



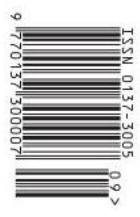
$h=6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3.141592\dots$

NR 9 (616) 2025
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

44 urodziny
Klubu 44 M
str. 1

Galeria
czterdziesto-
czterościanów
str. 12

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA



Nakład: 2700 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 9 (616) 2025

To była właściwie jedna bezsenna noc...
Opowiada Marcin Kuczma,
opiekun Klubu 44 str. 1

Nie wszystko istnieje, co pomyśli głowa
Jarosław Górnicki str. 6

Historia jednego zadania
Michał Adamaszek str. 8

 Ośmioramienna inteligencja
Marta Fikus-Kryńska str. 11

44 czterdziestoczterościany na 44-lecie
Klubu 44
Janusz Fiett, Jędrzej Fiett str. 12

Liczby Kaprekara
Karol Gryszka str. 15

 Zadania str. 17

 Wyznacznik w Krainie Czarów
Bartłomiej Pawlik str. 18

 Aktualności
Bardzo długi antytaniec str. 19

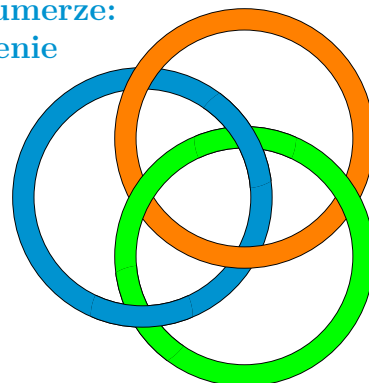
Klub 44 str. 20

 Prosto z nieba: Przekorna planeta str. 22

 Niebo we wrześniu str. 23

 Harmonia na trzy czwarte...
Bartłomiej Bzdega str. 25

W następnym numerze:
Dlaczego pierścienie
Boromeuszy
nie istnieją?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac.,
Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.
www.ado.com.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

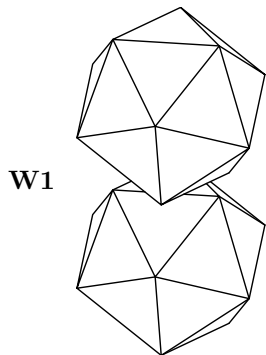
Wydawca: Uniwersytet Warszawski



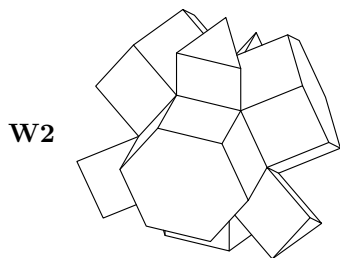
44 urodziny Klubu 44 M

Nie, to nie literówka! Drodzy Czytelnicy, zajrzyjcie do archiwum zamieszczonego na internetowej stronie *Delty*, cofnijcie się w czasie o 44 lata, do wydania z września 1981 roku, a znajdziecie pierwszą serię zadań kultowego Klubu 44. Z okazji tak okrągłej rocznicy pojawia się w tym numerze kilka okolicznościowych akcentów. Po pierwsze, wywiadu udzielił nam **Marcin Kuczma**, który nieustraszenie opiekuje się Ligą od samego jej początku (*sic!*). Przypomnijmy, że między innymi za tę działalność otrzymał w 1992 roku Medal Hilberta, przyznany przez *World Federation of National Mathematics Competitions*, zaś w 2022 roku Nagrodę Główną PTM im. Samuela Dicksteina. W wywiadzie opowiada na przykład o początkach funkcjonowania Ligi czy wyzwaniach związanych z jej prowadzeniem. W rozmowie nie brakuje oczywiście różnych ciekawostek, jak na przykład numery zadań o największych współczynnikach trudności. Po drugie, niniejszy numer ozdobiony jest efektownymi i intrygującymi wielościanami. Są to *czterdziestoczworościany* stworzone dla uczczenia ligowych urodzin, w liczbie sztuk (oczywiście!) 44, przez Janusza i Jędrzeja Fietków. Polecamy zajrzeć na stronę deltami.edu.pl/44sciany, aby obejrzeć imponującą galerię, pozwalającą oglądać je z każdej strony, a na stronie 12 tego wydania *Delty*, by poczytać o kulisach ich powstania. Wreszcie na stronie 8 Michał Adamaszek opisuje bogatą historię jednego z zadań ligowych, pokazując w ten sposób, że choć Klub 44 ma być zabawą dla jej uczestników, to nieraz „poważne” wyniki matematyczne są bardzo blisko ukazujących się w niej problemów.

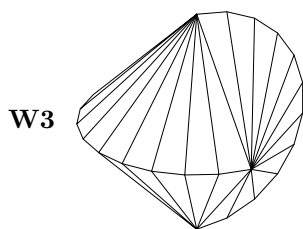
Z okazji urodzin życzymy Opiekunowi Ligi nieustającej satysfakcji z jej prowadzenia, a Uczestnikom wiele radości z rozwiązywania zadań. Tym zaś, którzy nie mieli jeszcze z nią styczności – by niniejszy numer zainspirował ich do rozpoczęcia przygody z Klubem 44.



W1



W2



W3

To była właściwie jedna bezsenna noc...

Opowiada Marcin Kuczma, opiekun Klubu 44

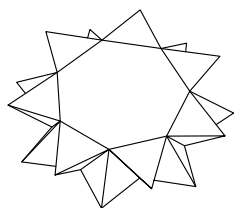
Redakcja: Jak to się stało, że został Pan opiekunem Ligi zadaniowej w *Delcie*?

Marcin Kuczma: To był pamiętny rok 1981. Redaktorem naczelnym *Delty* był Marek Kordos, człowiek wielkiej klasy. Działem matematycznym kierował Michał Szurek, dla mnie kolega ze studiów (nieco młodszy), dobry znajomy na niwie nie tylko matematycznej; on też przekazał mi koncepcję Ligi. Trzeba pamiętać, że od samego początku *Delty* istniał w niej już kącik zadaniowy „z myszką”, zainicjowany przez nieodżałowanego Andrzeja Mąkowskiego – kącik przeżył go i ma się dobrze. Tam jednak zadania się rozwiązuje tylko dla siebie. W „lidze”, która miałaby powstać, prace miały być oceniane, punktowane, i po zgromadzeniu określonej liczby punktów uczestnik miał być w jakiś sposób uhonorowany, a gdyby chciał, mógłby zacząć nowe okrażenie. Trzeba było tylko, bagatelka, znaleźć kogoś, kto by to prowadził. Nie wiem, ilu osobom prowadzenie Ligi było proponowane. Gdy propozycja trafiła do mnie, pierwszym odruchem było: „za nic!”. Miałem dość zajęć (matematycznych, nie mówiąc o innych): dydaktyka, badania naukowe, przekłady. Ale też byłem w wieku, gdy człowiek wiele może, a myśl mi się spodobała. Może spróbować? To była właściwie jedna bezsenna noc – na przemyślenie, jak to ma dokładnie wyglądać i czym to mi grozi. Nazajutrz, słabym głosem, powiedziałem: „Dobrze, spróbuję...”.

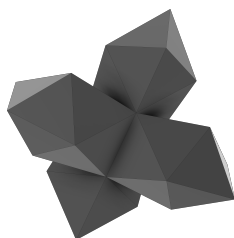
Jakie jest pochodzenie nazwy Klub 44?

Zanim odpowiem na to pytanie, chciałbym jasno stwierdzić: byłem wówczas rozkosznie przekonany, że to zabawa na dwa lata (góra), no może niecałe trzy; wywoła zainteresowanie, a potem umrze śmiercią naturalną. Rozmowa, jaką dziś prowadzimy, nie jawiła mi się jako nawet najczarniejsza wizja. – A skoro

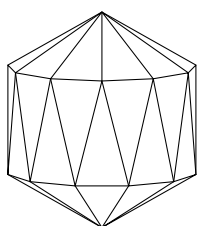
W4



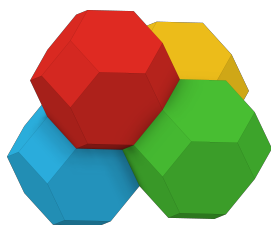
W5



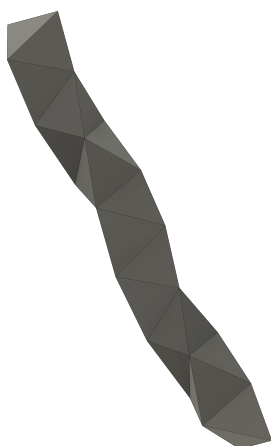
W6



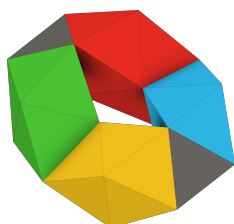
W7



W8



W9



to ma być na dwa lata, to czemu się nie powyglupiać. Zadania są trudniejsze i łatwiejsze; dlaczego każde ma ważyć (w punktach) tyle samo? Dajmy im wagi! Merytorycznie uzasadniona byłaby skala sięgająca nieskończoności, jednak spowodowałaby koszarne problemy praktyczne. Więc niech to będzie jakiś ograniczony przedział – od 1 do... ilu? do 4? dlaczego nie? No dobra, a jak wymierzyć trudność? Tu przyszedł pomysł, by ją określić jako funkcję liczby uczestników danej serii zadań oraz sumy ich nieprzeskalowanych ocen (każde zadanie od 0 do 1). Gdy już ta idea się objawiła (nadał opowiadam o owej bezsennej nocy), wzór $WT = 4 - 3S/N$ wyskoczył jak z automatu.

Uczestnik gromadzi sobie punkty; gdzie teraz postawić metę? Żeby dojście do niej trwało (dla stałych uczestników) nie za długo i nie za krótko? Prowadząc w myśli zupełnie teoretyczne symulacje, doszedłem do wniosku, że gdzieś wyraźnie więcej niż 10, a mniej niż 100. Więc 40? 50? może 49, bo to kwadrat? albo 43, bo liczba pierwsza? No to całkiem inaczej, 44; fajna liczba, może to jest to. Inspiracje? Mickiewicz? Moja data urodzenia (44 mod 100)? Jeżeli tak, to nieuświadomione. 44 fajna liczba, i tyle; na coś trzeba się było zdecydować. I też od razu wtedy przyszedł mi pomysł, żeby ktoś, kto ową metę osiągnął, wszedł do jakiegoś „honorowego kręgu”. Jak go nazwać? Klub! Tak, i z liczbą 44 dobrze się fonetycznie komponuje.

Nie oczekiwałem, żeby ktoś wykonał drugie, a tym bardziej trzecie okrążenie. Myśl o „weteraństwie” przyszła nieco później, przy opracowywaniu Regulaminu. Teraz śmiać mi się chce, gdy widzę, że niektórzy mają po kilkanaście rund; a i dwadzieścia parę się trafiło. Więc chyba nie bardzo mi się to udało; no bo co to za „weteran” – po trzech rundach? Powtórzę: ja to wszystko widziałem jako nieszkodliwy wyglup, w przekonaniu, że za parę lat nikt nie będzie o tej „lidze” pamiętał...

Czy z perspektywy czasu wprowadziłby Pan jakieś zmiany do sposobu funkcjonowania Ligi?

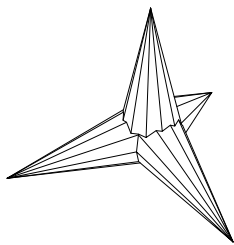
Tak, wiązanie uczestnika z konkretną miejscowością! To mogłoby mieć sens, gdyby – jak przewidywałem – liga miała żyć przez chwilę tylko. Gdy to się jednak rozciągnęło na lata, wszelki sens się zatracił. Ludzie identyfikują się z miejscem zamieszkania lub miejscem studiów, potem pracy; a jedno i drugie zmienia się w czasie. Popatrzmy na trajektorię (nie zmyśloną): Zebrzydowice–Cieszyn–Gliwice–Knurów–Gliwice; albo: Jasło–Krosno–Kraków–Londyn. Ale przyzwyczailiśmy się już: zadanie X zaproponował pan Y z miasta Z.

Inna kwestia to współczynnik trudności (WT). Na początku w lidze matematycznej były co miesiąc trzy zadania (nie dwa, jak obecnie); jedni przysyłali rozwiązania zadań 1 i 3, inni tylko 3, inni 1, 2, 3 itd.; wzór na WT miał większe pozory obiektywizmu (że to tylko pozory, było dla mnie jasne od początku). Ale spodobał się wielu ludziom kibicującym Lidze, i to nie tylko w naszym kraju. Liga fizyczna rozpoczęła żywot po paru latach. Z matematyki i z fizyki teraz były po dwa zadania; wzór na WT zrobił się jeszcze bardziej sztuczny. Pyta Pan: „z perspektywy czasu” co bym zmienił? Może w ogóle bym z niego zrezygnował... Parę lat minęło, liga nie umarła, lecz rozrosła się. Po co wyglupy? Ale czy to faktycznie wyglup? Nie wiem. Mam jednak poczucie, w jak niekomfortowej sytuacji znalazł się fizyk, zobligowany w swojej Lidze przejąć z naszej Ligi ten dziwny format.

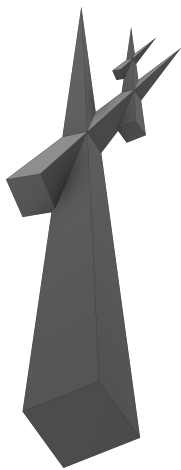
Jak zmieniała się Liga na przestrzeni lat, w szczególności liczba aktywnych uczestników, poziom trudności zadań czy poziom redakcji rozwiązań?

Zadania pierwszej serii zostały zaatakowane przez (nomen omen) 44 osoby. Drugiej i trzeciej – nieco mniej. Ale jeśli myślałem, że wkrótce zejdzie do zera, to przeliczyłem się. Szczytowy boom, gdy liczba listów zbliżała się do setki, miał bowiem miejsce w początkowych miesiącach roku 1984; później już nie został przekroczony. Warto jednak wspomnieć „dołek”, gdy liczba uczestników miesięcznej serii zadań (czyli parametr N ze wzoru na WT) była bardzo mała:

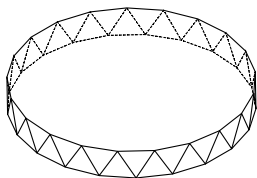
W10



W11



W12



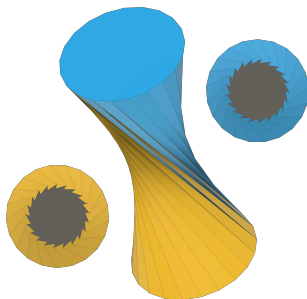
Dla każdego z wymienionych zadań
odsyłamy do trzech numerów (treść
zadania, rozwiązanie firmowe, roczne
omówienie):

194 ($\Delta_{89}^3, \Delta_{90}^5, \Delta_{92}^2$);

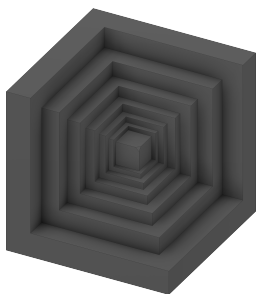
505 ($\Delta_{05}^9, \Delta_{06}^1, \Delta_{07}^2$);

551 ($\Delta_{07}^{12}, \Delta_{08}^4, \Delta_{09}^2$) – przyp. red.

W13



W14



dla serii z numerów 8 i 9 z 1989 roku było to odpowiednio $N = 3$ i $N = 5$.

Wkrótce potem *Delta* przez parę miesięcy przestała się ukazywać (prywatyzacja wydawcy, RSW „Prasa-Książka-Ruch”). Aby nadrobić tę przerwę, później przez jakiś czas ukazywały się po dwa numery miesięcznie, co spowodowało zabawne problemy z dotrzymywaniem wymaganych terminów. Jeden uczestnik napisał „Ludzie, miejcie na uwadze, że strzała czasu biegnie od października do listopada, a nie odwrotnie”.

W ostatnich latach wartość N oscyluje wokół 30. A trudność zadań? Rośnie, i to jak! Wtedy, dawno, gdy mi proponowano prowadzenie ligi, to wraz z sugestią, by zadania były raczej łatwe, by przyciągnąć liczną publikę, uczniów podstawówek itp. To się dość szybko okazało niepraktyczne, styl prac pokazywał, że trzeba trudniej, a potem coraz trudniej, i jeszcze, i jeszcze... Ale to się wpisuje w szersze zjawisko. Na przykład sama *Delta* robi się coraz trudniejsza, to rośnie lawinowo! Skojarzenie z zasadą wzrostu entropii w układach fizycznych samo się narzuca.

W tamtych wczesnych latach miesięcznik zapoznawał czytelników z najprostszymi własnościami liczb zespolonych albo z formułą wiążącą liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanu wypukłego. Zaiste, dla dzieci! Teraz – większość tekstów wymaga niezłego przygotowania specjalistycznego. To dla adresatów akademickich, dla dobrych studentów, a spoza tego środowiska – dla super-pasjonatów. Często niemłodych, kiedyś studentów kierunków ścisłych, których ścieżka życiowa powiodła w inne rejony. Pozostał jedynie sentyment dla matematyki czy fizyki, a nasza Liga dała zaproszenie do realizacji młodzieńczej fascynacji. Prace przysyłane przez nich, ale też i przez aktualnych studentów, to poziom profesjonalny! Ile ja się nowych rzeczy nauczyłem z lektury tych rozwiązań!

Jedna uwaga: niekiedy trafiają się i teraz zadania wyraźnie łatwe. To celowe. Po prostu uważam, że i takie są od czasu do czasu potrzebne.

A czy pojawiło się zadanie wyraźnie zbyt trudne, to znaczy takie, którego nikt nie rozwiązał?

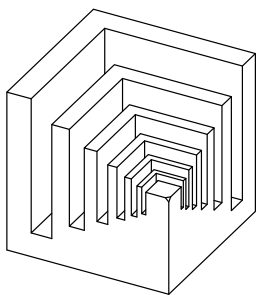
Trzykrotnie odnotowałem współczynnik trudności równy 4, co oznacza brak choćby minimalnej oceny dodatniej u kogokolwiek. Które to były? spojrzę do dokumentacji – no tak: zadanie 194 (to właśnie wtedy, gdy mieliśmy $N = 3$); zadanie 505 (skądś zapożyczone, wraz z rozwiązaniem, które naiwnie uznałem za nieprzesadnie trudne); i zadanie 551 (nie do zrobienia – bzdurna literówka w treści, moja wina).

Jednak przypadek najbardziej chyba efektowny to zadanie 157 – też zapożyczone, wraz z rozwiązaniem, które jednak okazało się niepełne; poprawnego dowodu nie znalazł nikt (kilku uczestnikom przyznałem małe punkty, stąd współczynnik trudności nieco mniejszy niż 4). Dokładną prezentację całej sytuacji (z dowodem niepełnym i z pełnym) zawiera artykuł „Trudne zadanie w Klubie 44” w numerze 8/1988.

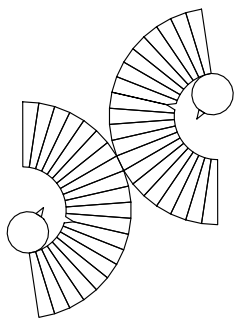
Zdarzały się w Klubie zadania, które wystąpiły dwa razy. Przypadek, czy może celowe testowanie czujności uczestników? Czy zdarzyło się, by jakieś zadanie wystąpiło trzy razy?

Oczywiście przypadek. Gdybym w swoich dokumentach utrzymywał perfekcyjny porządek... to się jednak okazało ponad moje siły. Proszę sobie wyobrazić: przygotowuję kolejną serię dwóch zadań, czas nagli, redakcja *Delty* pogania, bardzo by mi pasowało zadanie jakiegoś określonego typu, przeglądam szpargały, i hurra, mam! Tylko drobiazg – już je kiedyś użyłem, a przez bałaganiarstwo nie odnotowałem tego. I poszło po raz drugi. Czasem też znajduję świetne zadanie nieidentyczne z żadnym wcześniejszym – które jednak okazuje się, mówiąc językiem matematycznym, izomorficzne z czymś, co już było. Dopiero w pracy uczestnika czytam: przecież to jest faktycznie to samo, co zadanie numer taki

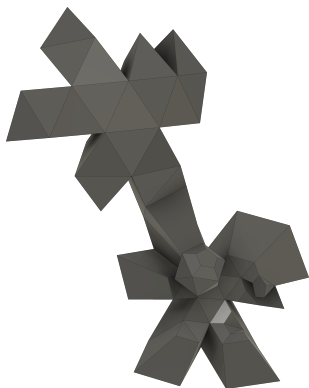
W15



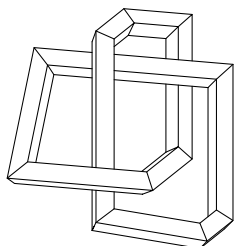
W16



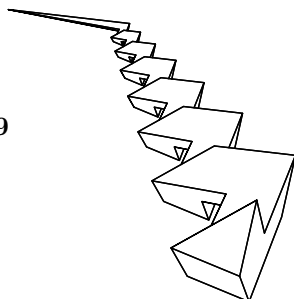
W17



W18



W19



a taki, sprzed osiemnastu lat. Respekt dla ligowego erudyty, pocieszenie w tym, że dla większości zadanie wygląda na zupełnie nieznanne. A czy trafiło się coś po raz trzeci? Nie mam pojęcia.

Co, jako dla opiekuna Ligi, stanowiło dla Pana największe wyzwanie przez te lata? Wyszukiwanie ciekawych zadań, sprawdzanie rozwiązań, przygotowywanie corocznych omówień – a może jeszcze coś innego?

Wszystko to, co wymienione. I to w tej kolejności! Skąd mam brać wciąż nowe zadania? Utarło się, że połowa to propozycje uczestników. Za każdym razem, gdy mnie proponowana treść zaciekawi, staram się zrobić zadanie samodzielnie; czasem się udaje, czasem nie. Zawsze jednak patrzę, jak autor to robi; i często na bazie przemyśleń autora i moich opracowuję rozwiązanie „firmowe” (nierzadko mniej zgrabne niż autorskie; a i tak najlepsze podejścia znajduję później, czytając prace uczestników). No, a pozostała połowa? Czyżby była w pełni mojego autorstwa? Część tak, ale niezbyt wielka. Większość to znajdowanie inspiracji w materiałach olimpiad, konkursów różnych krajów bądź w lematach różnych prac w różnych czasopismach. Użyłem słowa „inspiracja”; przecież nie przepisuję zadania beztrudno, uznaję prawa autorskie; raczej staram się wykonać jakiś „research” wokół zagadnienia, czasem odwracając logikę, znajdując wersję ogólniejszą lub mniej ogólną, wymyślając różne warianty, tak by rodzona matka tego nie rozpoznała (choć bywa, że ktoś z uczestników rozpozna). Czasem wychodzi z tego (bez mojej świadomości) coś niewiarygodnie trudnego, czasem przeciwnie, okazuje się, że strywalizowałem coś, co w oryginale miało więcej sensu. Takie życie. Robota to ciekawa, choć pożera masę czasu.

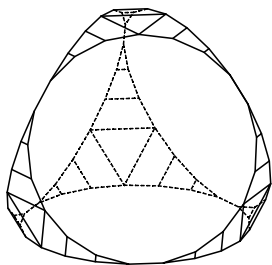
Czytanie rozwiązań uczestników – to kolejny kawał pracy. Wystawiam oceny w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Rozwiązanie bez żadnych zastrzeżeń dostaje pełną jedynkę, jasne. Rozwiązanie z istotnymi błędami – tu już nie ma tej jasności. W Olimpiadzie Matematycznej to by było zero, ale u nas – niekoniecznie. Gdy widzę sensowny krok rozpoczynający albo jakiś sensowny pomysł, albo (świadome) rozważenie konkretnego przypadku, nawet banalnego, często daję małą ocenę dodatnią. Kłopotliwe są sytuacje, gdy w rozumowaniu, zasadniczo poprawnym, są znaczące (moim zdaniem) braki w objaśnieniach, usterki logiczne, różne niejasności lub mocno niepełny opis postępowania; wtedy arbitralnie wybieram wartość między 0,1 a 0,9; pomocne bywa porównywanie usterek u różnych autorów (jeśli temu uczestnikowi dam 0,6 to temu drugiemu muszę dać 0,7 lub 0,8). Spotkałem się z zarzutem: „Toż to Pańskie widzimisie”. Ależ oczywiście! Znakomicie dobrane słowo.

Najbardziej kłopotliwe bywa odwołanie do „znanych” twierdzeń. Komu znanych? Autorowi pracy zapewne tak. Mnie niekoniecznie; co wtedy? Przyjacieli Google bywa pomocny, choć czasem i on za głupi. Ale niech będzie, że samo sformułowanie twierdzenia uda się odnaleźć. A dowód? Jeśli tak, to dobrze; wszelako częściej jedynie odsyłać do innych źródeł, nierzadko nieosiągalnych. Zdarzało mi się pisać do znajomych matematyków, specjalistów w odpowiedniej dziedzinie: daj proszę znać, czy coś takiego to folklor; bardzo ciekawe odpowiedzi niekiedy dostawałem. I teraz, wracając do pracy uczestnika: jak ocenić? Bez widzimisia – nie da rady!

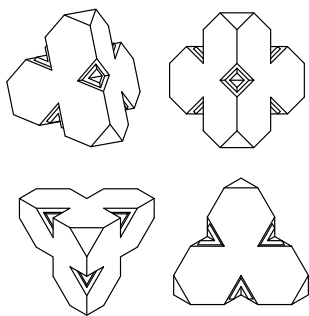
Czy „widzimisie” nie wyprowadził Pana nigdy w pole? Nie zdarzyła się Panu jakaś pomyłka bardziej zasadnicza?

Drogi Panie! Zna Pan arbitra, który nigdy błędnie nie odgwizdał spalonego? Przyznał karny lub nie przyznał, a w *replayu* okazało się, że było nie tak? Ja się nie uważam za nieomylnego. Kilka razy odkryłem znaczącą pomyłkę po jakimś czasie. Co wtedy? Zmieniam przeszłość, ale tylko w jednym kierunku. Brakujące punkty dopisuję do stanu konta. Niesłusznie przyznanych punktów już nie odejmuję. Jedyne, co na własne pocieszenie mogę powiedzieć, to to, że te sytuacje były naprawdę nieliczne. Oczywiście nie wiem, o ilu pomyłkach nie wiem.

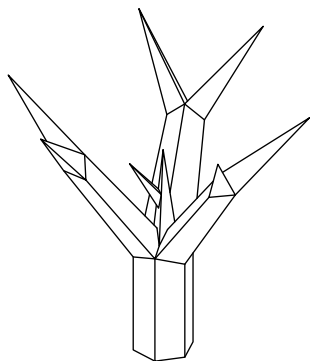
W20



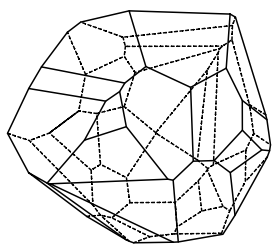
W21



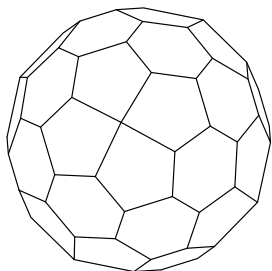
W22



W23



W24



Miało być jeszcze o przygotowywaniu corocznych omówień.

Ano właśnie. Tę sugestię otrzymałem „w pakiecie” 44 lata temu. Żeby na bieżąco oceniać przysyłane rozwiązania (jakieś punkty), a raz na rok zamieszczać obszerniejsze omówienie (cokolwiek by to miało znaczyć). No to zacząłem tak robić. Początkowo miało to charakter bajdurzenia, z nielicznymi odwołaniami do konkretnych zadań, bez cytowania ich treści. Ale już po niewielu latach stało się jasne, że to będzie po prostu przegląd ciekawszych zadań z minionego sezonu (roku szkolnego). Teraz myślę: o ile więcej sensu ma zamieszczanie takich komentarzy natychmiast po zakończeniu oceniania kolejnej serii, tak jak to standardowo robią chyba wszystkie kolumny zadaniowe w różnych czasopismach na świecie. Autorzy zgrabnych rozwiązań i interesujących komentarzy nie byłiby zmuszani do odczekiwania trzech czy siedmiu dodatkowych miesięcy, by się dowiedzieć, co redaktor ligi chce o ich pracach opowiedzieć. Oczywiście obecny format „kosztuje” *Deltę* ze trzy dodatkowe strony druku w jednym numerze w roku; format standardowy wymagałby dodatkowej strony (lub więcej) przez dziesięć miesięcy.

Pisanie jednego rocznego omówienia, jak obecnie, to kawał ciężkiej roboty. No bo wszystko, co chciałbym o danym zadaniu zamieścić, muszę skompresować do tak małej liczby słów i symboli, jak tylko potrafię (stąd też przypominanie treści zadań w formie ekstremalnie skrótovej). A potem, przy autokorekcie, starać się zapisać to wszystko jeszcze krócej. Liczba zużytych godzin to funkcja monotoniczna liczby napisanych słów; proszę nie myśleć, że rosnąca.

Czy rozważał Pan kiedyś stworzenie zbioru zadań z Klubu 44 M?

Nie, i nie miałbym na to ochoty, zważywszy, że (jak już mówiłem) wiele z nich powstało przez pracę (twórczą) na podstawie zadań, które gdzieś wyszukałem; modyfikacje daleko idące, ale jednak. Zresztą w większości przypadków nawet nie pamiętam źródła inspiracji, szczególnie, gdy chodzi o wczesne lata Ligi.

Czy zdarzyło się, że został Pan rozpoznany przez uczestnika Ligi w jakiejś nieoczekiwanej sytuacji, np. w sklepie albo na wyjeździe wakacyjnym?

Jeden zabawny przypadek chciałbym wspomnieć: gdy kiedyś byłem u lekarza, ów lekarz, zobaczywszy moje imię i nazwisko, zagadnął mnie, czy jestem prowadzącym Ligę w *Delcie* – bo on w niej przez krótki czas uczestniczył; wtedy z kolei ja uświadomiłem sobie, że i mnie znajome jest jego imię i nazwisko i że jest on członkiem Klubu 44. Wywiązała się korespondencja, której wynikiem stało się ładne zadanie, zaproponowane przez sympatycznego pana doktora.

Jakie ma Pan wyobrażenia dotyczące przyszłości Ligi?

Jeszcze przez chwilę chciałbym tę naszą Ligę poprowadzić. Ale długo to nie potrwa; biologia jest bezlitosna. Ktoś to przejmie. Niech nie czuje się zobligowany do zachowania jej obecnego kształtu we wszystkich detalach. Zmiana prowadzącego to dobry moment na przewietrzenie stylu. Na przykład odejście od rocznych omówień i przejście na format, jaki nazwałem standardowym, może miałoby sens? A może nie, kto wie? Współczynniki trudności – utrzymać czy nie? Obiektywizmu w nich tyle, co nic; ale są elementem niezłej zabawy; a nasza liga chce być zabawą, niczym więcej. A może mój następca zechce zmienić wzór na WT? Wszystko do pomyslenia.

Czy jest coś, co na okoliczność jubileuszu Ligi chciałby Pan przekazać jej uczestnikom?

Najlepsze życzenia. Zdrowia przede wszystkim. Radości z tej ligowej zabawy. Wyrozumiałości dla prowadzącego, gdy zadanie lub ocenianie okaże się nie idealnie trafione. Dobrego bawienia się jeszcze przez długie lata. A jeśli się znudzi – to wycofania się bez złych myśli. A jeśli po jakimś czasie przyjdzie ochota, by powrócić – to wracać do gry, w poczuciu pewności, że się zostanie przywitany z otwartymi ramionami. Tego życzę Uczestnikom. A samej Lidze – długiego żywota!

Rozmawiał Łukasz RAJKOWSKI

Nie wszystko istnieje, co pomyśli głowa

Jarosław GÓRNICKI

Bernhard Riemann (1826–1866) w 1854 roku przedstawił Wydziałowi Filozoficznemu Uniwersytetu w Getyndze pracę habilitacyjną „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe” (praca została opublikowana w 1867 r., po śmierci Riemanna). W tej pracy nakreślona została koncepcja całki Riemanna, ale przykład funkcji ilustrującej jej istotę okazał się trochę skomplikowany.

Oj, myślę sobie czasem od samego rana,
W czym jest całka Lebesgue’a lepsza
od Riemanna,

Głupio będzie Riemannowi,
Jak się w grobie o tym dowi.

Z „Hymnu matematyków”
(lata 60. XX wieku)

O mierze i całce Lebesgue’a pisał Michał
Miśkiewicz w Δ_{22}^4 .



W 1875 roku Carl Johannes Thomae (1840–1921) [1] podał elementarny przykład funkcji nieciągłej w nieskończenie wielu punktach, która jest całkowalna w sensie Riemanna. Funkcja ta stała się koronnym argumentem świadczącym o wyższości całki Riemanna (1854) nad całką Cauchy’ego (1823).

Fundamentalne pytania Riemanna: Jak nieciągła może być funkcja całkowalna? – nadal czekało na odpowiedź. Dopiero po blisko pięćdziesięciu latach powstała teoria miary i całki Lebesgue’a (1902), ogólniejsza od całki Riemanna!

W międzyczasie panowało przekonanie o możliwości tworzenia najdziwniejszych funkcji. Na brak przykładu funkcji ciągłej w punktach wymiernych, a nieciągłej w punktach niewymiernych odpowiadano, że to tylko kwestia czasu i właściwego pomysłu, którego teraz brakuje.

Kłam tego typu spekulacjom zadał dziewiętnastoletni Vito Volterra (1860–1940) w pracy [2], gdy był studentem Scuola Normale Superiore di Pisa.

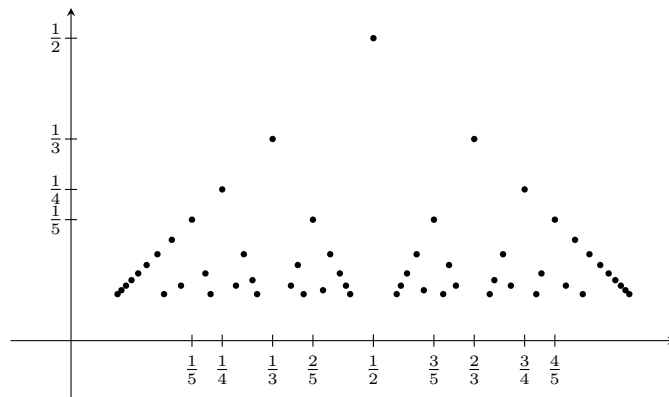
Zanim przedstawimy obserwację Volterry, wykazaną elementarnymi środkami, popatrzymy na funkcję Thomae.

Przykład (C.J. Thomae, 1875). Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją opisaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p \neq 0, q > 0 \text{ i ułamek } \frac{p}{q} \text{ jest nieskracalny,} \\ 0 & \text{dla liczb niewymiernych } x. \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła dla każdej niewymiernej wartości x i jest nieciągła w każdym punkcie wymiernym x , co poniżej sprawdzimy.

Zauważmy, że f jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym 1. Ponieważ dla liczby niewymiernej x liczba $x + 1$ też jest niewymierna, więc $f(x) = f(x + 1) = 0$. Dla $x = 0$, $f(0) = f(1) = 1$. Gdy $x = \frac{p}{q}$ i ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to $x + 1 = \frac{p+q}{q}$ i ułamek $\frac{p+q}{q}$ pozostaje nieskracalny. Zatem $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p+q}{q}) = \frac{1}{q}$.



Rys. 1. Przybliżenie funkcji f w przedziale $(0, 1)$

W punkcie $x = 0$ funkcja f nie jest ciągła, bo $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q} \rightarrow 0 \neq 1 = f(0)$ przy $q \rightarrow \infty$. Niech $x_0 \in (0, 1)$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona liczba takich liczb naturalnych q , że $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$. To oznacza, że w przedziale $(0, 1)$ jest tylko skończenie wiele liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, dla których $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$. Istnieje więc taka $\delta > 0$, że w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nie ma punktów x , dla których $f(x) \geq \varepsilon$ (być może z wyjątkiem punktu x_0). Zatem dla wszystkich punktów x takich, że $0 < |x - x_0| < \delta$ mamy $|f(x)| < \varepsilon$. Dowolność wyboru $\varepsilon > 0$ oznacza, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ dla każdego punktu $x_0 \in (0, 1)$.

Literatura

- [1] C.J. Thomae, „Ein Beispiel einer Function, welche in keinem Intervalle beschränkt ist, aber doch Riemann’sche Integral besitzt”, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellschaft, 1875.
- [2] V. Volterra, „Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue”, Giornale di matematiche 19 (1881), 76–87.

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *gęsty*, gdy każdy niepusty przedział otwarty zawiera co najmniej jeden element zbioru A .



Vito Volterra (1860–1940), Piza 1881

Vito Volterra był jednym z prekursorów analizy funkcjonalnej, stworzył teorię funkcji, których argumentami są funkcje (1887). Miał znaczące osiągnięcia w teorii równań całkowych. W 1931 roku z powodu odmowy złożenia przysięgi lojalności wobec faszystowskiego rządu Benito Mussoliniego został usunięty z zajmowanych stanowisk.

Twierdzenie (G. Cantor). *Niech $\{F_k\}$ będzie ciągiem zstępującym $F_k \supset F_{k+1}$ niepustych przedziałów domkniętych i ograniczonych na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$. Wtedy $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.*

Wniosek ten można również uzyskać, rozważając zbiory F_σ i G_δ (pisał o tym Jerzy Ryll w Δ_{83}^8) lub korzystając z twierdzenia Baire'a (1899).

W konsekwencji, jeśli x_0 jest liczbą niewymierną, to $f(x_0) = 0$, więc funkcja f jest w tym punkcie ciągła. Jeśli x_0 jest liczbą wymierną, to $f(x_0) \neq 0$, więc funkcja f w tym punkcie nie jest ciągła.

Okresowość funkcji f rozciąga te własności na całą dziedzinę $\mathbb{R}$. $\square$

Mamy więc przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, w której punkty ciągłości oraz punkty nieciągłości tworzą zbiory gęste, i to dość dokładnie wymieszane.

Przyjmijmy następujące określenie. Funkcję $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *punktowo nieciągłą*, gdy jest nieciągła w nieskończenie wielu punktach, pozostając funkcją ciągłą na gęstym podzbiórze dziedziny.

Oto zapowiadany rezultat odkryty przez dziewiętnastoletniego Volterrę.

Twierdzenie (V. Volterra, 1881). *Nie istnieją dwie funkcje punktowo nieciągłe $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, dla których zbiór punktów ciągłości jednej jest zbiorem punktów nieciągłości drugiej, i vice versa.*

Dla ustalonej funkcji f niech $C_f = \{x \in (a, b) : f \text{ jest funkcją ciągłą w } x\}$, $D_f = \{x \in (a, b) : f \text{ nie jest funkcją ciągłą w } x\}$. Są to takie zbiory niepuste, że $C_f \cup D_f = (a, b)$ i $C_f \cap D_f = \emptyset$.

Założmy, że f i g są takimi funkcjami punktowo nieciągłymi, że $C_f = D_g$ i $D_f = C_g$. Skoro f jest funkcją punktowo nieciągłą, to istnieje punkt x_0 , w którym f jest ciągła. Wtedy z definicji ciągłości funkcji w punkcie dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ istnieje taka $\delta > 0$, że przedział otwarty $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ i jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$. W przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ wybieramy przedział domknięty $[a_1, b_1]$, $a_1 < b_1$. Wówczas, korzystając z nierówności trójkąta, dla dowolnych $x, y \in [a_1, b_1]$ mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (1)$$

Ponieważ g też jest funkcją punktowo nieciągłą, więc w przedziale otwartym (a_1, b_1) istnieje punkt x_1 , w którym g jest ciągła. Stosując podaną wyżej argumentację do funkcji g , znajdujemy taki przedział domknięty $[a'_1, b'_1] \subset (a_1, b_1)$, że dla dowolnych $x, y \in [a'_1, b'_1]$ mamy $|g(x) - g(y)| < 1$. Łącznie z warunkiem (1), dla dowolnych $x, y \in [a'_1, b'_1]$ otrzymujemy

$$|f(x) - f(y)| < 1 \text{ i } |g(x) - g(y)| < 1.$$

Powtarzając to rozumowanie dla kolejnych wartości ε równych, odpowiednio, $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots$ otrzymujemy ciąg takich przedziałów domkniętych

$$[a'_1, b'_1] \supset [a'_2, b'_2] \supset [a'_3, b'_3] \supset \dots,$$

że jeśli $x, y \in [a'_k, b'_k]$, to

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{k-1}} \text{ i } |g(x) - g(y)| < \frac{1}{2^{k-1}}. \quad (2)$$

Twierdzenie Cantora (zob. margines obok) gwarantuje istnienie punktu $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a'_k, b'_k]$.

W punkcie c funkcja f jest ciągła. Istotnie, dla danego $\varepsilon > 0$ tak wybieramy liczbę naturalną k , aby $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Ponieważ $c \in [a'_{k+1}, b'_{k+1}]$, a przedział $[a'_{k+1}, b'_{k+1}]$ zawarty jest w przedziale otwartym (a'_k, b'_k) , więc istnieje taka $\delta > 0$, że $(c - \delta, c + \delta) \subset (a'_k, b'_k) \subset [a'_k, b'_k]$. Wtedy z warunku (2) dla dowolnego x takiego, że $0 < |x - c| < \delta$, mamy $|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Oznacza to, że $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, czyli f jest funkcją ciągłą w punkcie c . Identyczna argumentacja pokazuje, że funkcja g też jest ciągła w punkcie c . Zatem $c \in C_f \cap C_g = C_f \cap D_f = \emptyset$. Sprzeczność.

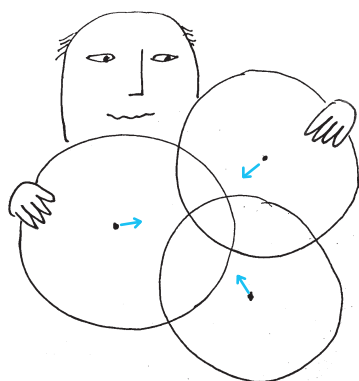
Przykład Thomae w połączeniu z wynikiem Volterry zapewnia następujący wniosek:

Wniosek. *Nie istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest ciągła w każdym punkcie wymiernym i nieciągła w każdym punkcie niewymiernym dziedziny.*

Przynajmniej w matematyce istnieją granice osobliwości!

Jakiś czas temu (Δ_{22}^5) w Klubie 44 M pojawiło się zaproponowane przeze mnie zadanie numer $\lfloor 44^4/(4444+4) \rfloor$ o następującej treści:

Na płaszczyźnie znajdują się trzy koła o niepustym przecięciu. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że po przesunięciu środki każdego z dwóch kół są bliżej siebie niż na początku. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepuste przecięcie.



Myślę, że każdemu Czytelnikowi teza tego zadania wydaje się Oczywista, przez duże O. Jeszcze bardziej przekonujący jest rzut oka na kontrapozycję: jeżeli trzy koła mają puste przecięcie i przesuniemy je tak, że ich środki parami się od siebie oddalą, to przesunięte koła muszą mieć „jeszcze bardziej puste” przecięcie. Trywialne, brakuje tylko dowodu.

Zadanie, w narzucającej się ogólniejszej wersji dla zbliżania dowolnej liczby kul w $\mathbb{R}^n$ odkryłem w zbiorze ćwiczeń [1] do klasycznego podręcznika z optymalizacji wypukłej. Podane tam wskazówki prowadzą do analitycznego rozwiązania z użyciem mnożników Lagrange’a – w końcu ćwiczenia są po to, żeby ćwiczyć techniki przedstawione w książce. Zaintrygowało mnie to i pomyślałem, że warto byłoby poszukać, *choćby w dwóch wymiarach, bardziej geometrycznego dowodu*. Już na pierwszy rzut oka zresztą widać, że trzy dyski na płaszczyźnie to pierwszy przypadek, w którym teza nie jest za darmo i coś trzeba zrobić. Więc zrobimy. Będziemy się zajmować następującym wariantem, równoważnym oryginalnemu, co Czytelnik bez trudu sprawdzi. (Jako że w tym numerze obchodzimy urodziny ligi zadaniowej, zadań pozostawionych w prezencie dla Czytelnika będzie sporo).

Tutaj i dalej trójkąty i inne konfiguracje mogą być zdegenerowane, na przykład dopuszczamy $A = B$, chociaż w niektórych argumentach dla zwięzłości będziemy udawać, że nie są. Czytelnik z łatwością wypełni te luki, jest to tylko kwestia wypowiedzenia kilku dodatkowych słów, aby obsłużyć te proste przypadki.

Zadanie 842(bis). Na płaszczyźnie znajdują się dwa trójkąty ABC i $A'B'C'$, przy czym ten drugi jest „mniejszy” w następującym sensie:

$$|A'B'| \leq |AB|, \quad |B'C'| \leq |BC|, \quad |C'A'| \leq |CA|.$$

Wówczas dla dowolnego punktu P tej płaszczyzny istnieje taki punkt P' , że

$$|P'A'| \leq |PA|, \quad |P'B'| \leq |PB|, \quad |P'C'| \leq |PC|.$$

A oto szkic rozwiązania, zaadaptowanego z rozwiązania firmowego (Δ_{22}^9).

Najpierw zauważamy, że wystarczy rozważyć przypadek, gdy liczba $k = \max\left(\frac{|A'B'|}{|AB|}, \frac{|B'C'|}{|BC|}, \frac{|C'A'|}{|CA|}\right)$ jest równa 1. W przeciwnym razie, tzn. gdy $k < 1$, wystarczy „rozdmuchać” jednokładnie trójkąt $A'B'C'$ w skali k^{-1} , wziąć rozwiązanie dla tego trójkąta, przekształcić je przez odwrotną jednokładność o skali k , i wszystkie pożądane nierówności będą spełnione, nawet z naddatkiem: $|P'A'| \leq k \cdot |PA|$, $|P'B'| \leq k \cdot |PB|$, $|P'C'| \leq k \cdot |PC|$. Niech więc $k = 1$, czyli bez straty ogólności

$$|A'B'| = |AB|, \quad |B'C'| \leq |BC|, \quad |C'A'| \leq |CA|.$$

Aplikując izometrię, którą na koniec możemy odwrócić, możemy więc po prostu przyjąć $A' = A$, $B' = B$. Główną rolę odgrywa teraz symetralna ℓ odcinka CC' . Z nierówności

$$|BC'| = |B'C'| \leq |BC|, \quad |AC'| = |A'C'| \leq |AC|$$

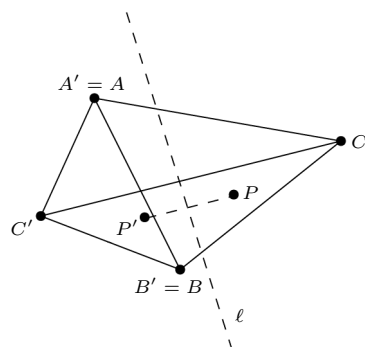
wynika, że punkty A, B, C' leżą po tej samej stronie ℓ . Jeżeli punkt P też leży po tej stronie, to $|PC'| \leq |PC|$, i kładziemy po prostu $P' = P$:

$$|P'A'| = |P'A| = |PA|, \quad |P'B'| = |P'B| = |PB|, \quad |P'C'| = |PC'| \leq |PC|.$$

W przeciwnym razie niech P' będzie obrazem punktu P w symetrii względem ℓ (rys. 1). Wtedy też jest dobrze, bo prosta ℓ jest również symetralną odcinka PP' i punkty A, B, P' leżą po tej samej jej stronie, więc:

$$|A'P'| = |AP'| \leq |AP|, \quad |B'P'| = |BP'| \leq |BP|, \quad |P'C'| = |PC'|.$$

W tym miejscu chciałbym sprostować stwierdzenie Redaktora Ligi z dorocznego omówienia (Δ_{23}^2), jakoby nadesłane rozwiązania „ustępowały jednak prostotę rozwiązaniu, jakie znalazł autor zadania, i które zostało wydrukowane jako firmowe”. Powinno być: „rozwiązaniu, które wypracowali autor zadania i Redaktor Ligi” w trzech iteracjach: moje rozwiązanie (elementarne, ale nieco bolesne) zostało znacznie ulepszone przez Redaktora, a na koniec jeszcze raz



Rys. 1

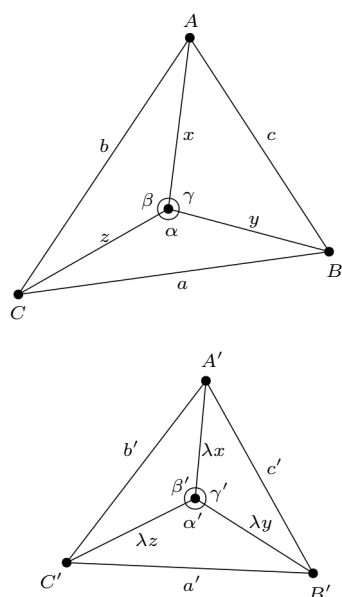
Odpowiedzi na pytania ze strony 15:

Genus wielościanu $W35$ wynosi 6. Nie jest łatwo wyobrazić sobie tę bryłę jako figurkę z plasteliny i tak ją porozciągać, by dostrzec precel z sześcioma otworami. Pewniejszą metodą jest uważne zliczenie wierzchołków i krawędzi (ścian jest oczywiście 44) i obliczenie liczby tuneli, korzystając z uogólnionego wzoru Eulera. Wielościan $W36$ ma genus 8.

To jedyna praca opublikowana przez Mojżesza Kirszbrauna (1903–1942), za to ma ona wg Google Scholar prawie 500 cytowań. Po studiach pracował jako aktuariusz; zmarł w getcie warszawskim w 1942 r.

Źródło: Biblioteka Instytutu Matematyki PAN, licencja CC-BY

Zagadnienie rosnącej objętości przecięcia i malejącej objętości sumy teorii mnogościowej zbliżających się kul to osobna puszka Pandory, której tutaj nie otwieramy. Hasło dla zainteresowanych: hipoteza Knesera–Poulsena.



Rys. 2

przeze mnie uproszczone. Proponując zadanie, wyraziłem wprawdzie nadzieję, że w przyszłości przeczytam o ładniejszym podejściu, ale nie spodziewałem się, że w takich okolicznościach. Za tę zakulisową współpracę bardzo dziękuję!

To tyle historii, teraz pora na Historię przez duże H, którą odkryłem dopiero jakiś czas później (i dobrze, bo obarczony tą wiedzą nie odważyłbym się zaproponować zadania). Zgodnie z regulaminem ligi ocenę maksymalną można otrzymać za podanie odsyłacza do literatury, „pod warunkiem, że w cytowanym źródle znajduje się pełne rozwiązanie”. W takim razie kilka osób mogłoby dostać punkt za odesłanie do swoich własnych prac, gdyby tylko Klub 44 miał nie 44, ale chociaż 99 lat. Jako pierwszy – polski matematyk Mojżesz Kirszbraun, którego praca magisterska na Uniwersytecie Warszawskim z 1930 roku, opublikowana w *Fundamenta Mathematicae* w roku 1934 [4], zawiera taki lemat:

Satz 17. *Es sei in $\mathbb{R}^n$ ein System $\{K_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ von $n+1$ Kugeln mit den Mittelpunkten a_i und Radien ρ_i gegeben; p sei ein gemeinsamer Punkt dieser Kugeln und $\{b_j\}_{1 \leq j \leq n+1}$ ein System von Punkten, die für jedes $i = 1, 2, \dots, n+1$ und $j = 1, 2, \dots, n+1$, die Bedingung $\rho(b_i, b_j) \leq \rho(a_i, a_j)$ erfüllen²⁰. Ist $\{K_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ das System der Kugeln mit den Mittelpunkten b_i und Radien ρ_i , -- so gibt es mindestens einen Punkt q , der allen Kugeln K_i gemeinsam ist.*

Jest to nic innego, jak zadanie 842 dla $n+1$ kul n -wymiarowych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ten sam lemat odkrywali później inni autorzy (odnośniki w [5]), którzy tak jak Kirszbraun potrzebowali go, aby... ale o tym za chwilę. Punkty ligowe zebrałby nawet sam Michaił Gromow [3], który pokazał, że przecięcie kół po przesunięciu nie tylko jest niepuste, ale ma większą powierzchnię niż przed przesunięciem. Pierwszym, który poświęcił całą notkę wyłącznie naszemu zadaniu (dla dowolnej liczby kul w dowolnym wymiarze), był Isaac J. Schoenberg [5]. Jego krótki, analityczny dowód jest ekstraktem z prac poprzedników i w różnych wariantach występuje w późniejszych źródłach. Możemy prześledzić jego główną ideę dla naszego zadania. Żeby nie komplikować, ograniczymy się do sytuacji, gdy punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Zamiast pracowicie szukać punktu P' , weźmiemy od razu najlepszego możliwego kandydata i wykażemy, że jest on wystarczająco dobry. Zdefiniujmy więc P' jako punkt, który minimalizuje wartość wyrażenia

$$\max \left(\frac{|P'A'|}{|PA|}, \frac{|P'B'|}{|PB|}, \frac{|P'C'|}{|PC|} \right),$$

i niech to minimum wynosi λ . Chcemy pokazać, że $\lambda \leq 1$. Zauważmy, że P' leży w trójkącie $A'B'C'$, bo w przeciwnym razie moglibyśmy przesunąć go w stronę tego trójkąta, zmniejszając jednocześnie wszystkie trzy odległości $|P'A'|, |P'B'|, |P'C'|$, co przeczy minimalności. Żeby znowu ułatwić sobie życie, rozpatrzmy tylko przypadek, gdy P' leży ściśle we wnętrzu trójkąta $A'B'C'$. Zauważmy, że wówczas

$$\frac{|P'A'|}{|PA|} = \frac{|P'B'|}{|PB|} = \frac{|P'C'|}{|PC|} = \lambda,$$

z przyczyn podobnych jak poprzednio: gdyby nie wszystkie trzy stosunki były równe, powiedzmy $\lambda = \frac{|P'A'|}{|PA|} \geq \frac{|P'B'|}{|PB|} \geq \frac{|P'C'|}{|PC|}$ oraz $\frac{|P'A'|}{|PA|} > \frac{|P'C'|}{|PC|}$, to przesuwając P' odrobinę w stronę boku $A'B'$, moglibyśmy uzyskać lepsze minimum. Jesteśmy więc w sytuacji z rysunku 2. Przypuśćmy wbrew tezie, że $\lambda > 1$. Korzystając z twierdzenia cosinusów i pamiętając, że $a' \leq a$, dostajemy oszacowanie:

$$\cos \alpha' = \frac{\lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2 - a'^2}{2\lambda^2 yz} = \frac{y^2 + z^2 - \left(\frac{a'}{\lambda}\right)^2}{2yz} > \frac{y^2 + z^2 - a^2}{2yz} = \cos \alpha,$$

wiec $\alpha' < \alpha$. Ale analogicznie $\beta' < \beta$ i $\gamma' < \gamma$ – sprzeczność, więc jednak $\lambda \leq 1$. Schoenberg opowiada ten dowód w języku wektorów i iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$, co pozwala mu za jednym zamachem rozprawić się ze wszystkimi konfiguracjami, które pominęliśmy, ale esencja pozostaje ta sama.

Podsumujmy i rozszerzmy to, co już wiemy. Teza zachodzi przy przesuwaniu $n+1$ kul n -wymiarowych w $\mathbb{R}^n$. Jeden z podstawowych rezultatów w geometrii



Szósta edycja konkursu na opowiadanie fantastycznonaukowe Polskiej Fundacji Fantastyki Naukowej

Każdego roku Polska Fundacja Fantastyki Naukowej organizuje konkurs literacki dla debiutantów piszących w gatunku science fiction.

Każdy autor, który ukończył 18 lat i nie wydał jeszcze żadnej książki, lub wydał co najwyżej jedną książkę drogą self-publishingu, może nadesłać jeden nigdzie dotąd niepublikowany utwór prozatorski o objętości 15 000–50 000 znaków ze spacjami w terminie od 01.07.2025 do 30.09.2025 na adres mailowy podany w regulaminie. Przesłane teksty spekulatywne muszą być pozbawione wątków nadprzyrodzonych i równocześnie opierać się w znaczącym stopniu na fundamencie obowiązujących praw, teorii albo prognoz naukowych bądź na ich logicznym rozwinięciu, zgodnym ze współczesną wiedzą naukową.

Zwyczajnie opowiadania zostaną opublikowane drukiem w Antologii Polskiej Fantastyki Naukowej za rok 2026, przygotowanej nakładem Wydawnictwa IX.

Regulamin konkursu znaleźć można na stronie: <https://pffn.org.pl/konkurs/>

Autorka grafiki: Vivi Ekhart

Literatura

- [1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. Additional exercises for Convex Optimization. https://github.com/cvxgrp/cvxbook_additional_exercises.
- [2] Ludwig Danzer, Branko Grünbaum, and Victor Klee. Helly's Theorem and its relatives. In *Convexity: Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society*, volume 7, page 101. American Mathematical Soc., 1963.
- [3] Mikhail Gromov. Monotonicity of the volume of intersection of balls. *Geometrical Aspects of Functional Analysis*, pages 1–4, 1987.
- [4] Mojżesz D. Kirschbraun. Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen. *Fundamenta Mathematicae*, 22(1):77–108, 1934.
- [5] I. J. Schoenberg. On a Theorem of Kirschbraun and Valentine. *The American Mathematical Monthly*, 60(9):620–622, 1953.

wypukłej, twierdzenie Helly'ego, głosi, że jeżeli mamy taką rodzinę zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$, że każde $n + 1$ zbiorów z tej rodziny ma niepuste przecięcie, to wszystkie zbiory mają niepuste przecięcie. Stąd wniosek, że nasza teza zachodzi dla dowolnie wielu (nawet nieskończenie wielu) kul. Co więcej, zestawy punktów $A, B, C, P \dots$ i $A', B', C', P' \dots$ z zadania 842(bis) mogą leżeć w różnych przestrzeniach, co pozostawiamy jako ćwiczenie. Reasumując to wszystko, dochodzimy do następującego uogólnienia.

Lemat. Niech $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}^N$ i $\{A'_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}^M$ będą dowolnymi zbiorami punktów indeksowanymi tym samym zbiorem indeksów I . Załóżmy, że dla dowolnych $i, j \in I$ mamy $|A'_i A'_j| \leq |A_i A_j|$. Wtedy dla dowolnego punktu $P \in \mathbb{R}^N$ istnieje taki punkt $P' \in \mathbb{R}^M$, że $|P' A'_i| \leq |P A_i|$ dla wszystkich $i \in I$.

Możemy wreszcie zdradzić, do czego Kirschbraun i jego następcy używali tego lematu. Ważnym tematem w analizie i topologii jest zagadnienie przedłużania funkcji. Mając daną funkcję $f : U \rightarrow V$ i większą dziedzinę $U' \supseteq U$, chcemy przedłużyć f z U na U' , to znaczy znaleźć taką funkcję $\tilde{f} : U' \rightarrow V$, że $\tilde{f}(X) = f(X)$ dla argumentów $X \in U$. Przedłużenie $\tilde{f}$ powinno zachowywać różne ładne własności funkcji f , którymi akurat jesteśmy zainteresowani. Klasyczny przykład: jeżeli $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^N$ jest zbiorem domkniętym, to każdą funkcję ciągłą $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^M$ można przedłużyć do funkcji ciągłej $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$. Kirschbraun rozważał problem przedłużania dla funkcji lipschitzowskich. Funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L , gdy

$$|f(X)f(Y)| \leq L \cdot |XY|$$

dla wszystkich argumentów X, Y , czyli gdy nie oddala punktów bardziej niż L razy. Pora wreszcie na następujące:

Twierdzenie o przedłużaniu funkcji lipschitzowskich (Kirschbraun).

Niech $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^M$ będzie funkcją określoną na dowolnym podzbiórze $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^N$ spełniającą warunek Lipschitza $|f(X)f(Y)| \leq L \cdot |XY|$ dla wszystkich $X, Y \in \mathcal{A}$. Wtedy f można przedłużyć do funkcji $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ spełniającej warunek Lipschitza $|\tilde{f}(X)\tilde{f}(Y)| \leq L \cdot |XY|$ dla wszystkich $X, Y \in \mathbb{R}^N$, z tą samą stałą L .

Dowód przeprowadzimy dla $L = 1$, pozostawiając ogólną wersję jako zadanie.

Następujące dwa zbiory punktów:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^N \quad \text{oraz} \quad \mathcal{A}' = \{f(X) : X \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathbb{R}^M$$

indeksowane zbiorem $\mathcal{A}$ spełniają założenia lematu. Weźmy teraz dowolny punkt $P \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{A}$ i zastosujmy do niego lemat, dostając na wyjściu punkt $P' \in \mathbb{R}^M$. Zdefiniujmy po prostu $\tilde{f}(P) = P'$ (oraz, oczywiście, $\tilde{f}(X) = f(X)$ dla $X \in \mathcal{A}$). Na mocy lematu funkcja $\tilde{f}$ spełnia warunek $|\tilde{f}(X)\tilde{f}(Y)| \leq |XY|$ dla wszystkich $X, Y \in \mathcal{A} \cup \{P\}$.

Umiemy więc skonstruować odpowiednie przedłużenie funkcji f na dowolny nowy punkt P . A potem na następny i kolejny. Dowód można dokończyć na różne sposoby, zależnie od matematycznego wyrafinowania Czytelnika, na przykład z lematu Kuratowskiego–Zorna (bierzemy maksymalne przedłużenie; jego dziedziną musi być całe $\mathbb{R}^N$, bo inaczej moglibyśmy tą samą metodą rozszerzyć go o jeszcze jeden punkt, przecząc maksymalności) albo bardziej elementarnie, przedłużając przez indukcję na wszystkie punkty o współrzędnych wymiernych i następnie uciągając w jedyny możliwy sposób. $\square$

Wnikliwy Czytelnik zauważy, że twierdzenie Kirschbrauna i poprzedzający go lemat to w zasadzie jedno i to samo: jeżeli przyjmiemy twierdzenie za prawdziwe, to lemat, a więc i rozwiązanie zadania 842, dostajemy za darmo (jak? to już ostatnie ćwiczenie!).

Na koniec pozwólmy, aby i Klub 44 dołożył swój mały kamyczek do tej Historii. W obszernej przeglądowej pracy o zastosowaniach twierdzenia Helly'ego [2, str. 154] autorzy tak piszą, przez pryzmat twierdzenia Kirschbrauna, o n -wymiarowej wersji zadania 842: „Wszystkie dowody używają narzędzi analitycznych (iloczyn skalarny itp.), *nawet w dwóch wymiarach, ale warto byłoby poszukać bardziej geometrycznego dowodu*”. W dwóch wymiarach – zrobione!



Ośmioramienna inteligencja

Wakacyjne rozmowy przy obiedzie. Dwunastolatek do Ośmiolatki: „Czy jadłaś kiedyś ośmiornicę? Ośmiornice są podobno smaczne. Ale ja lubię kalmary, takie w panierce”. Ośmiolatka do Dwunastolatka: „Ja bym się trochę bała spróbować”.

Chcę przytaknąć starszemu dziecku. Tak, sałatka z ośmiornicy, którą wciąlałam 30 lat temu na plaży w Czarnogórze, była pyszna. Ale teraz... nie mogłabym. Zjedzenie ośmiornicy już nie wchodzi w grę. Za dużo o nich wiem.

Od jakiegoś czasu coraz więcej doniesień wskazuje, że ośmiornice to wyjątkowe, inteligentne zwierzęta. Do kolekcji zdjęć dotyczących tych głowonogów dochodzi opisane właśnie w *Current Biology*. Naukowcy z Japonii twierdzą, że ośmiornice ulegają iluzji „gumowej ręki”, co wskazuje na podobny do ludzkiego sposób odczuwania własnego ciała.

Badanie iluzji jest przydatne, pokazuje, jak działa percepcja. Iluzję gumowej ręki (*rubber hand illusion*) opisano pierwszy raz w 1998 roku w *Nature*: przy odpowiednim ustawieniu rekwizytów wrażenia dotykowe powstają w kończynie nienależącej do ciała osoby badanej. A oto jak wyglądała procedura eksperymentalna: testowana osoba siadała przy stole, kładła obie ręce na blacie. Jedną rękę zasłaniała ustawiona na stole przesłona, zamiast niej osoba poddawana testowi widziała sztuczną rękę w tej samej pozycji co jej własna, tuż obok. Następnie eksperymentator używał dwóch pędzli, którymi w taki sam sposób i w tym samym momencie dotykał palców sztucznej i prawdziwej ręki. I tyle. A efekt? Uczestnicy eksperymentu po kilku minutach mieli wrażenie, że sztuczna ręka jest ich własną.

Eksperyment błyskawicznie stał się znany, był wielokrotnie powtarzany w wielu wariantach, wśród których wykazano, że czucie pojawiało się w sztucznej kończynie także wtedy, gdy jedynie ona sama, a nie prawdziwa, była dotykana.

Obecnie wiadomo, że informacje na temat granic własnego ciała i jego położenia zbieramy z trzech źródeł: zmysłu dotyku, propriocepcji (czucia z receptorów położonych w mięśniach, skórze i stawach) oraz zmysłu wzroku. Jeśli sygnały z trzech dróg nie są spójne, jeden ze zmysłów może zdominować pozostałe, w przypadku iluzji gumowej ręki jest to wzrok. Zaczynamy „czuć” to, co widzimy. W ten sposób uwidacznia się plastyczność ludzkiego mózgu.

Podobnemu testowi japońscy naukowcy poddawali ośmiornice – używali płytek z naklejonym sztucznym ramieniem i umieszczali je nad ramieniem zwierzęcia, tak że nie widziało prawdziwej kończyny. Najpierw stymulowano jednocześnie oba ramiona – to sztuczne i to prawdziwe. Następnie sztuczne ramię było szczypane pęsetą. Ośmiornice wyraźnie reagowały – uciekając, zmieniając postawę ciała na obronną lub wykonując gwałtowne ruchy ramion. Nie działało się tak w grupie kontrolnej, gdzie stymulacja sztucznego i prawdziwego ramienia głowonoga nie była synchroniczna.

Wygląda na to, że dzielimy z głowonogami podobny sposób odczuwania granic i przynależności części ciała. Jest to o tyle dziwne, że są to zwierzęta ewolucyjnie dalekie ssakom, niewątpliwie jednak obdarzone inteligencją, mimo zupełnie innej budowy ciała, oczu i układu nerwowego. Trudno uwierzyć, że ośmiornice i inne głowonogi są spokrewnione ze ślimakami i małzami. Tymczasem ich mózg ma pół miliarda komórek, tyle mniej więcej co mózgi kotów i psów. Na dodatek większość z tych komórek znajduje się w strukturach położonych w ramionach, tylko część (około 180 milionów) stanowi położony między oczami mózg centralny. Każde ramię ma wysoką niezależność w działaniu i percepcji – na każdym znajduje się przeciętne około 200 przyssawek, które oprócz funkcji związanej

z poruszaniem się odczuwają zapach i smak. Wiadomo, że informacje z jednego z ramion przechodzą na inne, a usunięte ramię ośmiornicy wykazuje wrażliwość na dotyk i utrzymuje zdolność poruszania się. Czasem zwierzęta wykorzystują to, aby zwieść drapieżnika, który goni odpływające ramię, a same wówczas chowają się w bezpieczne miejsce.

Z badań wynika, że głowonogi uczą się, mają niezłą pamięć, rozpoznają poszczególne osoby, a nawet planują. Są wytrawnymi eksploratorami i uznaje się, że są skłonne do zabawy. Niektórzy uznają, że zwierzęta obdarzone są świadomością. Podobieństwa z człowiekiem widoczne są także na poziomie molekularnym. W genomie ośmiornicy odkryto dużą liczbę genów kodujących tak zwany mikroRNA (miRNA). MikroRNA łączą się z mRNA, a połączenia te wpływają na sposób produkcji i ilość powstających białek. Zarówno u człowieka, jak i u ośmiornicy jest tych miRNA szczególnie dużo w komórkach nerwowych. Naukowcy łączą to z rozwojem mózgu i funkcjami poznawczymi.

Inne podobieństwo dotyczy tzw. elementów ruchomych, czyli transpozonów w genomie. Są to sekwencje DNA, które mogą przemieszczać się w różne miejsca genomu, często powodując mutacje i zmiany aktywności genów. U człowieka stanowią one 45% DNA. Do niedawna były uważane za pozostałość ewolucyjną, nie przypisywano im znaczącej funkcji. Tymczasem okazało się, że aktywność jednego z typów transpozonów, o nazwie LINE (*Long Interspersed Nuclear Element*), jest wysoka i precyzyjnie regulowana w komórkach mózgu, szczególnie w hipokampie odpowiedzialnym za procesy poznawcze, m.in. uczenie się i pamięć. Badania z 2022 roku wykazały, że także w genomie ośmiornicy jest dużo sekwencji podobnych do LINE, szczególnie aktywnych w komórkach mózgu głowonogów odpowiedzialnych za uczenie się.

W procesie ewolucji w dwóch dawno rozdzielonych gałęziach powstały istoty obdarzone inteligencją: wśród kręgowców najwyżej stoją ssaki i niektóre ptaki. Wśród bezkręgowców – głowonogi. Z inną niż nasza organizacją ciała, anatomią mózgu, budową zmysłów. A jednak spotykamy się w wielu podobieństwach działania percepcji i funkcjonowania układu nerwowego. Biolog systemów prof. Nikolaus Rajewsky tłumaczy, dlaczego zajmuje się naukowo ośmiornicami. „Kiedy byłem w Monterey Bay Aquarium w Kalifornii, spędziłem dużo czasu przy pojemniku, w którym była ośmiornica. Patrzyliśmy na siebie. Może to niezbyt naukowe, ale naprawdę miałem wrażenie, że patrzę w oczy inteligentnej osobie”.

I weź tu, człowieku, zjedz sałatkę z ośmiornicy...

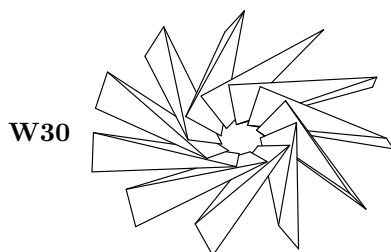
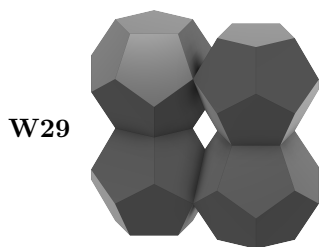
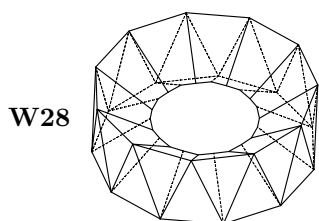
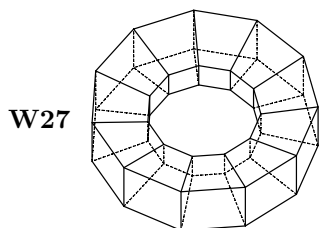
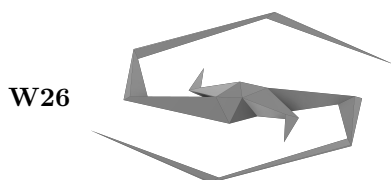
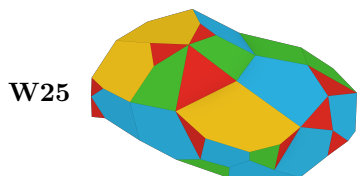
Referencje:

- Sumire K, Yuzuru I. Rubber arm illusion in octopus. *Current Biology* (2025),
Botvinick M., Cohen J. Rubber hands ‘feel’ touch that eyes see, *Nature* (1998),
Zolotarov G. i wsp. MicroRNAs are deeply linked to the emergence of the complex octopus brain. *Science Advances* (2022).

Marta FIKUS-KRYŃSKA

44 czterdziestoczterościany na 44-lecie Klubu 44

Janusz FIETT,
Jędrzej FIETT



Dokładnie 44 lata temu, w 1981 roku, we wrześniowym numerze *Delty* ukazał się regulamin ligi zadaniowej Klub 44 i zostały opublikowane trzy pierwsze zadania. Redagował dr Marcin E. Kuczman... i tak pozostaje do dziś! W obliczu wszechobecnych zmian, które nastąpiły w minionych dekadach, ta stałość to fenomen na światową skalę! W inauguracyjnym numerze Prowadzący pisał: „Główną nagrodą ma być przyjemność płynąca z gimnastyki umysłowej”. Potem zwracał uwagę na to, że liga to zabawa, ale związana z mierzeniem się z „niebanalnymi problemami”. Ten artykuł, wraz z ilustracjami umieszczonymi na marginesach stron rocznicowego numeru *Delty*, jest czytelnicznym podziękowaniem za lata radości z mierzenia się z ligowymi wyzwaniem.

Dlaczego właśnie wielościany? Bo bywają piękne, bo mogą być pretekstem do formułowania niebanalnych problemów, bo ich wymyślanie to gimnastyka umysłowa i znakomita zabawa. Jest więc w nich wszystko to, co wypływa z ducha Klubu 44 M. Wybór wielościanów ma też uzasadnienie osobiste. Autorzy tekstu i ilustracji to prywatnie ojciec i syn: pierwszy jest członkiem Klubu 44 M, a drugi projektantem wzornictwa. Wielościany wielokrotnie przewijały się w naszej rodzinnej edukacji, stawały się czasem rocznicową laurką. Praca nad 44 czterdziestoczterościanami była piękną przygodą, w której żaden z nas nie poradziłby sobie bez drugiego – matematyczne podpowiedzi ułatwiały proces modelowania brył, a ten często weryfikował pierwotne pomysły i wprowadzał nieoczekiwane modyfikacje i smaczki.

Zależało nam, by 44-ściany były rozmaite: nawiązywały do różnych pojęć matematycznych, ale też innych dziedzin obecnych na łamach *Delty*, by były efektowne, a czasem nawet zabawne. Opisy 44-ścianów mają zróżnicowany charakter i nieraz zachęcają Czytelnika do samodzielnych rozważań. 44-ściany prezentujemy na kilka sposobów, kierując się zawsze specyfiką bryły. Wybieraliśmy kąty widzenia, pozwalające jak najlepiej dostrzec istotne cechy konkretnego wielościanu. Polecamy jednak gorąco skorzystanie z galerii dostępnej na stronie deltami.edu.pl/44sciany, umożliwiającej oglądanie wirtualnych modeli 44-ścianów ze wszystkich stron. Zachęcamy do nadsyłania do Redakcji uwag i spostrzeżeń na temat prezentowanych brył, a także przedstawiania własnych propozycji – byłoby wspaniale, gdyby powstała galeria 144, czyli grosza, 44-ścianów!

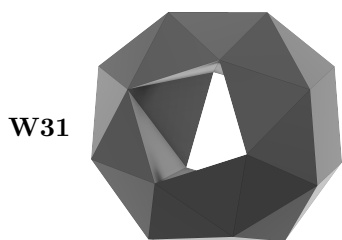
Przejdźmy do opisywania brył. Chcąc, choćby krótko, odnieść się do każdego z 44 wielościanów, musimy używać uproszczeń i skrótów, stawiając raczej na sugestywność niż formalizm. Np. antygraniastosłupem o podstawie k -kąta – skrótowo $\text{antg}(k)$, nazwiemy też każdy wielościan, który jest z nim izomorficzny, ostrosłupy oznaczmy jako $\text{ostr}(k)$, nasze 44-ściany – symbolami $W1, W2, \dots, W44$, a bryły platońskie, stanowiące punkt wyjścia wielu konstrukcji – jako $F4, F6, F8, F12$ i $F20$. Mało znany, lecz zgrabny i użyteczny, dwuklinoid przycięty (ang. *snub disphenoid*), o 12 trójkątnych ścianach, standardowo oznaczmy przez $J84$ (jest to jedna z tzw. brył Johnsona).

Na początek dość proste konstrukcje, tworzone przez [sklejanie innych wielościanów](#). $W1$ powstaje, gdy dwa $F20$ złączymy ścianami i przekreślimy względem siebie o 60° . Wszystkie jego ściany są trójkątami równobocznymi, choć różnej wielkości. $W2$ jest czworościanem ściętym, na którego ścianach postawiono graniastosłupy. Krawędzie tej bryły są równej długości, więc jej ściany to wielokąty foremne. $W3$ to ostrosłupowa wersja sferostożka (Δ_{15}^1). Turlany, tak samo jak sferostożek, zatacza się i dodatkowo turkocze. Ma wszystkie ściany będące identycznymi trójkątami równoramiennymi. $W4$ to $\text{antg}(7)$ z $F4$ doklejonym do każdej bocznej ściany. $W5$ to cztery $J84$ przyklejone „na sztorc” do ścian $F4$. Można to zrobić na wiele sposobów (ile?), ale prezentowana wersja wydaje się najzgrabniejsza. $W6$ jest $\text{antg}(11)$ z dwoma doklejonymi do podstaw $\text{ostr}(11)$. Podobnie jak w przypadku $W3$, wszystkie jego ściany są identycznymi trójkątami równoramiennymi. Czytelnikowi Wytrwałemu polecamy znalezienie stosunku boków tych trójkątów, dzięki któremu $W6$ ma

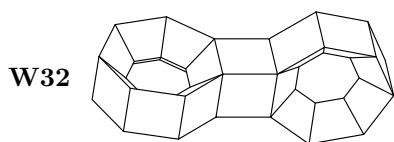
Zainteresowanym twierdzeniem Steinhausa polecamy następujące artykuły:

Stanisław Świerczkowski (1960), *On chains of regular tetrahedra*, Colloquium Mathematicum,

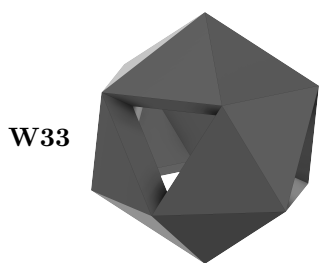
Michael Elgersma, Stan Wagon (2016), *The quadrahelix: a nearly perfect loop of tetrahedra*, preprint w serwisie arXiv.



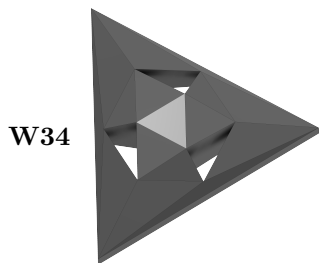
W31



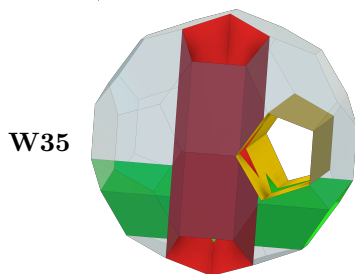
W32



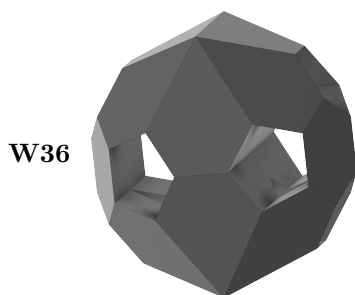
W33



W34



W35



W36

sferę opisaną. W7 to cztery sklezione ośmiościany ścięte, znane ze zdolności wypełnienia przestrzeni. Każdy angażuje w kontakty z sąsiadami trzy spośród 14 ścian, więc pozostałych 11 zostaje wolnych. W8 jest fragmentem obiektu zwanego *tetrahelix*, mającego jako jednostkę F4. Ze względu na krawędzie układające się w potrójną helisę przypomina strukturę kolagenu. Warto przy okazji wspomnieć twierdzenie Hugona Steinhausa, udowodnione przez Stanisława Świerczkowskiego, mówiące o niemożności uformowania łańcucha F4 w zamkniętą pętlę. Wreszcie W9, od którego zaczęła się cała nasza przygoda z 44-ścianami. Ostatecznie wyszło na jaw, że jest matematycznym oszustem! Miał powstać ze sklejenia czterech J84 i dwóch F4. Bardzo chcieliśmy, by jego 44 ściany były trójkątami równobocznymi, co czyniłoby go, *nomen omen*, deltoidalnym. Okazało się, że warunkiem domknięcia tej bryły jest skrócenie, o niespełna 3%, dwóch krawędzi prostopadłych do jej długiej osi. Na wieść o tym, że nie są jednak foremne, czworościany aż poszarzały ze wstydu...

W10 to kombinacja czterech przenikających się ostr(11), których wysokości leżą na wysokościach pewnego F4. Wygląda groźnie, bo przypomina kolce do zatrzymywania pojazdów. W11 to ekspresyjna kompozycja przenikających się, parami podobnych, ostrosłupów – ilustruje jeden ze sposobów pomnażania liczby ścian.

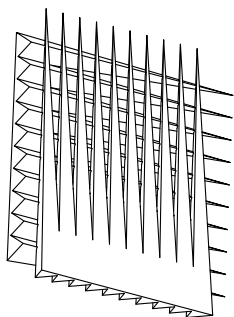
Wielościanny chodzące parami. W12 to kanoniczny antg(21)... nudny nieco. Co się jednak stanie, gdy, w wersji krawędziowej, rozsunie podstawy i mocno obrócimy je względem siebie? Powstały W13 jest tak nieoczywisty, że pokazujemy też dwa jego przekroje, dowodzące m. in. braku wypukłości bryły. Jej boczne krawędzie dzielą się na dwie grupy, ze względu na kąt, pod jakim przebijają płaszczyzny podstaw. Każda grupa to odcinki tworzących innej hiperboloidy jednopowłokowej. Te dwie powierzchnie mają wspólną oś, różnią się obwodem „talii” i przecinają się wzdłuż okręgów opisanych na podstawach W13. Wielościanny W14 i W15 są wariantami jednego pomysłu. Pierwszy realizuje wyjściowy zamysł autora-ojca, podczas gdy drugi powstał w wyniku nieprecyzyjnego opisu tego zamysłu, twórczo zinterpretowanego przez autora-syna. Czytelnik Skrupulatny doliczy się, że w obu wersjach najdalszy (niewidoczny) wierzchołek dużego sześcienu musi być ścięty, by powstała 44. ściana. W16 i W17 przedstawiamy wyjątkowo w formie siatek, a nie gotowych wielościannów. W pewnym sensie obie bryły są dwupiramidami ściętymi, w których dodatkowo ścięto jeszcze po dwa wierzchołki. Pierwszą bryłę Czytelnik z łatwością złoży w wyobraźni. Powinno to pomóc w uzmysłowieniu sobie, na zasadzie analogii, czym jest druga bryła, tym razem... czterowymiarowa. Ułatwieniem może być wejście w perspektywę płaszczaka (patrz Δ_{84}^9 i Δ_{21}^7) i zastanowienie się, jakie on miałby trudności ze zrozumieniem siatki bryły trójwymiarowej i sposobu jej sklejenia.

Wielościannowe łamańce. W18, złożony z 11 odcinków pręta o kwadratowym przekroju, ma kształt trójlistnika, czyli najprostszego nietrywialnego węzła. Konstrukcja W19: weźmy smukły pochyły ostrosłup o podstawie trójkąta równobocznego – taki, żeby rzut jego wysokości na podstawę był prostopadły do jednego z jej boków. Tnijmy ostrosłup równoległymi płaszczyznami, by powstające segmenty, poza ostatnim, były parami podobne. Każdy kolejny segment obróćmy o 120° względem poprzedniego. Wspomniany warunek prostopadłości zapewnia współpłaszczyznowość pewnych ścian kolejnych segmentów, dzięki czemu 44-ścienna heliso-spirala ma więcej skrętów.

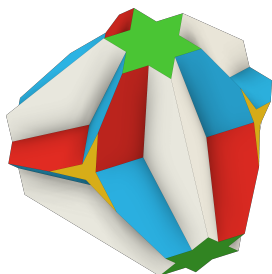
Motywy ścinania i motyw uzupełniania. W20 to F4, który został „oszlifowany” przez czterokrotne ścinanie wierzchołków. Dzięki doborowi kątów cięcia trójkątne ściany F4 udało się zmienić w 21-kąty foremne. W21 powstaje z F4, któremu na przemian ujmowane są i dodawane coraz mniejsze jego kopie. W konsekwencji ma wszystkie ściany równoległe do ścian wyjściowego F4. Bryła, niczym Janus, ma różne oblicza, dlatego pokazujemy ją z czterech stron.

Wielościanny z dedykacją. W22 to ukłon pierwszego z autorów, biologa i pszczelarza-amatora, w stronę P.T. Felietonistek biologicznych *Delty*. Rozgałęziająca się struktura, inspirowana morfogenezą roślin, wspiera się

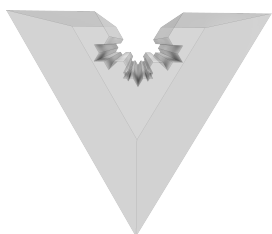
W37



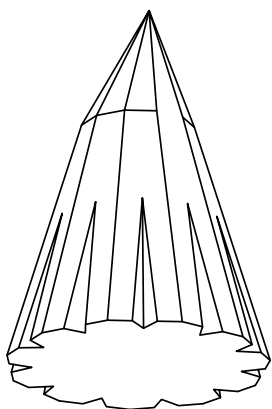
W38



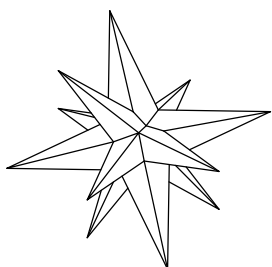
W39



W40



W41



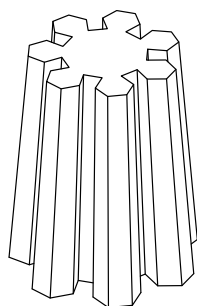
na pniu w kształcie komórki pszczelego plastra. Kto nie zna historii o tym, jak pszczoły, bez użycia rachunku różniczkowego, rozwiązały problem optymalizacyjny, dotyczący oszczędzania wosku, niech koniecznie o tym przeczyta – choćby w klasycznej książce „Śladami Pitagorasa” Szczepana Jeleńskiego. W23 to w zamierzeniu realizacja 44-ścianu losowego – został wycięty z przestrzeni 44 płaszczyznami, stycznymi do sfery w losowo wybranych punktach. Czytelnik zechce przemyśleć, dlaczego jeszcze przed losowaniem można było stwierdzić, że z prawdopodobieństwem równym 1 będzie miał 126 krawędzi i 84 wierzchołki. W24 określiliśmy jako 44-ścian równomierny, a tworząc go, myśleliśmy o fizykach i ich wzajemnych relacjach z matematykami. Punktom wylosowanym na potrzeby konstrukcji wielościanu losowego W23 przypisaliśmy jednakowe ładunki i, w prostej symulacji, pozwoliliśmy im poruszać się po sferze do momentu, gdy siły odpychania się zrównoważą. I znów – płaszczyzny styczne w tych punktach sfery określiły położenie ścian. Efekt był dla nas zaskakujący i zachwycający – w strukturze bryły nie pozostał żaden ślad po wielościanie losowym! Okazał się dalekim, nieznanym krewnym sześcienu, cechującym się takimi samymi jak on symetriami. Jego ściany to 24 pięciokąty oraz 8 i 12 sześciokątów dwóch rodzajów. Uznaliśmy, że jest matematycznie najdoskonalszym z 44-ścianów, jaki udało się nam stworzyć, w związku czym postanowiliśmy go zadedykować Twórcy Ligi.

W25 nazwaliśmy 44-ścianem π , a został stworzony z myślą o informatykach. Zadaliśmy sobie pytanie, czy w 44-ścianie można zakodować rozwinięcie liczby π . Wybór padł nie na system binarny, lecz czwórkowy (dla piszącego te słowa najbardziej naturalny, bo przez pół życia wpatrywał się w ciągi liter A, C, G, T). Czwórka pasuje też do obchodzonej rocznicy. Skonstruowaliśmy więc wielościan, w którym istnieje ścieżka przejścia przez kolejne, sąsiadujące ściany, pozwalająca odczytać początkowe 44 cyfry czwórkowego zapisu liczby π (oeis.org/A004603) – wystarczy od liczby boków kolejnych ścian odejmować 3. Strukturę wielościanu opracowaliśmy heurystycznie, lecz przejście od wariantu sferycznego do bryły o płaskich ścianach było karkołomne i nie obeszło się bez pomocy AI. W26 poświęcamy astronomom. Inspiracją były obrazy galaktyk, zwłaszcza spiralnych z poprzeczką. Funkcję tej ostatniej spełnia w 44-ścianie niezastąpiony J84, podczas gdy galaktyczne ramiona zbudowane są z ostrosłupów i ostrosłupów ściętych.

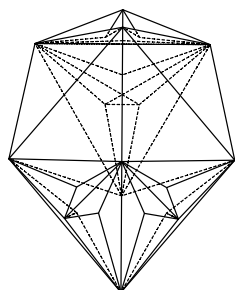
Wielościany toroidalne. W27 jest najprostszy – to 11 ściętych ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, sklejonych bocznymi ścianami. Efektowniejszy jest W28 – powstaje, gdy $\text{antg}(11)$ „wydrążymy” z obu stron, używając powierzchni bocznych dwóch ostr(11). Wśród ścian pojawiają się pięciokąty wklęsłe. Niezłym ćwiczeniem wyobraźni może być rozbijanie bryły na jednakowe segmenty. W29 to kombinacja czterech F12. Sklejone ścianami po dwa stworzyły „bałwanki”, które następnie zsunięto tak, by się częściowo przenikały. W30 jest odpowiedzią na pytanie: czy sklejając 11 jednakowych czworoscianów, można otrzymać 44-ścienny torus. Nam udało się to dla czworoscianów równościennych (o których można przeczytać np. w Δ_{12}^4 i Δ_{12}^{10}), nie wiemy, czy jest to możliwe dla ostrosłupów prawidłowych trójkątnych. W31 ma brata bliźniaka, z którym po rodzicach, sześćo-ośmiościanach przyciętych, dziedziczy ich szczególną cechę – chiralność. Powstał, gdy jedną z lustrzanych form rodzicielskich przebito tunelem o strukturze $\text{antg}(4)$.

Topologiczne precle. W32 ma genus (czyli „liczbę otworów/tuneli”) równy 2. Powstaje ze sklejenia, za pośrednictwem F6, dwóch torusów, z których każdy jest zlepkiem siedmiu klinów o kwadratowej podstawie. 20 jednakowych ostrosłupów ściętych o podstawie trójkąta, o odpowiednio dobranych kątach dwuściennych, można skleić ścianami bocznymi tak, by utworzyły F20, mający wewnątrz pustą przestrzeń w kształcie F20. Usunięcie czterech ostrosłupów, leżących w symetrii wierzchołków F4, dało 44-ścian W33, który wydaje się go w wyobraźni tak, by ścianki jednego z otworów stały się wąską trójkątną ramką, zauważy, że powstający izomorficzny z nim W34 ma w rzeczywistości

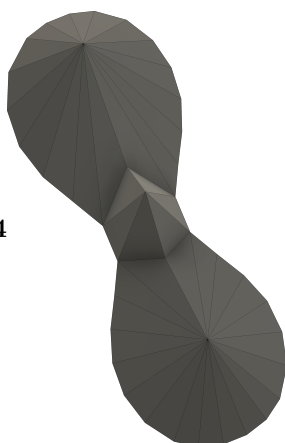
W42



W43



W44



genus 3. W35 jest dwudziestościanem ściętym, przebitym trzema, parami prostopadłymi i przenikającymi się częściowo, pięciokątnymi tunelami, z których każdy daje 6 ścian, w tym dwie współpłaszczyznowe. W36 to F20 przebity dwoma parami równoległych tuneli łączących pięciokąty powstałe po ścięciu ośmiu z jego 12 wierzchołków. Tunele wzajemnie przecinają (lub tylko nacinają) niektóre ze swoich ścian. Wyznaczenie genusu W35 i W36 to zagadka, której rozwiązanie Czytelnik znajdzie na stronie 8. W37 to precel-monstrum o 99 tunelach, złożony z 20 identycznych, przenikających się ostrosłupów. Ma 44 ściany, 720 krawędzi i 480 wierzchołków, co jest zgodne z uogólnionym wzorem Eulera $W + S = K + 2 - 2T$. Czy istnieje 44-ścian o większej liczbie otworów?

44-ścienne fantazje. W38 to fragment kombinacji F4 i jego obrazów, będących wynikiem obrotów o 60° wokół każdej z wysokości. Ścinając wierzchołki, otrzymujemy gwiazdy. W39, pokazany w formie szklanego bloku widzianego od spodu, jest ściętym F4 z jedną ze ścian wydrążoną w sposób inspirowany płatkami Kocha. W40 jest odpowiedzią na pytanie, czy istnieje 44-ścian z 44-kątną ścianą (oczywiście nie istnieje taki wielościan wypukły). W naszej konstrukcji pojawiają się ściany sąsiadujące wzdłuż dwóch, a nie jednego odcinka. Ktoś może spytać: czy to legalne? Na szczęście, jak wiadomo, nie istnieje jedna obowiązująca definicja wielościanu. Uspakajające jest też to, że W40 spełnia wzór Eulera. W41 powstał z dwunastościanu rombowego, do którego 11 ścian doklejono ostrosłupy, a w dwunastej, dzięki przedłużeniu ścian sąsiadujących ostrosłupów, powstało zagłębienie. Kształtem przypomina nieco jeżowca, którego jednak charakteryzuje symetria pięciopromienna. W42 jest ostrosłupem ściętym o podstawach złożonych z 14-kątów foremnych z siedmioma doklejonymi sześciokątami. Przywołuje na myśl średniowieczną basztę lub wieżę szachową. W43 to J84, na którego 4 peryferyczne ściany nałożono wypukłe trójkątne gwiazdy. Ostatni prezentowany wielościan, W44, jest odpowiedzią na pytanie, czy 44-ścian może mieć 44 przekątne. Jego podstawą jest wielokąt o wierzchołkach leżących na lemniskacie (owalu Cassiniego) o nieprzypadkowo dobranym parametrze $e = 1,044$. By uzyskać żadaną liczbę przekątnych, pozbawiliśmy go symetrii. Może ktoś z Czytelników udowodni, że 44-ścian z 44 przekątnymi nie może być wypukły? A może komuś uda się, nie tracąc wypukłości bryły, uzyskać liczbę przekątnych P taką, że $|44 - P| < 5$? Z tymi pytaniami pozostawiamy Czytelników, mając nadzieję, że podróż przez krainę 44-ścianów dała im równie wiele przyjemności, co nam ich konstruowanie.

Liczby Kaprekara

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

D. R. Kaprekar formalnie nie miał
żadnego wyższego wykształcenia
matematycznego, mimo to opublikował
bardzo dużo artykułów naukowych
i popularnonaukowych.

W 1980 roku indyjski matematyk-amator Dattathreya Ramachandra Kaprekar opisał pewien szczególny typ liczb naturalnych posiadających zaskakującą własność. Przedstawimy ją na przykładzie liczby 297. Rozważmy kwadrat tej liczby i przyjrzyjmy się jego cyfrom:

$$297^2 = 88209, \quad 88 + 209 = 297.$$

Zapis dziesiętny tego kwadratu został podzielony na dwa bloki złożone z dwóch lub trzech cyfr o tej własności, że suma bloków daje wyjściową liczbę. Taka własność i jej odpowiedniki pozwalają na zdefiniowanie liczby Kaprekara, a ściślej liczby n -Kapkara. Jest to każda liczba całkowita dodatnia N , dla której

$$N^2 = Q \cdot 10^n + R, \quad N = Q + R,$$

gdzie $Q \geq 1$ i $0 \leq R < 10^n$ są liczbami naturalnymi. Ponadto mówimy, że N jest liczbą Kaprekara, gdy jest liczbą n -Kapkara dla pewnego n . Poniżej prezentujemy inne liczby Kaprekara.

$9^2 = 81$	$8 + 1 = 9$	$n = 1$
$45^2 = 2025$	$20 + 25 = 45$	$n = 2$
$297^2 = 88209$	$88 + 209 = 297$	$n = 3$
$4879^2 = 23804641$	$238 + 4641 = 4879$	$n = 5$
$538461^2 = 289940248521$	$289940 + 248521 = 538461$	$n = 6$

Przyjmuje się ponadto, że $N = 1$ jest
liczbą n -Kapkara dla dowolnego n .
Przypadek ten, odpowiadający $Q = 0$,
 $R = 1$, nazywa się trywialnym.

Czwarty z podanych wyżej przykładów jednocześnie pokazuje, że może zdarzyć się, że R ma mniej niż n cyfr (pierwsza cyfra bloku to 0, którą w naturalny sposób pomijamy w zapisie).

Trywialnym przykładem liczby n -Kaprekara jest 10^n ; trochę bardziej ciekawym zaś $10^n - 1$. Istotnie,

$$(10^n - 1)^2 = \underbrace{9 \dots 9}_{\times n}^2 = \underbrace{9 \dots 9}_{\times (n-1)} \underbrace{8}_{\times (n-1)} \underbrace{0 \dots 0}_{\times (n-1)} 1,$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{\times (n-1)} 8 + 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{\times n}.$$

Opisany powyżej przykład stanowi przyczynek do sformułowania pierwszego wyniku teoretycznego, opisującego jedną z podstawowych własności – licznosci zbioru liczb Kaprekara.

Twierdzenie 1. *Istnieje nieskończenie wiele liczb Kaprekara.*

W dalszej części przyjrzymy się problemowi konstrukcji liczb Kaprekara. Niech $K(M)$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych N takich, że

$$(1) \quad N^2 = QM + R,$$

$$(2) \quad N = Q + R,$$

przy czym $0 \leq R < M$. Ponadto będziemy pomijać przypadki trywialne $N = M$, dla których $Q = M$ i $R = 0$, czyli przyjmujemy, że $M \notin K(M)$. Aby nie rozważać bardzo prostych przypadków, zakładamy też, że $M > 2$.

Przypadek $M = 10^n$ opisuje zbiór liczb n -Kaprekara.

Jeśli $M = 1$ lub $M = 2$, to przyjmujemy, że $K(M) = \{1\}$.

Zauważmy prostą własność zdefiniowanych przed chwilą zbiorów $K(M)$.

Twierdzenie 2. *Zbiór $K(M)$ jest niepusty.*

Dowód. Oczywiście, gdyż $1 \in K(M)$. Można ponadto zauważyć, że również $M - 1 \in K(M)$, wystarczy przyjąć $Q = M - 2$ oraz $R = 1$. $\square$

Zauważmy następnie, że warunki (1) i (2) dają $N(N - 1) = Q(M - 1)$, a stąd wnioskujemy $1 \leq N \leq M - 1$. Istotnie, gdyby $N > M$, to $Q > N$, co przeczy (2). Tym samym udowodniliśmy kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Zbiór $K(M)$ jest skończony, co najmniej dwuelementowy i zawarty w zbiorze $\{1, 2, \dots, M - 1\}$.*

W kolejnej części naszych rozważań wprowadzimy pojęcie dzielnika unitarnego. Powiemy, że liczba a jest *dzielnikiem unitarnym* N , jeśli $N = ab$ oraz a i b są liczbami względnie pierwszymi.

Niech a i b będą liczbami względnie pierwszymi. Oznaczmy przez $\text{Inv}(a, b)$ najmniejszą dodatnią liczbę naturalną m taką, że $am \equiv 1 \pmod{b}$.

Mówimy, że dwie liczby całkowite x i y przystają modulo z , jeśli $x - y$ jest podzielne przez z . Fakt ten zapisujemy jako $x \equiv y \pmod{z}$.

Innymi słowy, $m = \text{Inv}(a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leq m < b$ i $am \equiv 1 \pmod{b}$. Funkcja $\text{Inv}(a, b)$ nie jest symetryczna, to jest na ogół $\text{Inv}(a, b) \neq \text{Inv}(b, a)$. Niemniej zachodzi ciekawy związek między dwiema ostatnimi liczbami.

Fakt 1. Jeśli a i b są względnie pierwsze, to $m = \text{Inv}(a, b)$ oraz $n = \text{Inv}(b, a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy m i n są dodatnie oraz $am + bn = ab + 1$.

Dowód. Równość $am + bn = ab + 1$ można przekształcić do postaci $am - 1 = b(a - n)$, a więc $am \equiv 1 \pmod{b}$. Gdyby $m \geq b$, to $am + bn \geq ab + bn > ab + 1$, sprzeczność, a więc $m = \text{Inv}(a, b)$. Podobnie dowodzimy, że $n = \text{Inv}(b, a)$.

Założmy teraz, że $m = \text{Inv}(a, b)$ oraz $n = \text{Inv}(b, a)$, a więc $am \equiv 1 \pmod{b}$ oraz $bn \equiv 1 \pmod{a}$. Korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach, otrzymujemy teraz, że $am + bn \equiv 1 \pmod{ab}$, czyli $am + bn = 1 + k \cdot ab$ dla pewnej liczby całkowitej k . Wszystkie liczby a, b, m i n są dodatnie, zatem k też jest liczbą dodatnią. Ponieważ $1 \leq m < b$ oraz $1 \leq n < a$,

$$1 + k \cdot ab = am + bn < ab + ba = 2ab.$$

Ponieważ wszystkie rozważane liczby są naturalne, powyższa nierówność może być prawdziwa tylko dla $k = 1$. Ostatecznie więc otrzymaliśmy, że $am + bn = 1 + ab$. Kończy to dowód faktu 1. $\square$

Sformułujemy teraz praktyczne twierdzenie pozwalające wyznaczać liczby Kaprekara.

Twierdzenie 4. Liczba N jest elementem zbioru $K(M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N = d \cdot \text{Inv}(d, (M - 1)/d)$, gdzie d jest pewnym dzielnikiem unitarnym liczby $M - 1$. Ponadto dla każdego $N \in K(M)$ liczba $M - N$ również jest elementem $K(M)$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Wiemy już, że $N(N - 1) = Q(M - 1)$. Ponieważ $\text{NWD}(N, N - 1) = 1$, istnieją względnie pierwsze liczby d i e i takie, że $M - 1 = de$ oraz:

- $d|N$, i tym samym $N = du$ dla pewnego u oraz (na mocy twierdzenia 3) $du = N \leq M - 1 = de$, to jest $u \leq e$,
- $e|(N - 1)$, co daje istnienie v takiego, że $ev + 1 = N$, czyli $du \equiv 1 \pmod{e}$ i w szczególności $u \neq e$.

Stąd $u < e$ i możemy zatem zapisać $u = \text{Inv}(d, e)$.

Ponieważ $e = (M - 1)/d$, liczba N ma żadaną postać.

($\Leftarrow$) Liczba $e = (M - 1)/d$ jest całkowita.

Ponadto z definicji dzielnika unitarnego wynika, że $\text{NWD}(e, d) = 1$. Oznaczmy dalej $u = \text{Inv}(d, e)$.

Z definicji $u < e$ oraz istnieje taka liczba naturalna k , że $du = ke + 1$. Ponieważ $N = du$, więc

$$N^2 = dudu = du(ke + 1) = kued + du$$

$$= ku(M - 1) + du = kuM + (d - k)u.$$

Definiujemy $Q = ku$ oraz $R = (d - k)u$. Wówczas $Q + R = N$ oraz:

- $du = ke + 1 > ku + 1 > ku$, stąd $d > k$ i $R > 0$,
- $(d - k)u < (d - k)e = de - ke = M - 1 - ke < M$, stąd $R < M$.

Widzimy zatem, że N jest elementem zbioru $K(M)$.

Pozostała część twierdzenia wynika z faktu 1:

jeśli bowiem $N \in K(M)$, to $N = d \cdot \text{Inv}(d, (M - 1)/d)$

i oznaczając $e = (M - 1)/d$, $u = \text{Inv}(d, e)$ oraz $u' = \text{Inv}(e, d)$, mamy równość $du + eu' = de + 1 = M$,

czyli $eu' = M - N$ i liczba $M - N$ jest postaci jak w poprzedniej części dowodzonego właśnie twierdzenia. $\square$

Dla zilustrowania twierdzenia 4 wybierzmy $M = 10^n$ i $n = 3$ (a więc szukamy liczb 3-Kaprekara). Wtedy $10^3 - 1 = 27 \cdot 37$ i liczby 27 oraz 37 są względnie pierwsze, zatem są dzielnikami unitarnymi $10^3 - 1$. Sprawdzamy następnie, że

$$\text{Inv}(27, 37) = 11, \quad \text{Inv}(37, 27) = 19.$$

Dlatego na mocy twierdzenia 4 liczby $27 \cdot 11 = 297$ oraz $37 \cdot 19 = 703$ są (jedyne) prócz trywialnych 1 i $10^3 - 1$ liczbami 3-Kaprekara. Ponadto $297 + 703 = 1000$, zgodnie z przewidywaniami drugiej części twierdzenia 4.

Zauważmy, że jeśli w twierdzeniu 4 przyjmujemy $M = b^n$ dla pewnej liczby naturalnej b , otrzymujemy liczby Kaprekara w systemie pozycyjnym o podstawie b . Przypadek $b = 2$ jest ponadto interesujący z następującego powodu.

Twierdzenie 5. Każda parzysta liczba doskonała jest liczbą Kaprekara w dwójkowym systemie pozycyjnym.

Liczba doskonała to liczba naturalna n , której suma dzielników jest równa $2n$. Na przykład 28 jest liczbą doskonałą, gdyż $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$.

Dowód. Wiadomo, że każda parzysta liczba doskonała jest postaci $2^{n-1}(2^n - 1)$ dla pewnego n takiego, że $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą. Ustalmy $n \geq 1$. Liczby $2^n - 1$ oraz $2^n + 1$ są względnie pierwsze oraz

$$2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 1 \pmod{2^n + 1}, \quad 0 < 2^{n-1} < 2^n + 1.$$

Stąd $2^{n-1} = \text{Inv}(2^n - 1, 2^n + 1)$, a więc z twierdzenia 4 liczba $2^{n-1}(2^n - 1)$ jest elementem zbioru $K(2^{2n})$.

Dowód twierdzenia jest więc zakończony.

Zilustrujmy twierdzenie 5 prostym przykładem.

Liczba 28 jest doskonała (zobacz uwagę po twierdzeniu 5) oraz $28 = (11100)_2$. Ponadto (działania rozważamy w systemie dwójkowym)

$$11100^2 = 1100010000, \quad 1100 + 010000 = 11100,$$

czyli $(111000)_2$ jest liczbą 6-Kaprekara.

Ostatnie twierdzenie pozwoli nam na obliczenie, ile dokładnie jest elementów zbioru $K(M)$, ale będziemy potrzebowali jeszcze jednego lematu. Niech $\omega(m)$ oznacza liczbę dzielników pierwszych liczby m .

Lemat 1. Liczba m posiada dokładnie $2^{\omega(m)}$ dzielników unitarnych.

Dowód. Niech $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ (a więc $\omega(m) = k$) oraz niech a będzie dzielnikiem unitarnym i niech $m = ab$. Jeśli $p_i | a$, to musi być $p_i^{a_i} | a$, gdyż w przeciwnym wypadku $p_i | b$. Tym samym wybór a polega na wybraniu pewnych dzielników pierwszych m z najwyższymi potęgami. Takich wyborów jest z kolei 2^k . $\square$

Lemat 1 oraz twierdzenie 4 pozwalają już stwierdzić, ile jest liczb w zbiorze $K(M)$.

Twierdzenie 6. Zbiór $K(M)$ posiada dokładnie $2^{\omega(M-1)}$ elementów.

Polecamy Czytelnikowi zweryfikowanie słuszności tego twierdzenia dla analizowanego wcześniej przykładu liczb 3-Kaprekara.



Zadania

×					
	×				
		×			
			×		
				×	
					×

Przygotował Dominik BUREK

M 1828. Dany jest taki wielomian o współczynnikach rzeczywistych, że $P(x) + P(-x)$ ma dokładnie 2025 różnych pierwiastków rzeczywistych. Znajdź wyraz wolny wielomianu P .

M 1829. Liczbę naturalną nazwijmy *dobrą*, jeśli jest postaci $n^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej n . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb dobrych k , które nie posiadają dzielnika dobrego, różnego od 1 i k .

M 1830. W tablicy $n \times n$ ($n > 1$) zaznaczono $n + 2$ kwadratów jednostkowych. Czy zawsze możemy tak przestawić wiersze i kolumny, aby wszystkie zaznaczone pola znajdowały się nad główną przekątną lub na niej? (Przyjmujemy, że kwadratowa tabela ma jedną główną przekątną, jak na rysunku).

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1127. Początkiem astronomicznej wiosny jest dzień równonocy wiosennej, a astronomicznej jesieni – równonocy jesiennej. Są to dni, w których Słońce świeci prostopadle do osi ziemskiej. W tym roku (2025) wiosna rozpoczęła się 20 marca i także 20 marca rozpocznie się w roku przyszłym. Jesień rozpocznie się 22 września. Jak łatwo obliczyć, wiosna i lato potrwają łącznie 186 dni, a jesień i zima będą w sumie o tydzień krótsze i potrwają 179 dni. Skąd bierze się ta różnica?

F 1128. W dniach równonocy wiosennej (20 marca) i jesiennej (22 września), co łatwo sprawdzić w kalendarzu podającym godziny wschodu i zachodu Słońca, dzień trwa kilka minut dłużej niż następująca po nim noc, a rzeczywiste zrównanie czasu trwania dnia i nocy następuje około 3 dni przed dniem równonocy wiosennej i około 3 dni po równonocy jesiennej. Co jest przyczyną tego zjawiska?

Rozwiązania na str. 24



Słynna anegdota z XIX wieku mówi, że królowa Wiktoria była tak zachwycona powieścią *Alicja w Krainie Czarów*, że po lekturze natychmiast poprosiła o przesłanie jej pozostałych dzieł Lewisa Carrolla. Wkrótce w ręce monarchini trafiła matematyczna pozycja *An Elementary Theory of Determinants* niejakiego Charlesa Dodgsona – gdyż tak brzmi prawdziwe nazwisko autora przygód Alicji. W jednym z dodatków do podręcznika znajduje się opis metody obliczania wyznaczników, znanej obecnie jako *kondensacja Dodgsona*. Oczywiście nas, matematyków, od reakcji królowej dużo bardziej interesuje, na czym polega wspomniana metoda?

‘Why,’ said the Dodo, ‘the best way to explain it is to do it.’ – cytat z *Alicji w Krainie Czarów* w przekładzie Antoniego Marianowicza.

– Hm – rzekł Gołąb z powagą – najlepiej wytłumaczę ci to praktycznie.

Aby wykonać kondensację Dodgsona, wystarczy umieć liczyć wyznaczniki macierzy 2×2 . Oczywiście wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Rozważmy następującą macierz:

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Przyjmijmy, że *wewnątrz* M_4 jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, która powstała przez usunięcie pierwszego i ostatniego wiersza oraz pierwszej i ostatniej kolumny.

Następnie dla macierzy M_4 obliczamy wyznaczniki każdej podmacierzy 2×2 złożonej z elementów *sąsiednich* wierszy i kolumn i tworzymy z nich macierz M_3 (3×3), układając je w kolejności indukowanej przez macierz M_4 . Mamy zatem

$$M_3 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 5 & 12 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak wyżej, określamy wnętrza macierzy M_3 , czyli macierz $W_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$.

Na podstawie macierzy M_3 tworzymy analogicznie macierz M_2 , ale tym razem oprócz obliczania wyznaczników wykonujemy również dzielenie ich przez odpowiadające im elementy macierzy W_2 :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -14 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} / 1 & \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} / 2 \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} / 1 & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} / 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

W ostatnim kroku obliczamy macierz M_1 , która składa się wyłącznie z wyznacznika macierzy M_2 podzielonego przez jedyny element macierzy W_1 :

$$M_1 = \left[\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} / (-1) \right] = [8].$$

Liczba 8 (jedyny element macierzy M_1) jest szukanym wyznacznikiem macierzy M_4 .

Jak można wywnioskować z przedstawionego przykładu, pojedynczy krok kondensacji Dodgsona polega na otrzymywaniu macierzy o jeden wymiar mniejszej poprzez obliczenie odpowiednich wyznaczników 2×2 i dzieleniu ich przez odpowiednie elementy wnętrza mającego ten sam wymiar (o ile takie wnętrza zostało wyznaczone, czyli dzielenia zaczynamy wykonywać

dopiero w drugim kroku). Kiedy już otrzymamy macierz 1×1 , jej jedyny wyraz to wyznacznik wyjściowej macierzy.

Metoda jest zatem relatywnie prosta – sprowadza się do redukcji wymiaru macierzy poprzez obliczanie wyznaczników 2×2 . Dlaczego zatem nie jest ona powszechnie omawiana na podstawowym kursie algebry liniowej? Czytelnik Wnikliwy na pewno dostrzegł już jej *fatalną wadę*, którą jest wielokrotne *dzielenie*. Za każdym razem dzielnik (element odpowiedniej macierzy) musi być różny od 0. Wynika stąd, że nie dla każdej macierzy da się wykonać kondensację Dodgsona (przykładowo macierz 3×3 podlega kondensacji tylko wtedy, gdy jej środkowy element jest niezerowy).

Czytelnikowi Ambitnemu polecamy sprawdzenie, że koszt obliczeniowy metody Dodgsona to $O(n^3)$ (n jest wymiarem macierzy), jak również to, że jeśli wystartujemy od macierzy o wyrazach całkowitych, to wszystkie uzyskiwane po drodze macierze również będą miały (pomimo występującego dzielenia) wyrazy całkowite.

Wedle relacji samego Dodgsona urocza anegdota o królowej Wiktorii nie jest prawdziwa. Pisarz-matematyk, żyjący w epoce Marka Twaina, najwyraźniej zignorował przestrożę kolegi po literackim fachu: *Never let the truth get in the way of a good story*.



Bardzo długi antytaniec

Żyjemy w świecie materialnym. Z punktu widzenia fizyki cząstek elementarnych otaczająca nas materia jest stosunkowo uboga. Jądra atomowe zbudowane są z protonów i neutronów, te zaś mają po trzy kwarki walencyjne należące do typów górnego i dolnego. Wokół jądra znajdują się elektrony. I tylko od czasu do czasu w reakcjach jądrowych lub w oddziaływaniach zapoczątkowanych przez promieniowanie kosmiczne możemy spotkać się z cząstkami spoza pierwszej generacji cząstek Modelu Standardowego lub nawet z antymaterią. Spotkanie to ma zazwyczaj charakter ulotny: cząstki cięższe rozpadają się na lżejsze cząstki pierwszej generacji, zaś antycząstki, spotykając cząstki, anihilują i zostaje po nich tylko promieniowanie.

O innym eksperymencie przeprowadzonym w CERNie badającym własności antymaterii pisaliśmy w aktualnościach w Δ_{24}^6 . W tamtym doświadczeniu badano, czy antymateria oddziałuje z polem grawitacyjnym tak samo jak zwykła materia.

Co innego myśli większość fizyków doświadczalnych, którzy nieufnie podchodzą do prawd objawionych przez teorię i uparcie chcą sprawdzać rzeczy dla teoretyków oczywiste. Na przykład to, że w znakomitej większości sytuacji antymateria zachowuje się dokładnie tak samo jak materia, nawet wówczas, gdy zachowanie to jest opisywane mechaniką kwantową. Ta różnica perspektyw bywa nawet zabawna przez swą wyrazistość, o czym miałem możliwość przekonać się podczas niedawnej wizyty w CERN-ie.

To właśnie tam prowadzony jest eksperyment BASE (ang. *Baryon Antibaryon Symmetry Experiment*), którego głównym celem jest porównanie właściwości antyprotonów i protonów z najwyższą możliwą precyzją. Pozwala to sprawdzić podstawy naszego rozumienia fizyki cząstek, tzn. czy jej właściwym opisem jest lokalna i przyczynowa kwantowa teoria pola. Ujawnienie różnic między antyprotonami i protonami oznaczałoby, że sam język, w którym wyrażamy nasze myśli i oczekiwania względem cząstek, jest wadliwy.

Protonów wokół nas jest dużo, ale skąd wziąć antyprotony? Wytwarzane są one w zderzeniach w akceleratorze, a następnie spowalniane i dostarczane do laboratorium BASE. Antyprotony przechowuje się w specjalnych pułapkach elektromagnetycznych Penninga, które są w stanie utrzymywać naładowane cząstki przez długi okres w niemal doskonałym odosobnieniu.

Zarówno proton, jak i antyproton mają moment magnetyczny, co oznacza, że oddziałują z zewnętrznym polem magnetycznym. Moment ten jest związany ze spinem cząstki i, tak jak spin, jest skwantowany – jeśliby sobie wyobrazić cząstkę jako malutki magnesik, to może on być ustawiony wzdłuż ustalonego kierunku tylko na dwa sposoby, różniące się obrotem o 180° . Jeśli taka cząstka znajdzie się w polu magnetycznym zmieniającym się z odpowiednio

dostrojoną częstotliwością, jej moment magnetyczny będzie „przeskakiwał” między takimi dwoma stanami w rytmie wymuszonym przez zewnętrzne pole.

W przeprowadzonym eksperymencie ten swoisty taniec trwał rekordowo długo, bo aż 50 sekund, i potwierdził, że moment magnetyczny antyprotonu nie różni się od momentu magnetycznego protonu.

Główną autorką tych badań, opublikowanych w czasopiśmie *Nature*, jest Barbara Latacz, fizyczka pracująca w CERN-ie i absolwentka Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego – oraz dawna studentka piszącego te słowa.

Są to badania podstawowe: mają one na celu pomóc nam zrozumieć, jak działa świat. Jednak zgodnie z panującą dziś modą, żądającą, by naukę robić „po coś”, komunikat prasowy CERN-u opisujący te wyniki bardzo stara się znaleźć dla nich jakieś daleko idące zastosowania. Wprawdzie przyznaje szczerze, że taki antykubit nie posłuży do budowy antykomputera kwantowego, posuwa się jednak do stwierdzenia, że symetria zamiany cząstek na antycząstki (i odwrotnie) połączona z odwróceniem czasu stoi w sprzeczności z obserwacją nadwyżki materii nad antymaterią. Nie jest to prawdą: aby wytworzyć obserwowaną różnicę, cząstki i antycząstki muszą się nieco różnić swoimi oddziaływaniami, gdy czas płynie tak samo dla jednych i dla drugich, co zauważył już Andrei Sakharov niemal 60 lat temu.

Ciekawie byłoby rozwikłać taką zagadkę Wszechświata. Czy jednak sama możliwość uzyskania wyniku doświadczalnego, który może wymusić kompletną zmianę sposobu, w jaki uprawiamy teorię, nie jest wystarczająco atrakcyjnym celem badawczym?

Krzysztof TURZYŃSKI

B. M. Latacz *et al.*, „Coherent spectroscopy with a single antiproton spin”, *Nature* **644**, 64–68 (2025). doi.org/10.1038/s41586-025-09323-1

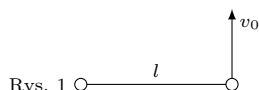
Klub 44 F



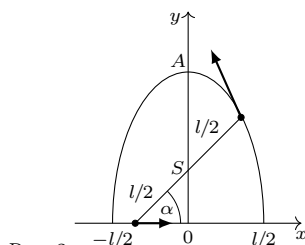
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
792 ($WT = 3,23$), 793 ($WT = 2,07$)
z numeru 2/2025

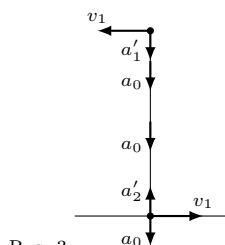
Jacek Konieczny	Poznań	41,11
Jan Zambrzycki	Białystok	4-34,42
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3-29,48
Paweł Kubit	Kraków	17,21
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6-15,13
Tomasz Wietecha	Tarnów	18-13,15
Krzysztof Zygan	Lubin	13,02



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Gdy górna kulka wznosi się, jej prędkość maleje. Siła ciężkości odgrywa coraz większą rolę w zakrzywianiu jej toru, co powoduje zmniejszanie siły napięcia nici. Aby znaleźć najmniejsze napięcie, musimy rozważyć sytuację w najwyższym punkcie toru.

Zasada zachowania energii pozwala obliczyć wartość prędkości v_1 w punkcie A, jednakową dla obu kulek:

$$(2) \quad mv_0^2/2 = 2mv_1^2/2 + mgl, \text{ stąd } v_1^2 = v_0^2/2 - gl.$$

Oznaczmy przyspieszenie środka masy układu w chwili, gdy górna kulka znajduje się w punkcie A przez a_0 , przyspieszenia dośrodkowe kulek przez a'_1 i a'_2 (rys. 3), a ich przyspieszenia całkowite przez a_1 i a_2 . Spełnione są równania:

$$a_1' = a_2' = v_1^2/(l/2),$$

$$a_2 = a_2' - a_0 = 0, \text{ stąd } a_0 = 2v_1^2/l,$$

$$a_1 = a_1' + a_0 = 4v_1^2/l.$$

Minimalne napięcie nici N znajdziemy z równania ruchu górnej kulki oraz równania (2):

$$N + mg = 4mv_1^2/l \implies N = 2mv_0^2/l - 5mg.$$

Nić będzie cały czas napięta podczas ruchu, gdy $N > 0$, stąd $v_0^2 > 5gl/2$.

Dolna kulka nie oderwie się od podłoża, gdy $N < mg$, stąd $v_0^2 < 3gl$.

Górna kulka zakreśli połowę elipsy i uderzy o podłoże. Jeśli zderzenie będzie sprężyste, to zakreśli ten sam tor w przeciwnym kierunku.

Zadania z fizyki nr 802, 803

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

802. Podróżny stał obok początku wagonu z numerem porządkowym k . Pociąg ruszył z miejsca, po czym okazało się, że wagon o numerze m mijają pasażera przez t sekund. Ile czasu przejeżdżał obok tego pasażera wagon o numerze n ? Pociąg poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym, długości wagonów są jednakowe, odległości między wagonami zanedbywalne. Podróżny nie poruszał się względem peronu.

803. Dwie metalowe kule o promieniach R znajdują się w bardzo dużej odległości od siebie i połączone są cienkim przewodnikiem, w którego rozcięcie włączona jest cewka o współczynniku samoindukcji L . W chwili początkowej jedna z tych kul naładowana jest ładunkiem Q , druga nienaładowana. Po jakim czasie ładunek kuli naładowanej zmaleje dwukrotnie?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2025

Przypominamy treść zadań:

798. Dwie bardzo małe jednakowe kulki związane nieważką, nierozciągliwą nicią leżą na powierzchni poziomej (rys. 1). Jednej z kulek nadano prędkość v_0 skierowaną pionowo w górę. Jaka powinna być wartość tej prędkości, aby druga kulka nie oderwała się od poziomej powierzchni, a nić przez cały czas była naciągnięta? Po jakim torze porusza się wtedy pierwsza kulka? Tarcie kulki o podłoże jest zanedbywalne.

799. Elektron krąży po orbicie kołowej w jednorodnym polu magnetycznym. Indukcja pola magnetycznego zostaje powoli zwiększona trzy razy, w czasie wielokrotnie przewyższającym okres obrotu. Ile razy zmieni się w tym czasie promień orbity elektronu?

798. Ponieważ nie ma tarcia, a prędkość nadana jednej z kulek jest pionowa, środek masy układu porusza się w kierunku pionowym. Obie kulki uczestniczą w ruchu złożonym – ruch po okręgu o promieniu $l/2$ wokół środka nici nakłada się na ruch tego środka wzdłuż linii pionowej. Wybierzmy układ współrzędnych jak na rysunku 2. Dolna kulka porusza się wzdłuż osi x , jej prędkość w każdej chwili jest równa co do wartości składowej poziomej prędkości górnej kulki i przeciwnie skierowana. Współrzędne x i y górnej kulki możemy wyrazić przez kąt α :

$$(1) \quad x = l \cos \alpha/2, \quad y = l \sin \alpha.$$

Eliminując α z równań (1), otrzymujemy równanie elipsy o półosiach $l/2$ i l :

$$x^2/(l/2)^2 + y^2/l^2 = 1.$$

799. Siła Lorentza nadaje elektronowi przyspieszenie dośrodkowe. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$(1) \quad mv^2/R = evB,$$

gdzie m jest masą, a e wartością bezwzględną ładunku elektronu. Zmiana pola magnetycznego powoduje pojawienie się wirowego pola elektrycznego E . Zgodnie z prawem Maxwella natężenie E tego pola dla krótkiego czasu Δt spełnia równanie

$$2\pi RE = \Delta\Phi_B/\Delta t = \pi R^2 \Delta B/\Delta t,$$

stąd

$$(2) \quad E = R\Delta B/(2\Delta t).$$

Siła elektryczna przyspiesza elektron, zmienia się jego prędkość i promień orbity, ale zależność (1) nadal jest spełniona.

Praca siły elektrycznej w krótkim czasie Δt zmienia energię kinetyczną elektronu:

$$eEv\Delta t = \Delta(mv^2/2) \approx mv\Delta v,$$

$$(3) \quad \Delta v \approx eR\Delta B/(2m).$$

Z drugiej strony, z równania (1), mamy:

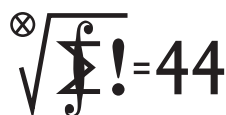
$$(4) \quad \Delta v \approx e(R\Delta B + B\Delta R)/m.$$

Z porównania (3) i (4):

$$\Delta(BR^2) = R^2\Delta B + 2BR\Delta R = R(R\Delta B + 2B\Delta R) = 0.$$

Oznacza to, że przy zmianie pola magnetycznego wielkość BR^2 zachowuje się. Trzykrotny wzrost pola magnetycznego powoduje, że promień orbity maleje $\sqrt{3}$ razy.

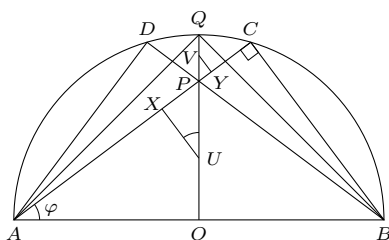
Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
895 ($WT = 1,73$) i 896 ($WT = 1,65$)
z numeru 2/2025

Michał Warmuz	Żywiec	44,77
Marek Spychała	Warszawa	43,22
Marcin Kasperski	Warszawa	42,22
Piotr Wiśniewski	Warszawa	41,62
Grzegorz Wiączkowski		41,31
Andrzej Daniluk	Warszawa	39,54
Krzysztof Maziarz	London	38,05
Krzysztof Kamiński	Pabianice	36,87
Jerzy Cisło	Wrocław	36,37
Marian Łupieżowicz	Gliwice	35,53
Roksana Słowik		31,78

Pan Michał Warmuz: nowa twarz
w Klubie 44 M – pierwsza od przeszło
roku. Witamy!



902. Liczba $w(n)$ to także największy wykładnik, dla którego $n!$ dzieli się przez $5^{w(n)}$ (bo w rozkładzie $n!$ jest więcej dwójek niż piątek); w standardowych symbolach: $w(n) = v_5(n!)$.

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Określamy rozłączne zbiory $A_0, A_1, \dots, A_m$, zawarte w $\{1, 2, \dots, 5^m\}$:

(1) $A_j = \{k \cdot 5^j : 1 \leq k \leq 5^{m-j}; k \not\equiv 5 \pmod{5}\}$ dla $j = 0, 1, \dots, m$.

Dla $j < m$ liczność zbioru A_j wynosi tyle, ile jest liczb $k \leq 5^{m-j}$ niepodzielnych przez 5; czyli

(2) $|A_j| = 4 \cdot 5^{m-j-1}$ dla $j < m$.

Łączna liczność zbiorów $A_0, \dots, A_{m-1}$ z dołączonym zbiorem jednoelementowym $A_m = \{1 \cdot 5^m\}$ wynosi $4 \sum_{j=0}^{m-1} 5^{m-j-1} + 1 = 5^m$. Ich elementy nie przekraczają 5^m , więc tworzą permutację zbioru $\{1, \dots, 5^m\}$; skąd wniosek, że iloczyn wszystkich tych elementów wynosi $(5^m)!$.

Zapiszmy iloczyn elementów zbioru A_j jako $5^{\alpha_j} P_j$, gdzie $P_j \not\equiv 5$. Wymnażając (po $j = 0, \dots, m$), dostajemy

(3) $(5^m)! = 5^{\alpha_0 + \dots + \alpha_m} Q$, gdzie $Q = P_0 \dots P_{m-1} P_m \not\equiv 5$.

Zadania z matematyki nr 905, 906

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2025

Redaguje Marcin E. KUCZMA

905. Niech $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{-1}$. Wyznaczyć wszystkie możliwe całkowite wartości sumy $f(a) + f(b) + f(c)$ dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c .

906. W przestrzeni (trójwymiarowej) dana jest parabola P . Niech R będzie zbiorem wszystkich punktów będących wierzchołkami stożków obrotowych, na których leży P [przez *stożek obrotowy* rozumiemy tu powierzchnię powstałą przez obrót prostej wokół przecinającej ją (nie prostopadle) innej prostej (*osi obrotu*)].

Udowodnić, że zbiór R także jest parabolą oraz wyjaśnić, jak są usytuowane jej wierzchołek i ognisko względem wierzchołka i ogniska paraboli P . [*Wierzchołek* paraboli to punkt jej przecięcia z płaszczyzną symetrii; *ognisko* to punkt (w jej płaszczyźnie) określony przez własność: każdy punkt paraboli jest jednakowo odległy od ogniska i od pewnej prostej (zwanej *kierownicą*)].

Zadanie 906 zaproponował pan Janusz Fiett z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2025

Przypominamy treść zadań:

901. Trapez równoramienny $ABCD$ jest wpisany w okrąg Ω o średnicy AB . Przekątne trapezu, długości d , przecinają się w punkcie P . Okrąg styczny do odcinków PC , PD i do krótkiego łuku CD (okręgu Ω) ma promień r . Okrąg wpisany w trójkąt ABP ma promień $3r$. Obliczyć stosunek r/d .

902. Dla liczby naturalnej n niech $w(n)$ oznacza największy całkowity wykładnik, dla którego $n!$ dzieli się przez $10^{w(n)}$ i niech $f(n) = 10^{-w(n)} n!$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej m spełniona jest zależność $f(5^m) \equiv 2^m \pmod{5}$.

901. Niech V i U będą (odpowiednio) środkami okręgów o promieniach r i $3r$, określonych w zadaniu. Nazwijmy punkty styczności: okrąg $(U, 3r)$ styczny do odcinka AB w punkcie O (środku okręgu Ω) i do odcinka AP w punkcie X ; okrąg (V, r) styczny do łuku CD w jego środku Q i do odcinka CP w punkcie Y . Niech $R = OA = OB = OQ$.

Skoro $UX = 3r$, $VY = r$, zatem z podobieństwa $\triangle PXU \sim \triangle PYV$ odczytujemy, że $PU/PV = 3$, i w konsekwencji $PO/PQ = 3$. Stąd $PO = \frac{3}{4}R$ oraz $UP = PO - OQ = \frac{3}{4}R - 3r$.

Oznaczając $\varphi = \angle PAO = \angle PUX$, mamy $R \tan \varphi = OA \tan \varphi = OP = \frac{3}{4}R$, więc $\tan \varphi = \frac{3}{4}$, wobec czego $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$. Dalej, $3r = UX = UP \cos \varphi = (\frac{3}{4}R - 3r) \cdot \frac{4}{5}$, skąd $R = 9r$. I ostatecznie: $d = AC = AB \cos \varphi = 2R \cdot \frac{4}{5} = 18r \cdot \frac{4}{5}$.

Mamy odpowiedź na pytanie z zadania: $r/d = 5/72$.

Oczywiście $\alpha_m = m$, $P_m = 1$; zaś dla $j < m$ mamy, zgodnie z określeniem (1), $\prod_{a \in A_j} a = ((5^j)^{|A_j|}) P_j$, więc $\alpha_j = j \cdot |A_j|$. To liczba podzielna przez 4 (wzór (2)). Ponadto

$$P_j = \prod_{k \leq 5^{m-j}, k \not\equiv 5} k = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots \cdot (\dots) \quad \text{dla } j < m.$$

W tym ostatnim przedstawieniu mamy $\frac{1}{4}|A_j|$ czynników $(\dots)$, a to liczba nieparzysta (wzór (2)). Dlatego $P_j \equiv 4 \pmod{5}$; a stąd, zgodnie z (3), $Q \equiv 4^m \pmod{5}$.

Równość (3) pokazuje, że $w(5^m) = \alpha_0 + \dots + \alpha_m = 4l + m$ dla pewnego l (bo $4|\alpha_j$ dla $j < m$). Zatem

$$\begin{aligned} f(5^m) &= 10^{-w(5^m)} (5^m)! = 10^{-w(5^m)} \cdot 5^{w(5^m)} Q = 2^{-w(5^m)} Q \\ &= 2^{-4l-m} Q, \end{aligned}$$

skąd ostatecznie $f(5^m) \equiv 2^{-4l} \cdot 2^{-m} \cdot 4^m \equiv 2^m \pmod{5}$; to teza zadania.

Skórt regulaminu

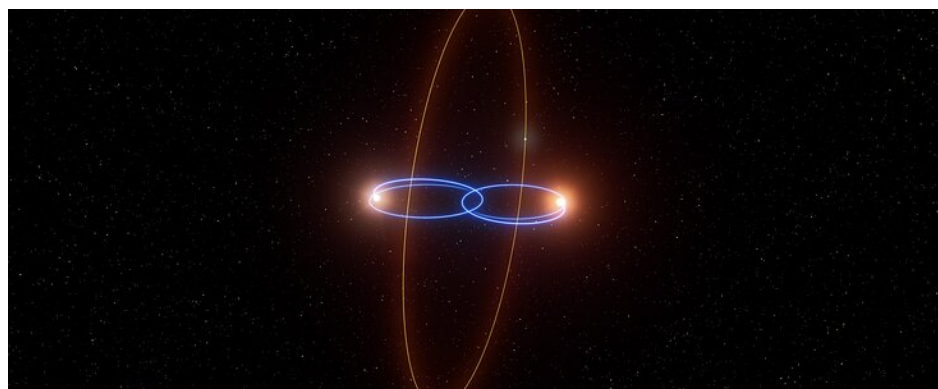
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rys. 1. Wizja artystyczna orbity egzoplanety 2M1510 (AB)b krążącej wokół pary gwiazd – brązowych karłów. Orbita planety jest prostopadła do płaszczyzny, w której poruszają się obie gwiazdy. Źródło: ESO/L. Calçada

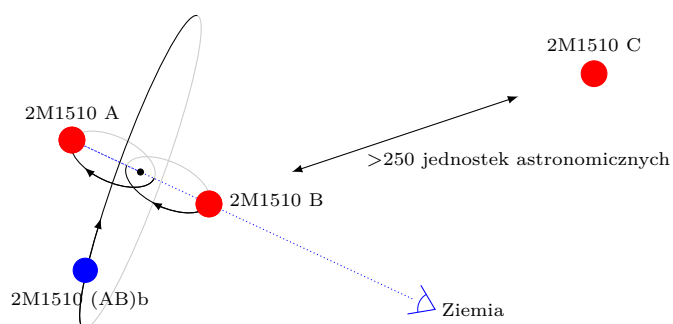
Całkowita liczba zaobserwowanych do tej pory planet pozasłonecznych to 5921 (w dniu pisania tego artykułu – czerwiec 2025).



Planety pozasłoneczne występują w różnych kształtach, rozmiarach i konfiguracjach. Ich obserwacje nie wywołują już sensacji i przyzwyczailiśmy się, że prawie codziennie odkrywamy nowe. Dlatego myśleliśmy, że niewiele nas już może zaskoczyć. A jednak... W maju przypadkiem odkryto planetę, która jest jedyna w swoim rodzaju. Wzbudziła niemalą ekscytację wśród astronomów, ponieważ potwierdza niektóre teorie opisujące powstawanie planet. Mowa o 2M1510 (AB)b, która nie dość, że krąży wokół dwóch gwiazd jednocześnie, to jeszcze robi to pod kątem 90° , czyli porusza się po orbicie okołobiegunowej (rys. 1).

Planety orbitujące wokół podwójnych układów gwiazd są niezwykle rzadkie. Do tej pory znanych jest ich tylko 16 i wszystkie krążą niemal w tej samej płaszczyźnie orbitalnej co macierzysty układ podwójny gwiazd (tak samo planety w naszym Układzie Słonecznym – wszystkie krążą w tej samej płaszczyźnie). Orbity nachylone pod kątem 90° wydają się egzotyczne i pozornie nieprawdopodobne. Są jednak uzasadnione teoretycznie. Wcześniej obserwowano biegunowe dyski pyłowo-gazowe wokół układów podwójnych gwiazd. Jednak jak do tej pory nie udało się potwierdzić istnienia planet w tej konfiguracji.

Obserwacja 2M1510 (AB)b to pierwszy mocny dowód na to, że takie planety istnieją (a przynajmniej jedna). Odkrycia dokonał Thomas Baycroft, doktorant na Uniwersytecie w Birmingham w Wielkiej Brytanii.



Rys. 2. Konfiguracja układu: brązowe karły są zaznaczone na czerwono, przekorna planeta zaznaczona jest na niebiesko. 2M1510 A i B to para brązowych karłów, wokół których krąży planeta, natomiast 2M1510 C to kolejny brązowy karzeł, który znajduje się w odległości 250 jednostek astronomicznych (37 399 467 675 kilometrów). Źródło: Baycroft i inni, 2025.

Ale nie tylko orbita planety jest niezwykła. 2M1510 (AB)b krąży wokół pary młodych brązowych karłów – obiektów większych niż planety gazowe, ale zbyt małych, by być właściwymi gwiazdami. Oba brązowe karły powodują wzajemne zaćmienia, co z perspektywy Ziemi czyni je częścią układu nazywanego przez astronomów zaćmieniowym układem podwójnym. Układ taki też jest niezwykle rzadki: jest to zaledwie druga para zaćmiewających się brązowych karłów znana do tej pory, do tego zawiera pierwszą egzoplanetę o orbicie prostopadłej do układu. Co za niesamowity przypadek! Ale to nie wszystko. W niewielkiej odległości znajduje się trzeci brązowy karzeł, który może wpływać na stabilność całego układu (rys. 2).

W materiałach prasowych dotyczących odkrycia planety naukowcy podkreślają, że było to odkrycie przypadkowe. Zespół wpadł na jej trop podczas udoskonalania obserwacji parametrów orbitalnych i fizycznych pary brązowych karłów 2M1510 (AB), zbierając obserwacje za pomocą instrumentu Ultraviolet and Visual Echelle Spectrograph (UVES) na ESO VLT w Obserwatorium Paranal w Chile.

Na podstawie Baycroft i inni, „Evidence for a polar circumbinary exoplanet orbiting a pair of eclipsing brown dwarfs”, *Science Advances*, vol. 11, 2025.

Katarzyna MAŁEK

Departament Badań Podstawowych (BP4), Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Gwiazda Dżienna kontynuuje szybkie przesuwanie się na południe, zbliżając się do widnokręgu o kolejne 10° , co spowoduje skrócenie się dnia o następne prawie dwie godziny. 22 września po godzinie 20 naszego czasu Słońce przetnie równik niebieski, przenosząc się na południową półkulę nieba. Tym samym rozpocznie się w Polsce astronomiczna jesień.

We wrześniu nadal jasno świeci miryda χ Cygni, zmieniająca jasność od $+3,3^m$ do $+14,2^m$ w ciągu 408 dni. 22 sierpnia gwiazda przeszła przez maksimum swojej jasności i nadal powinna być dostrzegalna gołym okiem. Chociaż na początku miesiąca w jej obserwacjach przeszkodzi blask Księżyca w bardzo dużej fazie. χ Cygni góruje około godziny 21 na wysokości ponad 70° .

Ekliptyka na niebie wieczornym jest nachylona słabo, a jeszcze słabiej widoczny jest Księżyc, choć zacznie on miesiąc w fazie 64%. Dopiero pod koniec pierwszego tygodnia miesiąca powędruje on w górę, a 7 września dojdzie do jego całkowitego zaćmienia. Tego dnia w Polsce wschód Księżyca nastąpi między godziną 19:00 na granicy wschodniej a 19:35 na krańcach zachodnich i wszędzie on już zaćmiony, gdyż faza częściowa zjawiska zacznie się o 18:27. Faza całkowita rozpocznie się o 19:30, faza maksymalna nastąpi o godzinie 20:11, a Srebrny Glob pozostanie w cieniu Ziemi do godziny 20:53. Faza częściowa zaćmienia potrwa do 21:56, faza półcieniowa natomiast – do 22:55.

Towarzystwa Księżycowi dotrzyma para planet Saturn-Neptun, znajdująca się wtedy 12° na lewo od niego. Od wschodu księżycowa tarcza doganiać będzie gwiazdę 4. wielkości φ Aqr. Niestety dogoni ją już po wyjściu z cienia Ziemi. Zakrycie φ Aqr nastąpi około godziny 23:35, odkrycie zaś mniej więcej 55 minut później, już przy pełnym blasku Księżyca.

Srebrny Glob przejdzie blisko Saturna i Neptuna następnej nocy. Do Neptuna zbliży się on na niewiele ponad $1,5^\circ$, Saturn znajdzie się 2-krotnie dalej. Faza Księżyca zdąży spaść tylko o 2%, a zatem Neptuna nie da się tej nocy dostrzec, gdyż świeci on blaskiem $+7,8^m$. Saturn natomiast świeci blaskiem $+0,6^m$ i prezentuje tarczę o średnicy $19''$. Stosunek małej do wielkiej osi pierścieni planety zmniejszy się do 0,03. We wrześniu obie planety przechodzą przez opozycję względem Słońca. Saturn uczyni to 21 września, Neptun zaś 2 dni później. Do końca miesiąca dystans między planetami urośnie do 3° .

13 września faza Księżyca spadnie do 67% i dotrze on do gwiazdozbioru Byka, zakrywając znaną gromadę otwartą gwiazd Plejady. W Polsce pierwsza z jasnych gwiazd gromady, Electra, zniknie za jasnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 22, by pokazać się po drugiej stronie jakieś 50 minut później. Potem Srebrny Glob zakryje jeszcze Celaeno, Merope, Maię i Alcyone. Tę ostatnią około 23 do 23:50. Ominie niestety Taygetę, Sterope, Atlas i Pleione.

5° na południe od Plejad swoją pętlę na niebie wykonuje Uran, który 6 dnia miesiąca zmieni kierunek ruchu z prostego na wsteczny. Stąd początkowo planeta jest nieruchoma względem gwiazd tła, a jej blask

wynosi $+5,7^m$. W tym miesiącu Uran nie cieszy się towarzystwem gwiazdy o zbliżonej doń jasności. Do wszystkich okolicznych gwiazd, które są łatwo widoczne gołym okiem, zabraknie planecie po około 3° .

14 września Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, przenosząc się na niebo poranne. 16 i 17 dnia miesiąca odwiedzi on gwiazdozbiór Bliźniąt, gdzie znajduje się planeta Jowisz. Pierwszej z wymienionych nocy tarcza Księżyca pokaże sierp w fazie 32%, wędrując po około 8° od Jowisza oraz Kastora z Polluksem. Dobę później faza jego tarczy zmniejszy się do 22% i przeniesie się na pogranicze Bliźniąt i Raka, świecąc 6° pod Polluksem. Sam Jowisz szykuje się powoli do opozycji i we wrześniu jego blask wynosi -2^m , przy średnicy tarczy $36''$.

18 dnia miesiąca sierp Srebrnego Globu w fazie 13% dotrze na pozycję 5° na wschód od jasnej gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. W odległości 15° na godzinie 7 względem niego świeci planeta Wenus. Jeszcze bliżej planety i w fazie zaledwie 7% Księżyc znajdzie się następnej doby. O godzinie 5 oba ciała przedzieli dystans 4° , a dodatkowo $46'$ pod Wenus pokaże się Regulus, najjaśniejsza gwiazda Lwa.

Księżyc stopniowo zbliży się do Wenus, aż wreszcie ją zakryje. W Europie i większości pasa zakrycia do zjawiska dojdzie w dzień. W Polsce Wenus zniknie za księżycową tarczą około godziny 14:10, by wyłonić się z za jej ciemnego brzegu około 15:20. Oba ciała znajdują się 27° na zachód od Słońca. Całe zjawisko jest zatem obserwowalne przez lornetkę.

Sama planeta zacznie miesiąc w Raku, niewiele ponad 1° na południe od M44, ale już 10 września przejdzie do gwiazdozbioru Lwa. W dniach 19 i 20 września Wenus minie Regulusa. U nas oba ciała przedzieli po około $40'$. Wenus powoli zbliża się do koniunkcji górnej ze Słońcem, stąd przez cały miesiąc świeci blaskiem $-3,9^m$, a jej tarcza ma średnicę $11''$ i fazę rosnącą do 91%.

Księżyc w fazie niecałych 3% można jeszcze próbować dostrzec 20 września, gdy około godziny 5:30 wzniesie się na wysokość 7° . Jego odszukanie ułatwi para Wenus-Regulus, świecąca w odległości 8° , na godzinie 1 względem niego.

Ariel MAJCHER



Rozwiązanie zadania M 1828.

Odpowiedź: Wielomian $P(x) + P(-x)$ jest wielomianem parzystym, wobec tego ma parzystą liczbę różnych niezerowych pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ 2025 jest liczbą nieparzystą, jeden z jego pierwiastków musi być równy 0, a to oznacza, że $0 = P(0) + P(-0) = 2P(0)$. Stąd $P(0) = 0$, czyli wyraz wolny P jest równy 0.



Rozwiązanie zadania M 1829.

Niech X będzie zbiorem liczb spełniających warunki zadania, natomiast Y zbiorem liczb dobrych, które posiadają co najmniej jeden dzielnik dobry (różny od 1 i samej liczby).

Założmy, że X jest zbiorem skończonym i niech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, gdzie $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Zauważmy, że dowolna liczba ze zbioru Y posiada dzielnik ze zbioru X (jest nim np. najmniejszy dobry dzielnik liczby Y).

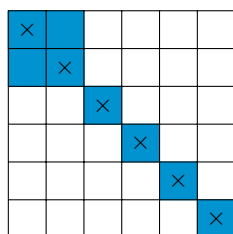
Rozpatrzmy liczbę $A = (x_1 x_2 \dots x_k)^2 + 1$. Ponieważ A jest liczbą dobrą większą niż x_k , więc $A \in Y$. Wobec tego A posiada dzielnik w zbiorze X , co jest niemożliwe, gdyż $x_i \mid A - 1$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.



Rozwiązanie zadania M 1830.

Odpowiedź: Nie.

Zaznaczmy 4 pola kwadratu 2×2 w lewym górnym rogu tablicy i zaznaczmy wszystkie pozostałe kwadraty na głównej przekątnej, jak na rysunku niżej.



Pokażemy indukcyjnie, że nie możemy dokonać żądanego przestawienia wierszy i kolumn.

Dla $n = 2$ jest to oczywiste (wszystkie pola kwadratu są zaznaczone). Załóżmy, że istnieje pożądane przegrupowanie wierszy i kolumn dla $n > 2$. Wybierzmy rząd zawierający

tylko jeden zaznaczony kwadrat s . Wówczas kolumna zawierająca s nie zawiera innych zaznaczonych kwadratów. Jeżeli s nie znajduje się na głównej przekątnej, czyli znajduje się na prawo od niej, to kolumnę zawierającą s można przesunąć w lewo tak, aby s znalazł się na głównej przekątnej; wszystkie pozostałe kolumny albo pozostają na swoich miejscach, albo przesuwają się w prawo, więc warunek nie jest naruszony. Gdy s znajduje się już na głównej przekątnej, można go usunąć i zastosować założenie indukcyjne.

Pytanie: Co, jeśli zaznaczymy $n + 1$ kwadratów?



Rozwiązanie zadania F 1127.

Orbita Ziemi jest elipsą ze Słońcem w jednym z jej ognisk (I prawo Keplera). Zimą Ziemia porusza się bliżej Słońca niż latem. W tym roku największe zbliżenie Ziemi do Słońca nastąpiło 4 stycznia o godzinie 14:28 (w roku 2026 nastąpi to 3 stycznia o 18:16), a najdalej od Słońca Ziemia znalazła się 3 lipca o 21:55 (w roku 2026 nastąpi to 6 lipca o 19:31). Podczas ruchu Ziemi jej moment pędu pozostaje stały (II prawo Keplera), a więc mniejsza odległość od Słońca oznacza większą prędkość ruchu orbitalnego i tym samym krótszy czas ruchu od równonocy jesiennej do wiosennej niż od równonocy wiosennej do jesiennej. Podana w treści zadania różnica czasu pozwala oszacować wartość mimośrodru orbity.

Pełną ilościową analizę zagadnienia zawiera tekst: *Jak wygląda orbita Ziemi?*, Δ_{84}^5 .



Rozwiązanie zadania F 1128.

Słońce oświetla zawsze więcej niż połowę powierzchni Ziemi. Wynika to z jego bardzo dużych rozmiarów. Dodatkowo refrakcja atmosferyczna (tj. fakt, że promienie słoneczne ulegają załamaniu podczas przechodzenia przez coraz gęstsze warstwy atmosfery, nim dotrą do powierzchni Ziemi) „zagina” promienie w kierunku powierzchni Ziemi, zwiększając jej oświetlany obszar. W wyniku obu tych zjawisk cień Ziemi ma kształt stożka o kącie między wysokością (osią stożka) i jego tworzącą wynoszącym $\alpha \approx 50'$.

Pełniejszą analizę można znaleźć w tekście: *Kiedy zaczyna się jesień?*, Δ_{85}^8 .

Studencka Konferencja Naukowa

w ramach obchodów dni prof. Antoniego Hoborskiego

elements X

24- 26 Października 2025

STATYSTYKA | RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA | MACHINE LEARNING | ANALIZA DANYCH

Z nami odnajdziesz swój matematyczny element!

www.elements.agh.edu.pl



Harmonia na trzy czwarte...

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W całym odcinku zakładamy, że A, B, X, Y to cztery różne punkty.

Rozważmy różne punkty, A, B, X, Y , leżące na jednej prostej. Mówimy, że odcinki AB i XY są *sprzężone harmonicznie*, jeśli zachodzi równość $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$; równoważnie – co dowodzi symetrii tej relacji – mamy $\frac{|XA|}{|YA|} = \frac{|XB|}{|YB|}$.

Dodamy teraz na prostej AB sztuczny punkt w nieskończoności – oznaczmy go po prostu ∞ – o tej własności, że $\frac{|A\infty|}{|B\infty|} = 1$. Jeśli X jest środkiem odcinka AB , to odcinki AB i $X\infty$ są harmonicznie sprzężone. Punkt ∞ nazywany jest niekiedy miejscem przecięcia prostych równoległych (taki punkt dopuszcza się między innymi w geometrii rzutowej).

Twierdzenie 3/4. Na prostej z dodanym punktem w nieskończoności – jeżeli odcinki AB i XY są harmonicznie sprzężone, to dowolne trzy spośród punktów A, B, X, Y jednoznacznie określają położenie czwartego.

Dowód. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że wyznaczmy położenie punktu Y za pomocą pozostałych. Dobierzmy taką oś liczbową, żeby punkt A był w jedynce, a punkt B w minus jedynce. Przez x oraz $y = f(x)$ oznaczmy współrzędne punktów X i Y . Na mocy definicji otrzymujemy $\frac{|x-1|}{|x+1|} = \frac{|y-1|}{|y+1|}$, co po obu stronach podniesieniu do kwadratu, przy założeniach $x, y \notin \{-1, 0, 1\}$ i $x \neq y$, upraszcza się do postaci równoważnej $f(x) = y = \frac{1}{x}$. Jest to bijekcja zbioru $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ na ten sam zbiór, a ponadto $f(0) = \infty$ i $f(\infty) = 0$.

Kolejne twierdzenie pokazuje typowe konfiguracje geometryczne, w których pojawiają się pary odcinków harmonicznie sprzężonych.

Twierdzenie 2. Jeśli zachodzi którykolwiek z poniższych warunków, to odcinki AB i XY są sprzężone harmonicznie:

- (1) punkty A i B są środkami podstaw trapezu, punkt X jest przecięciem jego przekątnych, a punkt Y – prostych zawierających jego ramiona;

- (2) punkty K, L, X leżą, odpowiednio, na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC , przy czym odcinki AK, BL, CX przecinają się w jednym punkcie, proste KL i AB przecinają się w punkcie Y ;
- (3) punkty X i Y leżą na prostej AB , przy czym proste CX i CY są dwusiecznymi kątów przy wierzchołku C trójkąta ABC , odpowiednio, wewnętrznego i zewnętrznego.

Dowód

- (1) Niech $PQRS$ będzie rzeczonym trapezem, w którym punkt A jest środkiem podstawy PQ . Trójkąty PQY i SRY są jednokładne względem punktu Y , natomiast trójkąty PQX i RSX – względem punktu X . Z tego wynika, że punkty A, X, B, Y są współliniowe. Ponadto skalą obu jednokładności jest $\frac{|RS|}{|PQ|}$, więc $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$. Jeśli trapez $PQRS$ jest równoległobokiem, to $Y = \infty$, a X jest środkiem odcinka AB .
- (2) W trójkącie ABC z twierdzenia Cevy dla odcinków AK, BL i CX oraz z twierdzenia Menelaosa dla prostej KL otrzymujemy, odpowiednio:

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1, \quad \frac{|AY|}{|YB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$

Porównując oba wyrażenia, dostaniemy $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$. W przypadku gdy $KL \parallel AB$ (równoważnie: X jest środkiem odcinka AB), mamy $Y = \infty$.

- (3) Na mocy twierdzenia o dwusiecznej (wewnętrznej i zewnętrznej) otrzymujemy $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AY|}{|BY|}$. Jeśli $|AC| = |BC|$, to X jest środkiem odcinka AB oraz $Y = \infty$.

Zadania

1. Załóżmy, że punkty A, X, B, Y leżą w tej kolejności na jednej prostej. Niech O będzie środkiem odcinka AB . Udowodnić, że następujące stwierdzenia są równoważne:
 - (a) odcinki AB i XY są harmonicznie sprzężone;
 - (b) $|AB|$ jest średnią harmoniczną AX i AY ;
 - (c) $|OB|$ jest średnią geometryczną OX i OY .
2. Dany jest trójkąt ABC . Punkty X_A, X_B, X_C leżą na odcinkach, odpowiednio, BC, CA, AB . Prosta X_BX_C przecina prostą BC w punkcie Y_A . Analogicznie określamy punkty Y_B i Y_C . Wykazać, że jeśli odcinki AX_A, BX_B, CX_C przecinają się w jednym punkcie, to punkty Y_A, Y_B, Y_C leżą na jednej prostej.
3. Okręgi ω_1 i ω_2 , o środkach odpowiednio O_1, O_2 i promieniach r_1, r_2 , przecinają się w dwóch punktach, z których jednym jest T , przy czym $\angle O_1TO_2 = 90^\circ$. Pewna prosta przechodząca przez punkt O_1 przecina okrąg ω_1 w punktach A i B , a okrąg ω_2 – w punktach X i Y . Wykazać, że odcinki AB i XY są harmonicznie sprzężone.
4. Z punktu Y leżącego poza okręgiem ω poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach P i Q . Na cięciwie PQ wybrano punkt X . Prosta XY przecina okrąg ω w punktach A i B . Dowiedzieć, że odcinki AB i XY są harmonicznie sprzężone.

Wskazówki do zadań

1. Można przyjąć na przykład $|AX| = x$, $|XB| = y$, $|BY| = z = -z$ – wówczas dowód sprowadza się do prostych algebraicznych przekształceń.
2. Skorzystaj z definicji sprzężenia harmonicznego dla odcinków AB i XC oraz z twierdzenia Cevy i Menelaosa.
3. Skorzystaj z zadania 1(c), obliczając dwa sposoby potęg punktu O_1 względem okręgu ω_2 .
4. Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów, otrzymujemy $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YB|}$ i $\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|BY|}{|YC|}$.



IX DZIEŃ POPULARYZACJI MATEMATYKI



24 września 2025

**Gmach Wydziału MiNI | Koszykowa 75
Politechnika Warszawska**



Wydział Matematyki
i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

dpm.mini.pw.edu.pl



W ramach Dni Popularyzacji odbędzie się finał XLVII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, organizowanego przez miesięcznik "Delta" oraz Polskie Towarzystwo Matematyczne