, z których można dotrzeć do E w minutę, a jasnozielony to zbiór punktów, z których można dotrzeć do F w 2 minuty. Jasno widać, że przy założeniu $\kappa > 3$ te dwa zbiory nie przecinają się. Zatem złodziej może wybrać jeden z tych punktów, mając pewność, że dotrze tam przed drugim policjantem.

Oczywiście, jeśli złodziej może raz dokonać zmiany punktu środkowego, to może tak robić w nieskończoność. Możemy więc stwierdzić, że złodziej ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ i $\kappa \geqslant 1$ lub $n = 2$ i $\kappa > 3$. Rzecz jasna, problem ten można uogólnić na inne kształty wiosek, takie jak siatka 2×2 czy nawet siatka $N \times M$. Zachęcamy Czytelnika do przeanalizowania podobnych strategii dla tych przypadków.

Poza klasycznymi ograniczeniami: moc i potencjał obliczeń kwantowych

*Pranav CHALLA**

* Uczeń, Queen Elzabeth's School

Wyobraź sobie komputer łamiący zaledwie w kilka sekund kody, których odszyfrowanie klasycznym komputerom zajęłoby miliony lat. Wyobraź sobie komputer, który mógłby przetwarzać wiele różnych zestawów danych jednocześnie. To wszystko właśnie umożliwiają nam obliczenia kwantowe – dzięki wykorzystaniu praw mechaniki kwantowej (fundamentalnych zasad rządzących zachowaniem najmniejszych cząstek) i manipulacji ich niezwykłymi właściwościami zwiększają prędkości obliczeń do poziomów nieosiągalnych dla klasycznych komputerów.

Dwie kluczowe właściwości kwantowe, które omówię, to *superpozycja* i *splątanie*.

Superpozycja

Jak wiadomo, klasyczne komputery wykorzystują bity istniejące w stanie 0 lub 1, natomiast komputery kwantowe używają kubitów (bitów kwantowych), które dzięki zjawisku superpozycji mogą istnieć w stanach 0, 1 lub obu jednocześnie. Aby lepiej zrozumieć zjawisko superpozycji, przeanalizujmy jego matematyczne podstawy. Stan kwantowy można zapisać jako:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

α i β są tu liczbami zespolonymi spełniającymi warunek normalizacji $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Tutaj $|\alpha|^2$ i $|\beta|^2$ odpowiadają prawdopodobieństwom znalezienia kubitu w stanach $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

Na przykład stan $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ oznacza, że prawdopodobieństwa tego, że kubit po pomiarze znajdzie się w stanie $|0\rangle$ i $|1\rangle$, są równe.

Zjawisko superpozycji jest kluczowe dla obliczeń kwantowych, gdyż pozwala na równoczesne przetwarzanie danych. Ponieważ jeden kubit może przechowywać informacje o dwóch stanach jednocześnie, dwa kubity w superpozycji mogą reprezentować cztery stany ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), a n kubitów może reprezentować jednocześnie 2^n stanów. To umożliwia bardziej efektywne algorytmy wyszukiwania, takie jak algorytm Grovera, który może przeszukiwać N nieposortowanych elementów w czasie $\sqrt{N}$, przełamując klasyczny limit N wyszukiwań dla listy nieposortowanych elementów.

Algorytm Grovera działa poprzez proces znany jako *wzmocnienie amplitudy*. Wyobraźmy sobie zestaw 32 elementów, z których jeden jest oznaczony jako poprawny. Na początku ustawiana jest superpozycja 5 kubitów, z których każdy z 32 stanów odpowiada jednemu elementowi. Następnie stosowane są operatory kwantowe zwiększające prawdopodobieństwo wyboru poprawnego elementu. Proces ten jest powtarzany, aż wszystkich 5 kubitów odzwierciedli stan $|1\rangle$ lub $|0\rangle$, odpowiadający właściwemu elementowi.

Splątanie

Splątanie kwantowe to właściwość, dzięki której dwie cząstki kwantowe stają się ze sobą powiązane. Jeśli dwie cząstki są splątane, pomiar jednej dostarcza informacji o drugiej. Dobrym porównaniem jest para butów. Wyobraźmy sobie, że każdą parę butów umieszczamy w osobnym pudełku. Otwierając jedno pudełko i znajdując but lewy, możemy być pewni, że w drugim pudełku znajduje się but prawy. Różnica polega na tym, że buty nie mogą znajdować się w superpozycji, a kubity mogą.

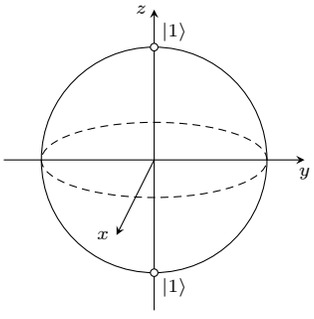
Rozważmy na przykład stan dwóch splątanych kubitów:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

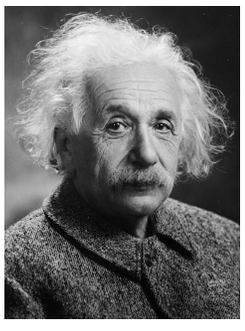
Jeśli jako wynik pomiaru pierwszego kubitu otrzymamy $|0\rangle$, to drugi kubit również będzie w stanie $|0\rangle$. Jeśli pierwszy kubit będzie w stanie $|1\rangle$, drugi

Niektóre algorytmy szyfrowania, na przykład RSA, oparte są na trudności rozkładu dużych liczb na czynniki pierwsze. W 1994 roku Peter Shor wskazał algorytm, który rozwiązuje to w czasie zaledwie $O(\log(N)^2)$. Więcej o algorytmie Shora można przeczytać w Δ_{17}^{12}.

Wszystkie możliwe stany kubitu można przedstawić jako punkty na sferze w trójwymiarowej przestrzeni. Bieguny tej sfery reprezentują stany $|1\rangle$ i $|0\rangle$, a *równik* reprezentuje stany będące w idealnej superpozycji. Ta reprezentacja została nazwana sferą Blocha na cześć fizyka Felixa Blocha.



Koncepcja cząstek natychmiastowo oddziałujących na siebie na odległość była tak nieintuicyjna, że Albert Einstein nazwał splątanie kwantowe „upiornym działaniem na odległość".



również będzie w $|1\rangle$. Ta korelacja występuje niezależnie od odległości między kubitami, co umożliwia poziom koordynacji nieosiągalny dla klasycznych bitów. Oznacza to, że prawdopodobieństwo zaobserwowania stanów $|01\rangle$ lub $|10\rangle$ jest równe 0.

Zastosowania splątania kwantowego są szeroko rozpowszechnione w algorytmach kwantowych. Na przykład splątanie kwantowe umożliwia zastosowanie supergęstego kodowania, czyli algorytmu kwantowego, który pozwala na przesyłanie większej liczby klasycznych bitów informacji przy użyciu mniejszej liczby kubitów. Innym zastosowaniem splątania kwantowego jest teleportacja kwantowa. Ten teoretyczny proces pozwala na transfer informacji za pośrednictwem splątanych cząstek. W tym procesie dwie strony – znajdujące się w dowolnej odległości od siebie – wykorzystują wspólny splątany stan do przekazania informacji o danym stanie kwantowym z jednej lokalizacji do drugiej. Proces ten nazywany jest teleportacją stanu kwantowego.

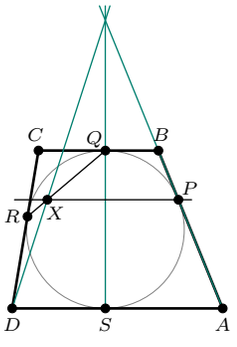
W 2012 roku naukowcom udało się osiągnąć teleportację kwantową na odległość 143 km, z La Palmy do Teneryfy, *arXiv:1205.3909 [quant-ph]*.

Obecna technologia kwantowa

Technologia kwantowa jest wciąż w fazie początkowej, ale dokonano już znaczących postępów. Duże firmy technologiczne, takie jak Google, IBM i Intel, budują komputery z coraz większą liczbą kubitów, jednak wciąż zmagają się z redukcją błędów. Obecnie dysponujemy urządzeniami NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum), które mają wystarczającą liczbę kubitów do pewnych obliczeń kwantowych, ale są podatne na błędy i dekoherencję. Naukowcy pracują nad technikami korekcji błędów i kodami korekcji kwantowej, by zmniejszyć dekoherencję. Długoterminowym celem jest budowa odpornych na błędy komputerów kwantowych, które znajdą zastosowanie w różnych branżach.

Największy komputer kwantowy na świecie to system 1180 kubitów opracowany przez Atom Computing. Każdy kubit jest neutralnym atomem, uwięzionym i kontrolowanym przez układ laserów.

Zadania



Przygotował Dominik BUREK

M 1813. Niech $ABCD$ będzie trapezem $(DA \| CB)$ opisanym na okręgu, który jest styczny do boków AB, BC, CD i AD odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Prosta przechodząca przez P i równoległa do podstaw trapezu przecina prostą QR w punkcie X. Udowodnić, że proste AB, QS i DX przecinają się w jednym punkcie.

M 1814. Dane są liczby a, $b > 1$, dla których

$$a + \frac{1}{a^2} \geqslant 5b - \frac{3}{b^2}.$$

Udowodnić, że $a > 5b - \dfrac{4}{b^2}$.

M 1815. Dane są liczby całkowite $n > 20$ i $k > 1$ takie, że $k^2 \mid n$. Udowodnić, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których

$$n = ab + bc + ca.$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1117. W szczelnie zamkniętm cylindrze, pod tłokiem znajduje się $m = 10$ g ciekłej wody. Bardzo szybkie przesunięcie tłoka powoduje spadek ciśnienia w cylindrze do wartości bliskiej zeru. Temperatura otoczenia i cylindra z wodą wynosi 0°C. Ile lodu wytworzy się w wyniku tego procesu? Można przyjąć, że początkowo pod tłokiem była wyłącznie ciekła woda. Ciepło topnienia wody $L_f \approx 334$ J/g, a ciepło parowania $L_v \approx 2260$ J/g.

F 1118. W szczelnym pojemniku znajduje się mieszanina helu i neonu. Mieszanina jest w równowadze termodynamicznej, przy czym liczby moli neonu i helu są takie same. W sciance pojemnika zrobiono bardzo mały otwór. Jaki będzie skład wiązki gazu uchodzącego z pojemnika tuż po wykonaniu otworu? W jednostkach masy atomowej masy atomowe wynoszą: helu $\mu_{\mathrm{He}} = 4$, a neonu $\mu_{\mathrm{Ne}} = 20$.

Rozwiązania na str. 24

Kilka dowodów twierdzenia Fermata o sumie dwóch kwadratów

*Maryna SPEKTROVA**

*Studentka, University of Cambridge

Zacznijmy od zaprezentowania dobrze znanego nam twierdzenia – bohatera tego artykułu.

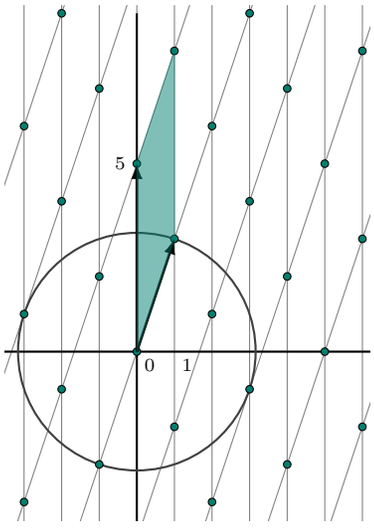
Twierdzenie (o sumie dwóch kwadratów, Fermat). *Nieparzysta liczba pierwsza p może być przedstawiona jako suma dwóch kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Zapis $n \equiv l \pmod k$ oznacza, że $n - l$ jest podzielne przez k. Innymi słowy, n i l dają tę samą resztę z dzielenia przez k.

Jednym z najbardziej interesujących aspektów tego twierdzenia jest duża liczba jego różnych dowodów, które łączą się z różnymi dziedzinami matematyki. W szczególności można je udowodnić za pomocą liczb Gaussa, skończonych i nieskończonych ciągów ułamków, lematu Thuego, metody nieskończonego schodzenia itd. W artykule zaprezentujemy trzy dowody: dwie interpretacje geometryczne oraz jeden dowód oparty na teorii aproksymacji.

Uwaga. Ponieważ dla każdej liczby całkowitej x zachodzi $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, żadna liczba dająca resztę 3 z dzielenia przez 4 nie może być przedstawiona jako suma dwóch kwadratów, dlatego dalej będziemy dowodzić tylko jednej implikacji.

Pierwszy dowód będzie oparty na lemacie dotyczącym krat równoległobocznych. Nie będziemy definiować tego pojęcia formalnie, zamiast tego pokażemy przykład takiej kraty na marginesie.



Przykład kraty danej przez wektory $(0, 5)$ i $(1, 3)$.

Lemat (Minkowski). *Rozważmy kratę równoległoboczną oraz figurę wypukłą Φ, która jest symetryczna względem początku układu współrzędnych. Przypuśćmy, że $S(\Phi) > 4S_0$, gdzie S_0 jest polem podstawowego równoległoboku, a $S(\Phi)$ polem figury Φ. Wówczas w Φ leży pewien punkt tej kraty, różny od początku układu współrzędnych.*

Rozważmy kratę równoległoboczną daną wektorami $\vec{u} = (1, m)$, $\vec{v} = (0, p)$, gdzie m jest liczbą spełniającą $p \mid m^2 + 1$ (dowód istnienia takiej liczby dla $p = 4k + 1$ znajduje się na marginesie).

Wskażemy liczbę naturalną m, spełniającą $p \mid m^2 + 1$. Użyjemy twierdzenia Wilsona, które mówi, że $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ dla każdej liczby pierwszej p.

Z tego twierdzenia wynika, że

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)! \\ &= 1\cdot 2 \cdot \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{p+1}{2}\right) \cdot \ldots (p-1) \\ &\equiv 1\cdot 2 \cdot \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p-1}{2}\right) \cdot \ldots (-1) \\ &= \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}} \\ &= \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \pmod p. \end{aligned}$$

Ostatni krok jest prawdziwy, ponieważ $p \equiv 1 \pmod 4$. Stąd $p \mid m^2 + 1$ dla $m = (\frac{p-1}{2})!$.

O dowodzie Zagiera pisał już Wojciech Czerwiński w Δ^7_{17}.

Zastosujmy teraz lemat Minkowskiego do koła o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt{2p}$. Ponieważ $S(\Phi) = 2\pi p > 4p = 4S_0$, w tym kole istnieje punkt kratowy A, czyli punkt postaci $x_0 \cdot \vec{u} + y_0 \cdot \vec{v} = (x_0, mx_0 + py_0)$ dla pewnych całkowitych x_0, y_0. Kwadrat odległości punktu A od początku układu współrzędnych wynosi

$$x_0^2 + (mx_0 + py_0)^2 = x_0^2 + m^2x_0^2 + 2mx_0py_0 + p^2y_0^2 = x_0^2(m^2 + 1) + p(2mx_0y_0 + py_0^2),$$

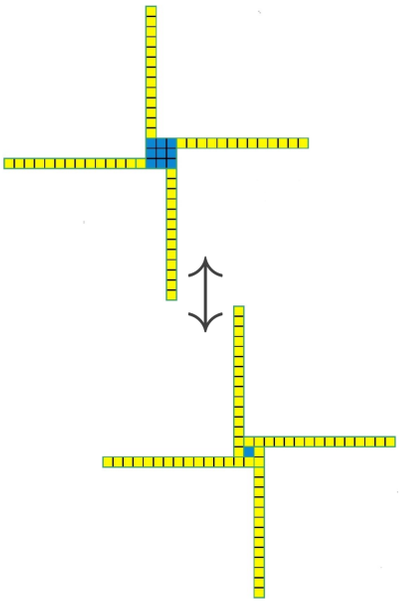
co jest podzielne przez p. Ponieważ A znajduje się wewnątrz koła o promieniu $\sqrt{2p}$, liczba ta mieści się w przedziale otwartym od 0 do $2p$, więc jest równa p. Dlatego poszukiwane dwa kwadraty to x_0^2 oraz $(mx_0 + py_0)^2$. □

Drugi dowód jest nazywany „jednozdaniowym dowodem Dona Zagiera” i rzeczywiście, gdy w 1990 roku został po raz pierwszy opublikowany, zawierał tylko jedno zdanie. Dla poprawienia czytelności przedstawiamy go tutaj nieco bardziej szczegółowo.

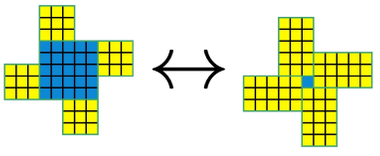
Rozważmy zbiór S zawierający wszystkie trójki (x,y,z) liczb naturalnych, które spełniają $x^2 + 4yz = p$. Oczywiste jest, że dla każdego p zbiór S jest skończony. Rozważmy następującą funkcję $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^3$:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & \text{gdy } x < y - z, \\ (2y - x, y, x - y + z), & \text{gdy } y - z < x < 2y, \\ (x - 2y, x - y + z, y), & \text{gdy } 2y < x. \end{cases}$$

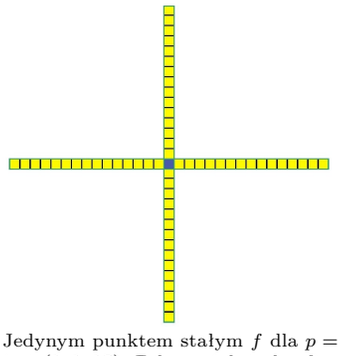
Trójki pojawiające się w poszczególnych przypadkach funkcji f nazwiemy odpowiednio trójkami pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju.



Przykład inwolucji dla $p = 61$
$((3, 1, 13) \leftrightarrow (1, 15, 1))$



Przykład inwolucji dla $p = 61$
$((5, 3, 3) \leftrightarrow (1, 3, 5))$



Jedynym punktem stałym f dla $p = 61$ jest $(1, 1, 15)$. Zobacz, jak ta konfiguracja różni się od $(1, 15, 1)$

O twierdzeniu Dirichleta o aproksymacji pisał Wojciech Czerwiński, w *Delta* 3/21.

Wykonując proste obliczenia, możemy łatwo sprawdzić, że:

- $f(S) \subseteq S$;
- f jest bijekcją, a nawet inwolucją, czyli $f(f(x, y, z)) = (x, y, z)$;
- Trójki pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju przechodzą odpowiednio na trójki trzeciego, drugiego i pierwszego rodzaju.

Teraz zbadajmy, które trójki $t \in S$ są punktami stałymi, tj. spełniają $f(t) = t$. Trójka może być punktem stałym tylko, jeśli jest drugiego rodzaju, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2y - x = x, \\ y = y, \\ x - y + z = z, \end{cases}$$

który upraszcza się do $x = y$. Wiemy, że $x^2 + 4yz = p$, więc $x^2 + 4xz = p$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą, łatwo otrzymujemy $x = y = 1, z = \frac{p-1}{4}$, zatem w S istnieje dokładnie jeden punkt stały, co oznacza, że S ma nieparzystą liczbę elementów.

Zauważmy, że elementy S możemy dobrać w pary w taki sposób, że trójka (x, y, z) jest w parze z (x, z, y). Ponieważ S ma nieparzyście wiele elementów, więc co najmniej jedna trójka jest sparowana sama ze sobą. Dla tej trójki (x_0, y_0, z_0) mamy $y_0 = z_0$, więc $p = x_0^2 + 4y_0^2 = x_0^2 + (2y_0)^2$. □

Bardzo interesująca jest geometryczna interpretacja funkcji f – co zaskakujące, opublikowana dopiero w 2007 roku. Dla każdej trójki z S możemy rozważyć kwadrat o boku x i dobudować do niego 4 prostokąty o bokach y i z, jak na rysunku. Każda taka figura („wiatrak” lub „kwadrat ze skrzydłami”) może być uzyskana w wyniku dwóch różnych cięć: jednego z mniejszym kwadratem i drugiego z większym. W ten sposób otrzymujemy inwolucję między wszystkimi trójkami w S (w rzeczywistości ta bijekcja to właśnie f), której punktami stałymi są krzyże. Ponieważ dla figury w kształcie krzyża p musi być podzielne przez długość boku głównego kwadratu, więc bok ten musi mieć długość 1. Istnieje zatem dokładnie jeden punkt stały. Teraz to samo rozumowanie co powyżej kończy dowód.

Trzeci dowód opiera się na następującym twierdzeniu. Intuicyjnie określa ono, jak dobrze możemy przybliżyć daną liczbę rzeczywistą liczbami wymiernymi o mianowniku nieprzekraczającym zadanej liczby całkowitej N.

Twierdzenie (o aproksymacji, Dirichlet). *Dla każdych $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ istnieją $r, q \in \mathbb{Z}$ takie, że:*

- $1 \leqslant q \leqslant N$ *oraz*
- $|\alpha - \frac{r}{q}| \leqslant \frac{1}{Nq}$.

Teraz rozważmy takie m, że $p \mid m^2 + 1$, i zastosujmy twierdzenie Dirichleta o aproksymacji dla $\alpha = \frac{m}{p}$ oraz $N = \lceil \sqrt{p} \rceil$. Otrzymujemy, że istnieją $q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}$ takie, że $1 \leqslant q \leqslant N$ oraz $|\frac{m}{p} - \frac{r}{q}| \leqslant \frac{1}{Nq}$, czyli $|mq - rp| \leqslant \frac{p}{N} < \sqrt{p}$.

Zdefiniujmy M jako $(mq - rp)^2 + q^2$. Łatwo sprawdzić, że $M \equiv m^2q^2 + q^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

- Przypadek 1: $q \neq N$
  Ponieważ zarówno $(mq - rp)^2$, jak i q^2 są mniejsze od p, więc $0 < M < 2p$. Ale M jest podzielne przez p, więc $M = p$, a zatem $p = (mq - rp)^2 + q^2$.
- Przypadek 2: $q = N$
  Łatwo jest wykazać, że $M < 3p$, więc $M \in \{p, 2p\}$. Jeśli $M = p$, to twierdzenie zostało już udowodnione, więc rozważmy przypadek $M = 2p$. Wtedy $(mq - rp)^2 > 2p - (\sqrt{p} + 1)^2 = (\sqrt{p} - 1)^2 - 2$, więc $|mq - rp| \in \{\lfloor \sqrt{p} - 1 \rfloor, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\} = \{q - 2,\ q - 1\}$. Ponadto w tym przypadku $|mq - rp|$ oraz q mają tę samą parzystość, więc $|mq - rp| = q - 2$, zatem $(q - 2)^2 + q^2 = 2p$, czyli $(q - 1)^2 + 1 = p$, co oznacza, że przedstawiliśmy p jako sumę dwóch kwadratów. □

Kiedy spojrzymy na pierwszy i trzeci dowód, możemy zauważyć kilka podobieństw. Czy to tylko przypadek? Okazuje się, że twierdzenie Dirichleta można wywnioskować z twierdzenia Minkowskiego. W tym celu rozważmy zbiór

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < N + \frac{1}{2}, |y - \alpha x| \leqslant \frac{1}{N} \right\}.$$

Zbiór S jest równoległobokiem o środku w początku układu współrzędnych i polu równym $2(N+\frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{N} > 4$, więc możemy zastosować twierdzenie Minkowskiego dla S na zwykłej kracie kartezjańskiej. Dostajemy, że S zawiera punkt całkowity (q,r) (z symetrii możemy wybrać q dodatnie), a te q, r spełniają warunek z twierdzenia Dirichleta.

Twierdzenie Jacobiego o sumie dwóch kwadratów. Nie tylko twierdzenie Fermata ma kilka zaskakujących dowodów. To samo jest prawdą również dla jednego z jego uogólnień. Następujące twierdzenie można udowodnić, używając form kwadratowych, funkcji eliptycznych lub liczb Gaussa, ale przedstawimy tutaj jedynie dowód przy użyciu funkcji tworzących.

Istnieje wiele kierunków, w których twierdzenie Fermata może być uogólnione lub rozwinięte: można badać liczby pierwsze postaci $x^2 + ny^2$; uzyskać kryterium dla wszystkich liczb naturalnych, by mogły być wyrażone jako suma dwóch kwadratów (twierdzenie o sumie dwóch kwadratów); rozważać większą liczbę kwadratów (twierdzenie Legendre'a o sumie trzech kwadratów, twierdzenie Lagrange'a o sumie czterech kwadratów) i wiele innych.

Twierdzenie (o sumie dwóch kwadratów, Jacobi). *Niech $r_2(n)$ oznacza liczbę sposobów wyrażenia liczby naturalnej jako sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Ponadto niech $d_k(n)$ oznacza liczbę naturalnych dzielników n, które dają resztę k modulo 4. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi:*

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)).$$

Uwaga. Ponieważ dla każdej liczby pierwszej postaci $p = 4k+1$ mamy $d_1(p) = 2$ oraz $d_3(p) = 0$, twierdzenie Fermata jest bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia.

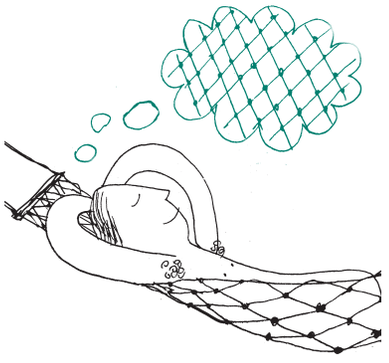
Nasz dowód tego twierdzenia (właściwie jedynie bardzo krótki szkic) będzie oparty na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie (potrójny iloczyn Jacobiego). *Dla dowolnych liczb zespolonych q i z spełniających $|q| < 1$ oraz $z \neq 0$ zachodzi następująca równość:*

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{2m}\right)\left(1 + q^{2m-1}z^2\right)\left(1 + q^{2m-1}z^{-2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}.$$

Korzystając z tego twierdzenia kilka razy, można udowodnić, że:

$$\begin{aligned} k^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^{4m})(1-x^{4m-3}k^2)(1-x^{4m-1}k^{-2}) & \\ + \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^{4m})(1-x^{4m-3}k^{-2})(1-x^{4m-1}k^2) & \\ = \prod_{m=1}^{\infty} (1-(-x)^m)(1+(-x)^m k)(1+(-x)^{m-1}k^{-1}). & \end{aligned}$$



Różniczkując obie strony tej równości względem k i podstawiając $k = -1$, otrzymujemy następującą równość:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^2 = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4n-3}}{1-x^{4n-3}} - \frac{x^{4n-1}}{1-x^{4n-1}} \right).$$

W rzeczywistości ta równość jest równoważna twierdzeniu Jacobiego. Aby to zobaczyć, przekształćmy najpierw prawą stronę. Standardowy wzór na sumę szeregu geometrycznego implikuje:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4n-3}}{1-x^{4n-3}} - \frac{x^{4n-1}}{1-x^{4n-1}} \right) & \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x^{(4n-3)k} - \sum_{k=1}^{\infty} x^{(4n-1)k} \Big) & \\ = \sum_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ k \in \mathbb{N}} (x^{(4n-3)k} - x^{(4n-1)k}) = \sum_{k=1}^{\infty} (d_1(k) - d_3(k)) x^k. & \end{aligned}$$

Teraz przekształćmy lewą stronę:

$$\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\Big)^2 = \big(\cdots + x^{(-1)^2} + x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots\big)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_2(k)x^k.$$

Zatem udowodniliśmy, że

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_2(k)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(4d_1(k) - 4d_3(k))x^k,$$

co kończy dowód twierdzenia Jacobiego. □

Paul Erdős, jeden z najwybitniejszych matematyków XX wieku, często mówił o Księdze, w której Bóg miałby przechowywać idealne dowody twierdzeń matematycznych. Powszechnie znane jest jego powiedzenie: „Nie musisz wierzyć w Boga, ale jako matematyk powinieneś wierzyć w Księgę". Jeśli taka Księga naprawdę istnieje, wierzę, że powyższe dowody, będące doskonałym przykładem głębokich powiązań między różnymi obszarami matematyki, z pewnością zasłużyłyby na szczególne w niej miejsce.

Gdzie tu jest graf?

*Sylwia SAPKOWSKA**

* Studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Algorytmy przeszukiwania grafów pojawiają się wszędzie. Bez nich nie działałaby Twoja ulubiona wyszukiwarka internetowa, a swoje „ścieżki w grafie" prawdopodobnie optymalizujesz podświadomie, na przykład planując swój dzień. Połączenia między Tobą, Twoimi przyjaciółmi i rodziną również tworzą graf, który gorączkowo przeszukujemy podczas spotkań towarzyskich.

Skoro algorytmy przeszukiwania grafów mają wiele zastosowań w codziennym życiu, nie powinno nas dziwić, że wiele zadań olimpijskich z matematyki można również rozwiązać, wykorzystując tę ideę.

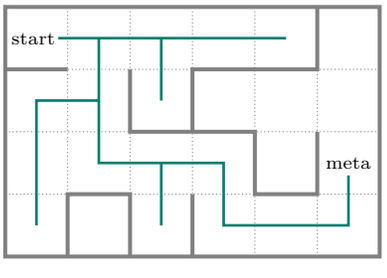
Przeszukiwanie w głąb

Zanim przejdziemy dalej, omówmy najprostszy algorytm przeszukiwania grafów – **przeszukiwanie w głąb**, w skrócie DFS (*depth first search*).

Możemy o nim myśleć jak o „spacerze" po grafie. Podczas wykonywania algorytmu przechowujemy informację o tym, czy dany wierzchołek został już odwiedzony. Zaczynamy od wybrania wierzchołka początkowego. Kiedy w trakcie wykonywania algorytmu znajdziemy się w jakimś wierzchołku v, wykonujemy następujące instrukcje:

1. Oznacz wierzchołek v jako odwiedzony.
2. Dla każdego sąsiedniego wierzchołka u aktualnego wierzchołka v, jeśli u **nie został** jeszcze odwiedzony – rekurencyjnie wykonaj tę procedurę dla u.
3. Po zbadaniu wszystkich sąsiednich wierzchołków v wróć do poprzedniego wierzchołka – tego, z którego przyszliśmy do v.

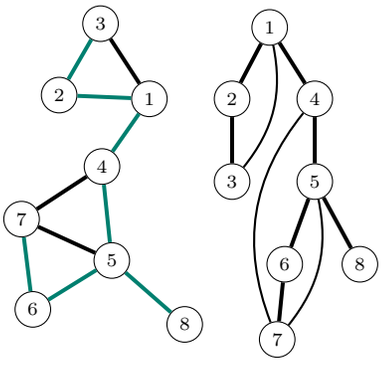
Pierwsza wersja przeszukiwania w głąb została wykorzystana w XIX wieku przez francuskiego matematyka Charlesa Pierre'a Trémaux jako strategia rozwiązywania labiryntów, jak ten poniżej. Komórki siatki można interpretować jako wierzchołki grafu. Krawędzie w grafie reprezentują wtedy możliwość ruchu, więc łączymy wierzchołki wtedy i tylko wtedy, gdy komórki reprezentowane przez te wierzchołki sąsiadują ze sobą bokiem.



O algorytmie DFS można myśleć analogicznie do zwiedzania. Wyobraź sobie, że jesteś turystą w tętniącym życiem mieście, trzymasz w rękach mapę i chcesz zobaczyć każdą ukrytą perełkę, jaką to miasto ma do zaoferowania. Zaczynasz od znanego muzeum, chłonąc sztukę i historię, po czym rozglądasz się za kolejnym, jeszcze nieodwiedzonym miejscem. Jeśli znajdziesz nową kawiarnię, urokliwą alejkę lub inny zabytek, udajesz się tam, ciesząc się nowymi widokami i dodając je do swojej „listy odwiedzonych miejsc". Gdy dojdziesz do punktu, w którym wszystko w okolicy zostało zwiedzone, czas wrócić – cofnąć się do ostatniego miejsca, które miało jeszcze niezbadane ścieżki. Stamtąd kontynuujesz przygodę, odkrywając nowe ciekawostki i poruszając się naprzód, aż w pełni zwiedzisz wszystkie możliwe miejsca. Ta metoda zwiedzania zapewnia, że nie ominiesz żadnej lokalizacji. W końcu odwiedzisz całe miasto, nie pozostawiając żadnego zabytku nieodkrytym ani żadnego zakątka niezbadanym! W przypadku

grafu spójnego dzieje się dokładnie to samo – po wykonaniu DFS stanie się on „całkowicie zwiedzony”. Łatwo zauważyć, że w czasie wykonywania algorytmu każdy wierzchołek ma trzy możliwe stany – albo nieodwiedzony (jeszcze nieosiągnięty przez DFS), odwiedzony (osiągnięty, ale nadal badany), albo całkowicie zbadany (wszyscy jego sąsiedzi zostali zbadani).

Powrót do zadań



Na rysunku po lewej stonie mamy graf z 8 wierzchołkami. Załóżmy, że rozpoczynamy DFS w wierzchołku 1. Jedna z możliwych tras może wyglądać następująco: $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 6 \to 5 \to 8 \to 5 \to 4 \to 1$. Zauważmy, że gdyby istniała krawędź między 3 a 4, to w tym przykładzie przeszlibyśmy z 3 do 4, zamiast wrócić do 2. Krawędzie, przez które przechodziliśmy do jeszcze nieodwiedzonego wierzchołka, tworzą drzewo rozpinające (te krawędzie są zaznaczone na czerwono na rysunku po lewej stronie). Rysunek po prawej stronie przedstawia ten sam graf z zaznaczonym ukorzenionym drzewem rozpinającym. Wszystkie dodatkowe krawędzie – nieużywane podczas przeszukiwania grafu – to krawędzie wsteczne.

Korzystając z algorytmu DFS, możemy podzielić krawędzie grafu na **krawędzie drzewowe**, zwane również krawędziami rozpinającymi (te, które są przechodzone podczas „spaceru”, tworząc ukorzenione drzewo rozpinające) oraz **krawędzie wsteczne** (pozostałe krawędzie, które zamykają cykle). Pomocne jest myślenie o krawędziach drzewowych jako skierowanych w dół, a o krawędziach wstecznych jako skierowanych w górę. Dlaczego takie podejście do analizy grafu jest pomocne? Aby to zobaczyć, udowodnijmy najważniejszą własność dotyczącą przeszukiwania grafu algorytmem DFS. Załóżmy, że mamy spójny graf G i wykonujemy DFS, zaczynając od dowolnego wierzchołka r.

Naszym celem jest pokazanie, że dla każdej krawędzi (u, v) wierzchołek v jest albo przodkiem, albo potomkiem u w drzewie DFS – co oznacza, że v albo leży na ścieżce od u do korzenia r, albo znajduje się w poddrzewie u. Dlaczego tak jest? Załóżmy, że istnieje krawędź (u, v) i bez utraty ogólności przeszukiwanie w głąb dotarło do u, podczas gdy v jest jeszcze nieodwiedzony. Wtedy:

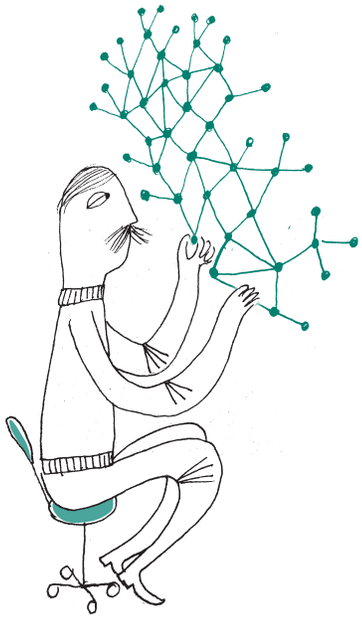
- Jeśli DFS przejdzie z u do v, używając (u, v), to (u, v) jest krawędzią drzewową.
- Jeśli przeszukiwanie nie przejdzie do v z u, używając krawędzi (u, v), to v musiało zostać już odwiedzone, gdy ta krawędź była rozważana. Mogło to się zdarzyć jedynie wtedy, gdy v zostało osiągnięte i zbadane wcześniej, podczas przeszukiwania jakiejś innej gałęzi wychodzącej z u.

W obu przypadkach v jest potomkiem u w drzewie DFS.

Kluczową zaletą drzewa DFS jest to, że upraszcza ono analizę grafu. Zamiast zajmować się wszystkimi rodzajami krawędzi, możemy skupić się na strukturze drzewa z kilkoma dodatkowymi krawędziami łączącymi przodków z potomkami. Dzięki temu graf staje się znacznie łatwiejszy do analizy.

Rozważmy następujące zadanie:

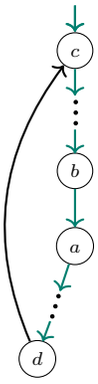
Zadanie: Niech G będzie spójnym, nieskierowanym grafem. Udowodnij, że krawędzie G można skierować w taki sposób, aby wynikowy graf był silnie spójny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie ma mostów, tzn. krawędzi, których usunięcie rozspójnia graf.



Rozwiązanie: Jeśli G ma most (u, v), skierowanie tej krawędzi od u do v (bez straty ogólności) oznacza, że nie istnieje ścieżka z v do u. Skupmy się więc teraz na drugiej implikacji.

Załóżmy, że G nie ma mostów. Wykonajmy DFS na grafie, zaczynając od dowolnego wierzchołka r. W wyniku tego algorytmu dostajemy ukorzenione drzewo rozpinające (wykorzystujące krawędzie drzewowe) oraz dodatkowe krawędzie wsteczne. Skierujmy krawędzie drzewowe w dół (od korzenia), a krawędzie wsteczne w górę (w kierunku korzenia). Aby udowodnić, że taki graf jest silnie spójny, wystarczy pokazać, że istnieje ścieżka skierowana od r do każdego wierzchołka oraz symetrycznie, że istnieje ścieżka od każdego wierzchołka do r. Pierwsza część jest łatwa – istnieje ścieżka wykorzystująca wyłącznie skierowane krawędzie drzewowe od r do każdego wierzchołka (ponieważ DFS odwiedził każdy wierzchołek).

Zdefiniujmy głębokość wierzchołka v jako liczbę krawędzi drzewowych od korzenia r do v. Rozpatrzmy jakiś wierzchołek a różny od korzenia. Oczywiście w drzewie DFS istnieje krawędź (b, a) łącząca a z jego rodzicem b. Ponieważ graf nie ma mostów, więc dla krawędzi drzewowej (b, a) musi istnieć jakaś krawędź wsteczna (d, c) łącząca pewien wierzchołek d z poddrzewa a (być może $d = a$)



z jakimś przodkiem c wierzchołka b (być może $c = b$), bo gdyby taka nie istniała, krawędź (b, a) byłaby mostem. Aby znaleźć ścieżkę od a do korzenia, poruszamy się z a do d za pomocą krawędzi drzewowych. Następnie przechodzimy krawędzią wsteczną z d do c. Ponieważ głębokość c jest mniejsza niż a, możemy powtarzać ten proces, aż dotrzemy do korzenia.

Zadanie (LXVII Olimpiada Matematyczna, etap drugi):
Dany jest spójny, nieskierowany graf z parzystą liczbą krawędzi. Udowodnij, że jego krawędzie można połączyć w pary w taki sposób, że każda para jest połączona ze sobą dokładnie jednym wierzchołkiem (innymi słowy – takie pary tworzą ścieżkę długości dwa).

Rozwiązanie: Wykonajmy algorytm DFS na grafie, zaczynając od dowolnego wierzchołka r, i ponownie zdefiniujmy głębokość wierzchołka v jako liczbę krawędzi drzewowych od korzenia r do v. Przedstawimy kolejny algorytm przetwarzania wierzchołków. Po połączeniu w parę dwóch krawędzi możemy je usunąć. Na początku wszystkie wierzchołki są oznaczone jako nieprzetworzone:

- Wybierz nieprzetworzony wierzchołek v o największej głębokości, który nie jest korzeniem.
- Spójrz na krawędzie wychodzące z v, które nie zostały jeszcze usunięte. Są trzy typy takich krawędzi:
  – krawędzie wsteczne łączące v z jego przodkami,
  – krawędzie drzewowe łączące v z jego dziećmi,
  – jedna krawędź łącząca v z jego rodzicem przez krawędź drzewową.
  Jeśli liczba nieusuniętych krawędzi jest parzysta, łączymy je w pary dowolnie i usuwamy wszystkie. W przeciwnym razie łączymy je w pary tak, aby pozostała tylko krawędź z v do jego rodzica.
- Oznacz v jako przetworzony.

Pozostaje jeszcze połączyć w pary krawędzie wychodzące z r. Istnieje tylko jeden typ takich krawędzi – dzieci. Na początku graf miał parzystą liczbę krawędzi, a każda usunięta para składała się z parzystej liczby krawędzi (dokładnie dwóch). Zatem r ma parzystą liczbę dzieci i możemy je dowolnie połączyć w pary.

Teraz należy powiedzieć kilka słów o poprawności tej konstrukcji. Podczas rozważania wierzchołka v wierzchołki w jego poddrzewie są już przetworzone. Ponieważ w jednym kroku algorytmu usuwamy wszystkie dzieci wierzchołka, więc jedyne pozostałe krawędzie w poddrzewie v przed rozpoczęciem łączenia w pary muszą być dokładnie jego dziećmi i na pewno zostaną połączone w pary podczas przetwarzania v.

O specjalnym wierzchołku w drzewach

Każdy wie, czym są drzewa. Rosną w parkach (jakoś odwrócone – dlaczego korzeń jest na dole?) i na ogół są w każdym kierunku symetryczne – rzadko zdarza się, by jedna gałąź miała widocznie więcej liści i gałązek niż inne. Czy tak samo jest w przypadku drzew grafowych? Okazuje się, że tak. Bardziej formalnie, wykażemy, że w każdym drzewie z n wierzchołkami istnieje taki wierzchołek v, że jeśli ukorzenimy nasze drzewo w v, to każde jego poddrzewo będzie miało rozmiar co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Każdy taki wierzchołek nazywamy **centroidem** lub **środkiem drzewa**.

Postaramy się znaleźć taki wierzchołek w sposób rekurencyjny. Przypuśćmy, że ukorzeniliśmy nasze drzewo w pewnym wierzchołku r. Jeśli poddrzewa r mają rozmiar co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, to mamy szczęście, ponieważ znaleźliśmy wierzchołek o żądanej własności. W przeciwnym razie musi istnieć taki wierzchołek w będący dzieckiem r, którego poddrzewo ma rozmiar większy niż $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Co więcej, taki wierzchołek musi być dokładnie jeden – gdyby istniały co najmniej dwa poddrzewa o rozmiarach $s_1, s_2 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, to mielibyśmy:

$$n \geqslant s_1 + s_2 + 1 \geqslant 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) + 1 > n,$$

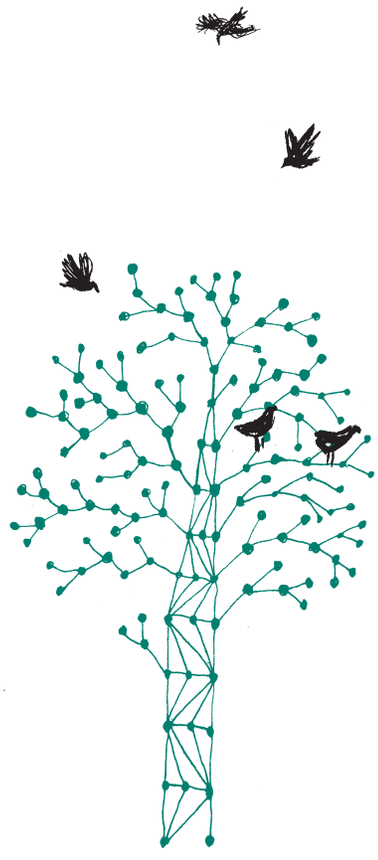
więc rozmiar tych dwóch poddrzew wraz z korzeniem r przekroczyłby rozmiar całego drzewa! Analogicznie możemy wykazać, że jeśli poddrzewo w ma rozmiar większy niż $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, to po ukorzenieniu drzewa w wierzchołku w poddrzewo r będzie miało rozmiar co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

W związku z tym możemy przejrzeć wszystkie sąsiednie wierzchołki r, a ponieważ w jest jedyny – rekurencyjnie sprawdzić, czy w jest dobrym kandydatem na centroid. Taki algorytm jest skończony, gdyż w każdym kroku rozmiar największego poddrzewa wierzchołka v się zmniejsza.

Zauważmy, że centroid nie musi być koniecznie jedyny. Na przykład w grafie składającym się z dwóch wierzchołków połączonych krawędzią oba wierzchołki są centroidami – każdy z nich ma jedno poddrzewo o rozmiarze $1 = \frac{2}{1}$. Z tego przykładu możemy wywnioskować, że drzewo ma dwa centroidy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krawędź, której usunięcie dzieli drzewo na dwa mniejsze drzewa, każde o dokładnie $\frac{n}{2}$ wierzchołkach (dowód pozostawiamy jako łatwe ćwiczenie).

Zadanie: Załóżmy, że w pewnym kraju, w którym będzie odbywał się obóz MBL, mamy n miast połączonych $n-1$ drogami tworzącymi drzewo. Twoim zadaniem, jako organizatora obozu, jest efektywne zakwaterowanie uczestników. Przyjęto dokładnie $2k$ osób z różnych miast $v_1, \ldots, v_{2k}$. Podczas obozu uczestnicy utworzą pary (zespoły dwóch przyjaciół). Parowanie nie zostało jeszcze ustalone. Każda para będzie potrzebowała zakwaterowania. W każdym mieście znajduje się dokładnie jeden hotel. Uczestnicy z tej samej pary powinni zostać w tym samym hotelu (mogą być w nim także inne pary). Warunek, który musi zostać spełniony, jest następujący: jeśli osoby z miast u i w tworzą parę, ich hotel musi znajdować się w mieście na najkrótszej ścieżce łączącej u i w (może to być u lub w). Ponieważ wynajęcie wielu hoteli w różnych miastach byłoby wyzwaniem organizacyjnym, połącz w pary uczestników tak, aby zminimalizować liczbę hoteli i spełnić powyższy warunek.

Szkic rozwiązania: W tym zadaniu mamy dane drzewo z $2k$ specjalnymi wierzchołkami $W = \{v_1, \ldots, v_{2k}\}$. Przypiszmy wagę każdemu wierzchołkowi: $c_v = 1$, jeśli $v \in W$, oraz 0 w przeciwnym razie. Jeśli znajdziemy taki wierzchołek v, że w każdym poddrzewie powstałym przez usunięcie v jest co najwyżej k specjalnych wierzchołków, to problem jest rozwiązany. Dlaczego? Ponieważ wówczas możemy zachłannie łączyć w pary wierzchołki z różnych poddrzew powstałych przez usunięcie v z największą liczbą specjalnych punktów, a ścieżki między nimi zawsze będą przechodziły przez v. Pozostaje pytanie – jak znaleźć taki wierzchołek v? Definicja v przypomina definicję centroidu – zamiast obliczać rozmiar poddrzewa, będziemy obliczać sumę wag w poddrzewie. Wówczas algorytm znajdowania centroidu znajdzie również nasz wierzchołek v. W związku z tym dochodzimy do wniosku, że zawsze wystarczy wynająć jeden hotel.



Kolejne zadanie, tym razem pozostawione jako ćwiczenie dla Czytelnika:

Zadanie (na podstawie zadania z drugiego etapu XXX Olimpiady Informatycznej): Antek i Marysia grają w grę na drzewie. Początkowo wszystkie wierzchołki są białe, z wyjątkiem jednego wierzchołka x, który jest czerwony (należy do Antka), oraz innego wierzchołka y, który jest niebieski (należy do Marysi). Każdy z graczy na zmianę wybiera dowolny wierzchołek u w swoim kolorze i koloruje sąsiedni biały wierzchołek v na swój kolor. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa grę. Określ, kto ma strategię wygrywającą w zależności od początkowych pozycji x i y Antka i Marysi.

Podsumowanie

Jak mogliśmy zobaczyć, istnieje wiele zastosowań algorytmu DFS i centroidów w problemach olimpijskich z matematyki. Jednak DFS to znacznie więcej – używamy algorytmów przeszukiwania grafu niemal nieustannie, nawet nie zdając sobie z tego sprawy! Następnym razem, gdy będziesz rozwiązywać sudoku lub spieszyć się do szkoły czy pracy, pamiętaj, że w rzeczywistości rekurencyjnie podążasz jakąś ścieżką w grafie, mając nadzieję, że znajdziesz tę właściwą.

Na twardo, na miękko... i w sam raz

Naukowcy zajmujący się badaniami podstawowymi od czasu do czasu stawiani są przed koniecznością odpowiadania na pytania o to, jakie zastosowanie będą miały wyniki ich badań w tak zwanym „życiu codziennym". Wiadomo, że nie każde badania przynoszą wyniki, które można natychmiast zastosować w przemyśle, gastronomii czy rozrywce.

O tym, jak niektóre odkrycia w różnych dziedzinach nauki prędzej czy później znalazły praktyczne zastosowanie (często bardzo nieoczywiste), pisaliśmy w numerze Δ^{11}_{19}.

Surowe

Na twardo

Na miękko

Sous vide

Okresowe

Można się zastanawiać, czy cel, jaki przyświecał pewnej grupie badaczy z Neapolu we Włoszech, był właśnie taki, by znaleźć zastosowanie metod modelowania matematycznego i zaawansowanych metod obrazowania w życiu codziennym, czy może inspiracja przyszła z zupełnie innej strony. Niezależnie od tego, co było motywacją, nie ulega wątpliwości, że zadanie, jakie postawiła sobie ta grupa, było bardzo ambitne. Wydawać by się mogło, że temat gotowania jaj jest już przez ludzkość dogłębnie i wyczerpująco zbadany w eksperymentach powtarzanych miliardy razy i że niczego nowego nie ma tam już do odkrycia. Każdy zna jaja gotowane na twardo i na miękko. Wiadomo, że jak mają być na twardo, to powinny posiedzieć we wrzątku dłużej, a żeby były na miękko, to krócej. Ile dokładnie powinno trwać to „krócej", to już zależy od osobistych preferencji, i uzyskanie tej wiedzy wymaga pewnej wprawy, ale dosyć łatwo jest wyznaczyć optymalny czas gotowania, wykonując kilka prób.

Okazuje się, że czasem lektura artykułu naukowego może poszerzyć nasze horyzonty kulinarne. W pracy [∗] wspomniana grupa z Neapolu porównuje nową, zaproponowaną przez siebie metodę gotowania jajek ze znanymi dotychczas trzema metodami. Jaka jest ta trzecia (oprócz *na twardo* i *na miękko*) metoda? Być może niektórzy Czytelnicy już wiedzą, ale nikt w redakcji *Delty* do tej pory jej nie znał. Nosi ona nazwę *sous vide* albo $6X\,^{\circ}\mathrm{C}$ i polega na gotowaniu jajek w temperaturze pomiędzy 60°C a 70°C przez co najmniej godzinę. Ta stosunkowo nowa, ale podobno zyskująca na popularności metoda daje bardzo specyficzny efekt – zarówno białko, jak i żółtko mają tę samą kremową konsystencję.

Taka postać jajka zapewne ma swoich zwolenników, jednak nie wszystkim podoba się, że białko jajka przygotowanego w ten sposób nie jest do końca ścięte, ponieważ część białek (protein) wchodzących w skład białka (białej części jajka) ścina się w wyższych temperaturach niż 70°C. Białko i żółtko mają różny skład i w konsekwencji wymagają różnych temperatur do uzyskania optymalnych postaci. Białko najlepiej gotowałoby się w 85°C, a żółtko w 65°C.

Rozwiązaniem problemu różnych, najbardziej korzystnych temperatur może być rozbicie jajka i przygotowanie białej i żółtej frakcji oddzielnie. Ale co, jeśli będziemy upierać się, żeby jednak mieć jajko ugotowane w całości, w nienaruszonej skorupce? Tutaj pojawia się propozycja badaczy z Neapolu: trzeba jajko umieszczać na zmianę we wrzącej (100°C) i zimnej (30°C) wodzie. Przekładanie powinno następować co 2 minuty i należy wykonać 8 cykli, czyli cały proces powinien trwać 32 minuty. Metodę tę autorzy nazwali *gotowaniem okresowym* (albo jak kto woli *gotowaniem periodycznym*). Czas gotowania i częstość przekładania jajek dobrano, wykonując symulacje numeryczne, uwzględniające przewodnictwo cieplne i energię zużywaną na denaturację białek wchodzących w skład białka i żółtka. Przy tak dobranych parametrach temperatura w samym środku jaja zmienia się powoli i dąży do optymalnej dla gotowania żółtka, ale jej nie przekracza. Natomiast bliżej skorupki wahania temperatury są większe, ale oscylują wokół wyższej wartości, optymalnej dla gotowania białka.

Przewidywania symulacji numerycznych zostały poddane testom doświadczalnym, które (zdaniem autorów) całkowicie je potwierdziły. Jajka ugotowane okresowo mają podobno optymalną konsystencję w całej objętości. Każdy, kto ma wolne 32 minuty, może 8 razy przełożyć jajko z ciepłej do zimnej wody i z powrotem, a następnie dokonać degustacji, żeby wyrobić sobie własne zdanie na temat tego, czy nowoczesne metody naukowe rzeczywiście znajdują zastosowanie w gastronomii.

Szymon CHARZYŃSKI

[∗] Di Lorenzo, E., Romano, F., Ciriaco, L. et al., „Periodic cooking of eggs", *Communications Engineering* 4, 5 (2025). doi.org/10.1038/s44172-024-00334-w.

takie jest życie

Po pierwsze: śmiać się

Jak dobrze, że jest taki jeden dzień w roku, kiedy obowiązkowo trzeba pożartować. Bo choćby na siłę, śmiać się jest zdrowo, a prawda ta dotyczy nie tylko człowieka.

Wszyscy ludzie na Ziemi, bez względu na pochodzenie i kulturę, śmieją się w podobny sposób. Śmiech potrafimy bezbłędnie wyodrębnić z całej gamy zachowań – mimo barier językowych i różnic fizycznych. Zaczynamy się śmiać (wydawać dźwięki nazywane śmiechem) w wieku około 3 miesięcy, a później śmiejemy się przez całe życie, i robimy to znacznie częściej niż nam się wydaje.

O pozytywnym działaniu śmiechu na zdrowie wiadomo od stuleci, obecnie coraz więcej jest informacji o konkretnych zmianach w ciele człowieka, które zachodzą, gdy porządnie się pośmiejemy.

Gwałtowne wyrzuty powietrza spowodowane przez skurcze mięśni poprawiają wentylację płuc, mięśnie kurczą się i rozluźniają. W mózgu uaktywnia się ośrodek nagrody, a wydzielane endorfiny działają przeciwbólowo, wydziela się hormon wzrostu. Zmniejsza się poziom hormonów stresu, kortyzolu i epinefryny, dzięki czemu chronione przed skutkami stresu są naczynia krwionośne i serce.

Gdyby spojrzeć jednak tak zupełnie z zewnątrz, śmiech to dziwne zjawisko. Głośne, wysokie dźwięki, które mu towarzyszą, są mało „ludzkie". Twarz zniekształca się, szczęka luźno opada, ciało zgina się i podskakuje. Gwałtowny wybuch śmiechu przejmuje kontrolę: nad postawą ciała, możliwościami wykonywania większości czynności, mową i oddychaniem. Ze śmiechu można się zataczać, spadać z krzesła, płakać, można nabawić się bólu gardła i brzucha. Można się posikać. Można nawet umrzeć. W sumie to zachowanie jest dość niebezpieczne, zostało jednak mocno utrwalone w procesie ewolucji. Skąd to się wzięło?

Karol Darwin w książce „Wyraz uczuć u człowieka i zwierząt" z 1872 roku śmiechowi poświęcił sporo uwagi. Opisywał śmiech jako stan, w którym oczy stają się *bright and sparkling* (jasne i iskrzące się). Darwin odwiedzał Londyńskie ZOO, gdzie obserwował małpy człekokształtne łachotane przez opiekunów. Szympansy, bonobo, goryle i orangutany mają łachotki i reagują na nie w sposób uderzająco podobny do ludzi. Także swojego rodzaju śmiechem, który przypomina głośne i gwałtowne sapanie.

Ale nie tylko małpy mogą się śmiać. W latach 90. XX wieku stwierdzono, że szczury mają łachotki na grzbiecie i brzuchu. Dalsze badania wykazały, że gilgotane gryzonie wydają serie krótkich pisków w zakresie niesłyszalnym dla ludzi (50 KHz). Szczury chętnie poddawały się łachotaniu, a badacza, który przychodził do laboratorium, witały swoim śmiechowym ćwierkaniem.

Opisane dźwięki gryzonie wydają w czasie zabawy, także kiedy bawią się z ludźmi. Studiując dźwięki i łachotki u szczurów, badacze nauczyli szczury gry w chowanego. Zwierzęta i naukowcy występowali w obu rolach, tego, który się chowa i tego, którego szukają. Okazało się, że szczury znakomicie opanowały grę i były chętne do zabawy, mimo że nagrodą było łachotanie po brzuchu, a nie, jak zwykle w pracy ze zwierzętami, smakołyk. Kiedy gryzonie chowały się, zachowywały się zupełnie cicho, a dopiero po znalezieniu przez człowieka wydawały z siebie radosne piski. Pisków jednak nie było, kiedy chowający się nie zachowywał reguł gry, np. chował się ciągle w jednym miejscu.

Naukowcy uważają, że śmiech u ludzi wziął się właśnie z zachowania połączonego z zabawą, jest modyfikacją głośnego sapania. Wszystkie młode ssaki bawią się, część gatunków zachowuje tę umiejętność przez całe życie. Wokalizacje związane z zabawą obserwuje się też u niektórych gatunków ptaków. Śmiech (charakterystyczne dźwięki) oraz postawa ciała, wyraz twarzy/pyska pokazuje innym osobnikom zaproszenie do zabawy i sygnał: to, co się będzie działo, nie jest na serio, bawmy się. Zabawa to trening sprawności fizycznej

w bezpiecznych warunkach i sposób budowania relacji, dlatego jest szczególnie ważna u gatunków społecznych.

Zwierzęta śmieją się tylko w sytuacji bezpośredniego kontaktu fizycznego, łaskotania lub zabawy (przepychanki, turlanie się, gryzienie itd.). Śmiech u człowieka jest w kilku aspektach szczególny. Ludzie wykazują się poczuciem humoru i śmieją się nie tyko w trakcie zabawy, rozśmieszają ich obrazy, sytuacje i słowa. I jedynie u ludzi śmiech jest zaraźliwy.

Zapewne każdy zna to okropne uczucie, kiedy w najmniej pożądanym momencie, np. w czasie poważnej ceremonii, ogarnia nas niepohamowana chęć śmiania się i zupełnie nie możemy się powstrzymać przed kompletnie bezsensownym chichotem. Dotyka to każdego, nawet profesjonalistów, lektorów radia i telewizji. Jest wyrazem rozładowania napięcia, pochodzi z najstarszych rejonów naszego mózgu i bardzo trudno go opanować. Śmiech jednej osoby łatwo rozprzestrzenia się w obrębie grupy, mózg uwielbia bowiem śmiech. Badania pokazują, że kiedy słyszymy śmiech, wchodzimy w rodzaj stanu gotowości. I zaczynamy się śmiać, nie wiedząc nawet, dlaczego.

Mimo, iż wydaje nam się, że śmiejemy się, gdy coś jest zabawne, to okazuje się, że śmiejemy się 30 razy częściej w towarzystwie. Śmiech to utrwalone ewolucyjnie potężne narzędzie kształtujące relacje społeczne. Rozmawiając z innymi ludźmi, przez śmiech wyrażamy swoją sympatię, zrozumienie, poczucie przynależności. Zapraszamy słuchaczy do nawiązania kontaktu, dajemy sygnał dobrych intencji. Wspólne śmianie się pozwala radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozładowywać napięcie i wzmacniać więzi.

Ostatnio świat niespecjalnie skłania do śmiechu. W poczuciu frustracji i niewiadomych jeden dzień w roku nie wystarczy. Od dziś weźmy się za śmianie na serio.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Kąt Otwarty 2°: $14 = 2 \cdot 7$

Bartłomiej PAWLIK Politechnika Śląska

Kilka lat temu matematyka rekreacyjna trafiła pod zaśnieżone strzechy dzięki pewnej zabawnej własności liczby 2020 – mianowicie pierwsza cyfra tej liczby określa liczbę wystąpień cyfry 0 w jej zapisie dziesiętnym, druga cyfra – liczbę wystąpień cyfry 1, a trzecia i czwarta – liczby wystąpień cyfr 2 i 3, odpowiednio. Liczby o wynikającej z tego opisu własności nazywamy *autobiograficznymi*. Oczywiście liczba liczb autobiograficznych jest skończona – są to liczby co najwyżej dziesięciocyfrowe. Istnieje dokładnie siedem liczb autobiograficznych, a największa z nich to 6 210 001 000.

Więcej o liczbach autobiograficznych można przeczytać w tekście Piotra Zarzyckiego i Ryszarda Kubiaka *O liczbach autobiograficznych*, Δ^{12}_{20}.

Przyjrzymy się liczbom, które również w pewnym sensie same się opisują, ale metoda ich autodeskrypcji jest poniekąd subtelniejsza. Najpierw przypomnijmy sobie początkowe dziewięć liczb pierwszych:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ p_6 = 13,\ p_7 = 17,\ p_8 = 19 \ \text{ oraz } \ p_9 = 23.$$

Rozkład liczby 14 na czynniki to $14 = 2 \cdot 7$. Zauważmy, że 2 jest pierwszą, a 7 – czwartą liczbą pierwszą. Zatem mamy

$$14 = 2 \cdot 7 = p_1 \cdot p_4.$$

Wśród liczb niezawierających cyfry 0 są znane jeszcze trzy, których każda cyfra w zapisie dziesiętnym odpowiada pojedynczemu elementowi iloczynu w rozkładzie na czynniki pierwsze:

$$\begin{aligned} 154 &= 2 \cdot 11 \cdot 7 = p_1 \cdot p_5 \cdot p_4, \\ 1196 &= 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 13 = p_1 \cdot p_1 \cdot p_9 \cdot p_6, \\ 279\,174 &= 3 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 7 = p_2 \cdot p_7 \cdot p_9 \cdot p_1 \cdot p_7 \cdot p_4. \end{aligned}$$

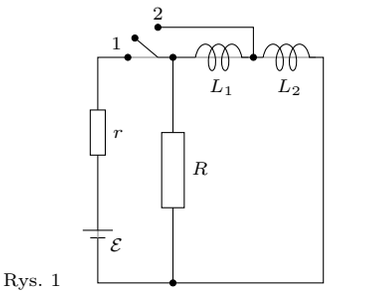
W przeciwieństwie do klasycznych liczb autobiograficznych, tutaj nie mamy naturalnego ograniczenia górnego na rozmiar szukanych liczb – mnożąc przez siebie n liczb pierwszych, można otrzymać liczbę n-cyfrową. Czy zatem istnieje więcej liczb o rozpatrywanej własności? Czy istnieje ich nieskończenie wiele, czy może jest jeszcze chociaż jedna? Obecnie **nie wiadomo** – a szkoda, bo bardzo chciałbym to wiedzieć.

Rozpatrywane zagadnienie można rozszerzyć o liczby zawierające cyfrę 0 w zapisie dziesiętnym – na przykład przyjmując $p_0 = 1$ (co skutkuje ignorowaniem każdego wystąpienia tej cyfry), albo też rozpatrywać w innych systemach pozycyjnych. Końcowe pytanie o liczbę liczb o rozpatrywanej własności jest otwarte też w tych wariantach.

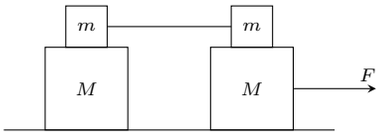
Osobiście udało mi się sprawdzić, że piątego elementu na pewno nie ma wśród liczb co najwyżej 23-cyfrowych. Nie jestem pod tym względem rekordzistą, na co wskazują informacje zawarte w encyklopedii *OEIS* – opisywany ciąg występuje w niej pod numerem A097227. Jak się okazuje, dużo większy zakres sprawdził Chai Wah Wu – amerykański badacz z IBM.

Klub 44 F

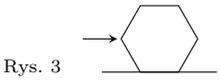
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2025

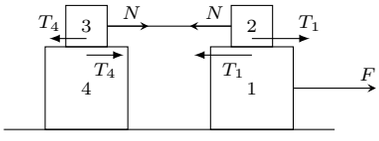


Rys. 1

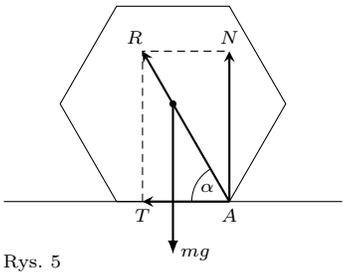


Rys. 2

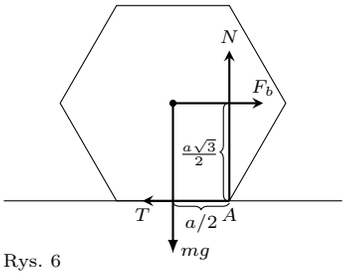

Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
782 ($WT = 1{,}68$), 783 (WT=3,45)
z numeru 9/2024

Konrad Kapcia (Poznań)	3 – 44	+3,25
Paweł Perkowski (Ożarów Maz.)	6 – 44	+0,70
Jacek Konieczny (Poznań)		40,87
Tomasz Wietecha (Tarnów)	17 – 39,17	
Jan Zambrzycki (Białystok)	4 – 28,35	
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 – 27,49	

Zadania z fizyki nr 796, 797

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

796. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 klucz zamknięto do położenia 1, a po ustaleniu się prądów bardzo szybko przełączono go do pozycji 2. Przyjmując, że cewki L_1 i L_2 są idealne, wyznaczyć ilość ciepła, jaka wydzieli się na oporniku R po przełączeniu. Siła elektromotoryczna źródła wynosi $\mathcal{E}$, jego opór wewnętrzny r.

797. W środku dna prostopadłościennej barki o długości $a = 80$ m, szerokości $b = 10$ m i wysokości $c = 5$ m powstał otwór o średnicy $d = 1$ cm. Ocenić czas, po którym barka zatonie, jeśli nie będzie odpompowywana z niej woda. Barka jest otwarta z góry, nie ma żadnego ładunku, początkowa wysokość burty nad poziomem wody wynosi $h = 3{,}75$ m.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2024

Przypominamy treść zadań:

788. Na gładkim stole leży układ klocków przedstawiony na rysunku 2. Współczynnik tarcia między klockami o masach M i m wynosi μ. Klocki o masach m połączone są nieważką, nierozciągliwą nicią. Prawy dolny klocek ciągnięty jest równolegle do stołu siłą F. Znaleźć przyspieszenia wszystkich klocków.

789. Sześciokątny ołówek popchnięto wzdłuż płaszczyzny poziomej jak na rysunku 3. Jaki musi być współczynnik tarcia μ między ołówkiem a płaszczyzną, aby ołówek ślizgał się po płaszczyźnie i nie obracał?

788. Przyspieszenia klocków o masach m są takie same, bo łącząca je nić jest nierozciągliwa. Tarcie między klockami 3 i 4 (rys. 4) jest tarciem statycznym. Gdyby tak nie było i klocek 3 ślizgałby się po klocku 4, to siła tarcia między nimi $T_4 = \mu mg$ miałaby wartość mniejszą od siły naciągu nici N, a klocek 2 poruszałby się w lewo, co jest niemożliwe. Zatem przyspieszenia klocków 2, 3 i 4 są jednakowe. Oznaczmy je przez a_2, a przyspieszenie klocka 1 przez a_1. Możliwe są dwa przypadki:

1) Nie ma poślizgu między klockami 1 i 2, układ porusza się jak jedno ciało:

$$a_1 = a_2 = F/2(M + m).$$

Równanie ruchu klocka 1: $Ma_1 = F - T_1$ oraz warunek na brak poślizgu $T_1 \leqslant \mu mg$ pozwala znaleźć warunek, jaki musi spełniać siła, aby zachodził przypadek pierwszy $F \leqslant 2\mu mg(M + m)/(M + 2m)$.

2) Klocek 2 ślizga się po klocku 1:
Z równania ruchu klocka 1: $a_1 = (F - \mu mg)/M$.
Z równania ruchu układu klocków 2, 3, 4: $a_2 = \mu mg/(2m + M)$.
Przypadek drugi zachodzi, gdy siła spełnia warunek:
$F > 2\mu mg(M + m)/(M + 2m)$.

789. Zadanie możemy rozwiązać w układzie związanym z płaszczyzną albo z ołówkiem.

1) Układ inercjalny, związany z płaszczyzną: Na poruszający się ołówek działają ze strony płaszczyzny dwie siły: reakcji N i tarcia T. Ołówek nie może przemieszczać się w kierunku pionowym, więc siła reakcji jest równa sile ciężkości $N = mg$, siła tarcia $T = \mu N = \mu mg$. Rozważmy przypadek graniczny, gdy ołówek zaczyna się obracać wokół krawędzi A (rys. 5). Siły N i T są w tym momencie przyłożone do krawędzi A. Jeżeli wypadkowa tych sił R przechodzi poniżej osi ołówka, to jej moment względem osi wywołuje jego obrót. Warunek na brak obrotu ma postać:

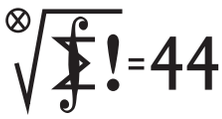
$$\operatorname{tg}\alpha = N/T \geqslant \operatorname{tg} 60^\circ, \quad \mu \leqslant 1/\sqrt{3}.$$

2) Układ nieinercjalny, związany z ołówkiem: W tym układzie na ołówek działa dodatkowo siła bezwładności związana z przyspieszeniem nadanym przez siłę tarcia (rys. 6): $F_b = ma = m\mu g$. Ołówek obraca się wokół krawędzi A (chwilowa oś obrotu), jeżeli moment siły F_b względem A jest większy niż moment siły ciężkości:

$$F_b a\sqrt{3}/2 > mga/2.$$

Otrzymujemy stąd taki sam jak poprzednio warunek na brak obrotu.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 885 ($WT = 1{,}95$) i 886 ($WT = 1{,}42$) z numeru 9/2024

Mikołaj Pater		42,95
Witold Bednarek	Łódź	42,00
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,98
Krzysztof Zygan	Lubin	39,38
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,18
Michał Warmuz	Żywiec	33,21
Marcin Kasperski	Warszawa	32,31
Jędrzej Biedrzycki		32,29
Krzysztof Kamiński	Pabianice	31,90
Grzegorz Wiączkowski		31,79
Marian Łupieżowiec	Gliwice	31,29

Korekta omyłki redakcyjnej: W rocznym zestawieniu listy uczestników (*Delta* 2/2025) przy nazwisku Grzegorz Wiączkowski powinno być podane saldo 29,40.

Zadania z matematyki nr 899, 900

Redaguje Marcin E. KUCZMA

899. Niech $g\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ($\mathbb{Z}^2$ jest zbiorem punktów kratowych, czyli uporządkowanych par liczb całkowitych). Określamy odległość punktów $P, Q \in \mathbb{Z}^2$, $P = (x, y)$, $Q = (u, v)$ wzorem $d(P, Q) = \max(|x - u|, |y - v|)$. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele pięcioelementowych zbiorów punktów kratowych $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ takich, że (dla $i = 1, 2, 3, 4$): $d(P_0, P_i) = 1$, $g(P_0) \leqslant g(P_i)$.

900. Wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 jednej zmiennej, o współczynnikach rzeczywistych, spełniają warunki:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant f_4(x) \quad \text{dla } x \in [0, 1],$$
$$f_2(x) \leqslant f_4(x) \leqslant f_1(x) \leqslant f_3(x) \quad \text{dla } x \in [-1, 0].$$

Wykazać, że $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$.

Zadanie 900 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2024

Przypominamy treść zadań:

891. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste φ spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ warunek: $\cos\left(2^n\varphi\right) \leqslant 0$.

892. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. W turnieju badmintona bierze udział n zawodników; każdy z każdym rozgrywa jeden mecz, nie ma remisów. Dla każdej liczby $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ wyznaczyć maksymalną wartość, jaką może osiągnąć liczba zawodników, którzy zakończyli turniej, mając dokładnie k wygranych meczów.

891. Oznaczmy: $\cos\left(2^n\varphi\right) = x_n$ (więc $|x_n| \leqslant 1$). Ze wzoru na kosinus podwojenia wynika zależność rekurencyjna $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. Badamy, dla jakich wartości początkowych x_0 spełniony jest warunek: wszystkie $x_n \in [-1, 0]$.

Niech $y_n = x_n + \frac{1}{2}$. Warunek zadania przybiera postać $|y_n| \leqslant \frac{1}{2}$, a wzór rekurencyjny – postać:

$$y_{n+1} = -y_n(2 - 2y_n) \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Skoro $|y_n| \leqslant \frac{1}{2}$, wyrażenie w nawiasie ma wartość $\geqslant 1$; a gdy $y_n \leqslant 0$, ma wartość $\geqslant 2$. Zatem

$$|y_{n+1}| \geqslant \begin{cases} |y_n| & \text{dla każdego } n, \\ 2|y_n| & \text{gdy } y_n \leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ze wzoru (1) widać ponadto, że w każdej parze kolejnych wyrazów ciągu igreków jest liczba niedodatnia. Z własności (2) wynika teraz, że $|y_{n+2}| \geqslant 2|y_n|$ dla wszystkich n. Stąd przez indukcję $|y_{2n}| \geqslant 2^n|y_0|$; a ponieważ $|y_{2n}| \leqslant \frac{1}{2}$, musi być $y_0 = 0$. To odpowiada wartości $x_0 = -\frac{1}{2}$ (i wtedy wszystkie $x_n = -\frac{1}{2}$).

Wymagany warunek jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n = \cos\varphi = -\frac{1}{2}$, czyli jedynie dla $\varphi = \pm\frac{2}{3}\pi + 2m\pi$ $(m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

892. Rozwiązanie Autora (Michał Adamaszek). Przyjmijmy, że zawodnik dostaje 1 punkt za wygraną i 0 za porażkę. Ustalmy k; niech S będzie zbiorem zawodników, którzy zakończyli turniej z k punktami; niech $|S| = s$. Pomiędzy sobą rozegrali oni $\binom{s}{2}$ partii, więc wspólnie zdobyli co najmniej tyle właśnie punktów. Jednak z definicji S wiemy, że zdobyli razem dokładnie ks punktów. Stąd $\binom{s}{2} \leqslant ks$, czyli $s \leqslant 2k + 1$.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie mecze w turnieju zakończyły się odwrotnymi wynikami ($0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$). W tym nowym turnieju S jest zbiorem tych zawodników, którzy zdobyli dokładnie $n - k - 1$ punktów, więc to samo rozumowanie daje wniosek, że $\binom{s}{2} \leqslant (n - k - 1)s$, czyli $s \leqslant 2n - 2k - 1$. Zatem

$$s \leqslant \min\{2k + 1, 2n - 2k - 1\}.$$

Pokażemy, że to oszacowanie jest osiągalne. W przypadku, gdy $1 \leqslant 2k + 1 \leqslant n$, niech S będzie dowolnym zbiorem zawodników o tej właśnie liczności. Łatwo ustawić mecze wewnątrz S tak, aby każdy wygrał ich dokładnie k (np.: każdy wygrywa z k swoimi następnikami w dowolnym cyklicznym ustawieniu zbioru S). Zawodnikom spoza S każemy wygrać wszystkie mecze przeciwko S i dowolnie między sobą. Wtedy każdy zawodnik z S zdobywa k punktów, a każdy spoza S co najmniej $2k + 1 \geqslant k + 1$ punktów.

W przypadku, gdy $n + 1 \leqslant 2k + 1 \leqslant 2n - 1$, niech $j = n - 1 - k$. Wówczas $1 \leqslant 2j + 1 \leqslant n - 1$, więc na mocy poprzedniej konstrukcji istnieje turniej, w którym dokładnie $2j + 1 = 2n - 2k - 1$ zawodników zdobyło dokładnie j punktów. Odwracając wszystkie wyniki na przeciwne, otrzymujemy turniej, w którym dokładnie $2n - 2k - 1$ zawodników zdobyło dokładnie $n - 1 - j = k$ punktów.

Stąd odpowiedź: szukana maksymalna wartość $|S|$ wynosi $\min\{2k + 1, 2n - 2k - 1\}$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

Kwiecień jest trzecim kolejnym miesiącem roku, w którym Słońce szybko wędruje na północ, zwiększając wysokość górowania o następne 10°. Po zmianie czasu na letni na początku kwietnia Słońce zachodzi po godzinie 19, a pod jego koniec już po 20.

Miesiąc zacznie się mocnym akcentem, którym jest zakrycie Plejad przez Księżyc w fazie 16%. 1 kwietnia Srebrny Glob przejdzie przez południowo-zachodnią część gromady, zakrywając m.in. Electrę (17 Tau), Merope (23 Tau), Alcyone (25 Tau), Atlas (27 Tau) i Pleione (28 Tau) oraz charakterystyczny warkocz słabszych gwiazd na południowy wschód od nich. Polska znajdzie się na wschodnim krańcu pasa zakrycia, stąd na terenie naszego kraju nie da się zaobserwować zakrycia dwóch ostatnich z wymienionych gwiazd, natomiast w przypadku Merope i Alcyone w całej Polsce widoczne będzie ich zakrycie, odkrycie zaś – tylko w północno-zachodniej części kraju. Pierwsza z jasnych gwiazd Plejad zniknie za ciemnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 22:45, niecałe 1,5 godziny przed zachodem obu ciał niebieskich.

Księżyc pozostanie ozdobą nocnego nieba w pierwszej części miesiąca. 2 kwietnia jego faza urośnie do 25% i jednocześnie zbliży się on do Jowisza na mniej więcej 5°. Największą planetę Układu Słonecznego można obserwować tylko w pierwszej części nocy. Początkowo nawet ponad 30° nad zachodnim widnokręgiem, ale wraz z upływem miesiąca coraz później zapadający zmierzch sprawi, że planeta obniży swoje położenie do mniej niż 15°. W tym czasie jej jasność spadnie do -2^m, a średnica tarczy do $34''$. 16 kwietnia dojdzie do ciekawej konfiguracji księżyców galileuszowych planety: wieczorem na jej tarczy pokaże się Ganimedes, a Kallisto przejdzie tuż na południe od niej.

4 kwietnia naturalny satelita Ziemi pokaże tarczę oświetloną w połowie, kolejnej zaś nocy spotka się z Marsem oraz Kastorem i Polluksem w Bliźniętach. Około godziny 21:30 Księżyc zajmie pozycję niecałe 2° na północ od Czerwonej Planety i jednocześnie 3° na południe od Polluksa. Mars w kwietniu pokona na niebie 12°, zaczynając miesiąc niecałe 0,5° od świecącej z jasnością obserwowaną $+3{,}5^m$ gwiazdy κ Gem, a do jego końca dotrze na 2° do gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. Planeta szybko oddala się od nas, co spowoduje, że do końca kwietnia jasność Marsa spadnie do $+1^m$, a średnica tarczy do $6''$. Wciąż duża jest jego faza, która wynosi prawie 90% i jest widoczna przez teleskopy.

6 dnia miesiąca Księżyc pokaże fazę 68% i zbliży się na niecałe 0,5° do gwiazdy Asellus Borealis, czyli północno-wschodniego rogu trapezu gwiazd otaczających wspomnianą już M44. Dwie doby później jego faza zwiększy się do 85% i znajdzie się on w centralnej części gwiazdozbioru Lwa, 3° od Regulusa. W nocy z 12 na 13 kwietnia Srebrny Glob przejdzie przez pełnię, wschodząc 3° od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. W trakcie nocy dystans między oboma ciałami niebieskimi zmniejszy się do 1°.

Po pełni naturalny satelita Ziemi odwiedzi najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity, przechodząc jednocześnie głęboko pod ekliptyką. Wskutek tego zajmie on w tym czasie bardzo niskie położenie nad widnokręgiem, a w dniach 18 i 19 kwietnia przetnie południk lokalny nawet na wysokości poniżej 10°, i jego obserwacje mogą utrudnić przeszkody terenowe oraz zniekształcenia jego obrazu spowodowane przez naszą atmosferę.

W nocy z 16 na 17 kwietnia Księżyc w fazie 86% wzejdzie około północy mniej więcej 1,5° od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Warto jednak zwrócić uwagę na znajdującą się wtedy 1° na wschód od księżycowej tarczy słabszą o 2^m gwiazdę τ Scorpii, ponieważ w trakcie nocy zniknie ona na godzinę za księżycową tarczą. Zjawisko da się dostrzec na małym obszarze od Morza Północnego po Morze Czarne, z granicami na równoleżniku 60° na północy do Adriatyku i pogranicza bułgarsko-greckiego na południu. W Polsce zakrycie potrwa od około godziny 3:50 do 4:40, a ciekawszy, bo zachodzący przy ciemnym brzegu księżycowej tarczy, koniec zjawiska wydarzy się już przy jaśniejącym niebie.

21 kwietnia nastąpi ostatnia kwadra Księżyca, a przez nów przejdzie on 27 dnia miesiąca. Niestety ze względu na niekorzystne nachylenie ekliptyki obserwacje Księżyca w tym czasie są bardzo trudne. Zupełnie inaczej jest wieczorem. Już 28 kwietnia nisko nad zachodnim horyzontem można dostrzec bardzo cienki sierp Księżyca w fazie 2% niecałą dobę po nowiu. 29 kwietnia ponownie dojdzie do zakrycia Plejad, niestety na dziennym niebie, a wieczorem Księżyc

pokaże się już 7° od nich, prezentując tarczę w fazie 6%. Na zakończenie miesiąca Srebrny Glob w fazie 13% przejdzie 5° na północ od Jowisza.

Jak zawsze w drugiej połowie miesiąca, promieniują Lirydy, których maksimum aktywności przypada około 22 kwietnia. Radiant roju znajduje się jakieś 8° na południowy zachód od Wegi i wznosi się od zmierzchu, by do końca nocy astronomicznej osiągnąć wysokość prawie 70°. W maksimum można spodziewać się około 20 zjawisk na godzinę, a Księżyc nie przeszkodzi w obserwacjach.

Ariel MAJCHER

Prosto z nieba: Znowu ta szczelina

Powracamy do kwestii „szczeliny masowej", czyli hipotetycznej przerwy (luki) w rozkładzie mas gwiazd neutronowych i czarnych dziur, z grubsza pomiędzy 3 a 5 $M_\odot$. Ostatnio pisaliśmy o niej w Δ^9_{24}, tym razem pojawia się znów z powodu publikacji zespołu LIGO-Virgo-KAGRA (LVK). Detekcja interesującego sygnału GW230529 nastąpiła 29 maja 2023 roku, czyli na początku trwającej wciąż kampanii obserwacyjnej LVK O4 (wiosna 2023 – jesień 2025).

Podczas pierwszych trzech kampanii obserwacyjnych (O1, O2 i O3) współpraca LIGO–Virgo zarejestrowała w sumie 90 potwierdzonych sygnałów fal grawitacyjnych, a od rozpoczęcia kampanii O4 zebrano ich już ponad 200, głównie ostatnich chwil układów podwójnych czarnych dziur. Wynika to oczywiście z lepszej czułości detektorów, a co za tym idzie, z większej objętości Wszechświata, z której nadchodzą do nas sygnały.

Sygnał GW230529 jest szczególnie interesujący, ponieważ jego źródło – układ podwójny – składał się z obiektu o masie typowej dla gwiazd neutronowych, $1{,}4^{+0,6}_{-0,2}\,M_\odot$, oraz drugiego, o masie $3{,}6^{+0,8}_{-1,2}\,M_\odot$, znajdującego się w „szczelinie masowej". Sygnały z układów podwójnych, zawierające składnik znajdujący się w „szczelinie", były wcześniej rejestrowane przez detektory LIGO i Virgo, ale ten jest pierwszym, dla którego to masywniejszy składnik się w niej znajduje. Z uwagi na fakt, że w momencie detekcji działał tylko detektor LIGO Livingston (zwany L1), dokładna pozycja sygnału na niebie nie została określona. Pechowo, drugi detektor LIGO (Hanford, H1) był w trakcie uruchamiania, a detektor Virgo (V) był wtedy zupełnie wyłączony. W konsekwencji nie udało się zaobserwować ewentualnego promieniowania elektromagnetycznego, które mogło towarzyszyć ostatnim chwilom GW230529. Modele astrofizyczne przewidują w tym przypadku powstanie tzw. kilonowej, czyli eksplozji gorącej radioaktywnej materii po zderzeniu się składników, albo pływowego rozerwania gwiazdy neutronowej przez czarną dziurę jeszcze przed ostatecznym kolapsem.

Interferometry typu LIGO i Virgo wykorzystują triangulację do określenia pozycji źródła na niebie. Wymaga to jednoczesnej detekcji co najmniej dwóch, a jeszcze lepiej trzech różnych detektorów, aby można było porównać różnice czasowe w przybyciu fali grawitacyjnej oraz różnice amplitud i faz sygnału, do każdego z detektorów. Jeśli działa tylko jeden detektor, można zmierzyć jedynie czas przybycia sygnału i oszacować amplitudę h sygnału, czyli odległość r do zdarzenia, ponieważ $h \propto 1/r$.

Wykrycie GW230529 jest istotne z wielu powodów. Po pierwsze dostarcza kolejnego dowodu na istnienie obiektów zwartych w „szczelinie masowej", obszarze wcześniej uważanym za słabo „zasiedlony". Pozostaje oczywiście pytanie o naturę masywniejszego składnika: przypuszczalnie jest to małomasywna czarna dziura, ale nie jest wykluczone, że jest nim bardzo masywna gwiazda neutronowa (byłby to niezwykły prezent dla badaczy bardzo gęstej materii). Z analizy fali, która dotarła do detektora L1, wynika, że masywniejszy składnik miał niezaniedbywalny spin χ (bezwymiarowy moment pędu $\chi = cJ/(GM^2)$, J to moment pędu) oszacowany na $\chi = 0{,}44^{+0,40}_{-0,37}$. Nie jest on jednak tak duży, jak oczekiwalibyśmy w przypadku czarnej dziury powstałej z wcześniejszego połączenia się dwóch mniejszych czarnych dziur. Szacuje się, że połączenie dwóch mniejszych nierotujących czarnych dziur prowadzi do powstania czarnej dziury o spinie $\chi \approx 0{,}7$, który bierze się z transferu orbitalnego momentu pędu układu do spinu końcowego obiektu.

Obserwacja dowodzi, że wcześniejsze modele ewolucji gwiazd i procesów formowania się czarnych dziur mogą wymagać doprecyzowania, ponieważ już widać, że czarne dziury, zwłaszcza te lekkie, mogą tworzyć się na wiele sposobów, m.in. podczas zderzeń gwiazd neutronowych, a być może także w wyniku wybuchów specjalnej klasy asymetrycznych supernowych. Wydaje się więcej niż pewne, że „szczelina masowa" nie jest rzeczywistą luką w rozkładzie mas, lecz raczej odzwierciedleniem dotychczasowych ograniczeń obserwacyjnych. Nie do końca udana obserwacja GW230529 (nie udało się zobaczyć zjawiska w falach elektromagnetycznych) ma jednak istotne znaczenie dla „tradycyjnej" astrofizyki, skoro zarejestrowaliśmy GW230529, to w przyszłości wykryjemy więcej zdarzeń tego typu, potencjalnie z towarzyszącymi im sygnałami elektromagnetycznymi. Dostarczą one informacji o właściwościach i zachowaniach obiektów zwartych w tym zakresie mas.

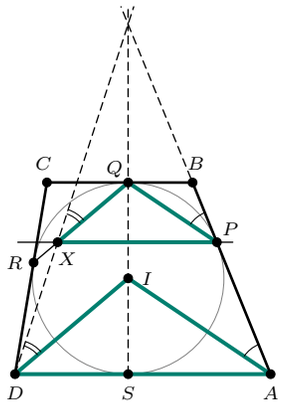
*Michał BEJGER**

A. G. Abac i in., "Observation of Gravitational Waves from the Coalescence of a $2.5-4.5\,M_\odot$ Compact Object and a Neutron Star", 2024, ApJL 970 L34.

*Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy

Rozwiązania zadań ze strony 9

Rozwiązanie zadania M 1813.



Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w rozważany trapez. Wówczas

$$\sphericalangle IAP = \frac{1}{2}\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ABC) = \sphericalangle QPB,$$

stąd $PQ \parallel AI$. Podobnie $DI \parallel QR$, więc trójkąty ADI oraz PXQ mają odpowiednie boki równoległe, a więc są jednokładne. Środek tej jednokładności jest punktem przecięcia prostych AB, QS i DX.

Rozwiązanie zadania M 1814.

Załóżmy przeciwnie, tj.

$$a \leqslant 5b - \frac{4}{b^2}.$$

Wtedy

$$5b - \frac{4}{b^2} + \frac{1}{a^2} \geqslant a + \frac{1}{a^2} \geqslant 5b - \frac{3}{b^2},$$

wobec tego $\dfrac{1}{a^2} \geqslant \dfrac{1}{b^2}$, skąd $a \leqslant b$. Jednakże wtedy

$$a + \frac{1}{a^2} \geqslant 5b - \frac{3}{b^2} \geqslant 5a - \frac{3}{a^2},$$

co oznacza, że $\dfrac{4}{a^2} \geqslant 4a$, a więc $a \leqslant 1$ – sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 1815.

Chcemy pokazać, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c takie, że

$$n + a^2 = (a + b)(a + c),$$

więc wystarczy, aby liczba $n + a^2$ była iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od a. Na mocy założeń zadania możemy znaleźć taką liczbę pierwszą p oraz liczbę całkowitą $m > 0$, że $n = p^2 m$. Rozważmy cztery przypadki:

1) $m + 1 > p$. Możemy wtedy wziąć $a = p$, gdyż $n + a^2 = p^2 \cdot (m + 1)$ i zarówno p^2, jak i $m + 1$ są większe od a.
2) $m + 1 < p$ i $m + 1$ jest liczbą złożoną. Niech $m + 1 = st$ dla pewnych liczb całkowitych $s, t > 1$. Znów możemy przyjąć $a = p$, gdyż $n + a^2 = ps \cdot pt$ i obie liczby ps i pt są większe od a.
3) $m + 1 < p$ i $m + 1$ jest liczbą pierwszą. Niech $m + 1 = q$ i podzielmy p przez q z resztą: $p = \ell q + r$, gdzie $r > 0$. Weźmy $a = r$, wtedy $n + a^2 = q \cdot (\ell^2 mq + 2\ell mr + r^2)$ i oba czynniki są większe od r.
4) $m + 1 = p$. Wtedy oczywiście $n = p^3 - p^2 > 20$, więc możemy założyć, że $p \geqslant 4$. Zachodzi

$$n + 6^2 = (p + 3) \cdot (p^2 - 4p + 12),$$

przy czym oba czynniki po prawej stronie są większe od 6.

W każdym z przypadków dostaliśmy żądany rozkład, więc teza zadania została udowodniona.

Rozwiązanie zadania F 1117.

Po gwałtownym obniżeniu ciśnienia woda zacznie parować w całej objętości. Powstająca para pobiera ciepło od ciekłej wody, powodując jej krzepnięcie (woda ma temperaturę 0°C. Proces parowania jest bardzo szybki, a więc proporcje mas lodu i pary zaraz po obniżeniu ciśnienia określone są jedynie przez wartości ciepła parowania i ciepła topnienia. Niech m_l oznacza masę wytworzonego lodu. Mamy:

$$L_f \cdot m_l = L_v \cdot (m - m_l).$$

Otrzymujemy masę lodu:

$$m_l = \frac{L_v m}{L_v + L_f}.$$

Liczbowo $m_l \approx 8{,}71$ g. W stanie równowagi, który zostanie osiągnięty w wyniku dalszych, powolnych procesów sublimacji/resublimacji masa lodu będzie zależała także od objętości pod tłokiem dostępnej dla pary wodnej.

Rozwiązanie zadania F 1118.

W równowadze termodynamicznej średnie energie kinetyczne atomów helu i neonu są równe i proporcjonalne do temperatury w skali Kelwina. Oznacza to, że ich średnie prędkości są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków ich mas:

$$\frac{v_{\mathrm{He}}}{v_{Ne}} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{Ne}}}{m_{\mathrm{He}}}} = \sqrt{5}.$$

Gdyby w pojemniku znajdował się jeden rodzaj gazu, to czas opróżniania pojemnika z helu byłby $\sqrt{5}$ razy krótszy niż czas opróżniania z neonu. Ponieważ oba gazy można traktować jak gazy doskonałe, których atomy nie oddziałują ze sobą, więc przy takiej samej liczbie moli w pojemniku, w jednostce czasu liczba atomów helu opuszczających pojemnik będzie $\sqrt{5}$ razy większa niż liczba atomów neonu:

$$\frac{n_{\mathrm{He}}}{n_{\mathrm{Ne}}} = \sqrt{5}.$$

Wraz z ubywaniem gazu skład wiązki będzie ulegał zmianie, bo helu ubywa szybciej niż neonu.

Obroty o pewne szczególne kąty

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

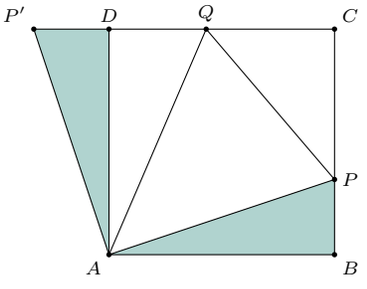
W kąciku nr 74 (Δ^2_{25}) pisałem o symetrii środkowej, która jest tym samym co obrót o kąt 180° wokół środka symetrii. Tym razem będzie o obrotach o kąty 90° i 60°. Ogólna zasada stosowania obrotów w rozwiązywaniu zadań jest następująca: obracamy pewną część rysunku w taki sposób, żeby ją dopasować w innym miejscu.

Dla ścisłości – wszystkie figury podajemy tu z kolejnością wierzchołków przeciwną do ruchu wskazówek zegara i również w tym kierunku wykonujemy obroty.

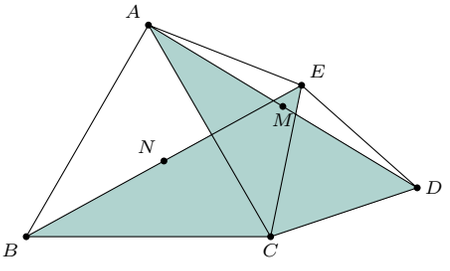
Przykład 1. W kwadracie $ABCD$ punkty P i Q leżą, odpowiednio, na bokach BC i CD, przy czym $|\sphericalangle PAQ| = 45°$ (rys. 1). Udowodnić, że $|BP| + |DQ| = |PQ|$.

Rozwiązanie. Obróćmy trójkąt ABP wokół punktu A o kąt 90° – otrzymamy trójkąt ADP' przystający do ABP. Zachodzą równości $|\sphericalangle ADQ| = |\sphericalangle ADP'| = 90°$, więc $|P'Q| = |DP'| + |DQ| = |BP| + |DQ|$. Z drugiej strony $|PQ| = |P'Q|$, gdyż trójkąty APQ i AQP' są przystające (bkb).

Obrót o 60° można wykorzystać do weryfikacji, czy dany trójkąt jest równoboczny. Trójkąt XYZ jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy któryś z punktów X, Y, Z jest obrazem drugiego w obrocie o 60° względem trzeciego. Można sformułować analogiczną zasadę dla równoramienności trójkąta prostokątnego, a nawet dowolnego.



Rys. 1



Rys. 2

Jeszcze jedna wskazówka ogólna. Jeśli w danej konfiguracji geometrycznej znajdują się dwie przystające figury, to zawsze warto sprawdzić, co nam daje izometria (na przykład obrót) przekształcająca jedną z nich w drugą.

Przykład 2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty M i N są środkami przekątnych, odpowiednio, AD i BE (rys. 2). Wykazać, że trójkąt CMN jest równoboczny.

Rozwiązanie. Trójkąty ACD i BCE są przystające (bkb), pierwszy z nich jest obrazem drugiego w obrocie o 60° wokół punktu C. Ten sam obrót przekształca punkt N w punkt M, więc trójkąt CMN jest równoboczny.

Zadania

1. Na bokach trójkąta ABC zbudowano kwadraty $BPQC$ i $CRSA$. Punkty K i L są środkami odcinków, odpowiednio, BR i AQ. Wykazać, że trójkąt CKL jest prostokątny równoramienny.
2. Częścią wspólną kwadratów $ABCD$ i $APQR$ jest punkt A. Punkt M jest środkiem odcinka DP. Udowodnić, że $AM \perp BR$.
3. W kwadracie $A_1A_2A_3A_4$ znajduje się punkt P. Prosta ℓ_i przechodzi przez punkt A_i i jest prostopadła do $A_{i+1}P$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ (przyjmujemy $A_5 = A_1$). Udowodnić, że proste ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 przecinają się w jednym punkcie.
4. W trójkącie ABC dana jest środkowa CM i wysokość CD. Przez dowolny punkt P poprowadzono proste prostopadłe do AC, BC i MC, które przecinają prostą CD w punktach, odpowiednio, X, Y, N. Udowodnić, że punkt N jest środkiem odcinka XY.
5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD| = 120°$. Udowodnić, że środki odcinków AB, BC, CD wyznaczają trójkąt równoboczny.
6. Udowodnić, że wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wszystkie punkty X spełniające równość $|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$ leżą na jednym okręgu.

Wskazówki do zadań

1. Porównaj z przykładem 2.
2. Rozważmy (przystające!) równoległoboki $ADYP$ i $BARX$. Obrót o 90° wokół środka kwadratu $ABCD$ przeprowadza pierwszy z nich w drugi, więc obrazem prostej AY w tym obrocie jest prosta BR.
3. Po obrocie o kąt 90° wokół środka danego kwadratu prosta ℓ_i przechodzi w prostą $A_{i+1}P$. Skoro po obrocie wszystkie cztery proste mają punkt wspólny (P), to przed obrotem też tak musiało być.
4. Przez punkty primowane oznaczmy obrazy w obrocie o 90° punktów z zadania. Trójkąt $X'Y'P$ jest podobny do trójkąta ABC, bo ma odpowiednie boki równoległe do boków tego trójkąta. Prosta PN' zawiera środkową trójkąta $X'Y'P$ (dlaczego?), więc punkt N' jest środkiem odcinka $X'Y'$.
5. Trójkąt APC po obrocie o 120° przechodzi w trójkąt BPD, więc $|AC| = |BD|$ oraz kąt ostry między nimi ma 60°.
6. Niech X będzie punktem spełniającym warunki zadania. Obróćmy trójkąt ABX o 60° wokół punktu A – otrzymamy trójkąt ACX'. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|\sphericalangle CX'X| = 90°$, więc $|\sphericalangle AX'B| = |\sphericalangle AX'C| = 150°$.

Maths Beyond Limits

Zbliża się jubileuszowa 10. edycja kultowego obozu matematycznego Maths Beyond Limits! MBL to wyjątkowa inicjatywa, która umożliwia integrację młodzieży pasjonującej się matematyką z całego świata.
Tegoroczny obóz odbędzie się w dniach **7-20.09.2025 w Rycerce Dolnej** (woj. śląskie). Serdecznie zapraszamy młodzież licealną (15-19 lat) do udziału w rekrutacji za pośrednictwem naszej strony internetowej. Starszych miłośników matematyki zachęcamy zaś do aplikowania w roli tutora.

Typowy plan dnia na MBL

mathematical classes — 80-minutowe wykłady poświęcone ciekawym, "pozaszkolnym" dziedzinom matematyki

camper talks — 30-minutowe referaty uczestników obaozu

time academic unscheduled — Czas na pracę własną lub wraz z tutorem

evening activities — najróżniejsze zajęcia rekreacyjne prowadzone przez samych uczestników!

www.mathsbeyondlimits.eu

mathsbeyondlimits@gmail.com

maths_beyond_limits

Maths Beyond Limits

W tym numerze znajdziesz:

- materiały z zajęć prowadzonych na MBL
- artykuły przygotowane na podstawie referatów uczestników obozu