



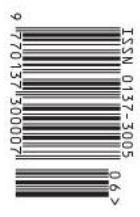
deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 6 (613) 2025
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

Zagadkowe
balony
str. 4



Nakład: 2700 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 6 (613) 2025

Co nazwy pierwiastków mówią o stosunku
uczonych do nauki

Tomasz Ratajczyk str. 1

Zagadkowe balony

Agnieszka Chudek str. 4



Zadania str. 5

Świat jest pozytywny i kwadratowy

Jacek Pytlak, Mariusz Skalba str. 6

Ukryta moc defektów w diamencie

Mariusz Mrózek str. 8

Dwie tury, STV i głosowanie strategiczne

Andrzej Kaczmarczyk, Stanisław Szufa str. 10

Kąt Otwarty: Ciąg Marka–Ulama

Bartłomiej Pawlik str. 12



Aktualności
Nowa cząstka w LHC! str. 13

Polując na neutrino, czyli z pamiętnika
fizyka. Dzień drugi

Joanna Zalińska str. 14



Szczęście z jelita
Marta Fikus-Kryńska str. 15



Trójkąty, kwadraty, sześciąty
Paweł Rafał Bieliński str. 17

Klub 44 str. 20



Prosto z nieba: Znajdując błyszczący
pierścień w stogu siana, ups... w kosmosie str. 22



Niebo w czerwcu str. 23



Metoda średniej w kombinatoryce
Bartłomiej Bzdega str. 25

W następnym
numerze:
Nowe życie
tabliczki
mnożenia

1,035	2,302	0,48	0,959	czarne
0,966	1,044	0,721	1,043	szary
1,052	0,958	1,463	0,887	rdze
0,623	0,214	1,387	4,068	blond
szare	brąz	zielone	niebieskie	

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac.,
Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub
zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Co nazwy pierwiastków mówią o stosunku uczonych do nauki

Próba systematycznego ujęcia

Tomasz RATAJCZYK*

*Doktorant, Wydział Chemii
Uniwersytetu Warszawskiego, Szkoła
Doktorska Nauk Ścisłych
i Przyrodniczych

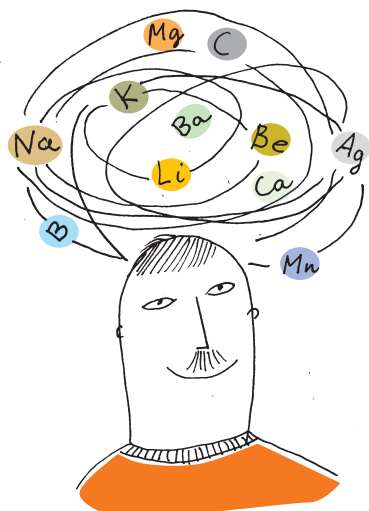


Choć minęło zaledwie osiem lat od przyjęcia przez IUPAC ostatnich czterech nazw dla superciężkich pierwiastków, elegancki wygląd pełnego siódmego okresu i brak dalszych doniesień o sztucznym wytworzeniu jeszcze cięższych jąder powodują, że zaczynamy myśleć o układzie okresowym w obecnej formie jako o czymś jak najbardziej kompletnym. Nawet jeśli tak ostatecznie nie będzie, to poczucie kompletności skłania do podsumowań, do podjęcia próby pewnej systematyki i wyciągnięcia z niej wniosków, podobnie jak to czyniono w przypadku innych kompletnych systemów, np. układu czterech żywiołów Empedoklesa, pięciu brył platońskich albo modelu standardowego cząstek elementarnych. Tym, co wyróżnia układ okresowy spośród nich, jest dość duży zbiór elementów, a przede wszystkim niezwykle długi proces nadawania im nazw, trwający od prehistorii do czasów najnowszych.

Początki historii

Najstarsze nazwy obejmują pierwiastki, które były znane najdawniej, i znaczą dokładnie to, co znaczą. **Węgiel** jaki jest, każdy widzi, tak też i **siarka**. Korzenie tych słów sięgają języka praindoeuropejskiego, więc są wielokrotnie starsze niż samo pojęcie pierwiastka chemicznego. Utożsamienie tych substancji z pierwiastkami nic w nich nie zmieniło w sensie fizycznym. Podobnie siedem znanych w starożytności metali, kolejny kompletny układ, sprzężony z siedmioma znanymi wówczas ciałami niebieskimi i siedmioma wspólnymi dla wielu kultur bóstwami: **srebro**–Księżyc, **rtęć**–Merkury, **miedź**–Wenus, **złoto**–Słońce, **żelazo**–Mars, **cyna**–Jowisz, **ołów**–Saturn. Ten system wydawał się do tego stopnia kompletny, że jeszcze w nowożytności nowo odkryte metale przypisywano do któregoś z tych siedmiu. Na przykład **molibden** to po grecku ołów (*molybdos*), do którego podobny wizualnie jest molibdenit (MoS_2). **Platyna** – to z hiszpańskiego srebro (*plata*), i to pogardliwie zdrobnione, bowiem dawni Hiszpanie, podbijając Amerykę Środkową, uznali tamtejsze platynowe skarby za gorszy sort tego metalu. Po drodze pojawiło się jeszcze kilka nazw o dość mglistej etymologii: dwie perskie, **arsen** i **cyrkon**, oraz dwie staroniemieckie, **cynk** i **bismut**. Jednak dopiero Robert Boyle, dając pierwszą ścisłą definicję pierwiastka, dał zarazem asumpt do dalszych, dużo bardziej świadomych odkryć... które trzeba było zacząć bardziej świadomie nazywać.

Coś musiało być w tych minerałach



Kolejną kategorię stanowią pierwiastki nazwane od substancji, z których je pozyskano, nieposiadających głębszych źródłosłów. Są to głównie pierwiastki lekkie i wcześnie odkryte; niektóre z nich Antoine Lavoisier ponazywał po francusku jeszcze przed wydzieleniem ich w postaci czystej, słusznie przewidując, że w konkretnych minerałach tkwią konkretne, odrębne pierwiastki. Po polsku mamy **sód** od sody, **potas** od potażu (ang. *potash*, czyli popiół roślinny), **lit** od gr. *lithos* (kamień), bo w przeciwieństwie do potasu, otrzymano go z ziemi, z jakiegoś kamienia. Dalej: **beryl** od minerału berylu, **wapń** od wapna, **magnez** od magnezji. Od magnezji, albo raczej starożytnego miasta Magnezji w Grecji, pochodzi nie tylko magnez, ale i **mangan**, jednak nazywając te pierwiastki, o tym miejscu nikt już raczej nie pamiętał. Jeszcze dalej: **bor** od boraksu, **glin** od glinki (łac. *alumina*), **krzem** od krzemionki (łac. *silica*). Wiele z tych polskich nazw zawdzięczamy Jędrzejowi Śniadeckiemu, który za pokolenie starszym Lavoisierem porwał się na wprowadzenie systematycznych polskich nazw, wzorowanych na francuskich. Jeszcze jedną z nich jest **wodór**, który przecież wziął się stąd, że tworzy wodę.

Właściwości pierwiastka...

Dotychczas omówione nazwy pierwiastków są w pewnym sensie podstawowe, ponieważ za ich główną właściwość wzięto to, że są tym, czym są. W następnej, najobszerniejszej grupie znajdują się pierwiastki, które zostały nazwane od jakiejś konkretniejszej właściwości, fizycznej, chemicznej lub symbolicznej, którą uznano za najbardziej charakterystyczną. Na przykład **fosforowi** zdarza się świecić, czyli „nieść światło”, podobnie jak semafor „niesie sygnały”. Za najbardziej charakterystyczne dla **azotu** przyjęto to, że nie podtrzymuje życia (gr. *azotikos*), przynajmniej w Polsce, Rosji czy Francji, bo już Niemcy za istotniejsze uznali niepodtrzymywanie spalania (niem. *Stickstoff*), a anglofoni – występowanie tego pierwiastka w saetrze (łac. *nitrum*, stąd *nitrogen*). Spalanie (bardziej poetycko *tlenie*) podtrzymuje za to **tlen**, w języku polskim nazwany wyjątkowo trafnie przez Jana Oczapowskiego w połowie XIX wieku, zamiast już wtedy nieaktualnego kwasorodu, który był kalką z fr. *oxygène*. Nieliczne pierwiastki mają w czystej postaci nietypowe kolory, co zgrabnie wykorzystano w nazewnictwie: **chlor** to po grecku zielony (*chloros*), a **jod** – fioletowy (*iodes*). **Brom** wprawdzie mógłby być brunatny, ale za bardziej charakterystyczne uznano, że cuchnie (gr. *bromos*), pod czym zresztą ciężko się nie podpisać. Od okropnej woni nazwano aż dwa pierwiastki, tyle że w przypadku drugiego z nich, **osmu**, tak naprawdę przykry zapach (gr. *osme*) ma powstający na powierzchni lotny tlenek.

...albo jego związków

Cechy wybranych związków również bywały źródłami nazw ich składników. Niektóre jeszcze poprzez znane od dawna minerały, choćby **fluor** od fluorytu (łac. *fluo*, płynę), dodawanego w hutach jako topnik. Z drugiej strony, wolframit w wytopianiu rud przeszkadzał, ponieważ prowadził do uciążliwego („wilczego”, niem. *Wolf*) powstawania piany (niem. *Rahm*), stąd dziś metal **wolfram**. Górnikom dawały się we znaki także inne złośliwe moce, takie jak potworki Kobold (stąd **kobalt**) i Nickel (stąd **nikiel**), utrudniające prace, odpowiednio, z żelazem i z miedzią. Później, ze względu na właściwości ich związków, nazwano też **chrom** kolorowym (gr. *chroma*, kolor), **rod** różowym (gr. *rhodon*, róża), **iryd** tęczowym (łac. *iris*, tęcza), a **bar** ciężkim (gr. *barys*). Podobnie **prazeodym**, który niegdyś traktowano razem z **neodymem** jako jeden pierwiastek, didym (gr. *didymos*, bliźniak), nazwany tak, gdyż był bliźniaczo podobny do lantanu i ceru. Ironia losu, że jakiś czas później okazało się, że didym sam w sobie stanowi mieszaninę dwóch różnych pierwiastków. Gdy już się udało rozdzielić tych bliźniaków, jeden z nich okazał się tworzyć związki o barwie zielonej (gr. *prasios*, zielony), a drugi po prostu nazwano nowym (gr. *neos*).

Małe przełomy

Niejednokrotnie seria podobnych odkryć następowała po powstaniu przełomowego wynalazku. Wspomniane

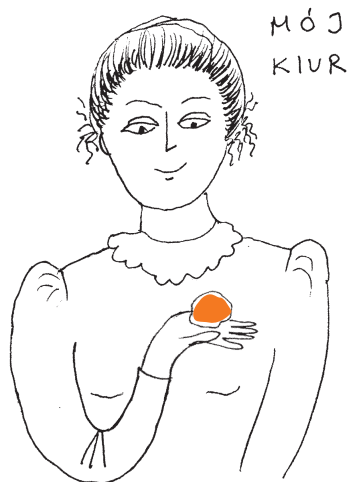
sód, wapń itp. wydzielono jeden po drugim dzięki elektrolizie. Inne z kolei dzięki spektroskopii. Porównując widma emisyjne, odkryto czerwony prążek **rubidu** (dzielącego łac. źródełków *rubeus* z czerwonymi rubinami), niebieskie prążki **indu** (*indigo*) czy **cezu** (łac. *caesius*, błękitny), zielony prążek **thalu** (gr. *thalos*, zielona gałązka). Tak odkryto także **hel**, nazwany od Słońca (gr. *Helios*), w którego widmie znaleziono prążki pochodzące od tego pierwiastka. Pozostałe gazy szlachetne znaleziono równie szybko dzięki rozwojowi kriogeniki. Ponieważ każdy z nich wydawał się dość podobny, a jednocześnie inerty i trudny do wyizolowania, dano im z greki nieco symboliczne imiona: nowy **neon**, leniwy **argon**, ukryty **krypton** i obcy **ksenon**. Jeszcze kilka innych pierwiastków nazwano od trudności w otrzymaniu: **lantan** i **dysproz** na pewno (gr. *lanthano*, ukrywam się, *dysprositos*, uciążliwy), a w pewnym sensie także **technet** (gr. *technetos*, sztuczny) i **antymon** (gr. *antimonos*, niesamodzielny). Wreszcie po odkryciu promieniotwórczości pojawiło się kilka pierwiastków nazwanych od niej: **rad** (a po nim **radon**) i **aktyn** (a przed nim **protaktyn**), no i niestabilny **astat** (gr. *astatos*).

Odniesienia do mitologii

A co, jeżeli nie udało się wyłonić jednej istotnej właściwości? Z początku czasami sięgano po symbolikę ugruntowaną w mitologii, głównie grecko-rzymskiej. Z tej zaczerpnięto choćby **tytan** (intuicyjnie brzmi jednak jak coś wytrzymałego, prawda?), występujące często razem **niob** i **tantal** (Niobe była córką Tantala), **kadm** pośrednio od króla Kadmosa, **pallad** od Pallas Ateny. **Promet** nazwano od Prometeusza, który wykradł z Olimpu ogień – pod ogień należy tu wstawić energię jądrową. Kojarzący się z nią **uran** akurat został nazwany jeszcze w XVIII wieku po odkrytej przez Williama Herschela niewiele wcześniej planecie, ale już odkryte podczas II wojny światowej **neptun** i zwłaszcza **pluton** – oprócz mitologii pobrzmiewają też echemi potężnego zniszczenia. Cztery inne nazwy pochodzą z mitologii germańskiej: **tor** od równie silnego Thora, **wanad** od bogini Vanadis, a także wymienione już kobalt i nikiel od duchów bardziej wrednych niż potężnych. Mniej destrukcyjnie kojarzą się za to **cer**, zaraz po planetoidzie nazwany tak od rzymskiej bogini Ceres, a także **selen** od gr. *Selene* (Księżyc) i **tellur** od łac. *Tellus* (Ziemia). Podobnie jak w przypadku klasycznych siedmiu metali, i tutaj czasem trudno określić, czy więcej inspiracji dało ciało niebieskie, czy odpowiadająca mu postać z mitologii.

Gdzie są te pierwiastki?

Przedostatnia duża grupa nazw obejmuje te pochodzące od nazw miejsc (toponimów). Wiele pierwiastków z tej grupy odkryto względnie niedawno i w większości motywacją do nadania nazwy była chęć uhonorowania miejsca odkrycia pierwiastka albo pochodzenia odkrywcy. W dziewiętnastym wieku dominowała w tym Europa, do której naturalnie dołączyły później USA. Skandynawski jest oczywiście **skand**, ale też cztery



pierwiastki z kopalni Ytterby w Szwecji, czyli **itr**, **iterb**, **terb** i **erb**, dalej **tul** (gr. *Thule*, półlegendarna nazwa nordyckiej wyspy), **holm** od Sztokholmu i **hafn** od Kopenhagi. **Stront** nazwano od szkockiej wsi Strontian. **German** od Germanii, czyli Niemiec, w których znajdują się też kraj związkowy Hesja (**has**), miasto Darmstadt (**darmsztadt**) oraz rzeka Ren (**ren**). Są i trzy francuskie pierwiastki: **frans**, **gal** od Galii i **lutet** od Lutecji, osady, wokół której zbudowano Paryż. **Polon**, choć też odkryty we Francji, nazwała Maria Skłodowska, więc Polakom również udało się zapisać w układzie okresowym. Śniadecki sto lat wcześniej także był na tropie pewnego pierwiastka, ale jego odkrycia nie udało się potwierdzić, a później pierwiastek ten nazwano **rutenem** – od Rusi. Oprócz rutenu jeszcze dwa pierwiastki mają eponimy rosyjskie: **dubn** od instytutu w Dubnej i **moskow** od Moskwy, blisko której znajduje się ten instytut. Po odnotowaniu przy tym oczywistego **europu** należy zwrócić uwagę na Amerykę (**ameryk**), gdzie w stanie Kalifornia (**kaliforn**) pracują instytuty Berkeley (**berkel**) i Livermore (**liwermor**); jest także stan Tennessee, znany nie tylko z burbonu, ale i z pierwiastka o nazwie **tenes**. Japończykom udało się nazwać tylko jeden – **nihon**.

I ty możesz zostać pierwiastkiem

Wraz z rozwojem metod otrzymywania superciężkich jąder nowo wytworzone pierwiastki zaczęły znajdować się na granicy odkrycia i wynalazku. Czasy życia pojedynczych atomów, mierzone w milisekundach, nie pozwalają i być może nigdy nie pozwolą na zbadanie makroskopowych właściwości transkuriowców. Zatem w nazwach najcięższych pierwiastków obok toponimów przeważają antroponimy, których prawie nie ma wśród pierwiastków stabilnych (wyjątkami są **samar** od Wasilija Samarskiego przez minerał samarskit oraz **gadolin** od Johana Gadolina przez minerał gadolinit). Poza nimi pozostałych 14 nazwisk znalazło się w ostatnim okresie układu. Można je wymienić ciągiem: **kiur** (Maria Skłodowska-Curie), **einstein** (Albert Einstein), **ferm** (Enrico Fermi), **mendelew** (Dmitrij Mendelejew), **nobel** (Alfred Nobel), **lorens** (Ernest Lawrence), **rutherford** (Ernest Rutherford), **seaborg** (Glenn Seaborg), **bohr** (Niels Bohr), **meitner** (Lise Meitner), **roentgen** (Wilhelm Roentgen), **kopernik** (Nicolaus Copernicus), **flerow** (Gieorgij Florow), **oganeson** (Jurij Oganiesian). Na wyróżnienie zasługuje kopernik, nazwany po uczonym względnie bardzo dawnym, a przeciwnie seaborg i oganeson, nazwane po tych naukowcach jeszcze za ich życia.

Powrót do początków

Porównując wszystkie zebrane wyżej nazwy pierwiastków, można wskazać kilka głównych tendencji. Najstarsze nazwy wykształcały się w sposób naturalny razem z całym językiem. Jeśli pierwiastek był znany jako taki, oznaczały ten pierwiastek, jeśli znany był jego związek, oznaczały ten związek. Stulecia XVIII, XIX i początek XX przyniosły wiele neologizmów świadomie utworzonych przez badaczy, zazwyczaj zaczerpniętych z greki lub łaciny, odnoszących się do właściwości opisywanej substancji, a czasami do mitologii. Kiedy pierwiastków znano coraz więcej i okazało się, że coraz więcej z nich jest do siebie podobnych, coraz częściej nazywano je od różnych miejsc. Pod koniec XIX wieku zaczęło też zanikać wykształcenie klasyczne, więc naukowcom źródłosłowy greckie czy łacińskie po prostu stopniowo przestały przychodzić do głowy. Wreszcie do nazw odmiejscowych dołączyły nazwiska zasłużonych badaczy, mniej lub bardziej związanych z rozszerzaniem układu okresowego. Superciężkie pierwiastki nie mają właściwości dających się łatwo zaobserwować „szkiełkiem i okiem”, wykorzystanie nazwisk wydaje się naturalną tego konsekwencją.

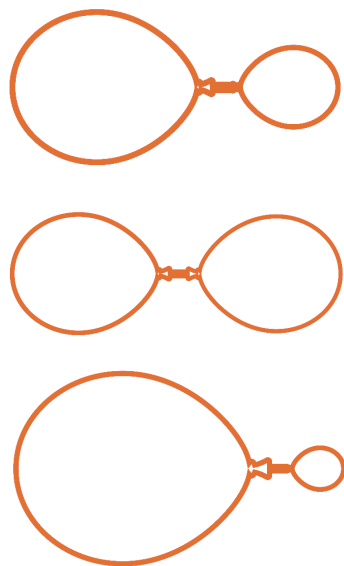
W pewnym sensie wróciliśmy więc do punktu wyjścia. „Ciężki” bar czy „niebieski” ind to nazwy o bardzo wdzięcznym pochodzeniu, które jednak podpowiada nam jakąś jedną właściwość pierwiastka. Niekoniecznie najważniejszą i niekoniecznie najtrafniejszą, jak w przypadku tlenu/kwasorodu. Liwermor czy tenes też niby od czegoś pochodzą, ale właściwie w kontekście tego, czym są te pierwiastki, to nic nie znaczy. Tenes jest tym, czym jest tenes. Węgiel jest tym, czym jest węgiel.

Literatura

- I. Eichstaedt, *Księga pierwiastków*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.
- A. Lavoisier, *Traktat podstawowy chemii*, tł. R. Mierzecki, *Analecta* X, 2001, 1(19), 7–122.
- H. Lichočka, *Chemia Jędrzeja Śniadeckiego*, *Opuscula Musealia* 26, 2019, 21–34.
- R. Mierzecki, *Rozwój polskiej terminologii chemicznej*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1988.
- A. Sulich, *Nomenklatura pierwiastków chemicznych w językach świata*, *Acta Philologica* 42, 2012, 5–13.
- A. Sulich, *Odwzorowanie wiedzy w nazwach pierwiastków chemicznych*, *Studia Semiotyczne* XXVII, 2010, 93–133.

Zagadkowe balony

Agnieszka CHUDEK



Przykładowe sytuacje po otworzeniu zaworka

W ogólności możemy rozważyć balony o promieniach a i b i zadanie minimalizacji sumy ich powierzchni. Problem ten sprowadza się do minimalizacji funkcji $a^2 + b^2$, przy ustalonej wartości objętości, czyli warunku $a^3 + b^3 = V = \text{const.}$ Aby to zadanie rozwiązać, wystarczy przekonać się, że zachodzi nierówność $(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2$ oraz że równość zachodzi tylko wtedy, gdy jedna z liczb a , b jest zerowa. Właśnie wtedy osiągane jest minimum powierzchni.

O równaniu Laplace'a więcej pisał Michał Miśkiewicz w artykule „Bańka jaka jest, każdy widzi”, Δ_{19}^7 .



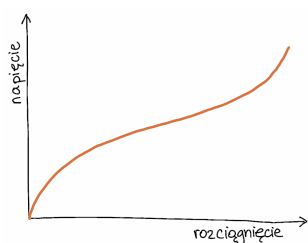
Zmiana struktury polimeru w trakcie rozciągania

Zacznijmy od obiecaniej zagadki. Dwa identyczne balony nadmuchujemy do różnych rozmiarów i łączymy ze sobą za pomocą zaworka, który można otwierać i zamykać (zrobionego np. z dwóch korków od butelki z wodą dla dzieci). Co się stanie, gdy otworzymy zaworek i pozwolimy, aby powietrze swobodnie przepływało między balonami? Czy powietrze przepłynie z mniejszego balonu do większego? Czy może na odwrót? A może nic się nie stanie? A może, jak to zwykle bywa, jedyną słuszną odpowiedzią jest: „To zależy”? Podczas prezentowania tej zagadki w dniu obchodów 50-lecia *Delty* znaczna część publiczności optowała za wariantem, że duży balon napelni mały, aż ich rozmiary się wyrównają. Faktycznie, w pierwszej chwili wydaje się to dość intuicyjne rozumowanie. Jednak po otwarciu zaworu stało się zupełnie odwrotnie. Mniejszy balon napompował większy, a sam skurczył się do niewielkich rozmiarów. Hm. . . czyżby fizyka po raz kolejny udowodniła prawdziwość *efektu św. Mateusza*, polegającego na ubożeniu biednych i bogaceniu się bogatych? Być może, jednak my przyjrzyjmy się temu zjawisku z różnych stron i spróbujmy wyjaśnić je, odwołując się do praw fizyki.

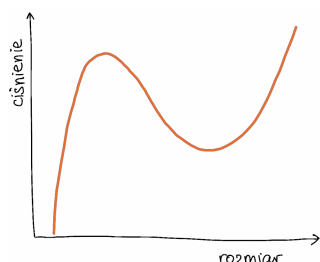
Powierzchnie. Nadmuchując balon, rozciągamy go, a więc zwiększamy jego całkowitą powierzchnię, a do tego potrzebna jest energia. Żeby rozciągnąć gumę bardziej, potrzeba więcej energii – oczywiste. Policzmy zatem całkowitą powierzchnię balonów w kilku przypadkach. Założmy, że balony są idealnie sferyczne i mały ma objętość 1 l, a duży 3 l. Posługując się wzorami na objętość kuli ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) i pole sfery ($S = 4\pi r^2$), możemy obliczyć, że ich powierzchnie będą wynosiły, odpowiednio, 484 cm² i 1006 cm² (w przybliżeniu), co w sumie daje 1490 cm². Gdyby po odblokowaniu przepływu balony wyrównały rozmiary, wówczas ich objętości łącznie wynosiłyby 2 l, a całkowita powierzchnia około 1535 cm², czyli więcej niż na początku. Taka sytuacja nie może zajść bez dostarczenia dodatkowej energii. A co w przypadku przepływu całości powietrza do dużego balonu? Wtedy na końcu mamy objętości 4 l i 0 l, a całkowita powierzchnia wynosi 1219 cm², czyli mniej niż na początku, zatem przepływ powietrza w tę stronę jest możliwy. Taka argumentacja może posłużyć jako wstępne wyjaśnienie, ale pójdźmy jednak krok dalej. Wszak podstawienie konkretnych wartości i założenie o idealnej sferyczności balonów nie mówią nic o uniwersalności zjawiska.

Ciśnienie. Wiadomo, że przepływ powietrza między balonami odbywa się z powodu różnicy ciśnień wewnątrz nich. Zatem jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonu i od czego ono zależy? Wiemy, że ciśnienie powietrza w napompowanym balonie jest większe niż ciśnienie atmosferyczne, a konkretny kształt zawdzięcza on elastycznej gumie, z której jest zrobiony i która także wywiera ciśnienie na powietrze wewnątrz. W kontekście opisanego zjawiska między ciśnieniem wewnątrz balonu a jego rozmiarem (promieniem) przydatne jest odwołanie się do prawa Laplace'a ($\Delta p = \frac{4T}{r}$), które wiąże różnicę ciśnień między wnętrzem a otoczeniem Δp , z napięciem powierzchniowym gumy T i promieniem balonu r . Z interpretacji tego wzoru wynika, że im większy jest promień balonu r , tym mniejsza różnica ciśnień jest potrzebna do jego utrzymania w stanie równowagi. Jest to dość intuicyjne dla każdego, kto choć raz dmuchał balon. W końcu najtrudniej jest zrobić ten pierwszy dmuch, a potem każdy następny jest coraz łatwiejszy. Problem w tym, że powyższe rozumowanie jest prawdziwe dla stałego napięcia powierzchniowego balonu, które w rzeczywistości stałe nie jest.

Guma. No właśnie. Czy prawdą jest, że każdy następny dmuch jest coraz łatwiejszy? Przecież nie możemy dmuchać balonu w nieskończoność i w końcu po kilku dmuchach dochodzimy do momentu, gdy znowu jest trudniej i zaczynamy balansować na granicy pęknięcia. Żeby zrozumieć, dlaczego tak jest, przyjrzyjmy się gumie, z której zrobiony jest balon. Gumowy lateks to polimer, czyli struktura składająca się z długich łańcuchów połączonych ze sobą w wielu miejscach na swojej długości. To właśnie ta struktura odpowiada za sprężyste zachowanie materiału. Gdy materiał nie jest naprężony, łańcuchy polimeru są zwinięte i splątane wokół siebie w losowy sposób. Gdy rozciągamy gumę,



Wykres zależności napięcia od rozciągnięcia dla polimeru



Wykresu zależności ciśnienia wewnątrz balonu od jego rozmiaru. W artykule [*] pokazane jest, jak kształt ten został wyznaczony doświadczalnie

[*] Z. Ješková, D. Featonby, V. Feková: *Balloons revisited*, Physics Education (2012) 47 392.

łańcuchy prostują się i ustawiają w linii. Do tego procesu potrzeba dostarczyć relatywnie dużo energii, ponieważ trzeba zerwać dużo połączeń (wiązań) między fragmentami łańcucha. Dalsze rozciąganie jest o wiele łatwiejsze, gdyż powoduje jedynie rozciąganie łańcuchów – aż do momentu, kiedy zostaną one całkowicie wydłużone, i dostarczenie dodatkowej energii spowoduje zerwanie połączeń między łańcuchami i w końcu pęknięcie gumy. Oznacza to, że elastyczność gumy zmienia się podczas rozciągania, a zależność napięcia w stosunku do stopnia rozciągnięcia nie jest liniowa (patrz wykres napięcie–rozciągnięcie po lewej stronie). Na początku ma stromy obszar, w którym guma jest sztywniejsza, potem środkowy obszar, w którym materiał jest łatwiejszy do rozciągnięcia, a następnie kolejny stromy obszar, w którym gumę coraz trudniej rozciągnąć.

Wróćmy teraz do ciśnienia wewnątrz balonu i spróbujmy wyznaczyć jego charakterystykę w pełnym zakresie nadmuchania balonu. Widać bowiem, że fakt, iż ciśnienie wewnątrz jest odwrotnie proporcjonalne do promienia, nie może być uznany jako uniwersalny dla balonów. W rzeczywistości zależność ciśnienia od rozmiaru w balonie przypomina krzywą w kształcie litery N (patrz wykres rozmiar–ciśnienie po lewej stronie). Stopień krzywizny z kolei zależy od rodzaju gumy. W przypadku naszych balonów możliwa jest sytuacja, w której oba balony, choć różnych rozmiarów, będą napompowane w taki sposób, że ciśnienia wewnątrz będą takie same, i wtedy nic się nie stanie. Da się również tak dobrać poziom napompowania, że duży balon będzie tuż przed granicą pęknięcia i ciśnienie na tyle duże, że nadmucha on mniejszy balon.

Czyżby zatem poprawna odpowiedź na tytułową zagadkę brzmiała: „To zależy”? Tak! I chociaż na temat trudności z udzieleniem jednoznacznej odpowiedzi krąży wiele dowcipów i anegdot, tutaj też potwierdza się fakt, że jeden poziom wyjaśnienia prowadzi do kolejnych i rzuca światło na kolejne szczegóły, które sprawiają, że dane zjawisko staje się trudne do jednoznacznego opisu. A wraz z odpowiedzią na jedno pytanie pojawia się kilka następnych. Swoją drogą ciekawe, jak wyglądałoby zachowanie układu, w którym połączymy więcej balonów. Albo czy układ będzie działał tak samo, jeśli będziemy pompować ten sam balon kilkakrotnie? Balony, chociaż są popularne i używane na co dzień, to ich zachowanie pozostawia nam kilka interesujących obszarów do eksploracji na różnych poziomach. Mam nadzieję, że ten artykuł zachęci Czytelnika do eksperymentowania i zadawania pytań, a to zaowocuje nowymi, fascynującymi odkryciami.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1819. Parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie a , b i c są takie, że liczba $(a^2 - bc)^2$ jest podzielna przez $ab + bc + ca$. Udowodnić, że liczba $(b^2 - ac)^2$ również jest podzielna przez $ab + bc + ca$.

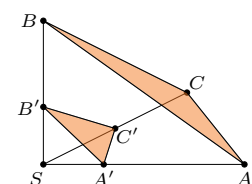
M 1820. Niech $n \geq 3$ będzie nieparzystą liczbą całkowitą. Na tablicy $2n \times 2n$ kolorujemy $2(n-1)^2$ pól. Jaka jest największa liczba narożników $\square$ (dowolnie obróconych), które zawsze można wyciąć z niepokolorowanej części tablicy?

M 1821. Niech $SABC$ będzie ostrosłupem o kątach prostych przy wierzchołku S . Punkty A' , B' , C' leżą, odpowiednio, na krawędziach SA , SB , SC w taki sposób, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (przyjmujemy, że podobieństwo uwzględnia kolejność wierzchołków). Czy stąd wynika, że płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są równoległe?

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1121. Dwa identyczne kondensatory płaskie połączono szeregowo. Przestrzeń między okładkami pierwszego wypełniono przewodnikiem o oporze właściwym ρ , a drugiego dielektrykiem o przenikalności elektrycznej ϵ . Ile wynosi stała czasowa $\tau = RC$ tego układu?

F 1122. Kompresor używany zwykle do sprężania powietrza wykorzystano do sprężenia helu. Sprężanie przebiega adiabatycznie od $p_0 = 1$ atm do $p = 10$ atm. Jaki jest stosunek temperatur końcowych obu gazów, jeśli początkowa temperatura w obu przypadkach była taka sama i wynosiła T_0 ?



Rozwiązania na str. 24

Świat jest pozytywny i kwadratowy

Jacek PYTLAK, Mariusz SKAŁBA*

Gdy ktoś zaczepi Was na ulicy i zapyta: *Co daje minus razy minus?*, to w zależności od nastroju odpowiecie bardzo krótko: *To nic nie daje* albo też krótko: *To daje bardzo dodatni plus*. Dlatego najpierw przypomnimy fragmenty teorii ogólnej, niezależnej od koniunktury.

Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i niech $\mathbb{F}_p = \{0, \dots, p-1\}$ będzie zbiorem reszt z dzielenia przez p . Wówczas dla niektórych reszt $r \neq 0$ istnieją dwie reszty x spełniające równanie

$$x^2 \equiv r \pmod{p},$$

a dla pozostałych niezerowych r nie ma w ogóle takich reszt x . W pierwszym przypadku mówimy, że r jest *resztą kwadratową modulo p* , a w drugim, że r jest *nieresztą kwadratową modulo p* . I tak na przykład z poniższej tabelki dla $p = 11$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

wynika, że 1, 3, 4, 5, 9 to reszty kwadratowe modulo 11, a 2, 6, 7, 8, 10 to niereszty kwadratowe modulo 11. To, że wiersz x^2 powyższej tabelki jest środkowo symetryczny, ma charakter ogólny, gdyż zawsze $(p-x)^2 \equiv x^2 \pmod{p}$. Zatem reszty z dzielenia przez p liczb

$$(*) \quad 1^2, 2^2, 3^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

to reszty kwadratowe modulo p , a pozostałe liczby z ciągu $1, 2, 3, \dots, p-1$ to niereszty.

Jak stwierdzić, czy dana reszta a z dzielenia przez p jest resztą, czy też nieresztą kwadratową, nie przeszukując ciągu $(*)$? Mówi o tym znane kryterium Eulera:

$$a \text{ jest resztą kwadratową modulo } p \iff a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Od tej chwili będziemy zakładać, że liczba pierwsza p jest postaci $p = 4k + 3$. Można łatwo udowodnić, że takich liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Trudny jest natomiast dowód asymptotyki dla funkcji $\pi_{4,3}(x)$, która (z definicji) podaje liczbę liczb pierwszych p mniejszych równych x , spełniających kongruencję $p \equiv 3 \pmod{4}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{4,3}(x)}{x/\log x} = \frac{1}{2}.$$

Przypomnijmy, że analogiczna równość zachodzi dla samej funkcji $\pi(x)$, zliczającej liczbę wszystkich liczb pierwszych nie większych od x , przy czym w granicy po prawej stronie dostajemy 1. Statystycznie więc co druga liczba pierwsza jest interesującej nas postaci. Zauważmy, że na mocy kryterium Eulera dla $p = 4k + 3$ reszta $p-1$ jest nieresztą kwadratową, gdyż

$$(p-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

Ogólniej: z dwóch reszt a oraz $p-a$ jedna jest resztą, natomiast druga nieresztą kwadratową.

Przedstawione obserwacje pozwalają nam określić *pierwiastek arytmetyczny* z dowolnej reszty kwadratowej a . Niech mianowicie

$$b = a^{(p+1)/4} \pmod{p}.$$

Mamy teraz

$$b^2 \equiv a^{(p+1)/2} = a^{(p-1)/2} \cdot a \equiv a \pmod{p},$$

czyli rzeczywiście powyżej określone b jest jednym z pierwiastków kwadratowych z elementu a . A my dodatkowo uważamy, że b jest tym *lepszym* pierwiastkiem i chcemy go nazywać *pierwiastkiem arytmetycznym*! Przypomnijmy, że w zakresie liczb rzeczywistych pierwiastkiem kwadratowym arytmetycznym z dodatniej liczby a nazywamy taką (jedyną) dodatnią liczbę b , że $b^2 = a$.



W zbiorze liczb rzeczywistych $a \in \mathbb{R}$ jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b^2$ dla pewnego $b \in \mathbb{R}$. Od tej chwili niech „bycie kwadratem” będzie namiastką „dodatniości”. U nas b jako potęga reszty kwadratowej a jest też resztą kwadratową! Uzasadnia to traktowanie b jako pierwiastka arytmetycznego z a .

Niestety przedstawiona analogia jest ułomna, gdyż w doskonałym (czyli rzeczywistym) świecie suma elementów dodatnich jest dodatnia, a w świecie reszt nie musi tak być. Dla przykładu

$$3 \equiv 5^2 \pmod{11} \text{ oraz } 5 \equiv 4^2 \pmod{11}, \text{ ale } 8 \not\equiv b^2 \pmod{11} \text{ dla } b \in \mathbb{F}_{11}.$$

Takie ciała jak $\mathbb{R}$ czy też $\mathbb{Q}$ wyróżniają się tym, że można w nich wprowadzić relację porządku, która jest zgodna z oboma działaniami, tzn. zarówno iloczyn, jak i suma elementów dodatnich jest dodatnia. Natomiast ciało liczb zespolonych oraz ciała skończone nie są tak porządnie uporządkowane. Tak więc nasz świat rzeczywisty, chociaż tak niedoskonały, nie jest najgorszym z możliwych do pomyślenia światów.

Jest też w użyciu matematycznym bardziej naturalne i praktyczne pojęcie „dodatniości” w zbiorze reszt niż powyższe „bycie resztą kwadratową”. Jeśli mianowicie p jest dowolną liczbą pierwszą nieparzystą, to zbiór liczb całkowitych w przedziale $(-p/2, p/2)$ jest zbiorem reprezentantów ciała $\mathbb{F}_p$ reszt z dzielenia przez p . Od teraz klasę reszt mod p będziemy nazywać *dodatnią*, gdy ma swojego przedstawiciela w przedziale $(0, p/2)$, a *ujemną*, gdy ma przedstawiciela w $(-p/2, 0)$.

Ważnym zastosowaniem tej dychotomii jest lemat Gaussa: najwygodniejszy portal do Prawa Wzajemności dla Reszt Kwadratowych (PWdRK) – Gauss użył go w swoim piątym dowodzie PWdRK. Pozwoliły tu sobie na dygresję historyczną: przed Gaussem nikt nie potrafił udowodnić PWdRK. Z czwórki gigantów arytmetyki wyższej wymienionych przez Gaussa w przedmowie do *Disquisitiones Arithmeticae*: Fermata, Eulera, Lagrange’a i Legendre’a, tylko ten ostatni był bliski poprawnego dowodu. Sam Gauss podał sześć dowodów; po Gaussie opublikowano ponad 250 dowodów! Ta ogromna liczba różnych dowodów słynnego twierdzenia świadczy pośrednio o jego wielorakich powiązaniach z resztą matematyki.

To wszystko jest bardzo piękne, ale my teraz nie o tym... Przy powyższej definicji „dodatniości” nie jest prawdą, że nasza metoda pierwiastkowania w $\mathbb{F}_p^*$ dla $p \equiv 3 \pmod{4}$ zawsze daje pierwiastek „dodatni” (tzn. resztę z przedziału $(0, p/2)$), ale okazuje się, że jednak trochę częściej niż „ujemny”: *w przedziale $(0, p/2)$ jest mianowicie więcej reszt niż niereszt!* Nie ma prostego uzasadnienia tej prawidłowości, warto jednak wspomnieć, z jakiego ogólniejszego i ważnego twierdzenia to wynika. Dla $p = 3$ teza jest oczywista. Załóżmy w dalszym ciągu, że $p \geq 7$. Niech $\mathcal{R}$ oznacza liczbę reszt kwadratowych modulo p w przedziale $(0, p/2)$, a $\mathcal{N}$ liczbę niereszt w tym przedziale. Ponadto przez h oznaczmy

rząd grupy klas ideałów pierścienia liczb całkowitych ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$.

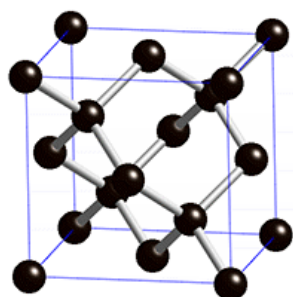
Zapewne nawet wśród Czytelników *Delt*y jest wielu takich, dla których powyższa definicja jest niezrozumiała. Nie szkodzi – dla nas istotne jest tylko to, że liczba h jako rząd (czyli liczba elementów) grupy jest dodatnia. Okazuje się bowiem, że liczba $\mathcal{R} - \mathcal{N}$ wynosi h albo $3h$ w zależności od tego, czy $q \equiv 7 \pmod{8}$, czy też $q \equiv 3 \pmod{8}$, a stąd oczywiście $\mathcal{R} > \mathcal{N}$! Pierwsze dowody wspomnianej równości dotyczącej $\mathcal{R} - \mathcal{N}$ podał Dirichlet w połowie XIX wieku, tworząc w ten sposób zręby analitycznej teorii liczb. Natomiast pierwszy całkowicie elementarny (to nie znaczy, że prosty!) dowód podał matematyk amator H.L.S. Orde w 1978 roku w artykule *On Dirichlet's class number formula* (Journal of London Mathematical Society 18). Ten dowód można znaleźć w 5. rozdziale książki profesora Władysława Narkiewicza *Classical Problems in Number Theory* (PWN, Warszawa 1986).

Prawo wzajemności reszt kwadratowych orzeka, że jeśli p i q są liczbami pierwszymi i choć jedna z nich daje resztę 1 z dzielenia przez 4, to p jest resztą kwadratową modulo q wtedy i tylko wtedy, gdy q jest resztą kwadratową modulo p . Jeśli obie liczby dają resztę 3 z dzielenia przez 4, to p jest resztą kwadratową modulo q wtedy i tylko wtedy, gdy q nie jest resztą kwadratową modulo p .

Ukryta moc defektów w diamencie

Mariusz MRÓZEK*

*Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet
Jagielloński



Struktura diamentu. Źródło: Wikimedia Commons.

Czym jest przerwa wzbroniona? Elektrony w atomie mogą zajmować tylko określone stany energetyczne. Ze względu na zakaz Pauliego elektrony nie mogą znajdować się w tym samym stanie. W konsekwencji w atomach elektrony zapełniają różne powłoki energetyczne (orbitale), zaczynając od najniższych energii. W każdym stanie znajdują się co najwyżej dwa elektrony, różniące się spinem. Kryształ składa się z ogromnej liczby atomów. Z powodu ich ciasnego upakowania występuje częściowe przekrywanie się orbitali i przesuwanie odpowiadających im energii. Powstaje wtedy tzw. *pasmo energetyczne*. W kryształach odpowiednikiem jednego stanu energetycznego w atomie jest całe pasmo złożone z ogromnej ilości stanów o zbliżonych do siebie energiach. W różnych kryształach przerwy pomiędzy pasmami są większe lub mniejsze, a czasami przerwy może nie być – pasma mogą się częściowo pokrywać. W czystym diamencie przerwa (tzw. *przerwa wzbroniona*) między ostatnim zapełnionym pasmem a pierwszym niezapełnionym jest duża. Właśnie dlatego czysty diament jest izolatorem – nie ma w nim swobodnych nośników, które mogłyby przewodzić prąd. Przewodzeniem prądu zajmują się elektrony z pasma częściowo tylko zapełnionego – jeżeli takiego pasma nie ma, to mamy izolator. Więcej o pasmach i przewodnictwie można przeczytać w Δ_{22}^7 , w artykule *Dioda bez dziur*.

Diamenty znane są jako najtwardsze naturalnie występujące substancje na Ziemi. Podziwiamy je za ich blask i nieskazitelne piękno. Jednak to właśnie drobne defekty w ich strukturze krystalicznej nadają im wyjątkowe właściwości, które czynią je niezwykle cennymi dla naukowców.

Idealny diament to taki, w którym, każdy atom węgla jest ułożony w perfekcyjnej sieci o strukturze kubicznej. Wszelkie zmiany w tej strukturze, takie jak wtrącenia innych pierwiastków, pęknięcia czy deformacje, nazywamy defektami. Choć na pierwszy rzut oka mogą wydawać się wadami, to w rzeczywistości właśnie one stanowią o wyjątkowych właściwościach diamentów.

Ciekawym przykładem wpływu defektów na właściwości tych kamieni jest ich przewodność elektryczna. Czysty diament jest izolatorem, co oznacza, że nie przewodzi prądu elektrycznego. Jednak obecność defektów, takich jak inkluzje atomów azotu (zastępujące część atomów węgla), mogą wprowadzić do struktury diamentu stany energetyczne, które umożliwiają przewodzenie prądu. To właśnie dzięki takim efektom diamenty są wykorzystywane w elektronice, np. w tranzystorach [1].

Innym przykładem wpływu defektów na właściwości diamentów jest ich kolor. Idealny diament jest bezbarwny, ale obecność różnych defektów może nadać mu różne zabarwienie. Na przykład niebieski kolor diamentów jest wynikiem obecności atomów boru, a czerwony wynikiem deformacji struktury kryształu. Te defekty kolorystyczne sprawiają, że diamenty są jeszcze bardziej poszukiwane i cenne [2].

Najciekawszymi defektami punktowymi w diamencie są centra barwne. To defekty struktury krystalicznej, które mają zdolność do absorpcji oraz emisji światła w zakresie optycznym. Diamenty mają wysoką przezroczystość, co pozwala na łatwą obserwację fluorescencji lub absorpcji pochodzącej od różnych centrów barwnych, które w nich się znajdują. Diament ma szeroką przerwę wzbronioną, natomiast poziomy energetyczne elektronów związanych z takim centrum barwnym są dobrze oddalone od pasm diamentu (znajdują się w przerwie między pasmami), co pozwala traktować centra barwne jako „nowe atomy” uwięzione w sieci krystalicznej diamentu i dobrze odizolowane od wpływu otoczenia. Dotychczas w diamencie zostało zaobserwowanych ponad 600 różnych centrów barwnych. Centrum barwne azot-wakancja NV^- to jeden z wielu defektów sieci krystalicznej diamentu. Składa się on z azotu N (zastępuje węgiel), w którego najbliższym sąsiedztwie znajduje się wakancja V , czyli węzeł sieci nieobsadzony atomem (w miejscu, gdzie powinien być atom, jest pusta przestrzeń). Atom azotu ^{14}N posiada pięć elektronów walencyjnych. Trzy z nich są związane z atomami węgla znajdującymi się wokół niego. Pozostałe dwa skierowane są do wakancji. Układ taki nazywany jest neutralnym centrum barwnym NV^0 . Neutralnie naładowane centrum NV^0 wydaje się obiecującym kandydatem do zastosowań w systemach informacji kwantowej, ze względu na posiadanie spinu ($S = 1/2$). Jeśli do wakancji przyłączony zostanie kolejny elektron, to defekt ten zmienia się w centrum barwne NV^- , któremu więcej uwagi poświęcimy poniżej. Rzadziej występuje sytuacja, gdy są tylko cztery elektrony, wówczas mamy do czynienia z centrum barwnym dodatnio naładowanym NV^+ [3].

Dla centrów barwnych NV^- stosowana jest podstawowa metoda badawcza nazwana optycznie wykrywanym rezonansem magnetycznym (ODMR, Optically Detected Magnetic Resonance). Polega na obserwacji zmiany natężenia czerwonej fluorescencji próbki wzbudzonej zielonym laserem podczas skanowania częstości pola mikrofalowego wokół rezonansu magnetycznego (około 2,87 GHz). ODMR umożliwia wykonywanie pomiarów wielu wielkości fizycznych, jak pole magnetyczne i elektryczne, temperaturę czy ciśnienie.

Odpowiedzi na pytania ze s. 12.

- (a) Między 62 (sixty two)
i 13 (thirteen).
(b) Pierwsza to 40 (czterdzieści),
a przedostatnia to 13 (trzynaście).



Wartości pola magnetycznego mierzone z wykorzystaniem NV^- z czułością sięgającą nawet setek $pT/\sqrt{Hz}$ (jednostka porównawcza dla wielu technik pomiaru wartości pola magnetycznego – im mniejsza wartość, tym bardziej czułe urządzenie). Taka dokładność pozwala na rejestrację np. sygnałów magnetycznych pochodzących od serca na powierzchni klatki piersiowej [4]. Warto w tym miejscu wspomnieć, że dla centrum barwnego azot-wakancja nie wszystkie pomiary indukcji pola magnetycznego wymagają wykorzystywania techniki ODMR. Wraz ze wzrostem przyłożonego pola magnetycznego, aż do około 30 mT, natężenie fluorescencji centrów NV^- spada o kilkanaście procent. Po odpowiednim wykalibrowaniu zależność ta może być wykorzystana do wyznaczania wartości pola magnetycznego, oferując szeroki zakres dynamiczny pola. Dokładne pomiary spektroskopowe pokazały, że położenie rezonansu ODMR, pochodzącego od centrum barwnego NV^- , w diamencie zależy także od temperatury otoczenia. Zależność ta jest wynikiem rozszerzalności cieplnej oraz oddziaływania elektronów z fononami. Rezonans ODMR przesuwają się ku niższym częstotliwościom wraz ze wzrostem temperatury. Dzięki temu zjawisku centrum barwne NV^- może pełnić rolę miniaturowego termometru. Dla niedużego zakresu zmian temperatur zmiana częstotliwości rezonansu może być w przybliżeniu traktowana jako liniowa, a w temperaturach bliskich pokojowej przesunięcie to wynosi około -74 kHz/K .

Przedstawione do tej pory zastosowania czujników z centrami NV^- obejmują także nanodiamenty. Możliwości wyznaczania pól i temperatur w skali nano są ogromnym atutem umożliwiającym pomiary tych wielkości fizycznych z wysoką przestrzenną zdolnością rozdzielczą. W połączeniu z nowoczesnymi technikami współczesnej mikroskopii optycznej i mikroskopii skaningowej otwiera to bardzo atrakcyjne perspektywy dla wielu dyscyplin nauki. Nanodiamant zawierający centrum barwne NV^- składa się z nietoksycznych związków: węgla – podstawowego budulca związków organicznych i niewielkich ilości azotu, idealnie nadaje się więc do badań biologicznych. Taki nanodiamant może być umieszczony w komórce biologicznej i służyć jako marker biologiczny lub czujnik temperatury. Wykorzystuje się także fakt, że centra barwne NV^- nie ulegają blaknięciu pod wpływem światła (*photo bleaching*). Dzięki temu diamenty z centrami NV^- nadają się do długoterminowego fluorescencyjnego znacznikowania i obrazowania przyłączonych do nich związków chemicznych czy biologicznych [5].

Z naukowego punktu widzenia diament z centrami barwnymi azot-wakancja wydaje się idealnym materiałem do zbudowania urządzenia wykorzystującego właściwości mechaniki kwantowej. W świecie kwantów diament naprawdę się wyróżnia, a jego właściwości optyczne doskonale nadają się do implementacji w nowych technologiach kwantowych. Centra barwne azot-wakancja w diamencie oferują możliwość budowania indywidualnych systemów kwantowych, które działają dobrze w temperaturze pokojowej. Operacje na qubitach, czyli superpozycjach stanów spinowych m_S , można realizować za pomocą impulsów mikrofalowych w centrach barwnych NV^- . Możliwość indywidualnego adresowania wybranego miejsca próbki, a nawet pojedynczych centrów, za pomocą konwencjonalnej mikroskopii i zastosowania impulsów mikrofalowych pozwalają na pełną kwantową kontrolę stanu centrum barwnego. Dla dobrego wykorzystania qubitów, pozwalającego na wykonanie odpowiednio dużej liczby operacji, konieczne jest z jednej strony osiągnięcie dostatecznej szybkości zmiany stanu (wysokiej częstości Rabi'ego), a z drugiej strony dostatecznie długiego jego czasu życia (wolnej relaksacji). Centra barwne NV^- w diamencie zapewniają spełnienie obu tych warunków. Co ważne, nie jest konieczne stosowanie skomplikowanych technik kriogenicznych i mogą one być wykorzystywane nawet w temperaturze pokojowej, co jest wielkim atutem. Trudno takie efekty osiągnąć z innymi kandydatami na qubity z zakresu fizyki ciała stałego [6].

Podsumowując, defekty w diamencie, choć na pierwszy rzut oka mogą wydawać się wadami, w rzeczywistości nadają im wyjątkowe właściwości, które czynią je niezwykle cennymi. Bez tych drobnych niedoskonałości diamenty nie byłyby dziś tak fascynującymi i wartościowymi kamieniami szlachetnymi.

Literatura

- [1] Araujo D., Suzuki M., Lloret F., Alba G., Villar P., "Diamond for Electronics: Materials, Processing and Devices", *Materials*, 14(22), (2021).
[2] Rachminov E., "The Fancy Color Diamond Book: Facts and Secrets of Trading in Rarities", New York: Diamond Odyssey (2009).
[3] Jensen K., Kehayias P., Budker D., "Magnetometry with Nitrogen-Vacancy Centers in Diamond", *Smart Sensors, Measurement and Instrumentation*, 19, Springer (2017).
[4] Arai K., Kuwahata A., Nishitani D. et al., "Millimetre-scale magnetocardiography of living rats with thoracotomy", *Commun. Phys.* 5, 200 (2022).
[5] Schirhagl R., Chang K., Loretz M., Degen CL., "Nitrogen-vacancy centers in diamond: nanoscale sensors for physics and biology", *Annu. Rev. Phys. Chem.* (2014).
[6] Gulka M., Wirtitsch D., Ivády V. et al., "Room-temperature control and electrical readout of individual nitrogen-vacancy nuclear spins", *Nat. Commun.* 12, 4421 (2021).

Dwie tury, STV i głosowanie strategiczne

Andrzej KACZMARCZYK* i Stanisław SZUFA**

*Department of Computer Science,
The University of Chicago

**Wydział Informatyki,
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Choć ważność głosu to zagadnienie
bardzo istotne, nie będziemy się na nim
skupiać. Założmy, że wszystkie głosy,
o których mówimy, są ważne.

„Rozsądny” nie jest tu kontrastem dla
„lekkomyślny”. Traktujemy słowo
„rozsądny” technicznie, jako
maksymalizujący szansę zwycięstwa
ulubionego kandydata.

Wybory prezydenckie w Polsce zwykle rozstrzygają się dopiero w II turze. Dochodzi do niej, gdy w I turze żaden z kandydatów nie zdobył ponad 50% ważnych głosów. Dla przypomnienia, II tura to kolejne głosowanie, w którym o zwycięstwo walczą dwaj kandydaci z największym poparciem w I turze. Głosowanie dwuturkowe jest względnie komfortowe dla wyborców. Mogą oni przenieść swoje poparcie na innego kandydata w II turze, na przykład gdy ich faworyt odpadł już w I turze. Intuicyjnie więc rozsądny wyborca powinien poprzeć w I turze swojego ulubionego kandydata. Ale czy aby na pewno? Zademonstrujemy, że intuicja tutaj zawodzi. Są bowiem sytuacje, w których lepiej poprzeć nieco mniej lubianego kandydata i zagwarantować mu zwycięstwo, niż zagłosować na swojego faworyta i musieć pogodzić się ze zwycięstwem bardzo nielubianego kandydata.

Rozważmy 63 wyborców i pięciu kandydatów A, B, C, D i E . W przykładzie poniżej preferencje wyborców względem kandydatów podane są (czytając od lewej) od ulubionego kandydata.

21 wyborców : $A \succ C \succ E \succ D \succ B$
19 wyborców : $B \succ C \succ D \succ E \succ A$
11 wyborców : $C \succ E \succ D \succ B \succ A$
7 wyborców : $D \succ C \succ E \succ B \succ A$
5 wyborców : $E \succ C \succ D \succ A \succ B$

Zauważmy, że gdyby wszyscy wyborcy oddali głos na ulubionego dostępnego w danej turze kandydata, to w II turze B pokonałby A stosunkiem głosów 37 do 26.

Przyjrzyjmy się jednak bliżej grupie 12 wyborców przedstawionych jako ostatni w powyższym zestawieniu. Po chwili refleksji zauważamy, że byłiby oni dużo bardziej zadowoleni z wyboru kandydata C . Rzeczywiście każdy taki wyborca uważa C za swojego drugiego w kolejności ulubionego kandydata. Czy mogli oddać swoje głosy w inny sposób, tak by zagwarantować kandydatowi C zwycięstwo? Zdecydowanie tak! Zauważając, że ich ulubieni kandydaci E oraz D są niezbyt popularni (popatrzmy, jak często wyprzedza ich C), wyborcy mogli oddać głos na C . Wtedy kandydat C z 42 głosami w II turze pokonałby kandydata A .

Skupmy się teraz na wyróżnionych kandydatach C, D oraz E . Tworzą oni spójny blok w preferencjach każdego z wyborców. Jak możemy to zinterpretować? Kandydaci ci są na tyle podobni, że zawsze występują blisko siebie w preferencjach wyborców, a zarazem na tyle wyjątkowi, że każdy inny kandydat jest albo bardziej preferowany od całej trójki, albo mniej preferowany od całej trójki. Dodatkowo, skoro kandydaci zawsze występują blisko siebie w preferencjach wyborców, intuicyjnie każdy wyborca będzie „podobnie” zadowolony z dowolnego z tych kandydatów. Właśnie dlatego naukowcy, opisując takich kandydatów, używają określenia *klony*. W praktyce (i w przybliżeniu) możemy myśleć o klonach jako o kandydatach o bardzo zbliżonych poglądach lub z podobnych opcji politycznych.

Nasz przykład pokazał, że wybory dwuturkowe czasem premiąją *głosowanie strategiczne*, czyli takie, w którym wyborcom bardziej opłaca się zagłosować niezgodnie z własnymi preferencjami, aby zwiększyć szansę na bardziej satysfakcjonujący wynik. W naszym przykładzie u podstaw tego problemu leży podatność dwuturkowej reguły wyborczej na *klonowanie* kandydatów. W szczególnym przypadku możemy tę własność opisać tak: Wyobraźmy sobie, że klonujemy wygrywającego kandydata i pozwalamy każdemu wyborcy doprecyzować, czy wola kandydata oryginalnego, czy sklonowanego. Jeśli reguła jest podatna na klonowanie, to może się zdarzyć, że w tak powstałych nowych wyborach nie wygra ani poprzednio wygrywający kandydat, ani jego klon.

Przykład udał nam się nawet lepiej niż się spodziewaliśmy! Poprzedni zwycięzca B nawet nie dostał się do II tury!

Klony mogą pochodzić na przykład z opcji politycznych powstałych na skutek rozpadu jednej partii.

W szczególnym przypadku jednego zwycięzcy obok STV używane są też nazwy *Instant-Runoff Voting*, *Ranked Choice Voting* czy *Alternative Vote*.

Gdyby zastosować STV, zniknęłaby też potrzeba organizowania II tury wyborów.

Liczba głosów potrzebna do zwycięstwa nosi nazwę progu i można go ustalić na kilka sposobów. My wybraliśmy ten najpopularniejszy (prawdopodobnie) i zastosowaliśmy go do szczególnego przypadku wyboru jednego zwycięzcy.

Uwaga! W trakcie działania reguły mogą zdarzyć się remisy. W takiej sytuacji zakładamy, że istnieje jakiś sposób ich rozstrzygnięcia.

Reguła STV ma też inne atuty, takie jak łatwość dostosowania jej do wyborów z wieloma zwycięzcami w sposób zapewniający proporcjonalną reprezentację wyborców.

Wszystkie rozsądne reguły wyborcze mają swoje ciemne strony. Mówią o tym twierdzenia Arrowa i Gibbarda–Satterthwaite’a, z którymi zaznajomienie się polecamy Czytelnikom Zainteresowanym.

Czy istnieje racjonalna reguła, która nie jest podatna na klonowanie kandydatów? Tak, mechanika reguły STV (*Single Transferrable Vote*, czyli pojedynczy głos przechodni) broni przed zaobserwowaną sytuacją! W przeciwieństwie do tradycyjnego głosowania dwuturowego, które na każdym etapie wymaga od wyborców zaznaczenia tylko najbardziej popieranego kandydata, reguła STV oczekuje uszeregowania wszystkich kandydatów. Choć jest to trudniejsze od postawienia pojedynczego krzyżyka, to taki sposób głosowania automatycznie umożliwia przechodzenie poparcia na kolejnego ulubionego kandydata w przypadku, gdy pierwszy nie może zwyciężyć ze względu na zbyt niskie poparcie.

Jak więc działa mechanizm reguły STV przy wyborze jednego zwycięzcy? Jest on podzielony na etapy, a w każdym z nich najpierw sprawdzamy, czy jest taki kandydat, który zdobywa ponad połowę wszystkich głosów. W przypadku, gdy taki kandydat istnieje, to jest on zwycięzcą. W przeciwnym razie kandydat o najniższym poparciu jest usuwany z grona kandydatów. Z kolei głos każdego wyborcy, który popierał usuniętego kandydata, przechodzi na kolejnego niewyeliminowanego kandydata zgodnie z listą preferencji wyborcy. Następnie STV zaczyna następny etap i znów szuka kandydata, który zdobywa ponad połowę głosów, kontynuując swoje działanie do momentu wyłonienia zwycięzcy. Ostatecznie musi do tego dojść, gdyż w najgorszym razie pozostanie jedynie dwóch rozważanych kandydatów.

Przyjrzyjmy się zatem, jak zadziała STV na naszym przykładzie. Na początku żaden z kandydatów nie osiąga co najmniej 32 głosów, więc reguła eliminuje najmniej popieranego kandydata, *E*. Głosy jego wyborców przechodzą na kandydata *C*. Dalej żaden z kandydatów nie osiąga wymaganego poparcia, co powoduje usunięcie kandydata *D* i przejście jego głosów również na kandydata *C*. Teraz *C* ma 23 głosy. Do rozstrzygnięcia prowadzi wyeliminowanie następnego najsłabszego kandydata, *B*, którego wyborcy przenoszą swoje poparcie na kandydata *C*, a ten z 42 głosami zostaje zwycięzcą.

Jak pokazaliśmy, reguła STV doprowadziła kandydata *C* do zwycięstwa, pozwalając wyborcom głosować całkowicie szczerze. Intuicyjnie jest to zasługa faktu, że sam mechanizm reguły naturalnie przenosi poparcie wyborców, których ulubiony kandydat jest eliminowany. Wyborca efektywnie wyraża swój głos w formie „jeśli nie kandydat *X*, to *Y*, a jeśli nie *Y*, to *Z*”, zamiast wskazania tylko *X*. Wiąże się to jednak z kosztem wynikającym z potrzeby uszeregowania kandydatów. Choć w małych wyborach uszeregowanie kilku kandydatów nie wydaje się trudnym zadaniem, to kiedy mowa o kilkudziesięciu kandydatach, łatwo o pomyłkę, która może unieważnić głos. Dodatkowo samo uświadomienie sobie własnych preferencji może być bardzo trudne.

Należy zaznaczyć, że reguła STV z powodzeniem stosowana jest w praktyce. Przykładowo zgodnie z nią wybierany jest prezydent Irlandii, reprezentanci izby niższej australijskiego parlamentu czy przedstawiciele samorządów lokalnych w Szkocji. W przywołanym przykładzie Australii STV wybiera po jednym kandydacie w każdym okręgu. W Szkocji, w zależności od okręgu, wybieranych jest od jednego do pięciu kandydatów.

Uczulamy jednak na wyciąganie zbyt pochopnych wniosków. Reguła STV ma również swoje ciemne strony. Jedną z nich jest szczególnie kontrowersyjna. Polega ona na tym, że może się zdarzyć, że wygrywający kandydat *X* przegra wybory w sytuacji, gdy wyborcy postanowią przesunąć go wyżej na swojej liście preferencji. To znaczy, że wyborca chcący bardziej wesprzeć *X* działa na jego niekorzyść. Spójrzmy na przykład poniżej, w którym reguła STV wybiera kandydata *X*, po drodze eliminując *Y*.

10 wyborców : $X \succ Y \succ Z$

9 wyborców : $Y \succ X \succ Z$

8 wyborców : $Z \succ Y \succ X$

2 wyborców : $Z \succ X \succ Y$

Gdyby jednak dwóch ostatnich wyborców postanowiło, że przesuną X wyżej na swoich listach preferencji, to kandydat X przegrałby na rzecz Y ! To ważna obserwacja, ponieważ prowadzi ona czasem do sporów sądowych o konstytucyjność reguł wyborczych podatnych na opisaną anomalię. W Niemczech odpowiedni sąd uznał ją za przesłankę wystarczającą do uznania rozpatrywanej przez niego reguły za niekonstytucyjną i zakazał jej stosowania. Przeciwnicy tego punktu widzenia argumentują, że w praktyce ten problem jest pomijalny: wydaje się występować rzadko oraz nie wpływa ani na zachowania wyborców, ani na zachowania kandydatów – czego nie można powiedzieć o problemie klonów.

Czytelnikom Zainteresowanym dalszym pogłębieniem tematyki głosowania strategicznego polecamy poniższe publikacje:

1. Doron, G. i Kronick, R.: “Single Transferrable Vote: An Example of a Perverse Social Choice Function”, *American Journal of Political Science*. 1977, T. 31, nr 2, s. 303–311.
2. Taylor, A. D. “Social Choice and the Mathematics of Manipulation”, Cambridge University Press, Cambridge 2005.



Łat Otwarty 4°: Ciąg Marka–Ulama

Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

W czasie II wojny światowej w Los Alamos znajdowała się siedziba Projektu Manhattan, który miał na celu stworzenie pierwszej na świecie bomby atomowej. Cel ten został osiągnięty w roku 1945, a opracowana broń została użyta w ataku na Hiroszimę dokładnie 21 dni po pierwszej udanej próbie przeprowadzonej na pustyni w Nowym Meksyku. Po wojnie placówka została odtajniona i w dalszym ciągu prowadzono tam prace, m.in. nad konstrukcją bomby wodorowej.

Przedstawione informacje pochodzą z notatki „A Memorable Memo” zamieszczonej w *Los Alamos Science* Nr 15, 1987.

Potrzeba szybkiego przekazywania współpracownikom świeżych i istotnych informacji jest oczywiście starsza niż internet i e-maile. W latach 40. XX wieku w laboratorium w Los Alamos radzono sobie z nią poprzez rozpowszechnianie kopii krótkich notatek. Dzięki temu pracownicy naukowcy placówki mogli być na bieżąco z wynikami swoich kolegów. Niemalą konsternację i rozbawienie wywołała (zamieszczona niżej) notatka rozesłana pewnego grudniowego dnia 1947 roku.

December 18, 1947

A & S Memorandum No. 10742

To All Concerned:

For your convenience and ready reference, we have had prepared the following list of the numbers 0-100 (inclusive) in alphabetical order.

12, 8, 18, 80, 88, 85, 84, 89, 81, 87, 86, 83, 82, 11, 15, 50, 58, 55, 54, 59, 51, 57, 56, 53, 52, 5, 40, 49, 45, 44, 49, 41, 47, 46, 43, 42, 4, 14, 9, 19, 90, 98, 95, 94, 99, 91, 97, 96, 93, 92, 1, 100, 7, 17, 70, 78, 75, 74, 79, 71, 77, 76, 73, 72, 6, 16, 60, 68, 65, 64, 69, 61, 67, 66, 63, 62, 13, 30, 38, 35, 34, 39, 31, 37, 36, 33, 32, 3, 12, 20, 28, 25, 24, 29, 21, 27, 26, 23, 22, 2, 0.

FOR THE ASSOCIATE DIRECTOR

Notatka zawiera drobną łamigłówkę. Przedstawiona w niej sekwencja to tak naprawdę ciąg liczb od 0 do 100 ustawionych w porządku alfabetycznym względem ich nazw w języku angielskim. Rozszyfrowanie tego wzorca utrudniał fakt, że ciąg w sporządzonej w pośpiechu notatce zawierał błędy: Brakuje w nim liczby 10, natomiast liczba 12 występuje dwa razy (jako *dozen* i jako *twelve*).

Jeden z członków dyrekcji stwierdził, że autora notatki należy zwolnić za niepoważne zachowanie. Więcej zrozumienia wykazał rozbawiony przedstawiciel waszyngtońskiej Komisji Energii Atomowej, który stwierdził, że tekstik to *najlepsza rzecz, jaka dotychczas została stworzona w Los Alamos*. Figlarzami odpowiedzialnymi za sformułowanie notatki okazali się J. Carson Mark i Stanisław Ulam.

Czytelnika Zaciekawionego zachęcamy do rozwiązania dwóch prostych zadań (odpowiedzi na s. 9):

- (a) Między które dwie liczby w powyższym ciągu należy wstawić brakującą 10?
- (b) W polskojęzycznej wersji ciągu Marka–Ulama ostatnim elementem jest – tak jak w oryginale –

liczba 0. Jakie liczby są, odpowiednio, pierwszym i przedostatnim elementem tego ciągu?

Na koniec dodajmy, że jest to jeden z nielicznych przykładów ciągu figurującego w OEIS, który celowo zawiera błędy. Ciąg Marka–Ulama ma numer A261402, a jego poprawiona wersja to A036747.



Nowa cząstka w LHC!

Hadrony to cząstki złożone z kwarków, które ze względu na swoją budowę dzielą się na dwie główne grupy: bariony oraz mezony. Bariony, takie jak proton (uud) i neutron (udd), składają się zawsze z trzech kwarków. Natomiast mezony, jak na przykład J/Ψ (układ kwarka c i jego antycząstki $\bar{c}$) albo piony π^+ ($u\bar{d}$), π^- ($d\bar{u}$), powstają z połączenia kwarka i antykwarka.

Oddziaływania silne, odpowiedzialne za wiązanie kwarków, są na tyle potężne, że kwarki nigdy nie występują samodzielnie. Samotny kwark, posiadający kolorowy ładunek oddziaływań silnych, ulega procesowi **hadronizacji**. W jego trakcie oddziaływanie silne, pośredniczone przez gluony, prowadzi do tworzenia dodatkowych cząstek, które łączą się z kwarkiem, tworząc hadrony.

Wyjątek stanowi ciężki kwark wysoki, nazywany z angielskiego kwarkiem t (top), co czyni go niewątpliwie najbardziej osobliwym z kwarków. Tę odkrytą w 1995 roku (w amerykańskim Tevatronie) cząstkę – najcięższą ze wszystkich opisywanych przez Model Standardowy – cechuje czas życia rzędu 10^{-25} sekundy. Ponieważ jest on o rząd wielkości krótszy niż proces hadronizacji (10^{-24} sekundy), więc kwark t nie tworzy żadnych złożonych cząstek. Po prostu rozpada się szybciej, niż może zostać związany w postaci hadronów!

Jest to unikalna cecha kwarka wysokiego, który jako jedyna oddziałująca silnie cząstka elementarna może być obserwowany w postaci swobodnej. Dzięki temu, że kwark t nie zdąży wytworzyć hadronu, można bezpośrednio badać jego właściwości, np. spin. Obserwując kinematykę produktów rozpadu par kwark-antycwark ($t\bar{t}$), fizycy z eksperymentów CMS i ATLAS potrafili odtworzyć momenty pędu wyjściowych kwarków. Po analizie wielu takich zdarzeń znaleźli korelację między ich spinami – co interpretujemy jako **splątanie kwantowe** [1, 2].

Najnowsze odkrycia idą jednak jeszcze dalej. Choć kwark t nie tworzy hadronów, to w krótkiej chwili przed jego rozpadem możemy zaobserwować zaczątki hadronizacji. Oddziaływanie z gluonami sprawia, że produkcja par $t\bar{t}$ jest zwiększona, co prowadzi do większej liczby obserwowanych zdarzeń, niż gdyby nie dochodziło do hadronizacji.

Takie zjawisko zaobserwowali niedawno fizycy pracujący w eksperymencie CMS [3]. Nową „cząstkę” nazywamy **Toponium** i przedstawiamy jako nieuformowany stan związany kwarku wysokiego i jego antycząstki $\bar{t}$. Jego masa jest równa około 340 GeV, czyli jest niemal równa podwójnej masie kwarka t . Łatwo to zrozumieć – wkład energetyczny od oddziaływań silnych (w przeciwieństwie do lekkich hadronów, jak piony, protony czy neutrony) jest tu marginalny, ponieważ kwarki t (171 GeV) są dużo cięższe niż suma energii zawartych w Toponium gluonów (ok. 1 GeV).

Ciekawym kierunkiem dalszych badań byłaby możliwość istnienia stanów wzbudzonych Toponium. W przypadku lżejszych mezonów, takich jak J/Ψ , znane są całe serie wyższych stanów energetycznych (np. $\Psi(2S)$), odpowiadających różnym modom oscylacyjnym czy orbitalnym kwarków. Podobne wzbudzenia, nawet w postaci krótkich korelacji, moglibyśmy hipotetycznie zaobserwować w przypadku kwarka t .

Najważniejszy wydaje się jednak fakt, że w LHC zarejestrowano zupełnie nową cząstkę. Jest to pierwsze tego typu odkrycie od zarejestrowania bozonu Higgsa, które miało miejsce ponad dziesięć lat temu. Istnienie Toponium stanowiło do tej pory hipotezę, i wreszcie udało się ją potwierdzić eksperymentalnie. Jest to pierwszy hadron zawierający najcięższy z kwarków, co czyni go wyjątkowym.

Nie ulega wątpliwości, że badania nad kwarkiem wysokim wciąż przynoszą nowe odkrycia. Możemy więc z nadzieją i ekscytacją czekać na przyszłość fizyki kwarka t .

Wiktor MATYSZKIEWICZ

Warto zaznaczyć, że nie mamy jeszcze pełnego potwierdzenia, że nowo odkryta cząstka to na pewno Toponium. Alternatywy są jednak jeszcze bardziej ekscytujące – oznaczałyby bowiem, że jest to zupełnie nowa cząstka elementarna, sygnalizująca odkrycie zupełnie nowej fizyki.

Bibliografia

- [1] ATLAS Collaboration. *Observation of quantum entanglement with top quarks at the ATLAS detector*. Nature 633 (2024). arXiv: 2311.07288 [hep-ex].
- [2] CMS Collaboration. *Measurements of polarization and spin correlation and observation of entanglement in top quark pairs using lepton + jets events from proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV*. Physical Review D 110 (2024).
- [3] CMS Collaboration. *Observation of a pseudoscalar excess at the top quark pair production threshold*. eprint, marzec 2025) arXiv: 2503.22382 [hep-ex].

Polując na neutrino, czyli z pamiętnika fizyka

Dzień drugi

*Narodowe Centrum Badań Jądrowych,
Departament Badań Podstawowych,
Zakład Fizyki Wielkich Energii

Artykuł ten jest kontynuacją serii opisującej obserwacje wykonywane za pomocą detektora Kamiokande w Japonii. Pierwsza część ukazała się w numerze Δ_{25}^3 .

Joanna ZALIPSKA*

Zaczynam kolejny dzień w kopalni, w której znajduje się detektor Kamiokande. Jak na razie obchód zrobiony i nic się nie dzieje. Dane napływają, jest czas na pisanie.

Zacniemy od neutrino pochodzących ze Słońca. Oczywiście chcielibyśmy ich złapać jak najwięcej, żeby sprawdzić, czy liczba neutrino, które do nas docierają, jest zgodna z liczbą neutrino przewidzianą w standardowym modelu opisującym procesy zachodzące wewnątrz Słońca. Neutrino pochodzące ze Słońca mają różne energie. Nasz detektor niestety nie jest w stanie zaobserwować ich wszystkich. Jeśli neutrino elektronowe ma zbyt niską energię, to wybity w oddziaływaniu elektron ma za niski pęd, i nie emituje promieniowania Czerenkowa albo emituje go za mało, żebyśmy byli w stanie taki przypadek w detektorze zrekonstruować. Próg na rejestrację neutrino słonecznych wynosi obecnie około 4 MeV, czyli badamy tylko neutrino elektronowe, które mają energię powyżej tej wartości. Problem w tym, że aby mierzyć tak niskoenergetyczne neutrino, detektor musi być bardzo dokładnie dostrojony. Typowo tylko trzydzieści kilka fotopowielaczy spośród 11 tysięcy zarejestruje światło elektronu pochodzącego z neutrino o energii tak niskiej jak 4 MeV. Dlatego ważna jest precyzja pomiaru i rekonstrukcji. Tutaj z pomocą przychodzą pomiary kalibracyjne wykonywane przy użyciu akceleratora elektronów, które pozwalają nam dostroić detektor.

Jak dostrajany jest detektor Super-Kamiokande?

Rok temu brałam udział w takiej kalibracji. Z grupą około 10 osób, Japończyków, Amerykanów i Europejczyków, montowaliśmy system pomiarowy i zbieraliśmy dane. Jest to jedna z trudniejszych kalibracji, które wykonuje się przy detektorze Super-Kamiokande.



Zdjęcie z przygotowań do zbierania danych kalibracyjnych. Akcelerator znajduje się w bunkrze po prawej stronie. Na zdjęciu widać szarą rurę, którą przemieszczają się elektrony. Zbiornik z wodą jest poniżej – naukowcy stoją na górnej pokrywie detektora Super-Kamiokande. Widoczna na zdjęciu zielona konstrukcja służy do przechowywania i wprowadzania pionowych rur do zbiornika

Do kalibracji wykorzystujemy akcelerator elektronów o energiach z przedziału od 4 MeV do 18 MeV. Takie elektrony wpuszczamy do rury, w której jest próżnia. Koniec rury umieszczony jest we wnętrzu zbiornika wodnego. W ten sposób elektrony dosłownie wstrzeliwane są do wnętrza detektora, co imituje oddziaływanie neutrino. Ponadto dokładnie znamy energię wstrzeliwanych elektronów (ponieważ sami je generujemy), co pozwala nam precyzyjnie przewidzieć, jakie elektrony powinny zostać zaobserwowane, a tym samym odpowiednio skalibrować detektor.

Wygenerowane przez nas elektrony emitują promieniowanie Czerenkowa, które rejestrowane jest przez fotopowielacze na ściankach zbiornika wody. Następnie programy rekonstrukcyjne znajdują pierścienie promieniowania pochodzące od elektronu oraz obliczają jego energię na podstawie ilości światła zarejestrowanego w detektorze. Dzięki temu, że znamy początkową energię elektronów, możemy dostroić nasze programy rekonstrukcyjne tak, aby uzyskać poprawny wynik.

Zaginione neutrino słoneczne...?

W wyniku wieloletnich badań wykazano, że neutrino mają pewną rzadką własność, a mianowicie oscylują, czyli zmieniają w czasie swoją tożsamość (na przykład z neutrino elektronowych na taonowe). Odkrycia tego dokonano przy użyciu detektora Super-Kamiokande. W czasie badań rejestrował on

Więcej o oscylacjach neutrino można przeczytać w Δ_{24}^{10} .

tylko około 46% słonecznych neutrin elektronowych z liczby przewidzianej przez standardowy model Słońca. Co oczywiście zaniepokoiło naukowców. W poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie, gdzie podziały się pozostałe neutrino elektronowe, przeprowadzono pomiary w innym detektorze: Sudbury Neutrino Observatory (SNO) znajdującym się w Kanadzie. Ten detektor jest w stanie rejestrować oddziaływania neutrin mionowych i taonowych ze Słońca. Okazało się, że brakujące neutrino elektronowe nie znikają, tylko zmieniają się w neutrino taonowe albo neutrino mionowe, zanim jeszcze opuszczą Słońce. Za to odkrycie w 2015 roku część Nagrody Nobla z fizyki przyznano Arthurowi McDonaladowi.

Neutrino atmosferyczne i ich przemiany

Drugą część Nagrody Nobla w 2015 roku otrzymał Takaaki Kajita za odkrycie oscylacji neutrin atmosferycznych w eksperymencie Super-Kamiokande. W atmosferze ziemskiej w wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego z atomami tlenu i azotu powstają neutrino mionowe i elektronowe. Te neutrino są również rejestrowane przez eksperyment Super-Kamiokande. Łatwo jest je odróżnić od neutrin słonecznych, ponieważ mają znacznie wyższą energię – od kilkunastu GeV do TeV. W detektorze rejestrujemy neutrino atmosferyczne przychodzące zarówno z nad detektora – po przejściu przez 1 kilometr góry, jak i te, które powstały po drugiej stronie kuli ziemskiej i przeniknęły przez całą średnicę Ziemi (oraz oczywiście neutrino pochodzące ze wszystkich innych stron wokół kuli ziemskiej). Zaobserwowano, że część neutrin mionowych, które przeszły przez kulę ziemską, znikają po drodze.

Po tym odkryciu przeprowadzono pierwszy eksperyment wykorzystujący wiązkę neutrin mionowych (K2K)

wyprodukowanych przy użyciu akceleratora (w laboratorium KEK w Japonii). Wiązkę tę wysyłano w kierunku odległego o 250 km detektora Super-Kamiokande. Okazało się, że neutrino mionowe po drodze przemieniały się w neutrino taonowe (oscylacje $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$).

Do odkrycia pozostała jeszcze jedna transformacja – neutrin mionowych w neutrino elektronowe. Zadanie to udało się zrealizować w ramach eksperymentu akceleratorowego T2K, prowadzonego obecnie dzięki współpracy dwóch laboratoriów. Intensywna wiązka neutrin mionowych jest produkowana w akceleratorze JPARC w Japonii i wysyłana do oddalonego o 295 km detektora Super-Kamiokande. W eksperymencie T2K potwierdzono pojawianie się neutrin elektronowych w wiązce neutrin mionowych, czyli oscylacje $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$.

Na tym jeszcze nie koniec, ale... zbliża się koniec dniówki w kopalni. Dzisiaj nie było tak spokojnie, jak się można było spodziewać na początku szczytu. W pewnym momencie uruchomił się alarm wybuchu supernowej. Kiedy gwiazda umiera, zapada się grawitacyjnie i wybucha. Wtedy emitowane jest zarówno światło, jak i strumień niskoenergetycznych neutrin. Jak do tej pory, w detektorze neutrin zaobserwowano takie zdarzenie tylko raz, w 1987 roku. Jak łatwo się domyślić, po uruchomieniu się alarmu nasza ekscytacja sięgnęła zenitu. Czyżbyśmy mieli szczęście i w trakcie dzisiejszej szczytu wybuchła kolejna supernowa w naszej Galaktyce?

Niestety... tym razem to tylko test. Poddano próbie naszą czujność, wywołując sztucznie alarm supernowej i sprawdzając, czy zareagujemy zgodnie z procedurami. Udało się, zaliczyliśmy test. I pozostaje nam nadal oczekiwać – na wybuch prawdziwej supernowej.



Szczęście z jelita

Nie od dziś wiadomo, że ćwiczenia fizyczne budują formę i poprawiają nastrój, zalecane są osobom narażonym na stres. Wiadomo także, że w ciągłym ruchu są (lub chcą być) dzieci. W zeszłym roku naukowcy z Szanghaju, Jing, Jia i Yang, w publikacji w „Neuroscience” sformułowali hipotezę, że aktywność fizyczna wspomaga prawidłowy rozwój mózgu we wczesnym dzieciństwie, a dzieje się tak dzięki serotoninie. Obserwując grupkę kilkulatek w parku, zastanawiam się, ile z opiekunów zdaje sobie sprawę, że oto radosne brykanie jest tak naprawdę kształtowaniem funkcji poznawczych, rozwojem pamięci i tworzeniem społeczno-emocjonalnej podstawy rozwijającego się człowieka. W jaki sposób maleńka cząsteczka zwana „hormonem szczęścia” bierze w tym udział?

Autorzy publikacji zebrali wyniki z wielu artykułów naukowych i przedstawili kilka najważniejszych informacji wyjściowych. Po pierwsze aktywność fizyczna u dzieci korzystnie wpływa na ich rozwój: wzmacnia siłę mięśni, gęstość kości, poprawia wydolność krążeniowo-oddechową. Ale nie tylko. Ruch służy prawidłowemu rozwojowi kontroli emocji i procesów poznawczych: myślenia, uczenia się, pamięci i tzw. „funkcji wykonawczych”, czyli tego, jak na podstawie dostępnych informacji i wiedzy podejmować decyzje i określone działania. Nic zatem dziwnego, że WHO w 2019 roku wydało rekomendację, w której zaleca się, żeby dzieci między 3 a 4 rokiem życia minimum 3 godziny dziennie spędzały aktywnie fizycznie, w tym godzinę intensywnie.

Po drugie, od dawna badania wykazują, że aktywność fizyczna stymuluje przepływ sygnałów w układzie nerwowym, pobudza namnażanie się komórek nerwowych i zwiększa produkcję neuroprzekazników.

Po trzecie, autorzy cytują prace wykazujące, że aktywność fizyczna podnosi poziom serotoniny. Przynajmniej u zwierząt – co badano w eksperymentach na szczurach. Wprowadzano im do mózgu cienkie rurki umożliwiające pobieranie próbek do analizy, a następnie wkładano do koła treningowego kręcącego się z dużą prędkością przez dwie godziny. Bez względu na to, co myślimy o losie szczurów laboratoryjnych, trzeba przyznać, że wyniki tych badań wskazują, iż poziom serotoniny w mózgach ćwiczących zwierząt rośnie. Problem polega na tym, że trudno bada się poziom czegokolwiek w ludzkim mózgu, a szczególnie jeśli jest to mózg małego dziecka.

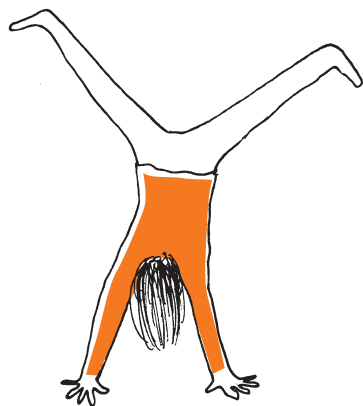
Dlaczego nie pobrać po prostu krwi? Tu się sprawy komplikują.

Serotonina to niewielka cząsteczka, która powstaje z jednego z aminokwasów (cegiełek budulcowych białek), tryptofanu. Ludzkie komórki nie potrafią syntetyzować tryptofanu, pochodzi on zatem z trawionego jedzenia (głównie mięsa, nabiału, nasion soi i dyni).

Serotonina powstaje z tryptofanu w dwóch reakcjach, z których pierwsza prowadzona jest przez enzym TPH. Ponad 90% serotoniny w ludzkim ciele powstaje w tzw. komórkach chromochłonnych wyściółki żołądka, jelita cienkiego i grubego, dzięki aktywności enzymu TPH1. Serotonina trafia do krwi obwodowej i jest magazynowana w płytkach krwi. Reguluje tu krzepnięcie krwi, ciśnienie tętnicze (dzięki wpływowi na kurczenie się naczyń krwionośnych), pobudza prawidłową pracę żołądka i jelit. Ale w mózgu

cząsteczki serotoniny pełnią inne funkcje. Jest neuroprzekaznikiem – wpływa zatem na przekazywanie sygnałów między neuronami, reguluje działanie wielu obszarów mózgu, głównie tych odpowiadających za regulację emocji, snu, apetytu, wpływa na pamięć, koncentrację uwagi, zachowania seksualne. Co jednak najważniejsze, jest ona niezbędna do prawidłowego rozwoju mózgu, szczególnie w okresie prenatalnym i kilku pierwszych latach życia. Już po kilku tygodniach od zapłodnienia rozwój układu nerwowego, a zwłaszcza mózgu, wskakuje na najwyższy możliwy poziom. Według niektórych szacunków w tym czasie powstaje kilkadziesiąt tysięcy komórek nerwowych na minutę. Mózg 5-latką waży prawie tyle samo co osoby dorosłej. Nie świadczy to jednak o poziomie jego rozwoju: nie chodzi tylko o liczbę komórek, ale przede wszystkim o komunikację między nimi. Po czasie szaleńczego wzrostu liczby komórek nerwowych następuje ich dojrzewanie i gwałtowne zwiększanie się liczby synaps, czyli połączeń między nimi. Szacuje się, że w pierwszych latach życia może ich przybywać nawet milion na sekundę. Po tym czasie następuje proces nazwany po angielsku „pruning” – przycinanie: liczba połączeń między neuronami zmniejsza się, pozostają tylko te, które były najbardziej używane. W procesach tych serotonina jest niezbędna do powstawania nowych komórek nerwowych, do przemieszczania się niedojrzałych neuronów w odpowiednie miejsca, do różnicowania się komórek na różne typy i ich dojrzewania, w końcu stymuluje powstawanie synaps i decyduje o tzw. plastyczności synaptycznej – moduluje ich działanie.

Serotonina mózgowa nie pochodzi z puli cząsteczek krwi obwodowej, ponieważ nie przechodzi przez barierę krew-mózg. Na szczęście barierę tę przechodzi tryptofan, i z niego powstaje serotonina w tzw. jądrach szwu, w rejonie pnia mózgu.



W finale dochodzenia chińscy naukowcy ustalili, że aktywność fizyczna wpływa nie tyle na samą serotoninę, ale na obecność we krwi jej wolnego prekursora, tryptofanu. Autorzy postulują dwa możliwe mechanizmy. Po pierwsze, tryptofan we krwi wiąże się z białkiem, albuminą, z której jest uwalniany w razie potrzeby. Albumina transportuje także wolne kwasy tłuszczowe (tzw. NEFA), których pojawia się dużo przy długotrwałym lub intensywnym wysiłku fizycznym. NEFA i tryptofan konkurują ze sobą. Kiedy cząsteczek NEFA jest więcej, wypierają one z albuminy tryptofan, a ten, uwolniony, przenika do mózgu.

Po drugie, aktywność fizyczna wpływa na florę bakteryjną w jelitach. Niektóre gatunki mikroorganizmów syntetyzują i wydzielają poza swoją komórkę tryptofan (i także serotoninę). Gatunki te szczególnie dobrze rozwijają się w jelitach ludzi aktywnych fizycznie, także dzieci, zwłaszcza tych, które mają kontakt z naturą, gdzie mogą się ubrudzić i jednocześnie zmęczyć. W ten sposób, bez względu na dietę, źródłem tryptofanu wędrującego do mózgu są bakterie jelitowe.

Wciąż pokutuje podział sprzed wielu lat na dzieci, które się uczą, i na te, które biegają. Wygląda jednak na to, że to ci, którzy biegają, skaczą, wspinają się, dyndają, jeżdżą, kręcą się i fikają koziołki, będą się uczyć najlepiej. Czyżbyśmy zapomnieli, że jesteśmy skąpo owłosioną małpą, która niedawno zeszła z drzewa?

Literatura

Jia-Qi Jing, Si-Jia Jia, Chang-Jiang Yang, “Physical activity promotes brain development through serotonin during early childhood”, *Neuroscience* 554 (2024) 34–42.

Marta FIKUS-KRYŃSKA



mała delta

Trójkąty, kwadraty, sześciiany

Przedstawimy w tym artykule prosty dowód znanej od starożytności tożsamości arytmetycznej, którą – niezupełnie poprawnie, o czym dalej – nazywać będziemy twierdzeniem Nikomacha. Dla naturalnych $n \geq 1$ mamy

$$(N) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

W rzeczywistości Nikomachos z Gerazy (I–II w. n.e.) sformułował w swoim *Wprowadzeniu do arytmetyki* nieco inną obserwację, mianowicie że:

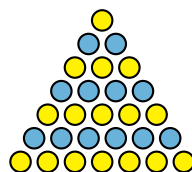
- najmniejsza naturalna liczba nieparzysta jest równa sześcianowi liczby 1;
- suma kolejnych dwóch liczb nieparzystych ($3 + 5$) jest równa sześcianowi kolejnej liczby naturalnej (2^3);
- suma kolejnych trzech ($7 + 9 + 11$) – sześcianowi kolejnej (3^3);
- i tak dalej.

Nie jest to może całkowicie oczywiste, ale wzór (N) jest istotnie wnioskiem z tej obserwacji. Wspaniałym ćwiczeniem dla Czytelnika będzie znalezienie odniesień między taką właśnie ścieżką rozumowania a dowodem przedstawionym poniżej.

Jest oczywiste, że tego typu równość można wykazać za pomocą metody indukcji, z wykorzystaniem odrobiny niezbyt trudnych przekształceń. To także pozostawimy jako ćwiczenie dla Czytelnika. Sami zaś przedstawimy dowód oparty na najdoskonalszej metodzie: prezentacji serii dostatecznie sugestywnych diagramów. A więc do dzieła!

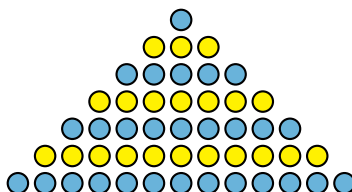
Trójkąty i kwadraty

Nie darmo zwykło się nazywać sumę $T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ *n-tą liczbą trójkątną*. Sens tego określenia przedstawia pierwszy z naszych diagramów.



Patrząc od góry, każde piętro liczy o jedno kółko więcej od poprzedniego, zatem łączna liczba kółek na diagramie o n piętrach jest rzeczywiście równa $T(n)$. Odkrycie związku z trójkątem pozostawimy jako kolejne już ćwiczenie dla Czytelnika.

A co by było, gdybyśmy układali kółka w szerszą piramidkę, taką jak na drugim diagramie?



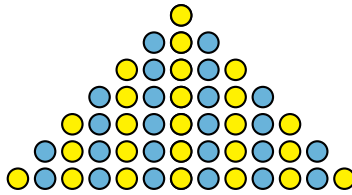
Powiedzmy, że tego typu diagram o n piętrach składa się z $K(n)$ kółek. Ponieważ każde kolejne piętro zawiera o dwa kółka więcej, liczba $K(n)$ jest sumą n początkowych liczb nieparzystych, czyli wynosi $K(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Tekst napisany na podstawie prezentacji wygłoszonej w ramach Maratonu Wykładowego *Delt*y w grudniu 2023 roku.

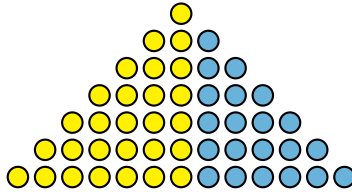
W pewnym sensie interesujące jest dopiero to „i tak dalej”.

Ćwiczenie. Za pomocą diagramu po prawej uzasadnij, że $T(2n) = 4T(n) - n = 3T(n) + T(n - 1)$.

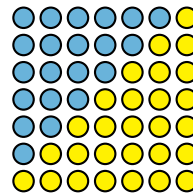
Z drugiej strony, grupując kółka kolumnami, zamiast wierszami, widzimy, że $K(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$.



Pitagorejczycy zwali takie liczby *kolistymi*, bo składniki tej sumy niejako zawierają po osiągnięciu maksymalnej wartości n . Ta nowa postać sugeruje jednak coś jeszcze: jeśli by n początkowych składników zebrać w jedną grupę, a pozostałe $n-1$ – w drugą, otrzymamy sumę dwóch kolejnych liczb trójkątnych, $T(n)$ oraz $T(n-1)$.



Wyobraźmy sobie teraz, że jeden z tych dwóch trójkątów chwytny i przestawiamy na drugą stronę diagramu.



Okazało się, że wszystkie kółka ustawiły się w kwadrat $n \times n$. Liczba kółek w naszym diagramie okazała się więc – paradoksalnie – liczbą kwadratową! Skoro zaś jest to zarazem liczba kolista, otrzymaliśmy rozwiązanie słynnego starożytnego problemu kwadratury koła! (Tak naprawdę – to oczywiście nie).

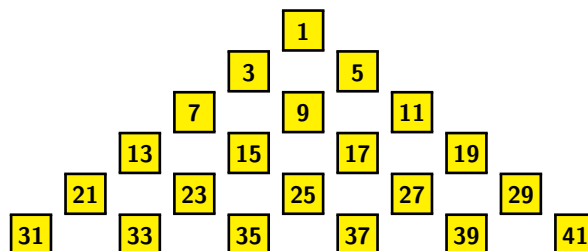
Owocem tej pilnej obserwacji kilku diagramów i kolorowania ich na różne sposoby są dwa stwierdzenia, które już niedługo okażą się niesłychanie przydatne.

1. Suma n początkowych liczb nieparzystych jest równa n^2 .
2. Suma dwóch kolejnych liczb trójkątnych, n -tej i $(n-1)$ -szej, jest równa liczbie kwadratowej n^2 .

Tak uzbrojeni możemy przystąpić do właściwego dowodu wzoru (N).

Piramida liczb

Korzystając z poprzednich obserwacji, będziemy analizować własności pewnego specjalnie skonstruowanego diagramu.



Ponownie dokonaliśmy kwadratury koła, niestety znowu nie dokonując przy tym przełomu w matematyce.

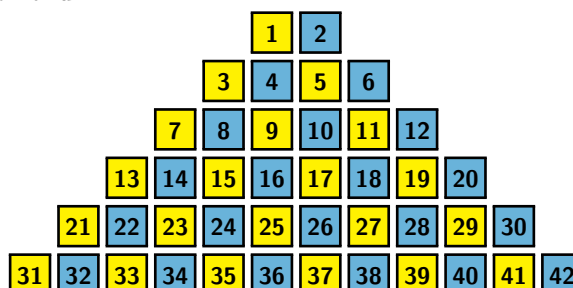
Wyjątkowo używamy tutaj określenia „ilość” zamiast „liczba”, żeby uniknąć słów „liczba liczb” – one nie tylko brzmią niezręcznie, ale też mogą prowadzić do nieporozumień.

Przypomina on pierwszą z przedstawionych w tym artykule ilustracji – tę, która wyjaśniała pojęcie liczby trójkątnej. Jednak tutaj w tworzące tę piramidę kształty wpisane są kolejne liczby nieparzyste. Ich ilość jest przy tym liczbą trójkątną, o numerze równym liczbie pięter diagramu. Ponieważ są to początkowe liczby nieparzyste, ich suma jest – zgodnie z pierwszą obserwacją

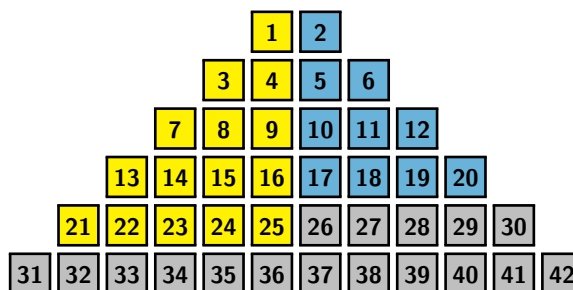
wieńczącą pierwszą część artykułu – kwadratem ich ilości, czyli wynosi $T(n)^2$. Jest to prawa strona równości w twierdzeniu Nikomacha, więc niewykluczone, że jesteśmy na tropie.

Pokażemy teraz, że suma liczb w n -tym wierszu tego diagramu jest równa n^3 . W tym celu skorzystamy z faktu, że *suma* = *średnia* · *ilość*. Jasne jest, że n -ty wiersz składa się z n liczb. Co więcej, tworzą one postęp arytmetyczny (o różnicy 2), więc ich średnia jest po prostu środkową spośród nich. No, prawie. Jeśli danych liczb jest parzyście wiele, to środkowej wśród nich nie znajdziemy. Szukaną średnią jest wtedy średnia środkowych dwóch. Wygląda więc na to, że warto zaprosić do diagramu liczby parzyste – co za szczęście, że zostawiliśmy w nim tak szerokie luki!

Ćwiczenie. Z pomocą diagramu po prawej uzasadnij, że $T(2T(n)) = 2T(n)^2 + T(n)$.



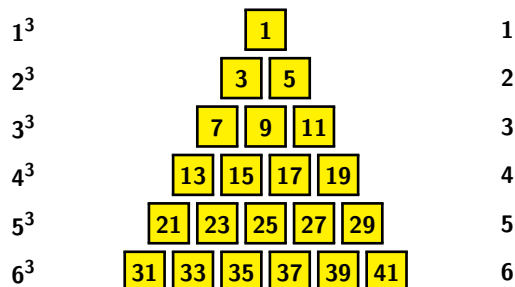
Zwróćmy uwagę, że szukana średnia w obu opisanych powyżej przypadkach znajduje się na lewo od środka (uzupełnionego) wiersza, tj. w kolumnie z jedynką na szczycie. Na rysunku są to kolejne kwadraty; nie wiemy jeszcze jednak, czy mają jakiś powód, by nimi być, czy jest to jedynie zwykły zbieg okoliczności. Dylemat ten możemy rozstrzygnąć, kolorując pola diagramu na nowo.



Kolorem szarym zamalowano wszystkie liczby większe od szukanej. Wystarczy pokazać, że tych nie-szarych pól jest n^2 . Ale jeśli zbierzemy je w dwie grupy – jedną na lewo, drugą na prawo od środka – widzimy, że ich ilość jest równa sumie dwóch kolejnych liczb trójkątnych. Ale, zgodnie z drugą obserwacją z końca pierwszej części, suma $T(n) + T(n-1)$ jest równa n^2 .

Epilog

Podsumujmy nasze dotychczasowe dokonania.



Pokazaliśmy, że powyższy diagram – piramida o n piętrach, z polami numerowanymi liczbami nieparzystymi – zawiera liczby o sumie $T(n)^2$; tymczasem każde k -te piętro zawiera k liczb, których

średnia wynosi k^2 . Zatem, sumując numery pól piętrami, otrzymujemy żadaną tożsamość:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Warto w tym miejscu wspomnieć, że obecny rok jest szczególną okazją, by mówić o tym twierdzeniu. Istotnie, na przełomie grudnia i stycznia trudno było nie natknąć się na informację, że

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025 = (1 + 2 + 3 + \dots + 9)^2.$$

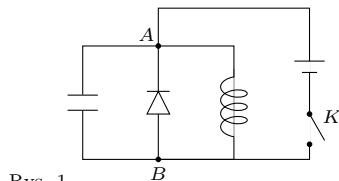
Niestety mało kto wspominał przy tym, że te dwa przedstawienia liczby 2025 są, w prezentowanym tutaj sensie, równoważne; można właściwie traktować je jako duplikat... a także jako doskonały pretekst do opowiedzenia o pięknym starożytnym twierdzeniu. Kolejna taka okazja nie trafi się nam przez tysiąc lat!

Paweł Rafał BIELIŃSKI Nauczyciel, Warszawa

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2025



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
786 ($WT = 2,5$), 787 ($WT = 3,25$)
z numeru 11/2024

Tomasz Wietecha (Tarnów) 17–42,90
Jan Zambrzycki (Białystok) 4–29,64
Andrzej Nowogrodzki
(Chocianów) 3–27,49

Zadania z fizyki nr 800, 801

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

800. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 dioda jest idealna i wszystkie opory omowe zaniedbywalne. Klucz K zamknięto na czas τ , a następnie otwarto. W chwili otwierania klucza natężenie prądu w cewce miało wartość I_0 . Po jakim czasie po otwarciu klucza osiągnęło ono wartość maksymalną równą $2I_0$? Narysuj wykres zależności natężenia prądu w cewce od czasu t ($0 < t < \infty$).

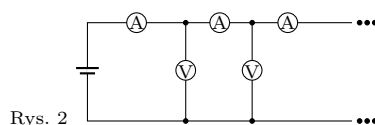
801. Statek kosmiczny przemieszcza się od Ziemi do Marsa po orbicie eliptycznej, której peryhelium znajduje się na orbicie Ziemi, a aphelium na orbicie Marsa. Znaleźć czas przelotu oraz minimalny czas, w jakim kosmonauci będą musieli oczekiwać na Marsie na start w drogę powrotną po takiej samej orbicie. Okres obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi $T_Z = 365,25$ dob, okres obiegu Marsa $T_M = 687$ dob. Przyjąć, że planety poruszają się po orbitach kołowych leżących w jednej płaszczyźnie.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2025

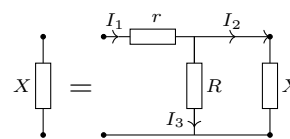
Przypominamy treść zadań:

792. $N = 100$ jednakowych kulek o średnicy $d = 0,1$ mm znajduje się w ustawionym pionowo cylindrycznym naczyniu o podstawie $S = 1$ m² pod nieruchomym tłokiem, który znajduje się na wysokości $h = 1$ m. Kulki poruszają się chaotycznie ze średnią prędkością kwadratową $v_0 = 100$ m/s. Tłok zaczęto podnosić z prędkością $u = 1$ m/s i został on zatrzymany na wysokości $2h$. Jaka średnia prędkość kulek ustaliła się po długim czasie? Nie ma strat energii mechanicznej podczas zderzeń, nie uwzględniamy siły grawitacji.

793. Do źródła o sile elektromotorycznej $U = 1,5$ V i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym dołączono długi łańcuch jednakowych amperomierzy i taką samą liczbę jednakowych woltomierzy (rys. 2). Opor wewnętrzny amperomierza wynosi $r = 1$ Ω , woltomierza 10 k Ω . Jakie są wskazania pierwszego i drugiego amperomierza? Ile wynosi suma wskazań wszystkich amperomierzy oraz suma wskazań wszystkich woltomierzy w łańcuchu?



Rys. 2



Rys. 3

792. Średnia droga swobodna kulki w naczyniu, czyli droga przebyta przez nią do chwili zderzenia z inną kulką, wynosi $\lambda = 1/(\pi d^2 n)$, gdzie $n = N/(Sh)$ jest liczbą kulek w jednostce objętości. Czas między dwoma kolejnymi zderzeniami $\tau = \lambda/v_0 = 3 \cdot 10^3$ s $\gg h/v_0 = 10^{-2}$ s, zatem kulki praktycznie nie zderzają się między sobą. Podczas ruchu tłoka zmiana energii kulki związana jest tylko z uderzeniami o tłok i określona przez zmianę jej pionowej składowej prędkości.

Niech odległość tłoka od dna naczynia w pewnej chwili wynosi l , tłok porusza się z prędkością u , a kulka dogania go z prędkością $v \gg u$. W układzie związanym z tłokiem prędkość kulki wynosi $v - u$, natomiast po odbiciu $-v + u$. W układzie cylindra prędkość kulki po odbiciu to $-v + 2u$, czyli jej wartość zmniejsza się o $2u$. Kolejne uderzenie o tłok nastąpi po czasie $\Delta t \approx 2l/v$. Tłok przesunie się w tym czasie o $\Delta l = u\Delta t = -l\Delta v/v$, stąd

$$v\Delta l + l\Delta v = 0,$$

co oznacza, że iloczyn lv pozostaje stały.

Dla składowej pionowej prędkości kulki mamy

$$hv_{y0} = 2hv_y, \quad v_y = v_{y0}/2,$$

czyli na wysokości $2h$ pionowa składowa prędkości kulki jest dwa razy mniejsza niż na wysokości h .

Początkowa energia kinetyczna kulki wynosiła

$$W_0 = M(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2)/2,$$

gdzie $(v_{x0}^2)_{\text{sr}} = (v_{y0}^2)_{\text{sr}} = (v_{z0}^2)_{\text{sr}}$.

Po przemieszczeniu tłoka zmieniła się tylko składowa pionowa prędkości kulki, i jej prędkość końcowa wynosi:

$$W = M(v_{x0}^2 + v_{y0}^2/4 + v_{z0}^2)/2.$$

Po długim czasie, gdy ruch kulek ponownie staje się w pełni chaotyczny, średnia wartość ich prędkości wynosi:

$$v_{\text{sr}} = v_0\sqrt{3/4} = 87 \text{ m/s}.$$

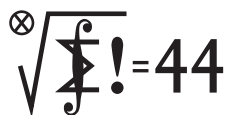
793. a) Prąd płynący przez pierwszy amperomierz jest równy $I_1 = U/X$, gdzie X to opór zastępczy układu. Po dołączeniu z lewej strony jeszcze jednego oczka (rys. 3) opór zastępczy nie zmienia się. Stąd $X = r + RX/(R + X)$, $X = (r + \sqrt{r^2 + 4Rr})/2 = 100,5$ Ω , $I_1 = 14,9$ mA.

b) Część obwodu bez pierwszego amperomierza ma opór $X - r = 99,5$ Ω . Natężenie prądu płynącego przez drugi amperomierz $I_2 = U_2/X$, gdzie $U_2 = U - rI_1 = U(1 - r/X) = 0,99U$, $I_2 = 0,99I_1 = 14,8$ mA.

c) Suma napięć na wszystkich amperomierzach równa jest napięciu ogniwa $U = 1,5$ V. Prąd płynący przez amperomierz to stosunek jego napięcia i oporu, suma natężeń prądów na wszystkich amperomierzach wynosi więc $I = U/r = 1,5$ A.

d) Suma natężeń prądów płynących przez wszystkie woltomierze równa jest natężeniu prądu płynącego przez pierwszy amperomierz, stąd suma napięć na wszystkich woltomierzach wynosi $RI_1 = 149$ V.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
889 ($WT = 2,47$) i 890 ($WT = 1,77$)
z numeru 11/2024

Krzysztof Zygan	Lubin	42,03
Andrzej Kurach	Ryjewo	40,27
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Janusz Olszewski	Warszawa	37,17
Grzegorz Wiączkowski		36,58
Michał Warmuz	Żywiec	36,54
Marcin Kasperski	Warszawa	35,64
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,54
Marian Łupieżowiec	Gliwice	32,89
Jędrzej Biedrzycki		32,29
Marek Spychała	Warszawa	32,17
Krzysztof Maziarz	Londyn	31,96

Zadania z matematyki nr 903, 904

Redaguje Marcin E. KUCZMA

903. Funkcje f i g są dane wzorami

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{42}) + 45x^{43},$$

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{44}) + 45x^{45}.$$

Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki $f(a) = g(b) = 44$. Wyjaśnić, która z liczb a, b jest większa.

904. Niech $A_1 = 31, A_2 = 331, \dots, A_n = 33 \dots 31$ (n trójek, a na końcu jedynek – zapis dziesiętny). Dla każdej liczby pierwszej $p < 44$ rozstrzygnąć, czy istnieje liczba n (zależna od p), dla której A_n dzieli się przez p . Jeśli istnieje, ustalić, czy jest wówczas nieskończenie wiele, czy tylko skończenie wiele takich numerów n .

Zadanie 904 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2025

Przypominamy treść zadań:

895. Na okręgu zaznaczono n punktów; $n \geq 3$ jest ustaloną liczbą nieparzystą. Każdemu punktowi została przyporządkowana wartość 0 lub 1. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu trzech kolejnych punktów o wartościach (kolejno) a, b, c takich, że $a = c$, i zamianie b na $1-b$. Udowodnić, że startując z dowolnej konfiguracji i wykonując dozwolone ruchy można uzyskać jednakową wartość dla wszystkich n punktów.

896. Udowodnić, że ciąg $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ o wyrazach

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$$

jest malejący.

895. Wygodnie będzie przejść na język kolorów: punkty z wartością 0 – białe; z wartością 1 – czarne. Układ n punktów rozbijamy na bloki jednokolorowe. Co najmniej jeden z bloków ma długość nieparzystą; przyjmijmy (b.s.o.), że jest on czarny: 0111111110. Dozwolone ruchy polegają na zmianie koloru punktu (dowolnie wybranego), którego obaj sąsiedzi mają jednakowy kolor. Wykonując takie ruchy, przeprowadzamy podany przykładowo fragment do postaci 01010101010.

Kolejną serią ruchów pozbywamy się wszystkich punktów czarnych w tym fragmencie: 00000000000. Skrajne zera, które na starcie obramowywały rozważany czarny blok, należały do jakichś bloków białych. Teraz one, wraz z „wybielonym” fragmentem, zlewają się w jeden dłuższy blok biały. Co istotne: liczba bloków zmniejszyła się. Powtarzamy procedurę (wybieramy blok jednobarwny długości nieparzystej, itd.); liczba bloków znów się zmniejszyła. Po dalszych powtórzeniach liczba bloków spadnie do 1. To będzie znaczyło, że wszystkie n punktów uzyskało jednakowy kolor.

896. Niech $B_n = H_n / \ln n$, gdzie (jak zwykle) $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Zauważmy, że $B_{2^n} = A_n / \ln 2$. Wystarczy więc udowodnić, że ciąg (B_n) jest malejący: $B_{n-1} > B_n$; czyli że

$$(1) \quad H_n \ln(n-1) < H_{n-1} \ln n \quad \text{dla } n > 1.$$

Przydatne będą nierówności (dla $n > 1$):

$$(2) \quad \frac{1}{n} < \ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1},$$

$$(3) \quad \ln n < H_n.$$

Są one dobrze znane; krótkie uzasadnienie – dla kompletności. Twierdzenie Lagrange’a dla funkcji $\ln x$ mówi, że $\ln n - \ln(n-1) = 1/x_n$ dla pewnej liczby $x_n \in (n-1, n)$; stąd dwustronne oszacowanie (2). Ustalmy $m > 1$ i wykonajmy sumowanie prawej części (2) po $n = 2, \dots, m$, otrzymując zależność $\ln m < H_{m-1}$. Zastępujemy literkę m przez n i mamy zależność (3) (a nawet nieco silniejszą, co tu bez znaczenia).

Teraz krótki rachunek; w pierwszym kroku wykorzystujemy lewą część (2), a w ostatnim – zależność (3):

$$\begin{aligned} H_n \ln(n-1) &< H_n \left(\ln n - \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(H_{n-1} + \frac{1}{n} \right) \ln n + H_n \left(-\frac{1}{n} \right) = \\ &= H_{n-1} \ln n + \frac{1}{n} \left(\ln n - H_n \right) < H_{n-1} \ln n \end{aligned}$$

– i mamy tezę (1).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rys. 1. Masywna galaktyka (pomarańczowa kropka w centrum pierścienia) zniekształca światło emitowane przez kwazara (błyszczące diamenty) w zjawisku zwanym soczewkowaniem grawitacyjnym. Źródło zdjęcia: NASA/ESA/CSA

Powyższe zdjęcie, do złudzenia przypominające piękny pierścień, zostało wykonane przez Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba prawie rok temu, jednak wciąż zachwyca! Ponadto dostarcza ważne informacje o czarnych dziurach.

Cztery błyszczące punkty, przypominające drogocenne kamienie pierścienia, to zwielokrotniony obraz znanego już wcześniej astronomom kwazara o mało romantycznej nazwie RX J1131-1231. Znajduje się on około 6 miliardów lat świetlnych od Ziemi i był wcześniej obserwowany przez rentgenowski teleskop Chandra i Kosmiczny Teleskop Hubble'a (rys. 2). Jednak nigdy wcześniej nie widzieliśmy go z taką dokładnością i nie błyszczał tak pięknie.

Kwazarem nazywamy niezwykle jasne aktywne jądro galaktyczne. Pomimo niewielkich rozmiarów, porównywalnych do rozmiaru naszego Układu Słonecznego, kwazary są w stanie oświetlić całe galaktyki i przyćmić światło gwiazd. Energia, którą produkują i wysiewają, pochodzi z obszaru znajdującego się wokół supermasywnej czarnej dziury.

Jasny obiekt w środku pierścienia to galaktyka eliptyczna, której masa (wraz z otaczającą ją ciemną materią) działa jak soczewka. Dzięki niej światło zmierzające w naszą stronę od kwazara, znajdującego się za naszą masywną eliptyczną galaktyką, zostało zakrzywione i rozszczerzone. Zjawisko to, nazywane soczewkowaniem grawitacyjnym, po raz pierwszy zostało przewidziane przez Einsteina. Oferuje ono rzadką możliwość badania obiektów astronomicznych, działając jak naturalny teleskop, powielając i powiększając obraz obiektu, którego często nie bylibyśmy w stanie zaobserwować. W tym wypadku zwielokrotniony obraz pozwolił naukowcom zbadać obszar znajdujący się wokół czarnej dziury we wnętrzu kwazara.



Rys. 2. Zwielokrotniony obraz kwazara widoczny w danych pochodzących z rentgenowskiego teleskopu Chandra (różowy kolor). Dane optyczne Hubble'a w kolorach czerwonym, zielonym i niebieskim pokazują galaktykę eliptyczną w środku obrazu. Źródło: X-ray: NASA/CXC/Univ of Michigan/R.C.Reis et al; Optical: NASA/STScI

Przedstawiciele Europejskiej Agencji Kosmicznej (European Space Agency, ESA) w oświadczeniu dołączonym do opublikowanego zdjęcia wyjaśniają, że pomiary emisji promieniowania rentgenowskiego z kwazarów pozwalają określić, jak szybko obraca się centralna czarna dziura w jego wnętrzu. To z kolei daje naukowcom ważne wskazówki na temat tego, jak takie czarne dziury powstają, rosną i przybierają na masie wraz z upływem czasu. Dane obserwacyjne uzyskane z Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba, a także wcześniejsze obserwacje wykonane za pomocą teleskopów Chandra i Hubble'a umożliwiły bardzo dokładną analizę kwazara i jednocześnie analizę tempa wzrostu znajdującej się w nim czarnej dziury. Okazało się, że czarna dziura w tym konkretnym kwazarze obraca się z prędkością ponad połowy prędkości światła! Z tego można wnioskować, że urosła w wyniku fuzji, czyli zderzenia się z inną czarną dziurą, a nie tylko w wyniku przyciągania i pochłaniania materii z różnych kierunków.

RX J1131-1231 jest uważany za jeden z najlepiej przesoczewkowanych kwazarów odkrytych do tej pory. Jest też najbardziej błyszczącym z kosmicznych pierścieni!

Katarzyna MAŁEK



Słońce w czerwcu dociera do szczytu ekliptyki, osiągając 21 dnia miesiąca jej najbardziej na północ wysunięty punkt. W kolejnych dniach zacznie ono trwającą pół roku wędrówkę na południe. Na początku lata ma miejsce najwcześniejszy wschód i najpóźniejszy zachód Słońca. Ze względu jednak na to, że Ziemia jest blisko aphelium swojej orbity i porusza się wolniej niż na początku zimy, to odległość czasowa między tymi zdarzeniami jest dużo mniejsza. Na naszych szerokościach geograficznych Słońce wschodzi najwcześniej 17 czerwca, a zachodzi najpóźniej 24 czerwca, czyli już tydzień po najwcześniejszym wschodzie. Na czerwiec przypada środek sezonu na obłoki srebrzyste i łuk okołohoryzontalny, gdyż Słońce z jednej strony wędruje najwyżej nad widnokresem i dłużej przebywa na odpowiedniej wysokości, a z drugiej strony chowa się pod horyzont najpłycej, i obłoki srebrzyste można dostrzec na terenie całego kraju.

Na przełomie wiosny i lata wieczorem ekliptyka wyraźnie zmniejsza swoje nachylenie do widnokreśu, a na niebie porannym dopiero zaczyna zwiększać. Dlatego czerwiec nie jest korzystnym miesiącem na obserwacje obiektów przebywających jednocześnie blisko niej i Słońca. Odbija się to przede wszystkim na widoczności planety Wenus, która 5 dnia miesiąca osiągnie maksymalną elongację zachodnią, oddalając się prawie na 46° od Słońca. Mimo tego o świcie zdąży się wtedy wzniesć na wysokość zaledwie około 5° ponad wschodni widnokrąg. Potem, wraz ze zwiększającym się nachyleniem ekliptyki, widoczność planety zacznie się poprawiać. Obserwatorzy nieba na pewno pamiętają, że na początku roku wieczorem, przy bardzo dobrym nachyleniu ekliptyki, planeta wznosiła się zdecydowanie wyżej. Wenus zacznie miesiąc w Rybach i przejdzie przez Barana, by do końca czerwca dotrzeć na odległość 9° na południowy zachód od Plejad. W tym czasie jej jasność spadnie do $-4,1^m$, średnica tarczy – do $18''$, faza natomiast urośnie do 63%. 22 czerwca 6° nad planetą pokaże się Księżyc w fazie 16%.

Srebrny Glob rozświetli swoim blaskiem przede wszystkim pierwszą część miesiąca, zaczynając go w fazie 37% w Lwie, w połowie drogi między Regulesem, najjaśniejszą gwiazdą tej konstelacji, a Marsem, który jest jedyną planetą widoczną w pierwszej części nocy. Jednak jego warunki obserwacyjne w czerwcu wyraźnie się pogarszają. Mars przez cały miesiąc pokona ponad 16° , przechodząc w dniach 16 i 17 czerwca mniej niż 1° od Regulusa. Na początku planeta około godziny 23 zajmuje pozycję na wysokości prawie 20° nad zachodnią częścią nieboskłonu, by do końca czerwca o tej samej porze obniżyć ją do mniej niż 5° . Jasność planety wyniesie około $+1,5^m$, przy średnicy tarczy $5''$. 29 czerwca Księżyc ponownie przejdzie między Marsem a Regulesem, tym razem jednak planeta znajdzie się po wschodniej stronie gwiazdy, a faza Srebrnego Globu spadnie do 22%.

3 czerwca Księżyc przejdzie przez I kwadrę, 11 czerwca zaś – przez pełnię. W ciągu tych dni odwiedzi obszar od Lwa poprzez Pannę i Wagę do pogranicza

gwiazdozbiorów Skorpiona, Wężownika i Strzelca. Naturalny satelita Ziemi, przechodząc przez południową część swojej orbity, nadal przebywa jednocześnie głęboko na południe od ekliptyki, co sprawi, że w okolicach pełni przetnie południk lokalny na wysokości jedynie około 10° . W nocy z 6 na 7 czerwca Księżyc w fazie 83% pokaże się około 4° od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, a trzy dni później zakryje gwiazdę π Skorpiona, czyli najbardziej na południe wysuniętą gwiazdę z charakterystycznego łuku trzech jaśniejszych od $+3^m$ gwiazd na północny zachód od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. W Polsce zjawisko potrwa mniej więcej od godziny 22:20 do 23:40, w zależności od położenia. Im bardziej na północny zachód, tym wcześniej. Niestety wynosząca 98% faza Księżyca znacznie utrudni jego obserwacje.

Po pełni Srebrny Glob podąży ku ostatniej kwadrze – 18 czerwca i nowiu – 25 czerwca. Jednak ze względu na wspomniane niekorzystne nachylenie ekliptyki do porannego widnokreśu zacznie on wschodzić po północy (szczególnie po ostatniej kwadrze), zajmując niskie położenie nad horyzontem. Między pełnią a ostatnią kwadrą warto wspomnieć o przejściu w nocy z 12 na 13 czerwca Księżyca w fazie 97% 3° na południe od Nunki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca, oraz spotkaniu z Saturnem 6 dni później, gdy w połowie oświetlony Księżyc przejdzie 2° od planety z pierścieniami. Około godziny 2 oba ciała niebieskie zdążą się wzniesć na wysokość około 10° . Saturn świeci blaskiem $+1^m$, a jego tarcza ma średnicę $17''$.

Jak co roku, pod koniec miesiąca promieniują meteory z roju Bootydów, osiągając maksimum aktywności 27 czerwca. Radiant roju znajduje się w północnej części Wolarza, prawie w tym samym miejscu co styczniowych Kwadrantydów, i wieczorem zajmuje pozycję na wysokości ponad 60° nad zachodnią częścią nieboskłonu. Są to jedne z wolniejszych meteorów, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi zaledwie 18 km/s. W tym roku nie prognozuje się zwiększonej aktywności tego roju, bliski zaś nowiu Księżyc nie przeszkodzi w ich obserwacjach.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania F 1121.

Przyjmijmy, że powierzchnia okładek każdego z kondensatorów wynosi S , a odległość okładek to d . Pojemność elektryczna, C , kondensatora wypełnionego dielektrykiem wynosi:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Drugi kondensator po wypełnieniu przewodnikiem staje się opornikiem o oporze elektrycznym R między okładkami:

$$R = \frac{\rho d}{S}.$$

Stała czasowa τ charakteryzująca czas ładowania pojemności C przez opornik R wynosi tym samym:

$$RC = \varepsilon \rho.$$

Stała τ nie zależy od rozmiarów kondensatorów – wartości S i d .



Rozwiązanie zadania F 1122.

Hel jest gazem jednoatomowym, a powietrze mieszaniną niemal wyłącznie gazów dwuatomowych: azotu i tlenu. Wykładnik adiabaty κ dla gazu jednoatomowego wynosi $\kappa_1 = 5/3$, a dla dwuatomowego $\kappa_2 = 7/5$. Zwykle pamiętamy, że w przemianie adiabatycznej gazu doskonałego ciśnienie gazu p i jego objętość V spełniają warunek: $pV^\kappa = \text{const}$ (wyrażenie pozostaje stałe). Skorzystanie z równania stanu gazu doskonałego, $pV = nRT$ (n oznacza liczbę moli gazu, a R stałą gazową) pozwala znaleźć związek między temperaturą T i ciśnieniem p gazu w przemianie adiabatycznej:

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const},$$

skąd łatwo uzyskujemy związek:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Dla stosunku $p/p_0 = 10$ otrzymujemy temperatury końcowe: dla helu $T_h = 10^{2/5} T_0 \approx 2,512 T_0$, a dla powietrza $T_p = 10^{2/7} T_0 \approx 1,931 T_0$, czyli $T_h/T_p = 10^{4/35} \approx 1,301$.



Rozwiązanie zadania M 1819.

Zauważmy, że

$$a^2 - bc \equiv a(a + b + c) \pmod{ab + bc + ca}.$$

Zatem

$$0 \equiv (a^2 - bc)^2 \equiv a^2(a + b + c)^2 \pmod{ab + bc + ca},$$

więc $ab + bc + ca \mid a^2(a + b + c)^2$.

Gdyby istniała liczba pierwsza p , dla której $p \mid a$ i $p \mid (ab + bc + ca)$, to również $p \mid bc$ – sprzeczność z założeniem, że a, b, c są parami względnie pierwsze. A zatem $\text{NWD}(a, ab + bc + ca) = 1$, więc $ab + bc + ca \mid (a + b + c)^2$. Wtedy jednak, używając analogicznych kongruencji, mamy

$$(b^2 - ac)^2 \equiv b^2(a + b + c)^2 \equiv 0 \pmod{ab + bc + ca}.$$

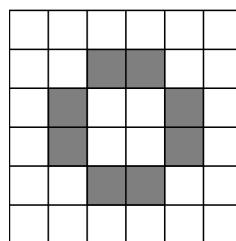


Rozwiązanie zadania M 1820.

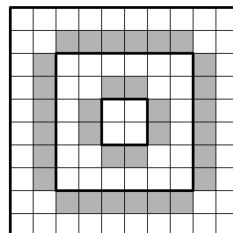
Odpowiedź: $2n - 1$.

Podzielmy tablicę na n^2 kwadratów 2×2 . Aby z jednego takiego kwadratu nie można było wyciąć narożnika, co najmniej dwa jego pola muszą być pokolorowane. Takich kwadratów może być jednak co najwyżej $(2(n-1)^2)/2 = (n-1)^2$, więc zawsze możemy wyciąć $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ narożników.

Indukcyjnie skonstruujemy teraz kolorowanie tablicy dające maksymalnie $2n - 1$ narożników. Dla $n = 3$ wystarczy pokolorować tablicę 6×6 w następujący sposób.



Dla $n \geq 5$, przechodząc z n do $n + 2$, umieszczamy kopię konstrukcji tablicy $2n \times 2n$ dla n w środku tablicy $(2n + 4) \times (2n + 4)$. Następnie dodatkowymi kwadratami, których jest $2(n+1)^2 - 2(n-1)^2 = 8n$, otaczamy środkową konstrukcję $2n \times 2n$.



Wtedy z założenia indukcyjnego możemy wyciąć maksymalnie $2n - 1$ narożników ze środka i dodatkowo jeszcze co najwyżej cztery narożniki z rogów tablicy, co daje łącznie $2n - 1 + 4 = 2(n + 2) - 1$.



Rozwiązanie zadania M 1821.

Odpowiedź: Tak.

Niech k będzie skalą podobieństwa trójkątów ABC i $A'B'C'$, wtedy $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$ oraz $C'A' = kCA$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równości:

$$SA'^2 + SB'^2 = k^2 AB^2,$$

$$SA'^2 + SC'^2 = k^2 AC^2,$$

$$SB'^2 + SC'^2 = k^2 BC^2,$$

$$SA^2 + SB^2 = AB^2,$$

$$SA^2 + SC^2 = AC^2,$$

$$SB^2 + SC^2 = BC^2.$$

Wobec tego

$$SA'^2 = \frac{k^2(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2} = k^2 SA^2,$$

czyli $SA' = kSA$. Podobnie $SB' = kSB$ oraz $SC' = kSC$, a zatem płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są równoległe.



Podstawowe pojęcia związane z grafami prostymi Czytelnik znajdzie – jeśli jest taka potrzeba – w kąciку nr 68 (Δ_{24}). Graf zorientowany to taki, w których każda krawędź ma nadany zwrot od jednego wierzchołka do drugiego. Krawędź uv grafu zorientowanego można rozumieć jako parę uporządkowaną (u, v) ; tu nadany jest zwrot od u do v . Stosuje się również notację $u \rightarrow v$. Krawędzie uv i vu nie mogą wystąpić jednocześnie. Turniej to graf pełny zorientowany. Ścieżką zorientowaną nazywamy ciąg wierzchołków $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$, a jeśli przechodzi ona przez wszystkie wierzchołki, to nazywamy ją (zorientowaną) ścieżką Hamiltona.

Metoda średniej w kombinatoryce

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Rozważmy liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) o średniej arytmetycznej A . Wówczas:

- (1) dla pewnego i zachodzi nierówność $a_i \geq A$, jak również dla pewnego j zachodzi nierówność $a_j \leq A$;
- (2) jeśli wszystkie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są całkowite nieujemne oraz $A < 1$, to dla pewnego i mamy $a_i = 0$.

Dowód można przeprowadzić „w pamięci”, więc go pominię. Poniższe przykłady pokazują te własności w akcji.

Przykład 1 (twierdzenie Szelego). Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Istnieje turniej o n wierzchołkach, w którym jest co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$ ścieżek Hamiltona.

Rozwiązanie. Rozważmy wszystkie turnieje o wierzchołkach $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Jest ich $2^{\binom{n}{2}}$, gdyż dla każdego dwuelementowego zbioru wierzchołków musimy zdecydować, czy krawędź między nimi będzie skierowana do wierzchołka o większym indeksie, czy przeciwnie. Ścieżka Hamiltona o kolejnych wierzchołkach $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ występuje w $2^{\binom{n}{2} - (n-1)}$ grafach, gdyż $n-1$ krawędzi ma ustalony, zgodny ze ścieżką zwrot, a pozostałe krawędzie mogą mieć zwrot dowolny. Możemy to zrobić dla każdej permutacji zbioru wierzchołków, więc łącznie we wszystkich możliwych turniejach jest dokładnie $n! \cdot 2^{\binom{n}{2} - (n-1)}$ ścieżek Hamiltona. Średnia ich liczba jest równa

$$\frac{n! \cdot 2^{\binom{n}{2} - (n-1)}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{n!}{2^{n-1}},$$

więc na mocy własności (1) poszukiwany turniej istnieje.

Przykład 2 (liczby Ramseya). Dla $m \geq 2$ przez $R(m)$ oznaczamy najmniejszą liczbę naturalną n , dla której w każdym kolorowaniu krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach dwoma kolorami otrzymamy jednobarwny graf pełny o m wierzchołkach. Udowodnić, że $R(m) > \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\frac{1}{2}m-1}$.

Rozwiązanie. Niech $n = R(m)$. Rozważmy wszystkie możliwe kolorowania krawędzi grafu K_n (pełnego o n wierzchołkach). Jest ich $2^{\binom{n}{2}}$. Ustalmy pewien podgraf K_m tego grafu. Wszystkich kolorowań, w których ten podgraf ma krawędzie w tym samym kolorze, jest $2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{m}{2}}$, gdyż $\binom{m}{2}$ krawędzi musi być tego samego koloru (jednego lub drugiego), a pozostałe mają kolor dowolny. Wobec tego średnia liczba jednobarwnych podgrafów pełnych na m wierzchołkach jest równa

$$\frac{\binom{n}{m} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{m}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{\binom{n}{m}}{2^{\binom{m}{2}-1}} \leq \frac{n^m/m!}{2^{\frac{1}{2}m-1}}.$$

Z drugiej strony ta średnia jest równa co najmniej 1, gdyż w przeciwnym razie warunek (2) nie byłby spełniony. Otrzymujemy stąd

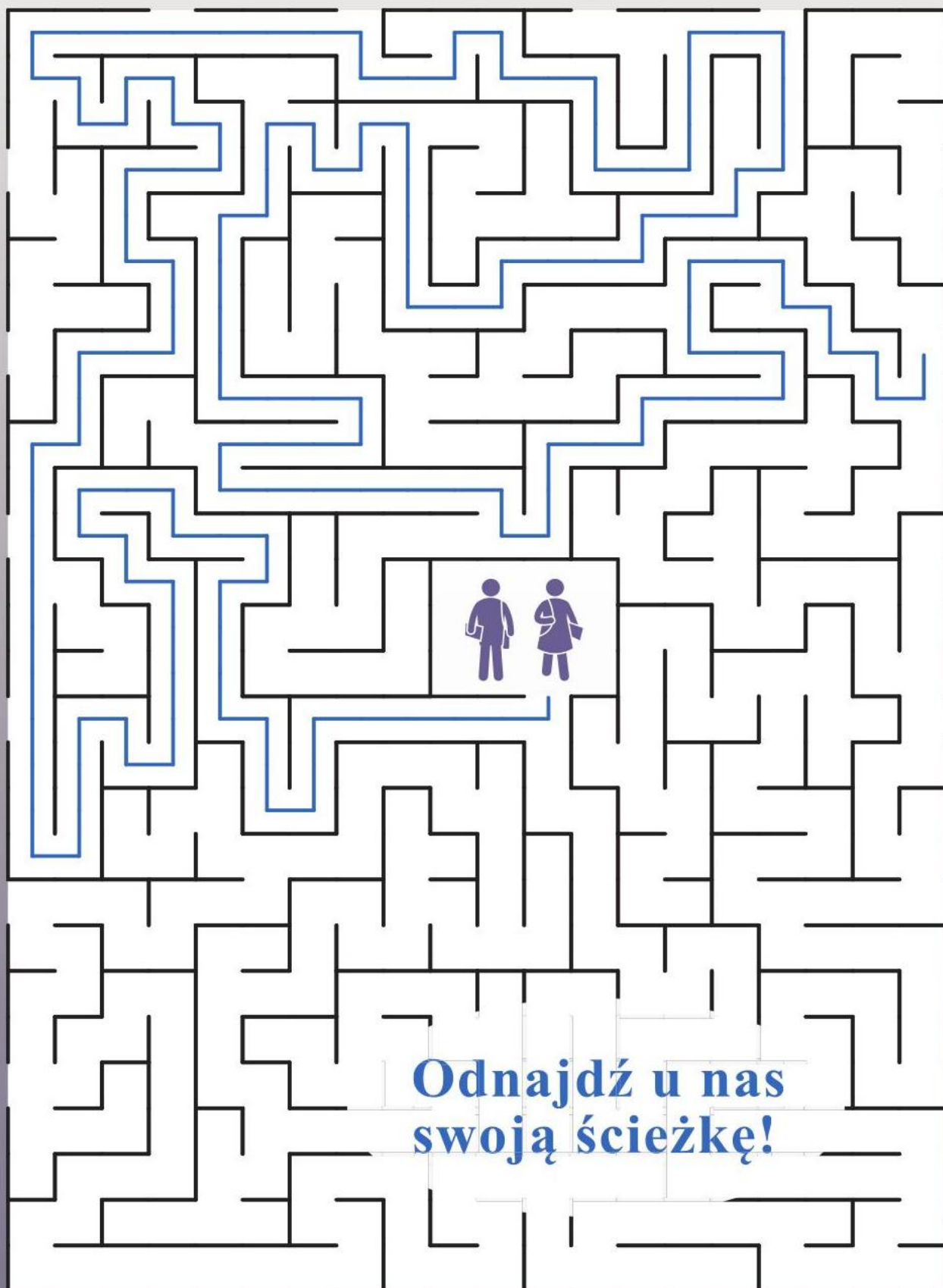
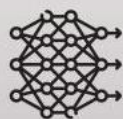
$$n \geq \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\binom{m}{2}-1} = \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2} - \frac{1}{m}} \geq \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\frac{1}{2}m-1}.$$

Zadania

1. Pewien graf ma t trójkątów. Wykazać, że można pomalować jego krawędzie dwoma kolorami w taki sposób, by liczba jednobarwnych trójkątów nie przekraczała $\frac{1}{4}t$.
2. Wykazać, że graf o $k > 0$ krawędziach ma podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{1}{2}k$ krawędziach.
3. (Liczby van der Waerdena) Niech $W(m)$ oznacza najmniejszą taką liczbę n , że przy każdym kolorowaniu zbioru $1, 2, \dots, n$ dwoma kolorami będziemy mogli z niego wybrać m -wyrazowy, jednobarwny ciąg arytmetyczny. Udowodnić, że $W(m) > 2^{m/2}$.
4. Dane są wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, każdy o długości 1. Udowodnić, że można tak dobrać $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, aby zachodziła nierówność

$$|\varepsilon_1 \vec{v}_1 + \varepsilon_2 \vec{v}_2 + \dots + \varepsilon_n \vec{v}_n| \leq \sqrt{n}.$$

Wskazówki do zadań



Odnajdź u nas
swoją ścieżkę!

Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego
mimuw.edu.pl/rekrutacja/



UNIwersYTET WARSZAWSKI
MM
WYDZIAŁ
MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI