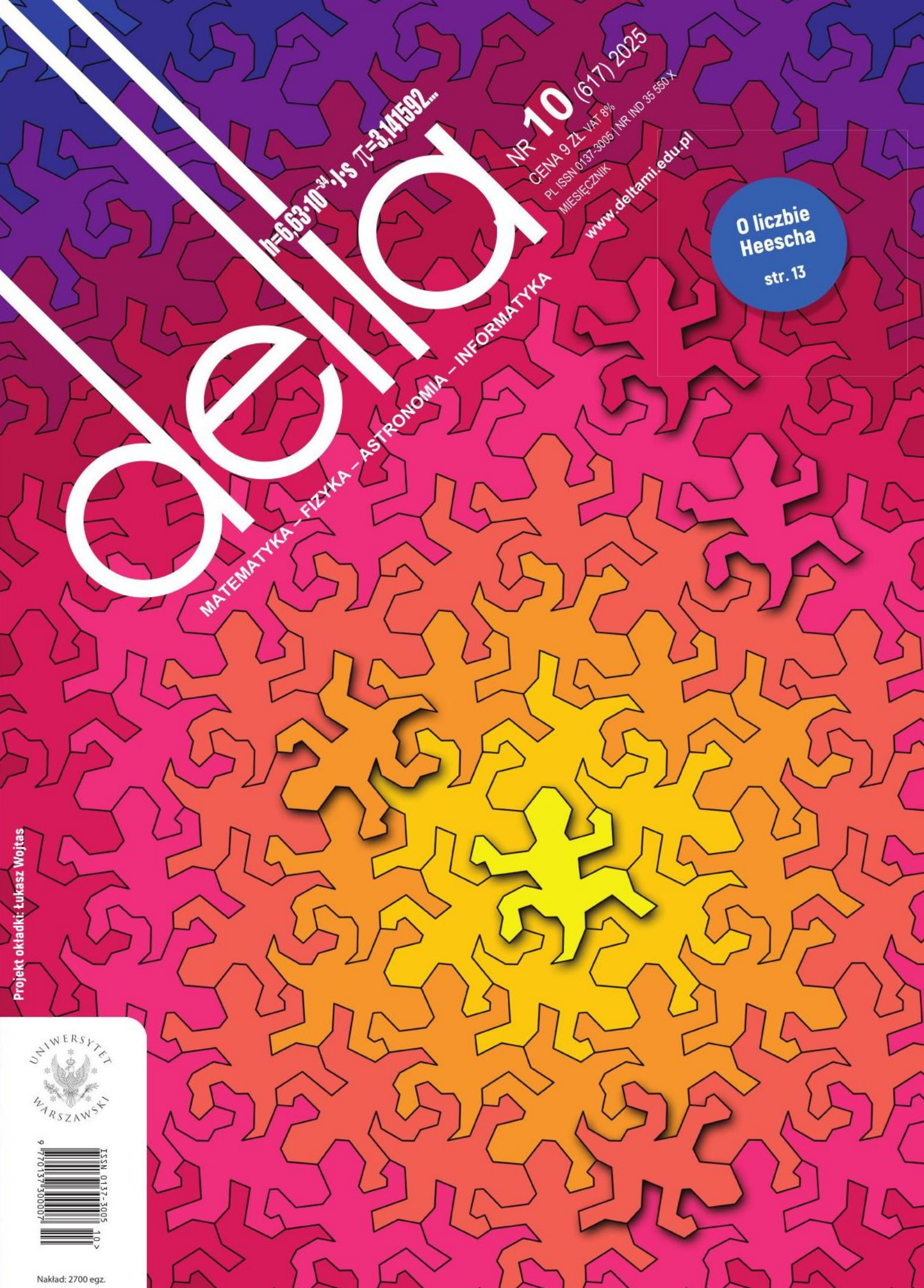




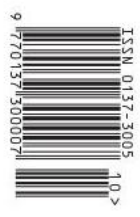
delta

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

NR 10 (617) 2025
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

O liczbie
Heescha
str. 13

Projekt okładki: Łukasz Wojtas



Nakład: 2700 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 10 (617) 2025

Think outside the box!

Mikołaj Znamierowski str. 1

Pierścienie Boromeuszy nie istnieją

Michał Miśkiewicz str. 4

Asysta grawitacyjna – jak to obliczyć?

Przemysław Borys str. 5

 Kosmiczne latanie

Marta Fikus-Kryńska str. 8

Geometria liczb, algorytmy Herona
i Euklidesa oraz ułamki łańcuchowe

Grzegorz Łukaszewicz str. 9

 Zadania

str. 12

 Heesch i niepełne parkietaże

Bartłomiej Pawlik str. 13

Turniej Młodych Fizyków

str. 14

Plotkowanie kopertowe

Łukasz Rajkowski str. 15

Kalendarz Majów i jego niezwykle
przewidywania matematyczne

Noémie C. Combe str. 16

Klub 44

str. 20

 Prosto z nieba: Tlen w najodleglejszej
galaktyce

str. 22

 Niebo w październiku

str. 23

 Pęki harmoniczne

Bartłomiej Bzdega str. 25

W następnym numerze dowiedzie się,
jakiej litery brakuje na poniższej
tabliczce i dlaczego.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac.,
Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub
zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

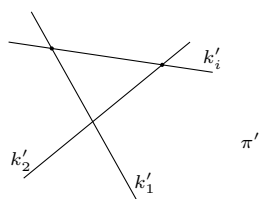
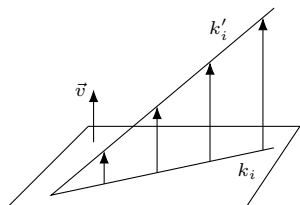
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Think outside the box!

Mikołaj ZNAMIEROWSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie następującą sytuację: w Zaczarowanym Lesie żyje sobie $n > 1$ krasnoludków i każdy wychodzi rano do pracy. Przemierzają się one wzdłuż ustalonych prostych, cały czas poruszając się w tym samym kierunku i ze stałą prędkością. Wiadomo, że ich trasy krzyżują się w sposób maksymalny – to znaczy, że każdy ma na swojej drodze $n - 1$ skrzyżowań z pozostałymi (i w związku z tym, żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie). Jak jednak wiadomo z pewnej bajki, krasnoludki są istotami niezwykle towarzyskimi – powiemy zatem, że krasnoludek jest *szczęściarzem*, gdy spotka na swojej drodze wszystkie pozostałe. Wówczas okazuje się, że jeśli choć dwa krasnoludki są szczęściarzami, to wszystkie nimi są! Jak można w ogóle podejść do dowodu takiego zaskakującego faktu? Osoby nieprzepadające za geometrią zapewne zechciałyby od razu wszystko sparametryzować i zagłębić się w rachunkach. Okazuje się jednak, że istnieje pewne bardzo ładne i szokująco elementarne rozumowanie.



O dziwo, aby rozwiązać ten dwuwymiarowy problem, użyteczne jest odklejenie się od płaszczyzny π Zaczarowanego Lasu i ucieczka w trójwymiarową przestrzeń! Dorysujmy dodatkowy wektor *czasowy* ustawiony prostopadłe do płaszczyzny π . Przyjmujemy, że czas jest skierowany w górę, jak na rysunku obok. Upływ czasu jest jednakowy dla wszystkich krasnoludków (uprzedzam fizyków – pomijamy tu efekty relatywistyczne). Trasa k_i każdego krasnoludka staje się wówczas prostą k'_i w trójwymiarze. Jeżeli chcemy zobaczyć, gdzie krasnoludki znajdują się w danej chwili, to sprawdzamy, gdzie reprezentujące ich proste przecinają poziomą płaszczyznę odpowiadającą tej chwili w czasie, czyli na właściwej wysokości. Oczywiście krasnoludki spotykają się wtedy i tylko wtedy, gdy znajdują się w tym samym miejscu, w tym samym czasie – z punktu widzenia naszych „podniesionych” prostych, wtedy i tylko wtedy, gdy proste te się przecinają. Wiemy, że istnieją takie dwie proste, powiedzmy k'_1 i k'_2 , które przecinają wszystkie pozostałe „primowane” proste. Popatrzmy więc na płaszczyznę π' wyznaczoną przez k'_1 i k'_2 . Dowolna prosta k'_i przecina się z k'_1 oraz k'_2 w dwóch *różnych* punktach, a więc jest zawarta w π' . W związku z tym dowolne dwie proste k'_i i k'_j leżą w π' , co oznacza, że się przecinają lub są równoległe. Zauważmy jednak, że nie mogą być równoległe – w przeciwnym przypadku, proste $k_i, k_j \subset \pi$ nie miałyby punktu wspólnego, co przeczyłoby treści. Kończy to zatem dowód.

Rozumowanie to można pociągnąć znacznie dalej! Czy umiesz pokazać, Drogi Czytelniku, że przez cały czas trwania marszu wszystkie krasnoludki są współliniowe?

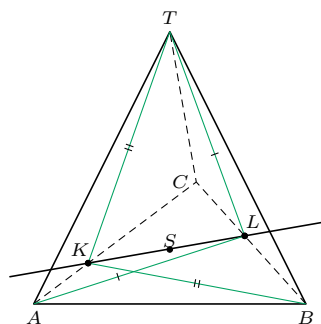
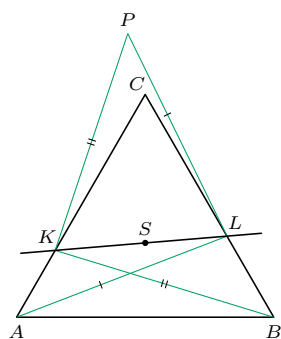
Opisany powyżej fakt znany jest jako *Problem Czterech Podróżnych* (zauważmy, że rozwiązanie korzystało jedynie z tylu krasnoludków – pierwszego, drugiego, i -tego oraz j -tego). Główne piękno tego rozumowania polega na tym, że aby rozwiązać problem płaski, uciekliśmy w trójwymiar. Przypatrzmy się kilku geometrycznym (i nie tylko!) sytuacjom, w których pojawia się ten elegancki motyw.

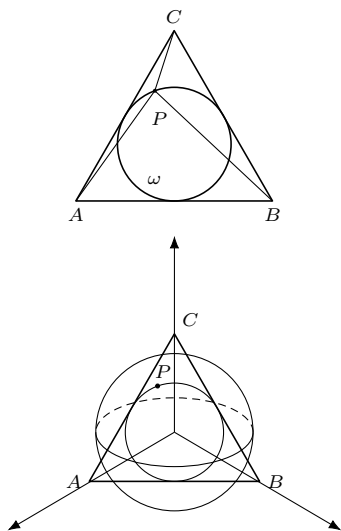
Nieco geometrii olimpijskiej

Rozpatrzmy następujące zadanie. Pojawiło się ono na Obozie Naukowym OMG (poziom OM) w 2015 roku.

Zadanie. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o środku ciężkości S . Prosta l przechodzi przez S . Niech K i L to przecięcia l z odcinkami AC i BC , odpowiednio. Punkt P spełnia warunki $AL = PL$ oraz $BK = PK$. Udowodnij, że odległość punktu P od prostej l jest stała, niezależna od doboru początkowej prostej l przez S .

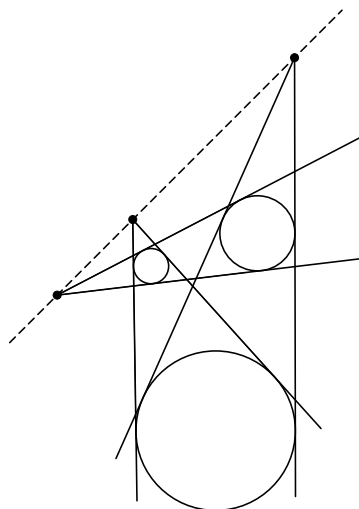
Problem ten jest zaskakująco ciężki, póki trzymamy się kurczowo geometrii płaskiej (przed dalszym czytaniem, zachęcam do podjęcia wyzwania!). Zadanie jednak niemalże trywializuje się po dorysowaniu jednego punktu w trójwymiarze. Niech T będzie takim punktem w przestrzeni, że $ABCT$ jest czworościanem foremnym. Wówczas z symetrii tego czworościanu uzyskujemy $PL = AL = TL$ oraz $BK = PK = TK$. Na mocy cechy bok-bok-bok mamy więc $\triangle KLP \equiv \triangle KLT$, czyli odległość P od KL (a więc i od l) jest taka sama co odległość T od l . Ta jednak pokrywa się z wysokością czworościanu, która oczywiście nie zależy od wyboru prostej l . Koniec.





To samo rozumowanie można zastosować dla dowolnego okręgu o środku będącym środkiem trójkąta ABC – przykładowo dla okręgu opisanego.

Płaszczyzna z dorzuconym tylko jednym punktem w nieskończoności również jest sensownym bytem – po prostu nie na nasze potrzeby. W ramach ciekawostki powiem, że twór ten nazywa się (w geometrii) płaszczyzną inwersyjną lub (w analizie) sferą Riemanna.



Dla tych, którzy powiedzieliby: „po co takie sztuczki, przecież to oczywiste, jak się wpisze w układ współrzędnych”, proponuję spojrzeć na następujący problem.

Zadanie. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt równoboczny ABC . Punkt P jest zmieniającym położenie punktem na okręgu ω . Udowodnij, że wartość wyrażenia $AP^2 + BP^2 + CP^2$ jest stała.

Co w tym niezwykłego? Bierzymy dwie osie, przypisujemy punktom współrzędne i liczymy, prawda? Zachęcam do spróbowania – jak nie robi się tego sprytnie, to rachunki wyjdą (może jeszcze nie najgorsze na świecie, ale) przynajmniej brzydkie. Sztuczka z ucieczką w 3D może być niezwykle przydatna nawet w rozwiązaniach obliczeniowych: Rozpatrzmy trójwymiarowy układ współrzędnych. Wierzchołki trójkąta umieścimy w punktach $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ – oczywiście daje to trójkąt równoboczny zawarty w płaszczyźnie $x + y + z = 1$. Czym wówczas jest okrąg ω ? Jest to przecięcie pewnej sfery o środku w $(0, 0, 0)$ z tą płaszczyzną (jaki jest jej promień R ?). Innymi słowy, jeśli x_P, y_P, z_P są współrzędnymi punktu $P \in \omega$, to $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = R^2$ jest stałą wartością. Możemy zatem łatwo obliczyć:

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= ((x_P - 1)^2 + y_P^2 + z_P^2) + (x_P^2 + (y_P - 1)^2 + z_P^2) + (x_P^2 + y_P^2 + (z_P - 1)^2) \\ &= 3(x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) - 2(x_P + y_P + z_P) + 3 \\ &= 3 \cdot R^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 3R^2 + 1, \end{aligned}$$

co oczywiście jest stałe. Widzimy zatem, jak użyteczne jest myślenie poza „pudełkiem” zwanym płaszczyzną. Szach-mat!

Think bigger

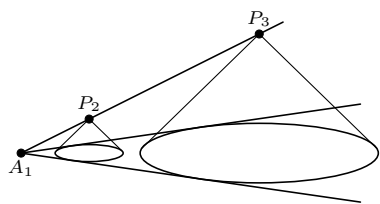
Zanim przejdziemy dalej, do bardziej skomplikowanych konfiguracji, chciałbym wspomnieć o pewnym ważnym, intuicyjnym bycie, zwanym formalnie *przestrzenią rzutową*. Ile razy zdarzyło się nam stwierdzić, że „dwie proste przecinają się”, zapominając o przypadku, że mogą być **równoległe**? W tego typu konfiguracjach wygodnie by było uznawać, że proste równoległe również się przecinają, *ale w nieskończoności*. Intuicja ta prowadzi nas do wspomnianej płaszczyzny rzutowej.

Definicja. Przez płaszczyznę rzutową rozumiemy płaszczyznę z dorzuconymi punktami w nieskończoności (niewłaściwymi), zwanymi kierunkami prostych – każda prosta przechodzi przez swój kierunek, który jest taki sam dla prostych doń równoległych. Ponadto przyjmujemy, że wszystkie punkty w nieskończoności leżą na jednej prostej w nieskończoności (niewłaściwej).

Twór ten jest niezwykle wygodny, gdyż na płaszczyźnie rzutowej dowolne dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny i przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Ponadto byt ten można łatwo rozszerzyć do trzech wymiarów: każda prosta dostaje jeden kierunek (wspólny dla wszystkich prostych równoległych), kierunki prostych współpłaszczyznowych leżą na jednej prostej niewłaściwej (wspólnej dla płaszczyzn równoległych), wszystkie proste niewłaściwe leżą na jednej (jedynej!) płaszczyźnie niewłaściwej. Przez resztę artykułu przyjmuję, że zajmujemy się właśnie przestrzenią rzutową (dzięki czemu nie trzeba będzie rozpatrywać przypadków). Zaczniemy od ślicznego dowodu tzw. twierdzenia Monge’a:

Twierdzenie. Dane są trzy okręgi, o_1, o_2, o_3 , rozłączne zewnętrznie. Niech A_1 to punkt przecięcia wspólnych stycznych zewnętrznych do okręgów o_2 i o_3 . Analogicznie definiujemy A_2 oraz A_3 . Wówczas punkty A_1, A_2, A_3 leżą na jednej prostej.

Klasyczny dowód tego faktu wymaga znajomości twierdzenia o składaniu jednokładności. Nie byłoby to jednak w duchu tego artykułu! Robimy inaczej: rozważamy podobne stożki s_1, s_2, s_3 , których podstawami są okręgi o_1, o_2, o_3 , odpowiednio. Niech ponadto P_1, P_2, P_3 będą odpowiednimi wierzchołkami tych stożków, przy czym leżą one wszystkie po tej samej stronie płaszczyzny π zawierającej nasze okręgi. Rozważmy jednokładność o środku w A_1 przenoszącą o_2 na o_3 .

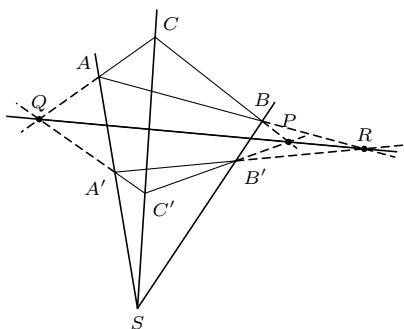


Co by się stało, gdybyśmy przyjęli, że dwa spośród punktów P_1, P_2, P_3 leżą po jednej stronie π , a pozostały po drugiej?

Przeniesie ona s_2 na s_3 (przez podobieństwo), a więc P_2 na P_3 . Stąd A_1 leży na prostej P_2P_3 . Analogicznie uzasadniamy, że punkty A_2 i A_3 leżą odpowiednio na prostych P_3P_1 i P_1P_2 . Punkty P_1, P_2, P_3 leżą na pewnej płaszczyźnie π' (jeśli są współliniowe, wybieramy dowolną płaszczyznę, która je zawiera). Wówczas punkty A_1, A_2, A_3 leżą na π (z definicji) oraz na π' (bo każda z prostych P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 zawiera się w π'). Dlatego punkty te leżą w przecięciu płaszczyzn π oraz π' . Płaszczyzny jednak zawsze przecinają się wzdłuż prostej – kończy to zatem dowód.

Na zakończenie udowodnimy jeden z najbardziej znanych faktów geometrii rzutowej – twierdzenie Desargues'a; uogólnimy je przy okazji na trzeci wymiar.

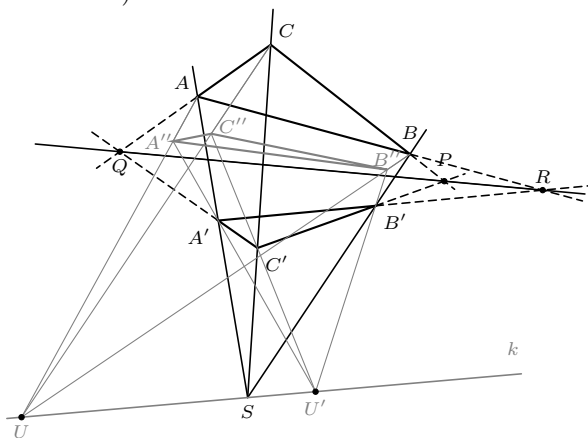
Twierdzenie. *Dane są dwa trójkąty ABC i $A'B'C'$ w $\mathbb{R}^3$. Wówczas proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy punkty przecięcia prostych $BC \cap B'C' = P, CA \cap C'A' = Q$ i $AB \cap A'B' = R$ istnieją i leżą na jednej prostej.*



Założmy, że proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie S . Dowód rozbijemy na dwa przypadki. Założmy najpierw, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ leżą w różnych płaszczyznach. Skoro CC' i BB' się przecinają, to są zawarte w jednej płaszczyźnie. Oznacza to więc, że BC i $B'C'$ się przecinają, czyli punkt P istnieje. Leży on ponadto w płaszczyźnie π trójkąta ABC (bo BC zawiera się w π) oraz w płaszczyźnie π' trójkąta $A'B'C'$ (bo $B'C'$ zawiera się w π'). Podobne rozumowanie dla punktów Q i R pokazuje, że punkty te istnieją i leżą na $\pi \cap \pi'$, czyli na prostej.

Rozważmy teraz trudniejszy przypadek, gdy trójkąty ABC i $A'B'C'$ są zawarte w tej samej płaszczyźnie π (zazwyczaj w takiej postaci podawane jest to twierdzenie). Istnienie punktów P, Q, R mamy wówczas za darmo, lecz to współliniowość jest główną trudnością. Niech k będzie dowolną prostą przez S , wychodzącą poza π . Niech ponadto U i U' to dowolne (różne) punkty na k . Proste AA' i UU' przecinają się (w S), więc są one zawarte w jednej płaszczyźnie. Wynika stąd, że proste AU i $A'U'$ przecinają się w pewnym punkcie A'' leżącym poza π . Podobnie: niech $B'' = BU \cap B'U'$ oraz $C'' = CU \cap C'U'$. Niech π'' będzie płaszczyzną zawierającą punkty A'', B'', C'' (więc $\pi'' \neq \pi$). Proste AA'', BB'', CC'' przecinają się w U , więc z udowodnionego już przypadku punkty $P_1 = BC \cap B''C'', Q_1 = CA \cap C''A'', R_1 = AB \cap A''B''$ istnieją i są współliniowe. Podobnie: punkty $P_2 = B'C' \cap B''C'', Q_2 = C'A' \cap C''A'', R_2 = A'B' \cap A''B''$ istnieją i są współliniowe. Zauważmy finalnie, że skoro P_1 i P_2 są punktami na $B''C''$ oraz na π , to $P_1 = P_2$ (prosta niezawarta w płaszczyźnie przecina ją dokładnie w jednym punkcie), czyli jest

to również punkt P . Analogiczne rozumowanie dla Q i R kończy więc dowód wynikania w jedną stronę. Dowód w drugą stronę pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie (wskazówka: wystarczy odwrócić powyższe rozumowanie).



Zademonstrowane przykłady rozwiązań trójwymiarowych w planimetrii są jedynie kilkoma ze znacznie szerszej klasy. Zachęcam więc Ciebie, Drogi Czytelniku, do poszukiwania tego typu sposobów myślenia w napotykanym problemach. Dla nienasyconych miłośników geometrii zostawiam jeszcze garść zadań (według mnie, o rosnącym poziomie trudności) do samodzielnego przemyślenia:

1. Czy istnieje taki pięciokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4A_5$, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, 5$ proste A_iA_{i+1} oraz $A_{i+2}A_{i+4}$ nie są równoległe, przecinają się w punkcie B_i , a punkty $B_1, B_2, \dots, B_5$ są współliniowe? (Przyjmujemy, że $A_6 = A_1, A_7 = A_2$ itd.)
2. (Twierdzenie Johnsona) Przystające okręgi o_1, o_2, o_3 przechodzą przez punkt S . Niech $o_2 \cap o_3 = \{A, S\}$, $o_3 \cap o_1 = \{B, S\}$ oraz $o_1 \cap o_2 = \{C, S\}$. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC przystaje do bazowych okręgów.
3. Czy istnieje w $\mathbb{R}^2$ konfiguracja skończenie wielu okręgów o rozłącznych wnętrzach, w której każdy okrąg jest styczny do dokładnie pięciu innych?

Wskazówki do zadań znajdują się na stronie 10.

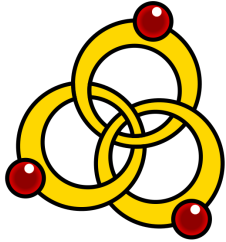
A co, gdyby pójść dalej? Zachęcam do próby znalezienia takiego problemu trójwymiarowego, żeby jego rozwiązanie było dużo prostsze, patrząc z perspektywy wymiaru *czwartego*. Warto zainspirować się którymś (bądź kilkoma) z problemów przedstawionych w artykule.

Pierścienie Boromeuszy nie istnieją

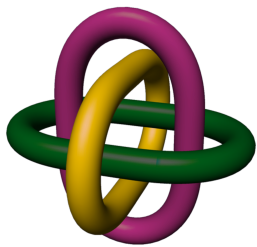
Michał MIŚKIEWICZ*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

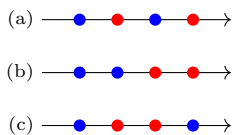
Artykuł inspirowany pytaniem zamykającym artykuł Mikołaja Znamierowskiego ze strony 1.



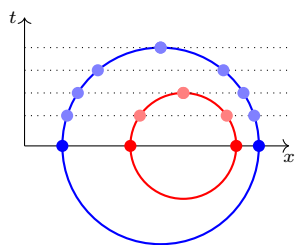
Rys. 1. Pierścienie Boromeuszy w wersji zbliżonej do tej, jaka pojawia się w herbie tego rodzaju (Flanker, Wikimedia Commons)



Rys. 2. Trzy identyczne prawie-elipsy w trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach tworzą splot Boromeuszy. Źródło: C. Gunn, J. Sullivan, *The Borromean Rings: A Video about the New IMU Logo*, Bridges Leeuwarden: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, London 2008. <http://archive.bridgesmathart.org/2008/bridges2008-63.html>



Rys. 3. Pary niebieska i czerwona są: (a) spletane, (b,c) niespletane. Polecam w każdym przypadku dorysować dwa okręgi o średnicach zadanych przez te pary punktów i przekonać się, kiedy okręgi te się przecinają



Rys. 4. Dwie niespletane pary na osi x (czerwona i niebieska) i odpowiadające im okręgi w płaszczyźnie xt . Przerywane linie dają przepis na jednoczesną deformację obu par, aż do zniknięcia

Czytelnik może pamiętać, że ostatnio już pisałem o pierścieniach Boromeuszy w Δ_{25}^8 . Zapomniałem wtedy jednak zwrócić uwagę na ważny fakt: one nie istnieją!

Jak widać na rysunku 1, pierścienie Boromeuszy to konfiguracja trzech okręgów tworzących nietrywialny splot, przy czym po usunięciu dowolnego z nich pozostałe dwa stają się niesplecione. Oczywiście pierścienie nie są okręgami, bo mają swoją grubość – i jak widać na rysunku, różną w różnych miejscach – jednak każdy z pierścieni zawiera w sobie pewien okrąg („rdzeń”), więc możemy sobie pozwolić na takie uproszczenie. Po chwili refleksji łatwo stwierdzić, że okręgi te muszą leżeć w różnych płaszczyznach, inaczej by się przecięły. Czy na pewno więc można znaleźć taką konfigurację w rzeczywistości?

Sprawę utrudnia niestety fakt, że każdy z okręgów na rysunku jest „nad” jednym i „pod” drugim z pozostałych, co uniemożliwia umieszczenie ich w trzech równoległych płaszczyznach, albo też w trzech płaszczyznach odrobinę obróconych względem płaszczyzny rysunku. Przy pewnym wysiłku da się znaleźć odpowiednią konfigurację złożoną z trzech identycznych elips położonych w trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach (rys. 2). Elipsy te mogą nawet mieć dowolnie mały mimośród, czyli być bardzo podobne do okręgów. Wydaje się, że od znalezienia odpowiednich okręgów dzieli nas niewiele, ale... wcale nie! Przekonamy się o tym, dowodząc następującego, jeszcze mocniejszego stwierdzenia:

Twierdzenie (M. Freedman): *Jeśli w przestrzeni trójwymiarowej dana jest pewna rodzina **okręgów** parami niespletanych, to cała konfiguracja również jest niespletana.*

Jak widać, dopuszczamy, by okręgi miały różne promienie, a nawet, by było ich więcej niż trzy – jak się okaże, ten ogólniejszy przypadek wcale nie wymaga więcej pracy. Jeśli Czytelnik ma za sobą lekturę artykułu Mikołaja Znamierowskiego (str. 1), to spodziewa się pewnie, że przedstawię tu dowód wychodzący w czwarty wymiar. I bardzo słusznie! Czwarty wymiar jest niejako wpisany w to twierdzenie jako *czas*: o braku splecia przekonamy się, podając przepis na rozplatanie, a to oczywiście wymaga czasu. Zanim jednak zwiększymy wymiar, to najpierw go zmniejszymy.

Co jest odpowiednikiem okręgu jeden wymiar niżej? Jeśli ustalimy punkt na osi rzeczywistej (tj. liczbę) $p \in \mathbb{R}$ i promień $r > 0$, to zbiorem punktów odległych od p o r jest po prostu para punktów $\{p - r, p + r\}$. Podobnie jak okręgi, dwie pary punktów mogą być spletane lub nie (zamiast definicji niech wystarczy tu rys. 3). Przyjmijmy, że mamy daną pewną rodzinę **par** parami niespletanych; wskażemy przepis na ich rozplatanie. Każdą z tych (leżących w $\mathbb{R}$) par $\{p - r, p + r\}$ przedłużmy do (leżącego w $\mathbb{R}^2$) okręgu zadanego równaniem $(x - p)^2 + t^2 = r^2$, jak na rysunku 4 – jest to nadal zbiór punktów odległych od $(p, 0)$ o r , tylko w przestrzeni o jeden wymiar większej. Jeśli tylko pary są niespletane, to odpowiadające im okręgi są rozłączne. Na otrzymanym obrazku przekrój prostą $t = 0$ daje wyjściowe pary, natomiast przekroje dla większych t niczym klatki filmu opisują nam, jak każdą z par zdeformować do punktu. Jeśli przyjmijmy przy tym, że pary „znikają” po sklejeniu do punktu, to unikniemy przecięć, czyli nachodzenia jednej pary na drugą. To oczywiście byłoby niemożliwe, gdyby pary były spletane. Zwróćmy uwagę, że ilustracje obok pokazują jedynie dwie pary (i dwa okręgi), ale podany przepis pozwala deformować dowolną liczbę par jednocześnie.

Pomysł na dowód Twierdzenia jest podobny, tylko wymaga więcej wyobraźni; żeby się w tym nie zgubić, wprowadźmy oznaczenia. Przyjmijmy, że danych jest n okręgów $o_1, \dots, o_n$, przy czym i -ty okrąg ma środek $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ i promień r_i , a ponadto jest zawarty w płaszczyźnie $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$.

Do współrzędnych x, y, z dodajemy teraz czwartą współrzędną t i każdy z okręgów przedłużamy do sfery w tej większej przestrzeni. Bardziej precyzyjnie, $S_i \subseteq \mathbb{R}^4$ definiujemy jako zbiór punktów oddległych od $(x_i, y_i, z_i, 0)$ o r_i , jednocześnie spełniających to samo równanie co wcześniej. Warto się zastanowić i odnotować – choć wymaga to odrobiny wyobraźni – że w przestrzeni punktów (x, y, z, t) pojedyncze równanie $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ zadaje podprzestrzeń wymiaru 3, i w tej podprzestrzeni punkty równoodległe od danego faktycznie tworzą tradycyjną sferę. W naszej konstrukcji kluczowa jest następująca obserwacja, analogiczna do przypadku jednowymiarowego.

Kluczowa obserwacja: *Jeśli okręgi $o_1, \dots, o_n \subseteq \mathbb{R}^3$ były niesplątane, to skonstruowane sfery $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}^4$ są rozłączne.*

„Kluczowa” nie oznacza, że oczywista. Zanim więc ją uzasadnimy, odetnijmy kupony od jej konsekwencji. Podobnie jak poprzednio, otrzymaną konfigurację możemy ciąć płaszczyznami $t = \text{const}$ na różnych wysokościach, otrzymując film o okręgach: każdy z nich kurczy się do punktu i znika, unikając kolizji z pozostałymi. Z braku lepszej ilustracji warto znowu spojrzeć na rysunek 4, tym razem w nowym świetle. Zresztą ten film można opisać bez wychodzenia do czwartego wymiaru: okrąg o_i kurczy się zgodnie ze wzorem na promień $r(t) = \sqrt{r_i^2 - t^2}$, a po czasie r_i znika.

Pozostaje techniczny szczegół: przyjęło się, że przy rozplątywaniu okręgów nie należy ich anihilować. Nietrudno to naprawić, bo dzięki rozłączności sfer S_i nie zdarza się, by dwa okręgi o_i „znikały” w tym samym punkcie i czasie. Możemy więc na chwilę przed

„zniknięciem” o_i zapauzować film i przesunąć ten tyci okrąg daleko poza scenę, by nie przeszkadzał w dalszym rozwoju wydarzeń (Czytelnik wybaczy mi tutaj skąpość opisu formalnego). W rezultacie po czasie $\max(r_1, \dots, r_n)$ widzimy n małych okręgów umieszczonych daleko od siebie, co rzeczywiście przekonuje nas o tym, że na początku nie mogły być splątane.

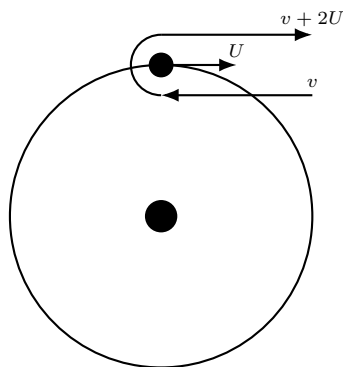
Czytelnikom Najwytrwalszym proponuję na deser uzasadnienie „kluczowej obserwacji”. Przypuśćmy, że dwie sfery S_i, S_j jednak się przecinają, a więc dwa okręgi o_i, o_j nachodzą na siebie w trakcie ewolucji. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy płaszczyzny tych dwóch okręgów zawierają wspólną prostą ℓ , na której ma miejsce kolizja. Prześledźmy więc dokładnie, co się dzieje na tej prostej. Początkowo przecięcia $o_i \cap \ell, o_j \cap \ell$ tych okręgów z prostą tworzą dwie pary punktów. Co ważne – niesplątanym, a więc jak na rysunku 3bc! Polecam zastanowić się, dlaczego przecięcia odpowiadające rysunkowi 3a są możliwe tylko w przypadku okręgów splątanych. Czytelnik zapewne już się spodziewa, co dzieje się dalej: te dwie pary podlegają ewolucji jak w przypadku jednowymiarowym. Rzeczywiście, twierdzenie Pitagorasa przekonuje nas, że przecięcie S_i z płaszczyzną odpowiadającą ℓ (czyli utworzoną przez osie ℓ oraz t) jest okręgiem – tym samym okręgiem, który rozważalibyśmy w ewolucji jednowymiarowej (jedynie punkt (x_i, y_i, z_i) należy zastąpić jego rzutem na ℓ). Wiemy już, że w jednowymiarowym przypadku kolizja między dwiema parami punktów na ℓ jest niemożliwa, zatem i kolizja między o_i oraz o_j tak naprawdę nie może mieć miejsca.

Czy warto było wchodzić w czwarty wymiar? Osądźcie sami.

Asysta grawitacyjna – jak to obliczyć?

Przemysław BORYS*

*Wydział Chemiczny, Politechnika Śląska w Gliwicach



Rys. 1. Manewr asysty grawitacyjnej wokół planety. Planeta porusza się z prędkością U względem Słońca, a prędkość pojazdu względem Słońca jest równa v

O tym, że asysta grawitacyjna jest często wykorzystywana podczas rozpędzania pojazdów kosmicznych, słyszał zapewne każdy miłośnik astronautyki. Wiele sond kosmicznych, szczególnie tych skierowanych w odległe zakątki Układu Słonecznego, korzysta z tej metody powiększania prędkości. Technika ta jest doskonałym przykładem zastosowania orbit hiperbolicznych w astronomii (ściślej – w astrodynamice, nauce zajmującej się orbitami sztucznych pojazdów kosmicznych). Niestety, jej szczegóły rachunkowe nie są powszechnie omawiane w podręcznikach fizyki ogólnej czy nawet w podręcznikach astronomii – dlatego zajmiemy się nimi w poniższym artykule.

Podstawowa idea asysty grawitacyjnej wydaje się bardzo prosta. Na rysunku 1 widać, jak pojazd kosmiczny poruszający się z prędkością v wchodzi tymczasowo na orbitę planety poruszającej się z prędkością U . Porusza się wokół niej po półorbicie (180°) z prędkością $v + U$ względem planety, aby następnie opuścić ją z tą samą prędkością $v + U$ (względem planety), lecz w przeciwnym kierunku. Względem nieruchomego obserwatora – np. na Słońcu, prędkość ta będzie powiększona o prędkość planety U , dając $v + 2U$.

Wszystko pięknie, tylko... Jak to zrobić, żeby pojazd kosmiczny „częściowo” orbitował wokół planety? I jak kontrolować to, w którym miejscu pojazd wchodzi na orbitę, a w którym z niej wychodzi? Aby rozwiązać ten problem, musimy posłużyć się modelem orbit otwartych, a więc orbit hiperbolicznych (lub parabolicznych, ale w artykule skupimy się na tych pierwszych).

Kąt ugięcia trajektorii

Zajmiemy się najpierw wyznaczeniem kąta ugięcia trajektorii pojazdu kosmicznego. Wspomagając się rysunkiem 2, widzimy, że rzut prędkości na oś symetrii zmienia znak przy ugięciu i przechodzi od $v \cos(180^\circ - \theta_0)$ (zwróconego w kierunku prawego górnego rogu) do $-v \cos(180^\circ - \theta_0)$, gdzie v to długość wektorów v_{in} i v_{out} . Ponieważ $\cos(180^\circ - \theta_0) = -\cos \theta_0$, więc:

$$\Delta v = 2v \cos \theta_0.$$

Tę składową prędkości można również wyznaczyć z przyspieszenia, działającego w żądanym kierunku. Wówczas, korzystając z prawa grawitacji Newtona, w krótkim czasie δt prędkość zmienia się o δv dane wzorem:

$$\delta v = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \delta t.$$

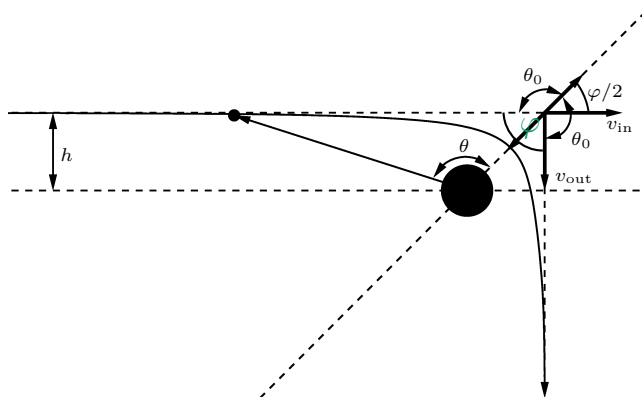
Aby uzyskać Δv , sumujemy infinitezymalne przyrosty δv dla możliwych wartości t :

$$\Delta v = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \delta t,$$

przy czym znak „-” wynika z faktu, że siła grawitacji działa w kierunku planety i zarazem odwrotnie do przyjętego kierunku prędkości (prawego górnego rogu rysunku).

Dla Czytelników, którzy nie znają metody całkowania, wyjaśniamy: podane wyrażenie opisuje pole pod wykresem funkcji $\cos \theta$, ograniczone przedziałem od $-\theta_0$ do θ_0 . Każdy składnik sumy to pole prostokąta o podstawie $\delta \theta$ i wysokości $\cos \theta$.

Zachęcamy także do samodzielnego wyprowadzenia tego faktu, z wykorzystaniem definicji pochodnej: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ oraz faktu, że pochodną funkcji sinus jest cosinus.



Rys. 2. Kąt ugięcia trajektorii pojazdu kosmicznego korzystającego z asysty grawitacyjnej

Sumowanie po czasie zamienimy teraz na łatwiejsze sumowanie po kącie θ . Wyrażmy najpierw przyrost czasu δt poprzez przyrost kąta: zakładając chwilową prędkość kątową ω , mamy $\delta t = \frac{\delta \theta}{\omega}$. Z mechaniki klasycznej dla ruchu centralnego moment pędu spełnia równość $J = I\omega = mr^2\omega$, co daje:

$$\omega = \frac{J}{mr^2} \implies \delta t = \frac{mr^2}{J} \delta \theta.$$

Podstawiając do wzoru na przyrost prędkości, dostajemy:

$$\delta v = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \cdot \frac{mr^2}{J} \delta \theta = -\frac{GMm}{J} \cos \theta \delta \theta,$$

a po wysumowaniu po kącie θ :

$$\Delta v = \sum_{\theta=-\theta_0}^{+\theta_0} -\frac{GMm}{J} \cos \theta \delta \theta.$$

Dla bardzo małych $\delta \theta$ możemy skorzystać z faktu:

$$\lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \sum_{\theta=-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta \delta \theta = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta d\theta = 2 \sin \theta_0,$$

co daje nam:

$$\Delta v \approx -\frac{2GMm}{J} \sin \theta_0.$$

W powyższym równaniu musimy jeszcze obliczyć moment pędu $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Jest on zachowany w całej trajektorii i najłatwiej go wyznaczyć w dużej odległości od ciała niebieskiego, gdzie prędkość nie została jeszcze zmieniona przez grawitację. Po podstawieniu $r \sin \theta = h$ (odległość planety od asymptoty hiperboli) dostajemy $J = mvh$, a wzór na zmianę prędkości przechodzi w:

$$\Delta v = -\frac{2GM}{hv} \sin \theta_0.$$

Porównując z wcześniejszym wyrażeniem na zmianę prędkości:

$$2v \cos \theta_0 = -\frac{2GM}{hv} \sin \theta_0,$$

otrzymujemy zależność:

$$(*) \quad \operatorname{tg} \theta_0 = -\frac{hv^2}{GM}, \implies \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{hv^2}{GM}.$$

Wartość φ to kąt ugięcia trajektorii pojazdu kosmicznego, a $\theta_0 = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$ (rys. 2). Przesunięty tangens jest kotangensem z minusem, stąd wynik (*).

Maksymalne zbliżenie do planety

Parametr zderzenia h , tj. odległość, w jakiej „asymptotycznie” chcemy przelecieć obok planety, zawsze jest większy niż minimalna odległość, w jakiej pojazd kosmiczny mija planetę, na której podlega asysty grawitacyjnej. Aby uniknąć

20 DNI MAJÓW:





To równanie możemy również zapisać w bardziej zwartej formie, porównując je z równaniem hiperboli we współrzędnych biegunowych (patrz: dodatkowy materiał w wersji elektronicznej artykułu). Wówczas widzimy, że $r_{\min} = a(e - 1)$, przy czym $a = \frac{GM}{v_0^2}$ to połowa odległości między ogniskami hiperboli, natomiast $e = \sqrt{1 + \frac{v_0^4 h^2}{G^2 M^2}}$ to jej mimośród. Takie przedstawienie równania pozwala uniknąć błędów związanych z operowaniem bardzo rozbudowaną formułą.

zderzenia, warto zatem mieć możliwość obliczenia minimalnej odległości, na jaką pojazd zbliża się do planety. W tym celu zapisujemy:

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Czyli: na energię pojazdu kosmicznego składa się jego energia kinetyczna związana z ruchem w kierunku planety (opisywana przez składową radialną prędkości v_r), energia ruchu obrotowego ($J^2/2mr^2$) oraz energia potencjalna grawitacji. Kiedy pojazd jest bardzo daleko od planety, jego energia potencjalna jest praktycznie równa zero, a więc jego energia i moment pędu dane są wtedy przez $E = mv^2/2$, $J = mvh$. Przy maksymalnym zbliżeniu składowa radialna prędkości jest równa zero i korzystając z zasad zachowania energii i zachowania momentu pędu (E i J są stałe), dostajemy:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2 h^2 \frac{1}{r_{\min}^2} - \frac{GMm}{r_{\min}}, \quad v^2 r_{\min}^2 + 2GM r_{\min} - v^2 h^2 = 0,$$

i po rozwiązaniu równania kwadratowego:

$$r_{\min} = \frac{-GM}{v^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{v^4 h^2}{G^2 M^2}} \right) = \frac{GM}{v^2} \left(\sqrt{1 + \frac{v^4 h^2}{G^2 M^2}} - 1 \right).$$

Asysta grawitacyjna Voyagera 1 z 5 marca 1979 roku

Voyager 1 wykonał asystę grawitacyjną wokół Jowisza ($GM = 1,27 \cdot 10^8 \text{ km}^3/\text{s}^2$). Do planety podchodził z prędkością $v_0 = 10,8 \text{ km/s}$ (względem planety) i zbliżył się na odległość $3,48 \cdot 10^5 \text{ km}$. Kąt wektora prędkości sondy do wektora prędkości planety przed ugięciem wynosił $\varphi = 180^\circ - 63,8^\circ = 116,2^\circ$.

Zadanie: Obliczyć kąt ugięcia trajektorii oraz parametr zderzenia. Jakie były prędkości względem Słońca przed i po zderzeniu?

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć parametr zderzenia, korzystamy ze wzoru na marginesie

$$r_{\min} = a(e - 1):$$

$$a = \frac{GM}{v_0^2} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ km} \implies e = \frac{r_{\min}}{a} + 1 = 1,319$$

$$\implies h = \frac{GM}{v_0^2} \sqrt{e^2 - 1} = 9,38 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Dysponując h (zwróćmy uwagę, że jest ono blisko 3 razy większe niż $r_{\min}$), łatwo obliczyć kąt ugięcia trajektorii φ z (*):

$$\varphi = 2 \arccos \left(\frac{hv_0^2}{GM} \right) = 98,6^\circ.$$

Aby określić prędkości względem Słońca przed (v_i) i po zderzeniu (v_f), rozkładamy prędkość w układzie planety na styczną i prostopadłą do prędkości planety i część styczną uzupełniamy o prędkość planety (12,83 km/s):

$$v_i = \sqrt{\underbrace{v_0^2 \sin^2 \varphi}_{\text{prędkość prostopadła}} + \underbrace{(v_0 \cos \varphi + 12,83 \text{ km/s})^2}_{\text{prędkość styczna}}} = 12,593 \text{ km/s},$$

$$v_f = \sqrt{\underbrace{v_0^2 \sin^2(\varphi - \Phi)}_{\text{prędkość prostopadła}} + \underbrace{(v_0 \cos(\varphi - \Phi) + 12,83 \text{ km/s})^2}_{\text{prędkość styczna}}} = 23,324 \text{ km/s}.$$

Parametry innych asyst dla Voyagera 1 i Voyagera 2

Na koniec, by dać możliwość dodatkowego przećwiczenia przedstawionej wiedzy, podajemy tabelę z danymi dotyczącymi manewrów sond Voyager 1 i Voyager 2.

Misja	$r_{\min}$ [km]	v_0 [km/s]	GM [km ³ /s ²]	v_B [km/s]	φ
Voyager 1, Jowisz	$3,48 \times 10^5$	10,8	$1,27 \times 10^8$	12,8	116°
Voyager 2, Jowisz	$7,21 \times 10^5$	7,62	$1,27 \times 10^8$	12,7	132°
Voyager 2, Saturn	$1,61 \times 10^5$	10,7	$3,79 \times 10^7$	9,59	$81,8^\circ$
Voyager 2, Uran	$1,07 \times 10^5$	14,7	$5,79 \times 10^6$	6,71	74°

Źródło: R.J. Cesarone (1989). W oryginalnym artykule kąty podawane były względem grotu prędkości planety, tu są przeliczone na kąt między wektorami zaczepionymi we wspólnym punkcie. Uwaga: prędkości planet wykazują różnice w różnych miejscach swojej orbity!

Literatura

1. R.J. Cesarone, „A gravity assist primer”, *AIAA Student Journal*, 1989.
2. R.R. Bate, D.D. Mueller, J.E. White, „Fundamentals of astrodynamics”, Dover, 1971.
3. J. Binney, S. Tremaine, „Galactic dynamics”, Princeton University Press, 2008.
4. N. Harnew, „Classical Mechanics: open orbits”, wykład, Oxford, 2017.
5. S. Charzyński, „Proca grawitacyjna”, *Delta* 7, 2014.
6. David (Hop) Hollister, „Conic Sections & Celestial Mechanics” Coloring Book (Az Publishing, 2011).

Kosmiczne latanie

Sławosław Uznański-Wiśniewski uskrzydlił nasze myśli. O planetach, o marzeniach, o przyszłości. Ale ani Sławosław, ani Gagarin, ani nawet Łajka nie byli pierwszymi Ziemianami w Kosmosie. Komu należy się laur pierwszeństwa?

Zanim o tym, cofnijmy się do kapitulacji Niemiec w maju 1945 roku. Do niemieckich zakładów produkcji rakiet pierwsi z aliantów dotarli Amerykanie. Znaleźli setki gotowych i rozłożonych rakiet V-2, a także kluczowe dokumenty i podzespoły. Wszystko to zostało załadowane na 300 wagonów kolejowych i przetransportowane do portu w Antwerpii, a stamtąd do Stanów Zjednoczonych, gdzie stało się podstawą rozwoju programu kosmicznego.

Ładunek trafił na poligon w White Sands Missile Range w Nowym Meksyku. Kluczową operacją towarzyszącą było dowieszenie tam także głównego konstruktora rakiety, Wernhera von Brauna, wraz z ponad 100 członkami jego zespołu. Von Braun został dyrektorem testów, odpowiadał za montaż rakiet, przeprowadzenie testów i analizę wyników. 10 maja 1946 r. w obecności polityków i mediów wystrzelona rakietą V-2 osiągnęła pułap 71 mil (ok. 114 km), zatem przekroczyła umowną granicę atmosfery ziemskiej (100 km). Piszę o tym dlatego, że testy wojskowe prawie od razu były połączone z badaniami naukowymi. Pierwsi Ziemianie, którzy przekroczyli umowną granicę kosmosu i wrócili bezpiecznie z powrotem, wystrzeleni zostali w rakiecie V-2 20 lutego 1947 roku. Osiągnęli wysokość około 109 kilometrów, pozostali tam przez 3 minuty, a następnie opadli na Ziemię w kapsule zawieszanej na spadochronie. Okazało się, że byli w zdumiewająco dobrym stanie, dzięki czemu zaraz do rakiet zapakowano koty, psy, małpy, a na końcu ludzi.

Pionierami podróży w kosmos były zapakowane w niewielki pojemnik wywiltne karłowate, a bardziej po ludzku mówiąc, muszki owocowe *Drosophila melanogaster*.

Dziś nie będę pisać o tym, jak ważnym organizmem modelowym dla nauki jest ta pospolita muszka, ile mutantów stworzono w laboratoriach na całej Ziemi, ani też o tym, że krzyżowanie muszek w setkach buteleczek w „muszym pokoju” Thomasa Morgana dało podwaliny współczesnej genetyki. Nie wspomnę, że muszka jest podobna do człowieka, stanowi model badań jego wielu chorób i fizjologii (o tym polecamy przeczytać w Δ_{25}^7), a także, że aż sześć Nagród Nobla zostało przyznanych za badania nad tym owadem.

Dziś będę pisać o tym, co stanowi esencję bycia muchą: o składaniu jaj na gnijących resztkach, o lataniu oraz o skutecznym umykaniu przed packą i ludzką dłońią.

Mierząca mniej więcej 2,5 mm samica owocówki składa w ciągu trwającego niespełna dwa miesiące życia między 400 a 1000 jaj, każde o wielkości około 0,5 mm. Larwa wykuwa się po 12 godzinach, w ciągu 4 kolejnych dni przechodzi dwie wylinki, zmienia się w poczwarkę i już po mniej więcej 7–10 dniach powstaje dorosły, zdolny do rozmnażania się, owad. Jest on mistrzem manewrów w locie. Jego skrzydła biją z częstotnością 220 razy na sekundę w skomplikowanym, kreślącym

złożone trójwymiarowe figury ruchu. W locie potrafi w ciągu ułamka sekundy zmienić gwałtownie kierunek, aby uniknąć kolizji z obiektami poruszającymi się z podobną dynamiką, umie także latać do tyłu.

Kwestia unoszenia się w powietrzu owadów jest od lat obiektem intensywnych badań. Cytowana przez złośliwców anegdota mówiła, że po latach obliczeń naukowcom udało się wykazać, iż trzmiele nie mogą (tzn. nie mają „prawa”) unosić się w powietrzu. Badania w tunelach aerodynamicznych, z użyciem kamer o szybkości 7500 klatek na sekundę, analiza robotycznych modeli poruszających się w odpowiednio lepkich płynach odkryły tajemnicę owadów, która umknęła badaczom. W ruchu trzepoczących skrzydeł powstaje tak zwany wir krawędzi natarcia tworzący się nad górną krawędzią skrzydła zarówno przy ruchu w przód, jak i w tył. To właśnie ten wir jest odpowiedzialny za dodatkową siłę nośną, a im mniejszy owad, tym szybciej musi poruszać skrzydłami, i tym większy udział wiru w locie zwierzęcia.

Ciało muszki wyposażone jest w wiele sensorów pozwalających znakomicie orientować się w przestrzeni, nawigować w locie, wyszukiwać jedzenie, unikać przeszkód i drapieżników.

Muszka owocowa, jak twierdzi badacz tych zwierząt – profesor Michael Dickinson z California Institute of Technology, ma prawdopodobnie najszybszy system analizy danych wizualnych wśród żywych organizmów. Oprócz złożonych oczu, do błyskawicznych reakcji ciała na zmiany w otoczeniu przyczynia się cały zestaw czujników. Są to przyoczka do ustalania horyzontu oraz receptory znajdujące się na krawędzi i u podstawy skrzydeł, pozwalające odczuwać ich odkształcenia, a także zapachy z otoczenia. Do wykrywania cząsteczek związków chemicznych służą także czułki, a ich dodatkową rolę jest odbiór bodźców mechanicznych. Przechwytujące – zredukowana druga para skrzydeł – działają jak metronom i żyroskop. Do tego dochodzą działające w szczególny sposób mięśnie poruszające skrzydłami, umiejętność nawigowania i utrzymywania kierunku lotu na podstawie wzorów polaryzacji światła słonecznego oraz wyspecjalizowany sposób podążania za nieciągłymi śladami zapachowymi w powietrzu.

Wszystko powyższe wyjaśnia niezwykle możliwości owocówek do rozprzestrzeniania się. Już w latach 30. XX wieku prace Theodosiusa Dobzhansky’ego

wykazały, że odległe o kilkaset kilometrów od siebie populacje muszek z rodzaju *Drosophila* są podobne genetycznie. W latach 80. XX wieku zespół J. A. Coyne przeprowadził eksperyment, w ramach którego z grupy około 60 tysięcy muszek wypuszczonych o godzinie 18:00 na środku pustyni Mojave dwie grupy po 17 sztuk dotarły o godzinie 9 rano do pułapek z bananową pulpą w dwóch oazach oddalonych o 6 km i 15 km od miejsca uwolnienia owadów. Stawia to muszkę w randze ultramaratończyków, pokonały bowiem odległość będącą około 6 milionów razy większą niż długość ich ciała.

O szybkości systemu analizy i reakcji muszki owocowej świadczy też, będąca poza ludzką wyobraźnią i percepcją, umiejętność ucieczki przed packą na muchy. Muszka jest w stanie zobaczyć zbliżający się obiekt i, przewidując jego ruch, zrobić unik: przyjmuje odpowiednie ułożenie nóg i ciała, lekko „przykuca”, wyskakuje w górę i odlatuje w odwrotnym kierunku

niż zbliżająca się packa. Jeżeli owad widzi ją od frontu, przesuwa środkową parę nóg do przodu i wybija się w tył. Jeśli packa zbliża się z tyłu – reakcja jest odwrotna. Jeśli zaś obiekt zbliża się z boku, *Drosophila* ustawia równo nogi, ale wychyla na bok ciało. Całość trwa 200 milisekund i ... pudło!

Myślę o tym, obserwując chmurkę muszek spłoszonych z ciut zleżalej brzoskwini na moim stole. I, zamiast złapać za packę, macham ręką, bo w mojej ludzkiej głowie nie mieści się, że te muszki ze 140 tysiącami neuronów w mózgu mają nieziemskie możliwości.

Odnosiłki literaturowe:

J. A. Coyne i wsp. *Long-Distance Migration of Drosophila*. The American Naturalist 119 (4), 1982

K. J. Leitch i wsp. *The long-distance flight behavior of Drosophila supports an agent-based model for wind-assisted dispersal in insects*. PNAS, 118 (17), 2021

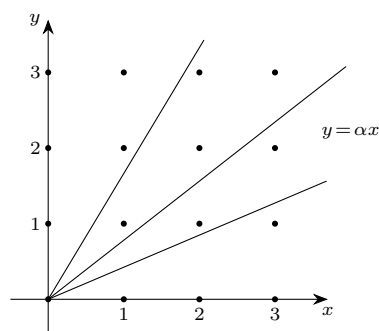
G. Card, M. H. Dickinson. *Visually Mediated Motor Planning in the Escape Response of Drosophila*. Current Biology, 18 (17), 2008

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Geometria liczb, algorytmy Herona i Euklidesa oraz ułamki łańcuchowe

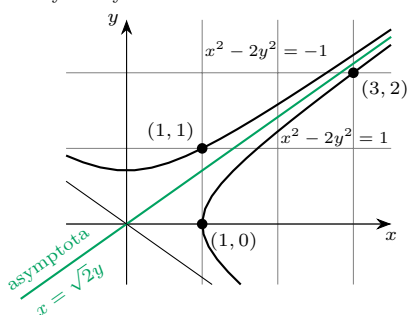
Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Proste $y = \alpha x$ dla różnych liczb niewymiernych $\alpha > 0$ i punkty kratowe. Jedynym punktem kratowym leżącym na tych prostych jest początek układu współrzędnych

Czytelnikowi Dociekliwemu proponujemy zbadanie, które z własności (W1)–(W4) sformułowanych w dalszej części artykułu mają swoje uogólnienia na różne od $\sqrt{2}$ liczby niewymierne.



Rys. 2. Hiperbole $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, ich asymptoty i punkty kratowe (1, 1), (3, 2) na nich leżące (punktu (1, 0) nie bierzemy pod uwagę)

Równanie (1) jest znane jako równanie Pella. Więcej o nim można przeczytać w artykule M. Skałby w Δ_{21}^{12} .

Celem tego artykułu jest przedstawienie, w języku geometrycznej teorii liczb, zagadnienia aproksymacji liczb niewymiernych liczbami wymiernymi, przy użyciu konstrukcji należących do świata starożytnego. Inspiracją dla autora było następujące twierdzenie (podane za [Olds, 2000]).

Twierdzenie 1.1. Każda prosta $y = ax + b$, gdzie a jest liczbą niewymierną, b zaś jest dowolną liczbą rzeczywistą, ma po obu stronach nieskończenie wiele punktów kratowych leżących bliżej niej niż dowolna przypisana odległość $\varepsilon > 0$, bez względu na to, jak małą wartość wybrano dla ε .

Pokażemy **konstruktywny dowód** tego twierdzenia dla $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 0$, przypadku związanego z aproksymacją wymierną liczby $\sqrt{2}$. Będzie nas zatem interesowała prosta $x = \sqrt{2}y$ i liczba $\sqrt{2}$, którą wybraliśmy z powodu jej ważnego miejsca w historii matematyki, w świetle kryzysu, który wywołała niegdyś w szkole pitagorejskiej. Wybór konkretnej liczby niewymiernej pozwala też na zobaczenie aproksymacji liczbowych i na dalsze eksperymenty numeryczne. Interesują nas liczby, a nie tylko symbole.

Jest oczywiste, że na prostej $x = \sqrt{2}y$ leży tylko jeden punkt kratowy, którym jest (0, 0).

Pokażemy algorytm dający przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ dowolnie blisko z obu stron, jak chce twierdzenie 1.1, i w pewnym sensie najlepszy, a powiązany blisko z jednej strony z **algorytmem Herona** aproksymacji wymiernej liczby $\sqrt{2}$, a z drugiej z **algorytmem Euklidesa** dowodzącym niewymierność tej liczby.

Zauważmy, że np. kolejne ucięcia rozwinięcia dziesiętnego:

$$1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, \dots$$

liczby $\sqrt{2}$ zbiegają do niej z dołu oraz bardzo wolno, a metoda Herona daje bardzo szybkie, znakomite przybliżenia, ale niestety tylko z góry, co wkrótce pokażemy.

Wracamy do twierdzenia 1.1 i zapowiadanego konstruktywnego dowodu. Pomysł jest następujący. Rozważmy dwie hiperbole:

$$(1) \quad x^2 - 2y^2 = -1 \quad \text{ i } \quad x^2 - 2y^2 = 1,$$

które będziemy nazywać odpowiednio górną i dolną. Ich asymptotą jest prosta $x = \sqrt{2}y$ (rys. 2). Jeśli na każdej z hiperbol wskażemy nieskończenie wiele punktów kratowych, to punkty te będą spełniać wymagania twierdzenia 1.1.

Wskazówki do zadań ze strony 3

1. Warto zacząć rozwiązanie od znalezienia przykładu na płaszczyźnie rzutowej (pomijając wymóg braku równoległości z treści zadania).
2. Między punktami z zadania narysuj 9 odcinków tej samej długości. Czy rysunek nie przypomina pewnej bryły? Jakiego punktu na nim brakuje?
3. Zaczniij od znalezienia takiej konfiguracji okręgów rozmieszczonych na sferze. Jakiego przekształcenia można użyć, by przenieść ten układ na płaszczyznę?



Zacznijmy od wykazania następującej własności.

(W1) Jeśli punkt kratowy (p, q) leży na górnej lub dolnej hiperboli, to punkt kratowy $(p^2 + 2q^2, 2pq)$ leży na dolnej hiperboli.

Dowód. Ponieważ $(p^2 - 2q^2)^2 = 1$, więc ze wzoru skróconego mnożenia

$$(p^2 + 2q^2)^2 - 1 = (p^2 + 2q^2)^2 - (p^2 - 2q^2)^2 = 2p^2 \cdot 4q^2 = 2(2pq)^2,$$

a zatem $(p^2 + 2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = 1$, co należało wykazać.

Motywacją dla powyższej konstrukcji jest następujący pomysł. Jeśli $w = \frac{p}{q}$ jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$, to $2/w$ również, tylko z drugiej strony. Spodziewamy się, że średnia arytmetyczna $\bar{w}$ tych dwóch liczb jest jeszcze lepszym przybliżeniem. Tymczasem:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \left(w + \frac{2}{w} \right) = \frac{p^2 + 2q^2}{2pq}.$$

Punkt $(p_1, q_1) = (1, 1)$ na górnej hiperboli odpowiada liczbie wymiernej $\frac{p}{q} = 1$, czyli części całkowitej liczby $\sqrt{2}$, a dalsze otrzymane w opisany sposób punkty kratowe leżą na dolnej hiperboli i odpowiadają aproksymacji liczby $\sqrt{2}$ metodą Herona [Krzyżanowski, 2021]. Pierwszymi wyrazami tego ciągu na dolnej hiperboli są liczby

$$(2) \quad \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

Narzucają się następujące pytania: jak szybko ciąg ten zbiega do swojej granicy?, czy na dolnej hiperboli nie ma innych punktów kratowych? oraz czy nie ma analogicznego algorytmu dającego nieskończony ciąg punktów kratowych na hiperboli górnej?

Na pierwsze pytanie odpowiada następujące oszacowanie.

(W2) Jeśli punkt kratowy (p, q) leży na hiperboli $x^2 - 2y^2 = 1$, to $\frac{p}{q} > \sqrt{2}$ oraz

$$(3) \quad \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Dowód. Mamy $p^2 - 2q^2 = (p - \sqrt{2}q)(p + \sqrt{2}q) = 1$, zatem $p > \sqrt{2}q$. Ponieważ także $1 < \sqrt{2}$, więc

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{2} = \frac{1}{q(p + \sqrt{2}q)} < \frac{\sqrt{2}}{q(2\sqrt{2}q)} = \frac{1}{2q^2}. \quad (\text{Q.E.D.})$$

Na drugie pytanie odpowiedź jest prosta. Łatwo sprawdzić, że na dolnej hiperboli leży także punkt $(99, 70)$. Dalej pokażemy, że takich punktów jest nieskończenie wiele.

Odpowiedź na trzecie pytanie jest twierdząca. Mamy:

(W3) Na górnej hiperboli leży nieskończenie wiele punktów kratowych (p, q) .

Dowód. Rozważmy ciąg (p_n, q_n) określony rekurencyjnie:

$$(4) \quad p_{n+1} = p_n + 2q_n, \quad q_{n+1} = p_n + q_n.$$

Proste rachunki prowadzą do równości $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = -(p_n^2 - 2q_n^2)$. Ponieważ punkt $(p_1, q_1) = (1, 1)$ leży na górnej hiperboli, więc punkty o numerach nieparzystych 3, 5, 7, ... także leżą na tej hiperboli. (Q.E.D.)

Tym samym twierdzenie 1.1 dla prostej $x = \sqrt{2}y$ zostało udowodnione.

Podsumowując: wykazaliśmy, że startując z punktu $(p_1, q_1) = (1, 1)$, otrzymaliśmy taki nieskończony ciąg

(p_n, q_n) punktów kratowych, że punkty o numerach nieparzystych leżą na hiperboli górnej, punkty o numerach parzystych leżą na hiperboli dolnej.

Jest oczywiste, że ma miejsce nierówność

$$(5) \quad \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \sqrt{2} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$$

oraz że ułamki odpowiadające kolejnym punktom na hiperboli górnej tworzą ciąg ściśle rosnący, zbieżny do $\sqrt{2}$, natomiast ułamki odpowiadające kolejnym punktom na hiperboli dolnej tworzą ciąg ściśle malejący, także zbieżny do $\sqrt{2}$. Kolejne wyrazy ciągu przekształcają z jednej hiperboli na drugą. Złożenie dwóch iteracji prowadzi do odwzorowania:

$$(p_n, q_n) \mapsto (3p_n + 4q_n, 2p_n + 3q_n) = (p_{n+2}, q_{n+2}),$$

które zastosowane do punktów początkowych $(1, 1)$ i $(3, 2)$ określa wszystkie kolejne punkty kratowe, odpowiednio, na górnej i dolnej hiperboli. Dowód tego faktu można znaleźć np. w książce [Sierpiński, 1965].

Powracając do oszacowania (3) dla aproksymacji wymiernej liczby $\sqrt{2}$ metodą Herona, można spytać, czy liczbę 2 w mianowniku po prawej stronie nierówności można zastąpić większą, aby uzyskać lepsze oszacowanie. Nie chcąc tu, z braku miejsca, wchodzić w subtelności teorii liczb, pokażemy tylko, że liczby 2 nie można zastąpić liczbą 3.

(W4) Jeśli $1 < \frac{p}{q} < \frac{3}{2}$, to $\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{3q^2}$.

Dowód. Mamy $|2q^2 - p^2| \geq 1$ i $\sqrt{2} + \frac{p}{q} \leq 3$, stąd

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q^2(\sqrt{2} + \frac{p}{q})} \geq \frac{1}{3q^2}. \quad (\text{Q.E.D.})$$

Z zależności (4) wynika, że $q_{k+1}p_k - p_{k+1}q_k = p_k^2 - 2q_k^2 = (-1)^k$, a stąd $\left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$. Z tej nierówności i nierówności (5) otrzymujemy bez trudu oszacowanie

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

dla każdej liczby kratowej (p_k, q_k) na dolnej i górnej hiperboli.

Początkowymi wyrazami ciągu określonego rekurencyjnie w (4) z $(p_1, q_1) = (1, 1)$ są

$$(6) \quad \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \dots, \frac{665857}{470832}, \dots$$

Porównując ten ciąg z ciągiem (2), widzimy, że ten drugi jest dużo szybciej zbieżny i że gęstość wyrazów ciągu (2) w ciągu (6) dąży do zera, gdy $p_n, q_n \rightarrow \infty$.

Porównajmy szybkość zbieżności aproksymacji dziesiętnych liczby $\sqrt{2}$ za pomocą ciągu $(1, 1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, \dots)$ z szybkością aproksymacji metodą Herona. k -cyfrowa aproksymacja dziesiętna jest oddalona od liczby $\sqrt{2}$ o mniej niż $\frac{1}{10^{k-1}}$. Natomiast dla aproksymacji Herona mamy:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2 \cdot 10^{2k-2}},$$

gdzie k jest liczbą cyfr liczby q_n . Wynika to natychmiast z oszacowania (3) oraz nierówności $10^{k-1} \leq q_n$ (porównaj [Apostol, 2002]).

Rekurencja (4) odegrała fundamentalną rolę w historii matematyki poprzez swoje miejsce w geometrycznym dowodzie niewspółmierności boku kwadratu z jego przekątną. Mianowicie, jeśli skierujemy rekurencję w przeciwną stronę (rys. 3), tzn.

$$(7) \quad x_{n+1} = 2y_n - x_n, \quad y_{n+1} = x_n - y_n,$$

rozpoczynając od $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 1$, liczb reprezentujących długość przekątnej i boku kwadratu, odpowiednio, to otrzymamy ciągi malejące do zera, przy czym stosunek x_n/y_n jest taki sam dla wszystkich n , równy $\sqrt{2}$. W oryginalnym dowodzie geometrycznym opartym na **algorytmie Euklidesa** mówi się o długościach przekątnej i boku kwadratu, ich stosunku i podobieństwie konstruowanych kolejno trójkątów (rys. 4).

Geometryczny dowód niewspółmierności przekątnej CB i boku CA kwadratu jest następujący.

Gdyby istniała wspólna miara L , to mielibyśmy $CB = pL$, $CA = bL$ dla pewnych liczb naturalnych p i b . Stąd:

$$B'A = B'A' = CA' = (p - b)L, \quad CB' = CA - B'A = (2b - p)L$$

i podobnie CB'' oraz CA'' i wszystkie następne długości przekątnych i boków w konstrukcji miałyby wspólną miarę L . Ale tak nie może być, bowiem długości tych przekątnych i boków dążą do zera, zatem od pewnego momentu są mniejsze od L . Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi niewspółmierności przekątnej CB i boku CA rozważanego kwadratu (patrz [Euklides], Ks. X. Tw. 2).

Z rysunku 4 odczytujemy następujące relacje: $CB = CA' + CA$ oraz $CA = CB' + CA'$, skąd $CB = CB' + 2CA'$. Druga i trzecia relacja definiują rekurencje (4) i (7). Mamy też: $\frac{CB}{CA} = \frac{CB'}{CA'}$, skąd

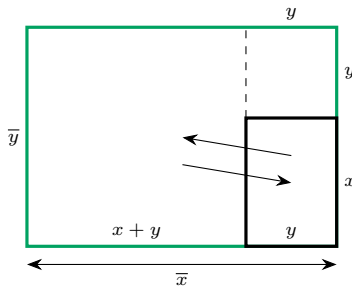
$$\frac{CB}{CA} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{CB}{CA}}.$$

Z powyższej równości wnioskujemy, z jednej strony, że $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}$, a z drugiej, że liczba $\sqrt{2}$ ma następujące rozwinięcie w nieskończony **ułamek łańcuchowy**: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$, to znaczy

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}},$$

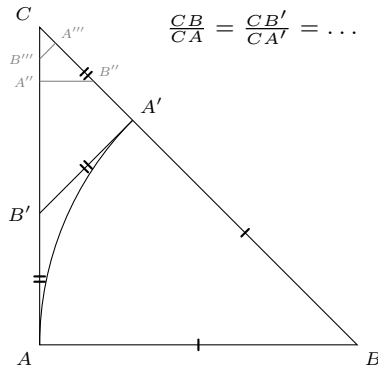
którego reduktę $[1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $[1; 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$, $[1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}$, ... są kolejnymi wyrazami ciągu (6).

Algorytm produkujący kolejne reduktę liczby $\sqrt{2}$ (dający przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ dowolnie blisko z obu stron, jak chce twierdzenie 1.1) jest również w pewnym



Rys. 3. Geometryczna interpretacja odwzorowania $(x, y) \leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + 2y \\ \bar{y} = x + y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\bar{y} - \bar{x} \\ y = \bar{x} - \bar{y} \end{cases}$$



Rys. 4. Geometryczny dowód niewspółmierności przekątnej CB i boku CA kwadratu

sensie najlepszy. Wyjaśniają to następujące własności ułamków łańcuchowych [Chinczyn, 1964]:

(1) *Każdy redukt p/q ułamka łańcuchowego danej liczby niewymiernej α jest najlepszym możliwym wymiernym przybliżeniem tej liczby o mianowniku nie większym od q .*

(2) *Jeśli ułamek nieprzywiedlny spełnia nierówność $|\frac{p}{q} - \alpha| < \frac{1}{2q^2}$, to jest jednym z reduktów ułamka łańcuchowego liczby α .*

Jeśli postawimy pytanie o najlepsze przybliżenie inaczej, pytając o liczbę wymierną o najmniejszym możliwym mianowniku będącą najlepszym przybliżeniem liczby niewymiernej α z żadaną dokładnością, to niekoniecznie będzie nią redukt ułamka łańcuchowego reprezentującego tę liczbę. Na przykład liczba $\frac{4}{3}$ nie występuje w ciągu (6), a jest najlepszym, w powyższym sensie, przybliżeniem wymiernym liczby $\sqrt{2}$, dla którego $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < 0,081$.

Mamy bowiem $|\sqrt{2} - \frac{1}{1}| > |\sqrt{2} - \frac{3}{2}| > 0,085$, ale $|\sqrt{2} - \frac{4}{3}| = 0,080 \dots < 0,081$.

Zainteresowanym historią bogatego świata liczb niewymiernych, w szczególności historią zagadnień związanych z ich wymierną aproksymacją, polecamy fascynującą monografię [Havil, 2012].

Bibliografia

- [Apostol, Mnatsakanian, 2002] T. Apostol, M. A. Mnatsakanian, *Surprisingly Accurate Rational Approximations*, Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 4 (Oct., 2002), pp. 307-310.
- [Euklides] Euclid's Elements, Book X: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookX/propX2.html>
- [Havil, 2012] J. Havil, *Irrationals*, Princeton University Press, 2012.
- [Chinczyn, 1964] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, 1964.
- [Krzyżanowski, 2021] P. Krzyżanowski, G. Łukaszewicz, *Przez wieki z metodą Newtona*, Δ_{21} .
- [Olds, 2000] C. D. Olds, A. Lax, and G. P. Davidoff, *Geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2000.
- [Sierpiński, 1965] W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, Warszawa 1965.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1831. Na tablicy zapisana jest cyfra 7. Wanda i Staś na zmianę dodają jedną cyfrę do aktualnej liczby na tablicy, zaczyna Wanda. Cyfrę można dodać na początku liczby (z wyjątkiem zera), na jej końcu lub pomiędzy dowolnymi dwiema cyframi. Zwycięzcą zostaje ta osoba, po ruchu której liczba na planszy jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnić, że żaden z graczy nie może być pewien wygranej.

M 1832. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$ istnieje zbiór $\mathcal{A}$ składający się z n takich liczb całkowitych dodatnich, że zbiór

$$\{\text{NWD}(x, y) : x, y \in \mathcal{A}, x \neq y\}$$

zawiera dokładnie k różnych elementów.

M 1833. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Punkty X i Y leżą na przedłużeniach boków, odpowiednio, CD i AD (przedłużamy od strony punktu D) w taki sposób, że $DX = AB$ i $DY = BC$. Podobnie punkty Z i T leżą na przedłużeniach boków, odpowiednio, CB i AB (od strony B) w taki sposób, że $BZ = AD$ i $BT = DC$. Niech M_1 będzie środkiem XY , a M_2 środkiem ZT . Udowodnić, że proste DM_1 , BM_2 i AC przecinają się w jednym punkcie.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

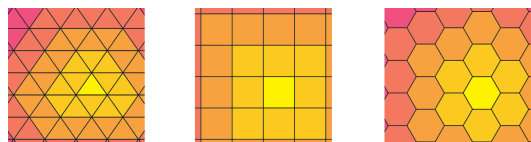
F 1129. W najniższej warstwie atmosfery (w troposferze) temperatura powietrza jednostajnie maleje z wysokością, po czym (w stratosferze) zaczyna rosnąć wraz ze wzrostem wysokości nad powierzchnią Ziemi. Wysokość tropopauzy – granicy między troposferą i stratosferą – zależy od szerokości geograficznej i zmienia się od około 18 km nad równikiem do około 6 km nad biegunami (średnia to ok. 13 km). Natężenie dźwięku samolotu lecącego w obszarze tropopauzy, w warstwie powietrza o grubości rzędu 1 km, maleje z odległością R od źródła jak $1/R$. Z czego wynika taka zależność?

F 1130. Stacja kosmiczna ma kształt walca o promieniu r_0 . W dążeniu do stworzenia astronautom warunków możliwie zbliżonych do warunków na Ziemi stację wypełniono powietrzem i nadano jej ruch obrotowy z prędkością kątową ω dobraną tak, żeby na brzegu walca przyspieszenie było równe przyspieszeniu ziemskiemu, g . Jaki jest stosunek p_0 ciśnienia powietrza na brzegu stacji do ciśnienia p_c w jej centrum (tj. na osi walca)? Średnia molowa masa powietrza wynosi μ , a wewnątrz stacji temperatura jest stała i w skali Kelvina wynosi T .

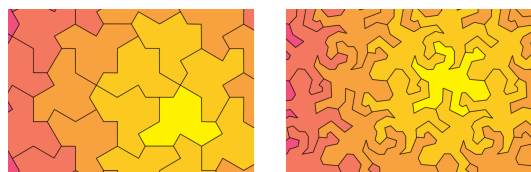
Rozwiązania na str. 24



Matematyka lubi parkietaże. Do najprostszych należą te złożone z identycznych wielokątów foremnych. Pozwalają na to jedynie trójkąty równoboczne, kwadraty i sześciokiąty foremne.



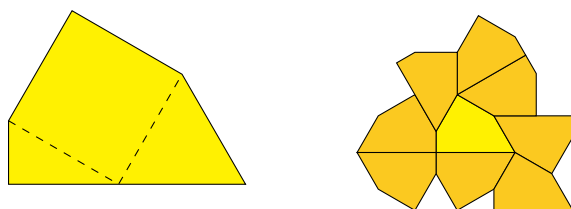
Do parkietaży interesujących matematycznie można zaliczyć te zbudowane za pomocą niedawno odkrytego „kapelusza Einsteina” (po lewej), a do interesujących estetycznie – te występujące w pracach M.C. Eschera (po prawej).



Co oczywiste, nie z każdej figury da się zrobić parkietaż. Rozluźnijmy zatem nasze wymaganie i zapytajmy o figury, których kopie mogą przynajmniej szczelnie otoczyć oryginalny egzemplarz. A jak to już się uda, to zastanówmy się, jak wiele warstw można w ten sposób utworzyć. Największy możliwy wynik będziemy nazywać *liczbą Heescha* danej figury.

Przyjmujemy, że liczba Heescha każdej figury tworzącej parkietaż płaszczyzny to ∞ . Wskazanie figury o liczbie Heescha 0 nie jest zadaniem trudnym. Przedstawimy natomiast kilka takich, których liczba Heescha jest skończona i dodatnia.

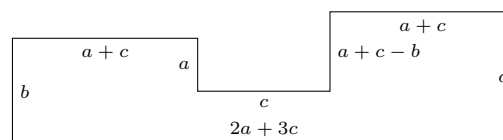
W 1968 roku niemiecki matematyk Heinrich Heesch zaproponował prostą figurę, na którą można nałożyć dokładnie jedną warstwę: kwadrat z dołączonymi dwoma trójkątami – równobocznym oraz 30° – 60° – 90° :



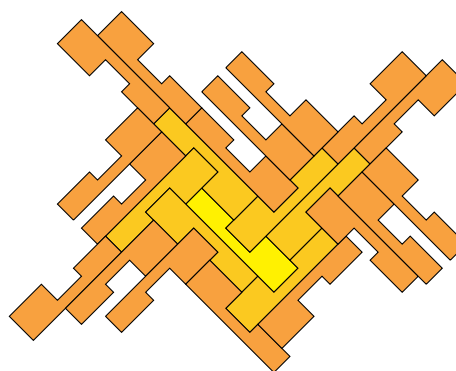
Odnotujmy, że krajan Heescha, Walther Lietzmann, 40 lat wcześniej przedstawił figurę na bazie koła, którą też da się otoczyć tylko jedną warstwą.

Jeżeli chcesz, Czytelniku Dociekliwy, odtworzyć rozwiązanie Lietzmanna, to wystarczy, że narysujesz fragment optymalnego upakowania identycznych kół na płaszczyźnie i spróbujesz tworzyć „leżki” poprzez łączenie każdego koła z jednym z przylegających do niego obszarów nienależących do żadnego koła. Szybko dojdziesz do wniosku, że parkietażu w ten sposób nie uzyskasz, a najlepsze, co możesz zrobić w tym kierunku, to otoczenie pojedynczej leżki jedną warstwą.

Ponad 20 lat po konstrukcji Heescha Anne Fontaine przedstawiła rodzinę figur, których liczba Heescha wynosi 2. Niech a, b, c będą takimi liczbami całkowitymi, że $0 < a < b < c$. Rozważmy następującą figurę o kształcie „spłaszczonej” litery U (odcinki o wspólnym końcu są prostopadłe).



Poniższa ilustracja powinna przekonać Czytelnika, że liczba Heescha rozważanej figury faktycznie jest równa 2.

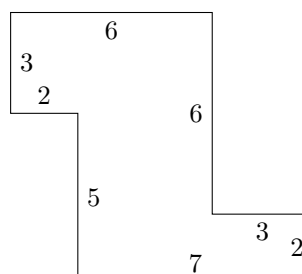


Warto zauważyć, że w przedstawionej reprezentacji graficznej druga warstwa pokrywa pierwszą w sposób nieoptymalny pod względem liczby użytych figur.

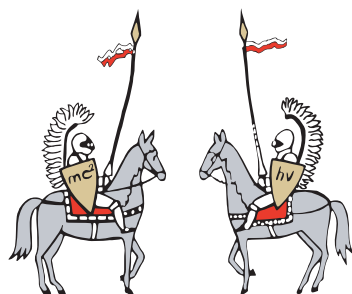
W ciągu ostatnich trzydziestu lat pojawiały się kolejne konstrukcje figur z liczbami Heescha równymi 3, 4 i 5. Najnowszym wynikiem jest zaprezentowana w 2020 roku figura o liczbie Heescha 6, której odkrywcą jest Bojan Bašić.

Obecnie nie znamy żadnej figury o liczbie Heescha równej 7. **Nie wiadomo** też, czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje figura o liczbie Heescha równej k – to zagadnienie znane jest jako **problem Heescha**.

Na koniec wróćmy do artykułu Anne Fontaine. Autorka stwierdziła w nim, że zna też inne figury o liczbie Heescha 2, w tym poniższą figurę w kształcie litery Z. Czy potrafisz, Czytelniku, zbudować obie warstwy na tej figurze?



Turniej Młodych Fizyków



Turniej Młodych Fizyków to konkurs drużynowy dla uczniów szkół średnich, który łączy badania naukowe z prezentacją ich wyników w formie publicznej debaty. Uczestnicy mają niemal cały rok na zmierzenie się z 17 otwartymi problemami fizycznymi – wymagającymi zarówno kreatywności, jak i solidnej wiedzy teoretycznej. Praca nad zagadnieniami obejmuje projektowanie i przeprowadzanie doświadczeń, formułowanie modeli teoretycznych, stawianie hipotez oraz ich weryfikację. Uczniowie mogą korzystać z literatury, internetu oraz pomocy nauczycieli i naukowców. Efektem tych przygotowań są prezentacje, które uczestnicy przedstawiają na scenie podczas zawodów – a następnie bronią swoich tez w dyskusji z przeciwnikiem i recenzentem. Aby wziąć udział w turnieju, wystarczy stworzyć pięcioosobowy zespół licealistów oraz znaleźć nauczyciela-opiekuna. Do 18 stycznia 2026 r. należy przesłać rozwiązania dziesięciu z siedemnastu problemów. Najlepsze zespoły zostaną zaproszone do udziału w półfinałach, które odbędą się w marcu i przyjmą formę tzw. potyczek fizycznych. Finał ogólnopolski, zaplanowany na kwiecień, wyłoni reprezentację Polski na Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków, który w 2026 roku odbędzie się w Szwajcarii. Szczegóły oraz listę zagadnień można znaleźć na stronie: tmf.org.pl.

Zagadnienia Turnieju Młodych Fizyków 2026

1. Wymyśl sam. Sztynną rurkę wygiętą w odpowiedni kształt można wykorzystać do zbudowania syfonu, który po częściowym zanurzeniu w wodzie sam zaczyna zasysać ciecz, bez potrzeby wstępnego odsysania powietrza. Zbadaj, w jaki sposób istotne parametry, takie jak geometria rurki, wpływają na działanie syfonu.

2. Tłumienie elektryczne. Magnes zawieszony na sprężynie, po wychyleniu z punktu równowagi, wykonuje drgania harmoniczne. Jeżeli magnes oscyluje wewnątrz solenoidu połączonego z rezystorem, ruch jest tłumiony. Zbadaj czynniki wpływające na tłumienie.

3. Pierścieniowa fontanna. Płaski metalowy pierścień, spadając z pewnej wysokości do zbiornika z wodą, powoduje powstanie fontanny, która może wyrzucać wodę na znaczną wysokość. Jak parametry pierścienia wpływają na maksymalną wysokość osiąganą przez wodę?

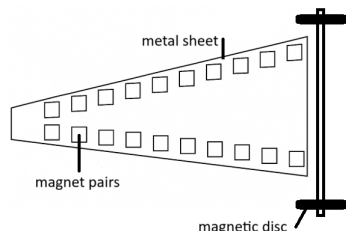
4. Rozlewający się olej. Cienka warstwa oleju spożywczego na płaskiej metalowej powierzchni rozplywa się na zewnątrz, gdy powierzchnia zostanie podgrzana. Zbadaj to zjawisko i jego zależność od odpowiednich parametrów.

5. Dynamika fal sprężystych. Zawieś metalową kulkę na gumce recepturce przymocowanej do nieruchomego uchwytu i skręć ją wielokrotnie wokół osi pionowej. Po zwolnieniu kulki w gumce powstają fale stojące. Zbadaj zjawisko i określ, jak powstająca fala zależy od istotnych parametrów.

6. Flipo Flip. Zabawka Flipo Flip potrafi toczyć się, wykonując wiele obrotów, mimo że jej kształt nie jest kolisty. Zbadaj, jak parametry takie jak geometria zabawki oraz warunki początkowe wpływają na jej ruch.

7. Twierdzenie o rakiecie tenisowej. Bryła o różnych momentach bezwładności względem swoich osi głównych, rzucona z nadanym obrotem, może nagle zmienić oś obrotu na inną niż początkowa. Zbadaj, jak podczas swobodnego spadku ruch obrotowy takiego ciała zależy od istotnych parametrów.

8. Magnetyczny akcelerator. Przytwierdź pary magnesów do metalowej płyty, jak w układzie przedstawionym na rysunku. Jeśli na osi osadzisz dwa magnetyczne dyski, ten „pojazd” może, w pewnych warunkach, przyspieszać wzdłuż rzędów magnesów. Zbadaj to zjawisko.



9. Sterowanie lewitacją. Odpowiednio ułożone cienkie płytki grafitu mogą lewitować nad magnesami neodymowymi. Oświetlając powierzchnię grafitu, można sterować jego ruchem. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

10. Zanurzony krater. Jeśli wsypiesz piasek lub podobny materiał ziarnisty do pojemnika wypełnionego wodą, ziarna opadną na dno i mogą utworzyć strukturę przypominającą krater. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

11. Słodki monochromator. Przepuść liniowo spolaryzowane światło białe przez kolumnę roztworu cukru. Przy obserwacji światła za pomocą polaryzatora mogą pojawić się kolory. Obracając polaryzator, można zmieniać obserwowany kolor. Zbuduj taki „słodki monochromator” i zoptymalizuj układ, aby uzyskać możliwie najwęższe pasmo długości fali.

12. Jesienna moneta. Ruch monety opadającej na dno zbiornika z cieczą może przypominać trzepotanie i koziolkowanie opadającego jesiennego liścia. Zbadaj, jak ruch monety zależy od istotnych parametrów.

13. Śpiewająca linijka. Linijka, z unieruchomionym jednym końcem, po uderzeniu drga i wydaje charakterystyczny dźwięk. Zbadaj, jak dźwięk zależy od istotnych parametrów.

14. Krystaliczne stworki. Zaobserwuj parowanie kropli roztworu soli kuchennej na podgrzanej hydrofobowej powierzchni. Po odparowaniu wody pozostają różnorodne, charakterystyczne kształty kryształów. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

15. Magnetyczna kołyska Newtona. Nowy rodzaj kołyski Newtona może zostać skonstruowany z użyciem odpychających, niestykających się magnesów, zamiast zderzających się kulek. Taka kołyska potrafi zachowywać się podobnie do zwykłej, a jednocześnie wykazuje też inne interesujące efekty. Zbadaj i wyjaśnij ruch tej magnetycznej kołyski.

16. Skręcone spaghetti. Skręcony pęczek spaghetti może wytrzymać większe siły poprzeczne niż prosty, nieskręcony pęczek. Zbadaj, jak skręcony pęczek spaghetti reaguje na poprzeczne obciążenie i wyznacz optymalny kąt skręcenia maksymalizujący wytrzymałość.

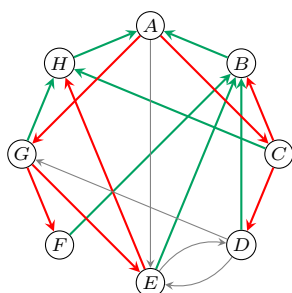
17. Wędrujący płomień. Płomień może nieprzerwanie wędrować po pierścieniowym rowku wypełnionym cienką warstwą łatwopalnej cieczy. Zbadaj, od jakich parametrów zależą właściwości tego wędrującego płomienia.

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dla przykładu, przy czterech plotkujących A, B, C, D wystarczą cztery połączenia: najpierw A rozmawia z B , potem C rozmawia z D , następnie A rozmawia z D (dzięki czemu obaj wiedzą wszystko o wszystkich) i na koniec B rozmawia z C (przez co oni również stają się wszechwiedzący). Można nietrudną analizą uzasadnić, że w tym wypadku trzy połączenia to za mało.



Intensywność strzałki odpowiada kolejności, w jakiej plotkarze powinni wysłać listy, żeby wszyscy dowiedzieli się wszystkiego o wszystkich



Tak mógłby wyglądać graf skierowany możliwych połączeń między ośmioma plotkarzami. Na zielono zaznaczono połączenia odpowiadające 7 listom, dzięki którym A dowiaduje się wszystkiego od pozostałych, zaś na czerwono – 7 listów, za pośrednictwem których pozostali plotkarze dowiadują się następnie wszystkiego od A . Zielone i czerwone krawędzie nie muszą być rozłączne, jednak zostały tak wybrane dla czytelności

Plotkare humanum est. Każdy z nas lubi być dystrybutorem plotek, choć niekoniecznie ich obiektem. W artykule *Plotki, ploteczki, plotunie...* z Δ_{22}^{12} zastanawialiśmy się, jak szybko mogą roznosić się plotki w grafach. Przypomnijmy rozważany tam model: w pewnym mieście znajduje się n plotkarzy, z których każdy zna każdego. Podczas rozmowy telefonicznej dwóch plotkarzy wymienia się wszystkimi posiadanymi informacjami. Na początku dnia każdy z plotkarzy jest w posiadaniu pewnej informacji, której nie ma żaden z pozostałych. Jaka jest najmniejsza liczba rozmów telefonicznych, które należy przeprowadzić, aby wszyscy wszystko wiedzieli?

W przytoczonym artykule pada odpowiedź: $2n - 4$, wraz z bardzo chytrym uzasadnieniem. W niniejszym tekście zastanowimy się, co by było, gdyby fabuła zadania rozgrywała się 300 lat wcześniej, w czasach gdy jedyną formą plotkowania na odległość było pisanie listów.

Na początek pewna rozsądnie brzmiąca intuicja: w kontekście wymieniania się plotkami jedna rozmowa telefoniczna jest równoważna wysyłce dwóch listów. Skoro współcześnie potrzebujemy $2n - 4$ połączeń telefonicznych do zrealizowania plotkarskich zamierzeń, to można by oczekiwać, że w czasach przedtelefonowych wymagana liczba listów to około dwukrotność tej liczby, czyli $4n - 4$ („około” bierze się z dopuszczenia drobnych subtelności, mogących zmienić wynik o stałą).

Czytelnik Podejrzliwy przeczuwa zapewne, że przedstawienie na początku artykułu „rozsądnie brzmiącej intuicji” zwiastuje jej rychłe obalenie – i tak też jest w tym przypadku. Wystarczy bowiem $2n - 2$ listów, czyli tylko o dwa więcej niż połączeń telefonicznych! Uzasadnimy najpierw, dlaczego tyle wystarczy. Ustawmy naszych plotkarzy w ciąg $P_1, \dots, P_n$ i niech i -tym wysłanym listem będzie $P_i \rightarrow P_{i+1}$ dla $i \leq n - 1$ oraz $P_{2n-i} \rightarrow P_{2n-i-1}$ dla $n \leq i \leq 2n - 2$. Innymi słowy, puszczamy najpierw „łańcuszek” od P_1 do P_n , tak by P_n stał się wszechwiedzący, a potem pozwalamy P_n odesłać tę wiedzę pozostałym, aż do P_1 .

Pokażemy teraz, że mniejsza liczba listów nie wchodzi w grę. Zauważmy najpierw, że po $n - 2$ wysłanych listach żaden z plotkarzy nie wie wszystkiego o wszystkich. Rzeczywiście, aby taki plotkarz zaistniał, każdy z pozostałych $n - 1$ plotkarzy musiał rozstać się ze swoją tajemnicą, a to następuje wyłącznie na skutek wysłania do kogoś listu. Począwszy od $(n - 2)$ -go listu, każdy kolejny zwiększa liczbę „wszechwiedzących” plotkarzy o co najwyżej 1, gdyż tylko odbiorca wiadomości powiększa w wyniku jej wysłania swoją wiedzę (w przypadku telefonicznym jest inaczej, co utrudnia jego analizę). Ponieważ dążymy do uzyskania n wszechwiedzących plotkarzy, musi być wysłanych jeszcze co najmniej n listów, co daje szukane ograniczenie $2n - 2$.

Zastanówmy się jeszcze, czy odpowiedź na nasze pytanie uległaby zmianie, gdyby każdy z plotkarzy miał „czarną listę” innych plotkarzy, do których na pewno nigdy nie wyśle korespondencji (bo na przykład kiedyś rozpuszczali o nim kłamliwe plotki). Wyobraźmy sobie graf, którego wierzchołkami są plotkarze, zaś strzałka od plotkarza A do B oznacza, że ten pierwszy dopuszcza wysłanie listu do tego drugiego. Żeby w opisanej sytuacji pełna wymiana informacji była w ogóle możliwa, przedstawiony graf musi być *silnie spójny* – z każdego wierzchołka możemy dojść do dowolnego innego, poruszając się po strzałkach. Załóżmy zatem, że tak jest, i wybierzmy dowolnego plotkarza A . Z założenia o silnej spójności wynika, że z wszystkich plotkarzy i wybranych połączeń między nimi możemy utworzyć „drzewo skierowane w górę”, do znajdującego się na szczycie A . W takim grafowym drzewie o n wierzchołkach mamy zawsze $n - 1$ krawędzi, zatem tyle listów wystarczy, aby A dowiedział się wszystkiego o wszystkich (listy wysyłane są w kolejności wyznaczonej przez „drzewową” odległość od A). Możemy też utworzyć inne drzewo z A na szczycie, w którym wszystkie krawędzie będą skierowane „w dół”. To drzewo pozwoli A rozdystrybuować swoją wszechwiedzę wśród pozostałych plotkarzy za pomocą kolejnych $n - 1$ listów. Wniosek: jeśli tylko plotkarze mogą w pełni wymienić się informacjami, wystarczy im do tego celu $2n - 2$ wysłanych listów. Niezależnie od tego, kto, z kim, dlaczego, na co, po co i w jakim celu.



Kalendarz Majów i jego niezwykle przewidywania matematyczne

Noémie C. COMBE

Starożytna cywilizacja stworzona przez Majów słynie z doniosłych wynalazków i odkryć. Majowie potrafili z niesamowitą precyzją przewidywać różne zjawiska astronomiczne – i to na długo przed wynalezieniem lunety, nie mówiąc już o teleskopie. W tym artykule omówimy podstawy aparatu matematycznego, który wykorzystywali do swoich dokonań. Wyruszymy więc w podróż do odległych czasów, kiedy na terenach dzisiejszego Meksyku, Gwatemali, Belize, Hondurasu oraz Salwadoru kwitła cywilizacja Majów. Ich ziemie, usiane majestatycznymi górami i gęstymi dżunglami, były areną niezwykłych osiągnięć w dziedzinie astronomii, matematyki, architektury oraz pisma hieroglificznego.

Kalendarze Majów

Spośród wszystkich mieszkańców Mezoameryki to właśnie Majowie wykazali się największym wyrafinowaniem w dziedzinie pomiaru czasu. Podstawową jednostką czasu był dla nich K'in (dzień). Dwadzieścia K'inów to Winal (miesiąc). Tun (rok) to 360 K'inów, to znaczy 18 Winali. Natomiast 20 Tunów, czyli 20 lat, daje 1 K'atun (7200 K'inów). Baktun to najdłuższy okres u Majów, odpowiada 20 K'atunom (144 000 K'inów).

W związku z tym datę Majowie określali, używając pięciu liczb – na liczbę K'inów, Winali, Tunów, K'atunów i Baktunów. Każda z nich należała do przedziału od 0 do 19, za wyjątkiem liczby Winali – ta przyjmowała wartości od 0 do 17, ponieważ 18 Winali składało się na jeden Tun. Majowie zapisywali te liczby od góry do dołu lub od lewej do prawej, korzystając z systemu specjalnych znaków zwanych glifami.

Majowie opracowali również bardzo skomplikowany system chronologiczny, składający się z czterech kalendarzy. Były to Tzolkin, Haab, Kalendarz Księżycowy oraz Długi Kalendarz (DK).

Pierwszy z nich, Tzolkin, to 260-dniowy kalendarz rytualny, używany przy ceremoniach i planowaniu wojen. Podzielony jest on na 13 miesięcy, każdy po 20 dni. Drugim jest Haab – 365-dniowy kalendarz słoneczny, podzielony na 18 miesięcy, każdy po 20 dni, po których następuje dodatkowy 5-dniowy okres nazywany Wayeb. Trzecim kalendarzem jest 9-dniowy kalendarz księżycowy, zwany kalendarzem Dziewięciu Władców Nocy. Ostatni kalendarz nazwany jest Długim (DK), gdyż zawierał 52 okresy po 365 dni. Służył do rejestrowania wydarzeń – pozwalał na precyzyjne określanie dat sięgających tysięcy lat wstecz. To, że Długi Kalendarz trwał dokładnie ten czas, nie jest przypadkiem – jest to najmniejsza wspólna wielokrotność długości Tzolkina (260 dni) i Haaba (365 dni). Okres ten nazywany jest „okresem kalendarzowym”.

Co to za baza?

Majowie do obliczeń matematycznych używali systemu liczbowego opartego na bazie 20. Przy użyciu tej bazy każda liczba $n \in \mathbb{N}$ jest przedstawiona jako:

$$n = \sum_{p=0}^m a_p \times 20^p, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Innymi słowy, w systemie opartym na bazie 20 dla każdej liczby:

- jej pierwsza pozycja (w zapisie Majów to pozycja dolna) reprezentuje wartości od 0 do 19 (dla 20^0);
- druga pozycja – wartości od 0 do 19, każda reprezentująca wielokrotność 20 ($= 20^1$);
- trzecia pozycja – wartości od 0 do 19, każda reprezentująca wielokrotność 400 ($= 20^2$) i tak dalej.

W systemie liczbowym o podstawie 20 mamy łącznie 20 cyfr, które służą do zapisywania wszystkich liczb. Pierwsze dziesięć cyfr to te, które znamy

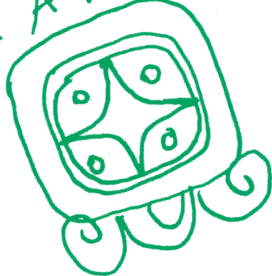
CIM I



MANIC



LAMAT



MULUC



Czy wiesz, czemu odpowiada liczba AA w bazie 10 i jak zapisać jej rozkład na czynniki pierwsze w bazie 10 i 20?



Czy wiesz, jak zapisać dzisiejszą datę w kalendarzu Majów?

Zapis Majów	31
•	1×20
•	+
≡	11

z systemu dziesiętnego: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aby uniknąć pomyłek i niejasności, do oznaczania liczb od 10 do 19 (które w bazie 20 są w zasadzie cyframi) będziemy używać liter – 10 zapisywane jest jako A, 11 jako B i tak dalej aż do 19 jako J. Zobaczmy przykładowe działania w tym systemie:

- 2×5 daje wynik odpowiadający cyfrze A (czyli 10 w naszym systemie),
- 6×7 przedstawia się jako $2 \times 20 + 2$ (co zapisać można jako 22 w bazie 20).

System chronologiczny

Majowie używali również innego, specjalnego systemu liczbowego (system chronologiczny), dostosowanego do zapisu dat w ich kalendarzach. W systemie chronologicznym trzecia pozycja różni się od standardowego wzorca, ponieważ reprezentuje wielokrotność 360 ($= 18 \times 20$), a nie 400 ($= 20^2$). Wynika to z dostosowania do kalendarza Haab', który składał się z 18 miesięcy po 20 dni, co daje 360 dni. Dzięki temu odpowiada ona liczbie dni w roku kalendarzowym Majów, co ułatwiało obliczenia dat.

W systemie chronologicznym kalendarza Majów liczba jest więc zapisana jako:

$$n = a_0 \times 20^0 + a_1 \times 20^1 + a_2 \times 18 \times 20 + a_3 \times 18 \times 20^2 + \dots$$

Rozważmy przykład daty [8; 14; 3; 1; 12] zapisanej w Długim Kalendarzu.

Jednostka	Liczba	Dni na jednostkę	Razem dni
Baktun	8	144 000	$8 \times 144\,000 = 1\,152\,000$
K'atun	14	7 200	$14 \times 7\,200 = 100\,800$
Tun	3	360	$3 \times 360 = 1\,080$
Winal	1	20	$1 \times 20 = 20$
K'in	12	1	$12 \times 1 = 12$
Suma całkowita			1 253 912

Długi Kalendarz zaczyna się od mitycznej daty, która jest odpowiednikiem 11 sierpnia 3114 roku p.n.e. w naszym kalendarzu (kalendarz gregoriański). Aby przeliczyć datę [8; 14; 3; 1; 12] na datę gregoriańską, dodajemy 1 253 912 dni do 11 sierpnia 3114 roku p.n.e. Po obliczeniu otrzymujemy datę w kalendarzu gregoriańskim: 15 września 320 roku n.e.

Jak zapisać liczby glifami ?

Majowie nie znali cyfr arabskich (którymi posługujemy się dzisiaj). W ich systemie:

- 1 kropka = 1 jednostka,
- 1 kreska = 5 jednostek,
- specjalny symbol w kształcie muszli reprezentuje zero.

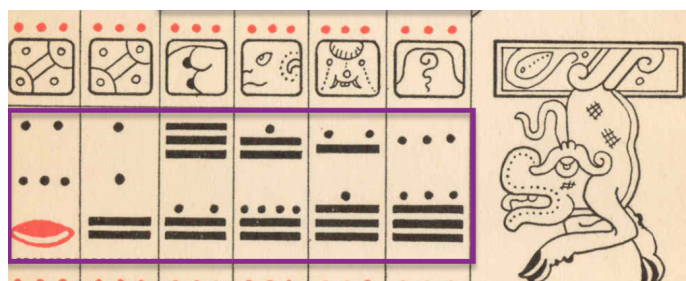
Nadmieńmy tutaj, że wprowadzenie zera jest niezwykle osiągnięciem – cyfra ta dotarła do Europy dopiero w jedenastym wieku.

W systemie Majów liczba 31 zapisywana była jako „jeden raz dwadzieścia” (1×20) plus 11. W zapisie glifami 11 to dwie kreski ułożone jedna nad drugą plus jedna kropka nad najwyższą kreską, a żeby dodać do tego $1 \cdot 20$, musimy dopisać jeszcze jedną kropkę powyżej.

Pokażmy jeszcze inne przykłady: Majowie zapisywali 7 jako kreskę (czyli 5) plus dwie kropki, natomiast 13 to dwie kreski (czyli 10), a nad nimi trzy kropki.

Tajemnice Kodeksu Drezdeńskiego

Jak już wiemy, Majowie byli cywilizacją astronomów. Obserwując niebo gołym okiem, byli w stanie dostrzec nawet subtelne ruchy planet – znane im były Merkury, Wenus, Mars, Jowisz i Saturn. Co ciekawe, architektura ich miast wskazuje na to, że budowle pełniły także rolę obserwatoriów astronomicznych, a przynajmniej ich układ wskazywał na powiązanie z konkretnymi zjawiskami astronomicznymi. Na przykład podczas równonocy wiosennej i jesiennej cienie



Postać boga Marsa na stronie Kodeksu Drezdeńskiego

na piramidzie El Castillo w Chichén Itzá tworzą wyjątkowy układ. Zdają się wprawiać w ruch umieszczonego na schodach węża, symbolizującego boga Kukulkana związanego z cyklami słonecznymi. Podobny efekt światła i cienia obserwowano także na piramidzie w El Tajina.

Wszystkie obserwacje astronomiczne Majowie zapisywali w księgach. Jedną z nich jest Kodeks Drezdeński, który zawiera informacje o zjawiskach astronomicznych. Można w nim znaleźć następujący

tajemniczy ciąg liczbowy: 78, 156, 234, 312, 390, 780. Jaka jest relacja między tymi liczbami?

Na pierwszy rzut oka widać, że liczby te tworzą ciąg rosnący:

$$78 < 156 < 234 < 312 < 390 < 780.$$

Aby zgłębić tajemnicę tych liczb, musimy zrozumieć, jaka jest ich wspólna cecha. Zauważmy, że wszystkie one są wielokrotnością 78:

$$78 = 18 + 3 \times 20,$$

$$156 = 16 + 7 \times 20 = 78 \times 2,$$

$$234 = 14 + 11 \times 20 = 78 \times 3,$$

$$312 = 12 + 15 \times 20 = 78 \times 4,$$

$$390 = 10 + 1 \times 20 + 1 \times 18 \times 20 = 78 \times 5,$$

$$780 = 0 + 3 \times 20 + 2 \times 18 \times 20 = 78 \times 10.$$

Ten ciąg jest prawie ciągiem arytmetycznym, czyli takim, w którym różnica między kolejnymi wyrazami jest stała. W ciągu powyżej tylko ostatnia liczba wyłamuje się z tej reguły, ponieważ wynosi $10 \cdot 78$, a nie $6 \cdot 78$.

Okazuje się jednak, że w innym miejscu w Kodeksie możemy znaleźć brakujące liczby:

$$468 = 78 \times 6,$$

$$546 = 78 \times 7,$$

$$624 = 78 \times 8,$$

$$702 = 78 \times 9.$$

Dlaczego wielokrotności liczby 78 były tak istotne dla Majów? Liczba 78 pochodzi od 780-dniowego okresu synodycznego Marsa, czyli czasu, jaki potrzebuje planeta, aby powrócić do tej samej pozycji widzianej z Ziemi. Majowie obliczyli ten okres jako 780 dni, podczas gdy rzeczywisty okres synodyczny Marsa wynosi 779,94 dnia. Pomiar Majów był więc niezwykle precyzyjny.

Na tej samej stronie Kodeksu Drezdeńskiego, po jej prawej stronie, widzimy zwisającą, dziwną postać. Jest to majański bóg Marsa: bóg burzy, znany również jako „bestia Marsa”, charakteryzujący się ozdobnym nosem. Umieszczenie go na tej stronie Księgi potwierdza, że wszystkie zapisy na tej stronie mają związek z planetą Mars.

Obserwacje Księżyca

Obecnie wiemy, że okres synodyczny Księżyca wynosi średnio 29 dni, 12 godzin, 44 minuty i 3 sekundy. Odstęp między kolejnymi zaćmieniami Księżyca może wynosić 1, 5 lub 6 okresów synodycznych, przy czym 5 okresów to mniej więcej 148 dni, a 6 okresów to nieco ponad 177 dni.

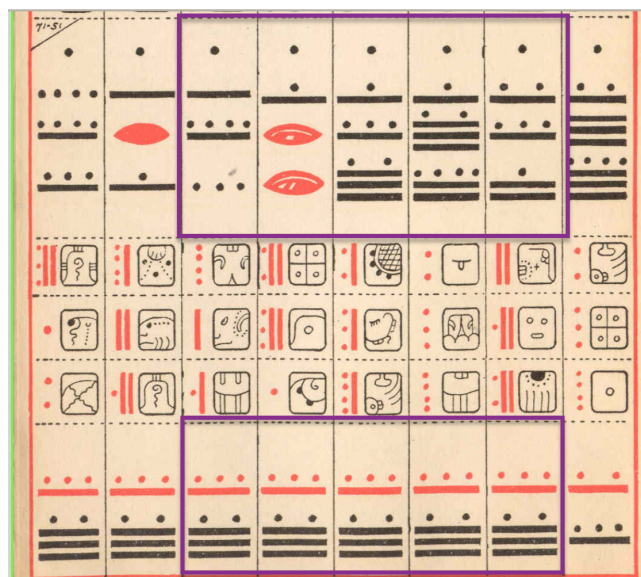
Cykle 148 i 177 dni wynikają z geometrii ruchu Księżyca i jego orbity. Księżyc porusza się po orbicie nachylonej o około 5° względem płaszczyzny orbity Ziemi (czyli ekliptyki). Dlatego nie wszystkie nowie i pełnie prowadzą do zaćmień – zazwyczaj Księżyc przechodzi powyżej lub poniżej tarczy Słońca (podczas nowiu) lub cienia Ziemi (podczas pełni). Zaćmienia są możliwe tylko wtedy, gdy pozycja Słońca na niebie (z punktu widzenia Ziemi) znajduje się blisko



jednego z węzłów orbity Księżyca – miejsc, w których orbita Księżyca przecina płaszczyznę ekliptyki.

Majowie obliczyli, że okres synodyczny Księżyca trwa średnio 29,53 dni. Odkryli także, że wielokrotności tego okresu pokrywają się z tak zwanymi sezonami zaćmień. W szczególności wiedza ta została zapisana w Kodeksie Drezdeńskim. Znajdziemy tam ostrzeżenia przed zaćmieniami, zorganizowane w powtarzających się cyklach 177 dni i 148 dni.

Na potwierdzenie powyższych informacji przyjrzyjmy się teraz kolejnemu rysunkowi.



Zwróćmy uwagę na liczby znajdujące się w górnej fioletowej ramce. Liczba po lewej stronie odpowiada 9183 dniom, obliczoną według metody chronologicznej:

$$9183 = 3 + 9 \times 20 + 5 \times 18 \times 20 + 1 \times 18 \times 20^2.$$

Druga liczba od lewej to:

$$9360 = 0 + 0 \times 20 + 6 \times 18 \times 20 + 1 \times 18 \times 20^2.$$

Podobnie sprawdzamy, że kolejne liczby to: 9537, 9714, 9891 i 10039. Warto zauważyć, że różnica między tymi liczbami (od 9183 do 9891) wynosi 177, co odpowiada liczbie dni pomiędzy kolejnymi zaćmieniami:

$$9183 + 177 = 9360,$$

$$9360 + 177 = 9537,$$

$$9537 + 177 = 9714,$$

$$9714 + 177 = 9891.$$

Potem jednak wzór ulega zmianie, ponieważ $10039 = 9891 + 148$, co oznacza, że w tym przypadku mamy do czynienia z innym cyklem, który trwa 148 dni.

Podsumowanie

Majowie osiągnęli niezwykle poziom zaawansowania matematycznego, który pozwolił im nie tylko opracować własny system liczbowy, ale również – zgodnie ze współczesnym nazewnictwem – arytmetykę modularną. Ich system opierał się głównie na bazie 20, z wyjątkowym przypadkiem użycia bazy $18 \times 20 = 360$ w kalendarzu długiej rachuby (DK), co świadczy o niespotykanej precyzji w liczeniu czasu.

Używając współczesnej terminologii matematycznej, Majowie wykonywali obliczenia w *pierścieniu* $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$, którego elementy to reszty z dzielenia przez 20.

To znaczy, że dodawanie i mnożenie można opisać wzorami:

$$a \cdot b \equiv r \pmod{20}, \quad \text{gdzie } r \in \{0, \dots, 19\},$$

$$a + b \equiv r' \pmod{20}, \quad \text{gdzie } r' \in \{0, \dots, 19\}.$$

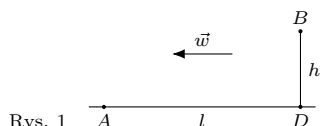
Pierścienie $\mathbb{Z}_p$, gdzie $p > 1$ jest liczbą naturalną, odgrywają ważną rolę we współczesnej matematyce, prowadząc do powstania istotnych struktur algebraicznych, takich jak grupy, pierścienie i ciała.

Majowie intuicyjnie posługiwali się strukturami modularnymi z dużą biegłością, co wyprzedzało ich czasy i stawia ich osiągnięcia matematyczne na wyjątkowym miejscu w historii ludzkości.

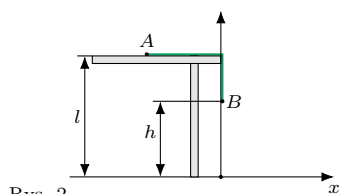
Klub 44 F



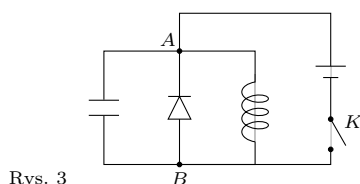
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2025



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
794 ($WT = 3,7$), 795 ($WT = 2,5$)
z numeru 3/2025

Jacek Konieczny	Poznań	41,11
Jan Zambrzycki	Białystok	4–35,42
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3–29,98
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6–17,63
Paweł Kubit	Kraków	17,21
Tomasz Wietecha	Tarnów	18–14,63
Krzysztof Zygan	Lubin	14,52

Z zasady zachowania energii

$$LI_0^2/2 + C\mathcal{E}^2/2 = LI_{\max}^2/2, \quad \text{gdzie } I_{\max} = 2I_0 = 2\mathcal{E}\tau/L,$$

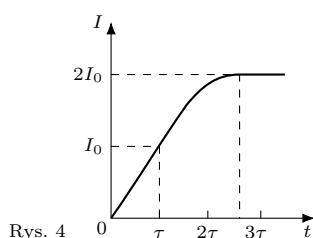
otrzymujemy:

$$LC = 3\tau^2.$$

Natężenie prądu w cewce zmienia się od wartości I_0 do $2I_0$, gdy wartość sinusa zmienia się od $1/2$ do 1 , a jego argument od $\pi/6$ do $\pi/2$, czyli szukany czas wynosi:

$$\Delta\tau = T/6 = \pi\sqrt{3}\tau/3 \cong 1,8\tau.$$

W chwili $t = \tau + \Delta\tau \cong 2,8\tau$ potencjały punktów A i B wyrównują się, opór odcinka z diodą w kierunku od B do A staje się równy zero. Od tego momentu przez cewkę płynie stały prąd $2I_0$, a ładunek kondensatora wynosi 0 .



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 804, 805

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

804. Chłopiec znajduje się w punkcie A na brzegu rzeki, której prędkość nurtu wynosi w (rys. 1). Chłopiec może biec po brzegu z prędkością v i pływać rzeką z prędkością u względem wody, przy czym $u < v$. W jakiej odległości od punktu A znajduje się na brzegu punkt C , z którego chłopiec powinien zacząć pływać, aby dotrzeć do punktu B w najkrótszym czasie? Odległość $|BD|$ punktu B od brzegu wynosi h , odległość $|AD|$ jest równa l .

805. Para jednakowych małych kulek A i B połączonych nieważką nicią o długości l zaczyna ześlizgiwać się z gładkiego stołu o wysokości l , przy czym w chwili początkowej kulka B znajduje się na wysokości $h = 2l/3$ nad podłogą (rys. 2). Po dotknięciu podłogi kulka B przykleja się do niej, a kulka A spada w tym momencie ze stołu. Od jakiej wysokości kulki A nad podłogą nieć będzie napięta?

Rozwiązania zadań z numeru 6/2025

Przypominamy treść zadań:

800. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 dioda jest idealna i wszystkie opory omowe zaniedbywalne. Klucz K zamknięto na czas τ , a następnie otwarto. W chwili otwierania klucza natężenie prądu w cewce miało wartość I_0 . Po jakim czasie po otwarciu klucza osiągnęło ono wartość maksymalną równą $2I_0$? Narysuj wykres zależności natężenia prądu w cewce od czasu t ($0 < t < \infty$).

801. Statek kosmiczny przemieszcza się od Ziemi do Marsa po orbicie eliptycznej, której perihelium znajduje się na orbicie Ziemi, a aphelium na orbicie Marsa. Znaleźć czas przelotu oraz minimalny czas, w jakim kosmonauci będą musieli oczekiwać na Marsie na start w drogę powrotną po takiej samej orbicie. Okres obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi $T_Z = 365,25$ dób, okres obiegu Marsa $T_M = 687$ dób. Przyjąć, że planety poruszają się po orbitach kołowych leżących w jednej płaszczyźnie.

800. Po zamknięciu klucza K napięcie na kondensatorze i cewce w bardzo krótkim czasie osiąga wartość $\mathcal{E}$ równą sile elektromotorycznej źródła. W przedziale czasowym τ ładunek na kondensatorze o pojemności C ma stałą wartość $C\mathcal{E}$ (prąd przez diodę nie płynie), a prąd płynący przez cewkę o współczynniku samoindukcji L narasta liniowo:

$$LdI/dt = \mathcal{E} \Rightarrow I = \mathcal{E}t/L, \quad 0 < t \leq \tau.$$

W chwili $t = \tau$, zgodnie z treścią zadania:

$$I(\tau) = I_0 = \mathcal{E}\tau/L.$$

Po otwarciu klucza natężenie prądu w cewce nadal rośnie w wyniku rozładowywania kondensatora.

$$Q/C + LdI/dt = 0, \quad I = dQ/dt, \quad d^2I/dt^2 + I/(LC) = 0, \quad Q(\tau) = C\mathcal{E}.$$

Ładunek na kondensatorze nie może zmienić się skokowo, zatem prostoliniowy odcinek zależności natężenia prądu w cewce od czasu przechodzi płynnie (bez skoku pochodnej) na część sinusoidy, której okres $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$ (rys. 4).

801. Półś wielka a orbity, po której porusza się statek kosmiczny, równa jest połowie sumy promieni orbit Ziemi i Marsa (rys. 5): $a = (a_Z + a_M)/2$. Zgodnie z trzecim prawem Keplera $a_Z \sim T_Z^{2/3}$ i $a_M \sim T_M^{2/3}$. Analogicznie związana jest półś wielka orbity statku i okres jego obiegu T : $a \sim T^{2/3}$. Stąd $T^{2/3} = (T_Z^{2/3} + T_M^{2/3})/2$. Szukany czas przelotu statku od Ziemi do Marsa jest równy

$$\tau = (T_Z^{2/3} + T_M^{2/3})^{3/2} / 2^{5/2} \cong 259 \text{ dób}.$$

W chwili przylotu Ziemia wyprzedza Marsa o kąt

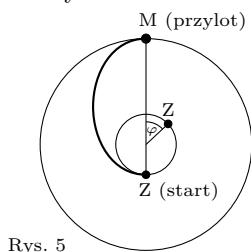
$$\varphi = \omega_Z\tau - \pi = 2\pi\tau/T_Z - \pi,$$

gdzie ω_Z jest prędkością kątową ruchu Ziemi względem Słońca. W chwili startu w podróż powrotną Ziemia powinna być cofnięta względem Marsa o taki sam kąt φ , innymi słowy – powinna wyprzedzać go o kąt $2\pi - \varphi$ (czas oczekiwania na Marsie ma być minimalny). Czas, po którym kąt wyprzedzenia zmienia się od φ do $2\pi - \varphi$, wynosi

$$t = (2\pi - 2\varphi)/(\omega_Z - \omega_M),$$

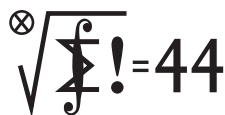
gdzie $(\omega_Z - \omega_M)$ jest względną prędkością kątową ruchu Ziemi i Marsa. Minimalny czas oczekiwania kosmonautów na Marsie jest równy

$$t = (2 - 2\tau/T_Z)/(1/T_Z - 1/T_M) \cong 457 \text{ dób}.$$



Rys. 5

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
897 ($WT = 2,97$) i 898 ($WT = 1,22$)
z numeru 3/2025

Marek Spychała	Warszawa	47,41
Piotr Wiśniewski	Warszawa	45,51
Grzegorz Wiączkowski		44,90
Marcin Kasperski	Warszawa	43,44
Andrzej Daniluk	Warszawa	40,76
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,09
Krzysztof Maziarczyk	Londyn	38,05
Jerzy Cisło	Wrocław	37,59
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,90
Barbara Mroczek		34,09
Mikołaj Znamierowski		33,62
Roksana Słowik		33,00

Pan Marek Spychała to już dwukrotnie Weteran: 6×44 (!). Pan Piotr Wiśniewski goni czołówkę: 2×44 , w krótkim czasie. A pan Grzegorz Wiączkowski, 1×44 , to nowa postać w naszym Klubie – w ostatnich czasach nie tak często mamy okazję witać nowych przybyszów.

903. Z równości

$$\begin{aligned} (x-1)f(x) &= x^{43} - 1 + 45(x^{44} - x^{43}) \\ &= 45x^{44} - 44x^{43} - 1, \\ (1) \quad (x-1)g(x) &= x^{45} - 1 + 45(x^{46} - x^{45}) \\ &= 45x^{46} - 44x^{45} - 1 \end{aligned}$$

otrzymujemy związek

$$(x-1)(g(x) - f(x)) = x^{43}(x^2 - 1)(45x - 44),$$

i dalej (dla $x \neq 1$, ale dla $x = 1$ też, bo to wielomiany):

$$(2) \quad g(x) - f(x) = x^{43}(x+1)(45x - 44).$$

Liczby a, b dane są równaniem $f(a) = g(b) = 44$. Dla $x < 0$ mamy na mocy wzorów (1):

$$(x-1)(f(x) - 44) = 45x^{44} - 44x^{43} - 1 - 44x + 44 > 0,$$

$$(x-1)(g(x) - 44) = 45x^{46} - 44x^{45} - 1 - 44x + 44 > 0,$$

więc $f(x) - 44 < 0$, $g(x) - 44 < 0$ (dla $x < 0$). Zatem $a, b \geq 0$.

Ze wzoru (2) widać, że $f(\frac{44}{45}) = g(\frac{44}{45})$. Prosty rachunek (oparty na wzorach (1)) pokazuje, że ta wspólna wartość wynosi 45. W zbiorze liczb nieujemnych funkcje f, g są ściśle rosnące, przy czym $f(0) = g(0) = 1$. Stąd wniosek, że $a, b \in (0, \frac{44}{45})$. Ponieważ $f(x) > g(x)$ w tym przedziale (wzór (2)), więc gdyby zachodziła nierówność $a \geq b$, mielibyśmy $44 = f(a) > g(a) \geq g(b) = 44$, sprzeczność. Stąd odpowiedź na pytanie zadania: $a < b$.

Zadania z matematyki nr 907, 908

Redaguje Marcin E. KUCZMA

907. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n \geq 3$. Znaleźć największą liczbę naturalną m , dla której istnieją różne liczby rzeczywiste $x_1, \dots, x_m$ takie, że wartość wyrażenia

$$\sum_{i=0}^n x_k^{n-i} x_l^i$$

jest jednakowa dla każdej pary różnych numerów $k, l \in \{1, \dots, m\}$.

908. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a \geq 1$ o tej własności, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ suma $1 + a + \dots + a^{n-1}$ jest liczbą trójkątną.

Zadanie 908 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2025

Przypominamy treść zadań:

903. Funkcje f i g są dane wzorami

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{42}) + 45x^{43},$$

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{44}) + 45x^{45}.$$

Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki $f(a) = g(b) = 44$. Wyjaśnić, która z liczb a, b jest większa.

904. Niech $A_1 = 31$, $A_2 = 331$, $\dots$, $A_n = 33 \dots 31$ (n trójek, a na końcu jedynka – zapis dziesiętny). Dla każdej liczby pierwszej $p < 44$ rozstrzygnąć, czy istnieje liczba n (zależna od p), dla której A_n dzieli się przez p . Jeśli istnieje, ustalić, czy jest wówczas nieskończenie wiele, czy tylko skończenie wiele takich numerów n .

904. Liczba A_n wyraża się wzorem

$$A_n = \frac{1}{3}(10^{n+1} - 1) - 2 = \frac{1}{3}(10^{n+1} - 7).$$

Widać od razu, że (dla żadnego n) nie dzieli się przez 2, 3, 5, 7. Dalej badamy podzielność przez liczby pierwsze $p \in [11, 43]$. Jest to więc pytanie o to, czy w ciągu $10, 100, 1000, \dots \pmod{p}$ pojawia się siódemka. Jeżeli tak – niech np. $10^m \equiv 7 \pmod{p}$ – to ponieważ $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, więc minimalny taki wykładnik m znajduje się w przedziale $[0, p-2]$. Dla każdego $k \geq 0$ mamy wówczas $10^{k(p-1)+m} \equiv 7 \pmod{p}$, co oznacza, że w tym przypadku istnieje nieskończenie wiele liczb n , o jakie pyta zadanie. Jeżeli natomiast wśród liczb $10, 10^2, \dots, 10^{p-2}$ branych $\pmod{p}$ nie ma siódemki, to nie ma jej w całym nieskończonym ciągu $10, 10^2, 10^3, \dots \pmod{p}$, więc nie istnieje liczba n , o jaką pyta zadanie.

Rozstrzygnięcie (dla $p < 44$) kwestii; siódemka [pojawia się/nie pojawia się] najprościej uzyskać, pisząc banalny programik numeryczny. Wychodzi odpowiedź *tak* dla $p = 17, 19, 23, 29, 31$ (minimalny wykładnik m wynosi, odpowiednio, 9, 12, 21, 20, 2); *nie* dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 37, 41, 43$.

[Czytelników, którzy z niechęcią widzą użycie urządzenia obliczeniowego, zachęcamy do ręcznego przeszukania stosownych wartości (zamiast badania potęg 10^l dla $l < p-1$ wystarczy rozważać $l < \delta$, gdzie $\delta = \min: 10^\delta \equiv 1 \pmod{p}$). Stosując proste sztuczki w operowaniu kongruencjami, daje się to zrobić w przeciągu kilkunastu minut na niewielkiej kartce papieru.]

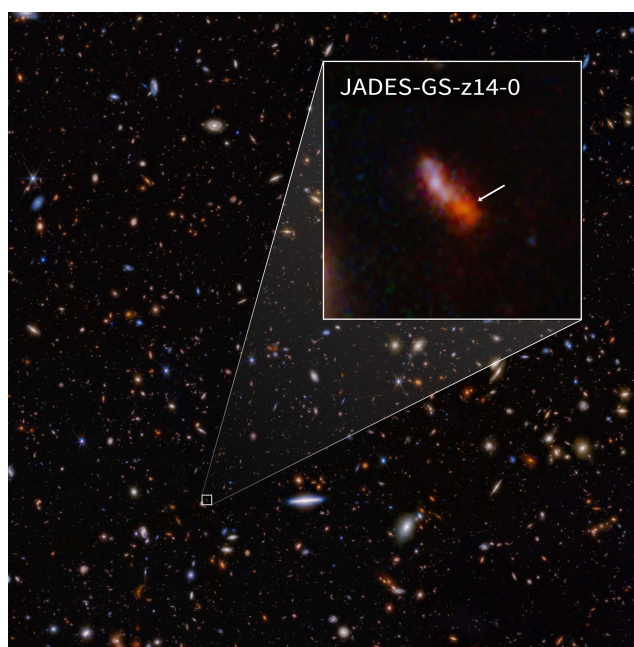
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



JADES-GS-z14-0 jest najodleglejszą galaktyką, jaką dotąd zaobserwowano. Jest tak daleko, że jej światło potrzebowało 13,4 miliarda lat, aby dotrzeć do nas, co oznacza, że widzimy ją taką, jaka była, gdy Wszechświat miał zaledwie 300 milionów lat. Odkryto ją w 2024 roku za pomocą Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba. Ale to już stara historia, dlaczego więc o niej pisać? Ponieważ całkiem niedawno w tej galaktyce odkryto tlen. Czytelnik Odczytany powie, że przecież to nic dziwnego, w wielu galaktykach jest pełno tlenu. To prawda, ale nie spodziewaliśmy się go znaleźć w tak młodym Wszechświecie. Jak to obrazowo opisał Sander Schouws, doktorant zaangażowany w odkrycie: „To jak znaleźć nastolatka w miejscu, w którym spodziewano się noworodków”.



Zdjęcie aktualnej rekordzistki z tytułem najodleglejszej znanej galaktyki – JADES-GS-z14. Źródło zdjęcia: NASA, ESA, CSA, STScI, B. Robertson (UC Santa Cruz), B. Johnson (CfA), S. Tacchella (Cambridge), P. Cargile (CfA)

Współczesne teorie powstania i ewolucji Wszechświata mówią, że w pierwszych momentach jego istnienia powstały tylko bardzo lekkie pierwiastki: wodór (75%), hel (~25%) i minimalne ilości litu. Galaktyki, a w szczególności masywne gwiazdy młodego Wszechświata, musiały więc być zbudowane tylko z tych pierwiastków. Dopiero później we wnętrzach tych gwiazd powstały np. węgiel, tlen czy żelazo (zwane ogólnie w astronomii metalami), które są *rozrzucone* wokół gwiazdy w momencie wybuchu supernowej.

Wszystkie pierwiastki niebędące wodorem i helu astronomowie nazywają metalami (tlen również). Dlatego mówi się o metaliczności galaktyk, aby opisać, jak dużo jest tych pierwiastków w galaktykach.

Z tak wzbogaconego gazu powstają potem kolejne pokolenia gwiazd, które produkują coraz więcej cięższych pierwiastków. I tak dalej. Cały proces trwa baaaaardzo długo. Dlatego badacze sądzili, że w wieku 300 milionów lat Wszechświat był ciągle zbyt młody na

galaktyki pełne ciężkich pierwiastków. Po prostu nie upłynęło wystarczająco dużo czasu, aby gwiazdy mogły wyprodukować ich dostatecznie wiele. Jednak najnowsze obserwacje z wykorzystaniem teleskopu Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA) pokazały, że JADES-GS-z14-0 posiada około 10 razy więcej ciężkich pierwiastków, niż się spodziewano.

Co to może oznaczać? Krótka odpowiedź jest taka, że... na razie nie wiadomo. Jednak jedno jest pewne, nadchodzą zmiany w naszym rozumieniu pierwszych faz ewolucji galaktyk (a ogólniej Wszechświata). Ponieważ JADES-GS-z14-0 może być najodleglejszą galaktyką, ale nie jest jedyną, która poddaje próbie dotychczasowe teorie. W galaktykach młodego Wszechświata za pomocą Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba odkryto istnienie węgla, neonu, magnezu, a nawet żelaza. Obfitość tych pierwiastków jest zdecydowanie większa niż ilość czegokolwiek, czego się spodziewaliśmy na podstawie poprzednich obserwacji, a nawet symulacji komputerowych.

Wy tłumaczeń dla tych wszystkich obserwacji może być kilka. Możliwe jest, że gwiazdy we wczesnym Wszechświecie były zdecydowanie masywniejsze, niż sądziliśmy. Pozwalałoby to na szybsze tworzenie ciężkich pierwiastków poprzez tzw. *pair-instability supernova*. W odróżnieniu od klasycznych supernowych, po których pozostaje czarna dziura albo gwiazda neutronowa, gwiazda rozerwana wybuchem typu *pair-instability* całkowicie rozrzuca swoją materię, nie pozostawiając po sobie nic poza wzbogaconym o ciężkie pierwiastki gazem. Aby mogło do tego dojść, gwiazda musi mieć masę 130–250 mas Słońca i być zbudowana z wodoru i helu, bez domieszki innych pierwiastków. Takie gwiazdy mogły istnieć tylko w początkowych fazach ewolucji Wszechświata. Możliwe jest też, że gwiazdy w młodym Wszechświecie powstawały i umierały zdecydowanie szybciej, niż przewidywaliśmy, lub że było ich zdecydowanie więcej. Mogło wówczas istnieć więcej układów podwójnych gwiazd, które mogą produkować jeszcze inny typ supernowej wzbogacającej gaz o ciężkie pierwiastki. Albo miały miejsce zupełnie inne zjawiska, o których nie mamy pojęcia. Z drugiej strony możliwe jest też, że nasze oszacowania wieku Wszechświata są błędne i istnieje on zdecydowanie dłużej, niż sądzimy. W związku z tym galaktyki, które teraz uznajemy za najodleglejsze, wcale takie nie są. W tym momencie nie jesteśmy w stanie potwierdzić ani obalić żadnej z tych hipotez.

I to jest właśnie piękne w nauce. Gdy już myślisz, że znasz odpowiedzi na wszystkie pytania, nowe odkrycia zmuszają cię do zadania wielu innych.

Na podstawie artykułu: Stefano Carniani et al., „The eventful life of a luminous galaxy at $z = 14$: metal enrichment, feedback, and low gas fraction?”, *A&A*, 696, A87 (2025).

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Słońce przez cały październik wędruje przez gwiazdozbiór Panny, wciąż podążając na południe. Do końca miesiąca zdąży ono obniżyć wysokość górowania prawie o 11° , co pociągnie za sobą wydłużenie się nocy o 2 godziny. W nocy z 25 na 26 października nastąpi zmiana czasu z letniego na zimowy.

1 października przez opozycję przechodzi planeta karłowata (1) Ceres, osiągając na początku miesiąca jasność $+7,6^m$, czyli nieco więcej od znajdującego się około 13° na północny wschód od niej Neptuna. Ceres w październiku zakreśli łuk o długości 6° na tle gwiazdozbioru Wieloryba, zaczynając miesiąc $2,5^\circ$ na zachód od świecącej z jasnością obserwowaną $+3,4^m$ gwiazdy η Cet. 11 października planetoida przejdzie $9'$ na południe od gwiazdy 5. wielkości $\varphi 2$ Cet, tydzień później natomiast przejdzie $1,5^\circ$ na południe od jaśniejszej o $0,5^m$ gwiazdy $\varphi 1$ Cet, by na koniec miesiąca zbliżyć się na $4,5^\circ$ na południowy wschód do kolejnej gwiazdy 3. wielkości ι Cet. Ceres góruje około północy na wysokości 27° .

Pierwsza część miesiąca zostanie niestety rozświetlona przez Księżyc, choć ze względu na słabe nachylenie ekliptyki do wieczornego horyzontu początkowo w momencie górowania planety karłowatej Ceres znajdzie się on już pod horyzontem, mimo fazy przekraczającej 68%. Stąd nie przeszkodzi on zbyt w jej obserwacjach podczas jej maksymalnej jasności. Pełnię Srebrny Glob osiągnie 7 października, a noc wcześniej zbliży się do pary planet Saturn-Neptun, przechodząc 3° od jaśniejszej z nich. W październiku dystans między nimi zwiększy się do 4° . Jasność Saturna spadnie do $+0,9^m$, przy średnicy tarczy $19''$, a jego pierścienie znowu staną się prawie niewidoczne, gdyż stosunek ich małej do wielkiej osi zmniejszy się do 0,01. Neptun świeci z jasnością $+7,8^m$.

Jeśli ktoś posiada teleskop z dużym powiększeniem, to warto przyjrzeć się tarczy Saturna 6 października rano, ponieważ od godziny około 3:20 aż do jej zachodu dwie godziny później będzie na niej widoczny Tytan, czyli największy księżyc tej planety. Zjawisko powtórzy się w nocy z 21 na 22 października. Tym razem Tytan pojawi się na tarczy Saturna około godziny 0:45 i pozostanie na niej do zachodu planety około 4:15. Niestety dużo łatwiej dostrzegalny w takiej sytuacji cień tego księżyca przejdzie po tarczy planety za każdym razem już po jej zachodzie.

10 października Srebrny Glob dotrze do Plejad, zmniejszając fazę do 87%. Pechowo dla nas zakrycia najjaśniejszych gwiazd gromady zaczną się od około godziny 8 naszego czasu, już po wschodzie Słońca. Ale bliżej Atlantyku do zjawisk dojdzie na ciemnym niebie. Jakies 4° na południe od Plejad swoją pętlę na niebie kreśli planeta Uran, która w październiku przesunie się o 1° na zachód, zbliżając się na mniej niż 2° do gwiazdy 6. wielkości 14 Tau, sama świecąc o $0,5^m$ jaśniej. W październiku planeta góruje około godziny 3, wspinając się prawie na 60° .

Ostatnia kwadra Księżyca przypada 13 października wieczorem naszego czasu, a wszędzie on przed północą w połowie odległości między Polluksem w Bliźniętach a Jowiszem. Największa planeta Układu Słonecznego zbliża się powoli do opozycji i w październiku pojaśnieje do $-2,3^m$, zwiększając jednocześnie średnicę tarczy do $41''$. Jowisz góruje o świcie na wysokości podobnej do Urana. Ten sezon obserwacyjny Jowisza (a także dwa kolejne) jest o tyle ciekawy, że planeta jest bliska swojej równonocy, stąd nawet Kallisto wraz ze swoim cieniem przechodzi po jowiszowej tarczy. 7 października planeta przejdzie na tle mającej jasność $+9^m$ gromady otwartej gwiazd NGC 2420.

W kolejnych dniach naturalny satelita Ziemi pozostanie ozdobą porannego nieba, gdzie ekliptyka tworzy duży kąt z widnokregiem. 15 października, przy fazie zmniejszonej do 35%, zajmie on pozycję $2,5^\circ$ na wschód od jasnej gromady otwartej gwiazd M44. Następne trzy poranki Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Lwa, przy coraz bardziej zwężającym się sierpie od 25% do 10%. 16 października około godziny 3 odkryje on gwiazdę 6. wielkości 8 Leonis, której pomarańczowa barwa ładnie się skomponuje z ciemnym brzegiem księżycowej tarczy.

19 października Księżyc wejdzie niedługo przed Słońcem, prezentując tarczę w fazie zaledwie 5%. W odległości 7° na godzinie 8 względem niego pojawi się planeta Wenus. Możliwe, że da się dostrzec tarczę Księżyca jeszcze następnego poranka, gdy jego faza spadnie do 1%, a Wenus znajdzie się 7° nad nim. Sama planeta zbliża się do styczniowej koniunktacji ze Słońcem i świeci coraz bliżej widnokregu. Ostatniego dnia miesiąca przed godziną 6 zdąży się wznieść już tylko na wysokość 7° . Wygląd tarczy planety prawie się nie zmienia: jej blask wynosi $-3,9^m$, średnica – $10''$, faza zaś – 96%.

Nów Srebrnego Globu zbiega się z maksimum aktywności Orionidów, których radiant znajduje się w północnej części Oriona i góruje około godziny 5, na wysokości dochodzącej do 60° . Maksimum ich aktywności przypada 21 października, gdy można się spodziewać nawet 30 zjawisk na godzinę. Są to szybkie meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 66 km/s i często pozostawiają po sobie widoczne przez dłuższy czas smugi.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 12



Rozwiązanie zadania F 1129.

Prędkość c dźwięku w gazie o temperaturze bezwzględnej T , molowej masie μ i wykładniku adiabaty κ wynosi:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$$

(R jest stałą gazową). Wraz z oddalaniem się od tropopauzy w górę lub w dół temperatura powietrza rośnie, a więc rośnie też prędkość dźwięku. Oznacza to, że fale dźwiękowe wzbudzone w tropopauzie są załamywane zawsze w stronę tropopauzy, a więc dźwięk efektywnie rozprzestrzenia się w dwuwymiarowym obszarze tropopauzy, co prowadzi do malenia jego natężenia z odległością od źródła jak $1/R$.



Rozwiązanie zadania F 1130.

Obracająca się stacja jest układem nieinercyjnym. W jej wnętrzu przyspieszenie odśrodkowe $a(r)$ zmienia się z odległością r od osi walca: $a(r) = \omega^2 r$. Na brzegu walca $a(r_0) = \omega^2 r_0 = g$, czyli:

$$a(r) = \frac{gr}{r_0}.$$

Po ustaleniu równowagi powietrze obraca się wraz z całą stacją, a przyspieszenie $a(r)$ odgrywa rolę pola grawitacyjnego. Znajdziemy rozkład ciśnienia $p(r)$ w polu $a(r)$. Niech $\rho(r)$ oznacza gęstość powietrza w odległości r od osi obrotu. Mamy:

$$\frac{dp}{dr} = a(r)\rho(r).$$

Powietrze spełnia równanie gazu doskonałego, a więc:

$$\rho(r) = \frac{p(r)\mu}{RT}.$$

R oznacza tu stałą gazową. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{dp}{dr} = \left(\frac{\mu gr}{r_0 RT} \right) p,$$

którego rozwiązaniem jest ($p_c = p(0)$):

$$p(r) = p_c \exp\left(\frac{\mu gr^2}{2r_0 RT}\right).$$

Szukany stosunek ciśnień wynosi więc:

$$\frac{p_c}{p_0} = \exp\left(-\frac{\mu gr_0}{2RT}\right).$$



Rozwiązanie zadania M 1831.

W pierwszym ruchu Wanda nie przegra, ponieważ nie ma dwucyfrowych kwadratów liczb całkowitych z cyfrą 7. Pokażemy teraz, że każdy z graczy może mieć pewność, że nie przegra, wybierając jedną z cyfr 7 lub 8 i dodając ją na końcu bieżącej liczby w grze.

Istotnie, kwadrat liczby całkowitej nie może kończyć się cyfrą 7 ani 8, więc przy tej strategii przeciwnik może wygrać jedynie poprzez dodanie nowej cyfry na końcu liczby. Załóżmy, że po dopisaniu cyfry 7 do aktualnej liczby A istnieje zwycięska odpowiedź – dopisanie cyfry 4, a poprzez dopisanie cyfry 8 istnieje zwycięska odpowiedź

– przypisanie cyfry y . W tym przypadku liczby $\overline{A7x}$ i $\overline{A8y}$ byłyby kwadratami liczb całkowitych. Różnica między nimi wyniosłaby mniej niż 20, ale każda z tych liczb jest co najmniej trzycyfrowa i różnica między sąsiednimi kwadratami takich liczb całkowitych wynosi co najmniej $11^2 - 10^2 > 20$.



Rozwiązanie zadania M 1832.

Rozpatrzmy dowolny graf $\mathcal{G}$ o $k-1$ krawędziach oraz n wierzchołkach ponumerowanych kolejno $1, 2, \dots, n$, i mający $k-1$ krawędzi. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą. Każdej krawędzi $\mathcal{G}$ przypiszmy pewną liczbę pierwszą ze zbioru $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$. Natomiast wierzchołkowi o numerze i przypiszmy iloczyn liczb pierwszych odpowiadających krawędzom wychodzącym z tego wierzchołka oraz liczby p_{k+i} .

Liczby przypisane wierzchołkom są parami różne, gdyż wierzchołek o numerze i ma przypisaną liczbę, która jako jedyna jest podzielna przez p_{k+i} . Ponadto zbiór największych wspólnych dzielników par tych n liczb składa się dokładnie z liczb $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ oraz 1. Wobec tego zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich liczb przypisanych wierzchołkom $\mathcal{G}$ spełnia warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 1833.

W rozwiązaniu użyjemy dobrze znanej (i bardzo przydatnej!) konsekwencji twierdzenia sinusów w trójkącie (zob. też KPO na stronie 25):

W trójkącie ABC punkt D leży na odcinku BC . Wówczas

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{BA}{AC}.$$

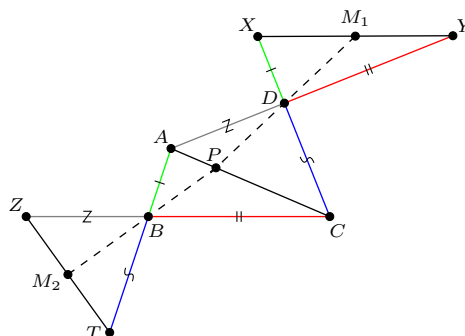
Niech DM_1 przecina AC w punkcie P . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PC} &= \frac{\sin \angle ADP}{\sin \angle PDC} \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{\sin \angle YDM_1}{\sin \angle M_1DX} \cdot \frac{AD}{DC} \\ &= \frac{YM_1}{M_1X} \cdot \frac{XD}{DY} \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{XD}{DY} \cdot \frac{AD}{DC}. \end{aligned}$$

Podobnie, jeśli BM_2 przecina AC w punkcie P' , uzyskamy

$$\frac{AP'}{P'C} = \frac{ZB}{BT} \cdot \frac{AB}{BC}.$$

Jednakże na podstawie danych w zadaniu zależności prawe strony ostatnich dwóch równości mają tę samą wartość, więc $P = P'$.





Pęki harmoniczne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przed przystąpieniem do lektury zachęcam Czytelnika do zapoznania się z poprzednim odcinkiem.

Rozważmy konfigurację geometryczną z rysunku 1. Obliczając na dwa sposoby pola trójkątów AXS i BXS , otrzymujemy

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{[AXS]}{[BXS]} = \frac{\frac{1}{2}ax \sin \alpha}{\frac{1}{2}bx \sin \beta} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}.$$

Analogicznie $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{a \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{b \sin \gamma} = \frac{a \sin \delta}{b \sin \gamma}$. Mamy więc równoważność:

$$\text{Odcinki } AB \text{ i } XY \text{ są harmonicznie sprzężone} \iff \sin \alpha \sin \gamma = \sin \beta \sin \delta.$$

Powyższa równość nie zależy od położenia prostej ℓ (nawet gdy przecina proste $\ell_A, \ell_X, \ell_B, \ell_Y$ w innej kolejności), więc jest ona własnością pęku. Wnioskujemy zatem, że każda prosta przecinająca te cztery w punktach kolejno A, X, B, Y , sprezentuje nam harmonicznie sprzężone odcinki AB i XY . Taki pęk czterech prostych nazywamy *pękiem harmonicznym*, a punkt S – jego środkiem.

Rozważania te należy uzupełnić o prostą ℓ równoległą do, powiedzmy, ℓ_Y – wówczas $Y = \infty$. W tej sytuacji harmoniczne sprzężenie odcinków AB i XY jest równoważne równości $|AX| = |BX|$. Z równoległości $\ell_Y \parallel \ell$ mamy $|\sphericalangle SAX| = \delta$ i $|\sphericalangle SBX| = \gamma$. Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABS mamy $a \sin \delta = b \sin \gamma$, skąd

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} \cdot \frac{b \sin \gamma}{a \sin \delta} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta \sin \delta}.$$

Dlatego $|AX| = |BX|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin \alpha \sin \gamma = \sin \beta \sin \delta$. W końcu wykazaliśmy:

Twierdzenie 1. *Przecięcie pęku pewną prostą daje parę odcinków harmonicznie sprzężonych wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie go każdą prostą daje parę odcinków harmonicznie sprzężonych.*

Na koniec jeszcze o pewnym szczególnym pęku harmonicznym. Na potrzeby kącika będę go nazywał *prostokątnym* (nie jest to nazwa oficjalna, ale mogłaby taką być), ponieważ pewne dwie proste należące do niego przecinają się pod kątem prostym (rys. 2). Poniższe twierdzenie szczegółowo opisuje tę konfigurację.

Twierdzenie 2. *Dany jest trójkąt ABS . Punkty X i Y leżą na prostej AB . Jeśli spełnione są pewne dwa z poniższych warunków, to zachodzi także trzeci:*

- odcinki AB i XY są sprzężone harmonicznie;
- kąt XSY jest prosty;
- prosta SX jest dwusieczną kąta ASB .

Dowód. Załóżmy najpierw, że zachodzą warunki (b) i (c). Prosta SY jest dwusieczną kąta zewnętrznego ASB , więc odcinki AB i XY są sprzężone harmonicznie na mocy twierdzenia 2(3) z poprzedniego kącika. Załóżmy teraz, że zachodzi (a) – pokażemy, że wówczas (b) i (c) są równoważne, czym zakończymy dowód twierdzenia. Poprowadźmy prostą ℓ' prostopadłą do SX , przecinającą proste AS, BS, XS, YS w punktach, odpowiednio, A', B', X', Y' . Zachodzą następujące równoważności:

$$|\sphericalangle XSY| = 90^\circ \iff Y' = \infty \iff |X'A'| = |X'B'| \iff |\sphericalangle ASX| = |\sphericalangle BSX|.$$

Wskazówki do zadań

- Odcinki PQ i RS są harmonicznie sprzężone (twierdzenie 2(1)). Mamy $|\sphericalangle PKR| = |\sphericalangle RKS| = 90^\circ$, więc wystarczy zastosować twierdzenie 2(3). Niech prosta EF przecina proste BC i AD w punktach odpowiednio X i Z . Odcinki BC i AD są harmonicznie sprzężone (twierdzenie 2(2) z poprzedniego kącika), a więc EF i ZY również są harmonicznie sprzężone (twierdzenie 1). Teraz wystarczy zauważyć, że proste DF, DZ, DE, DY tworzą prostokątny pęk harmoniczny i zastosować twierdzenie 2(3). Niech K będzie przecięciem prostych AB i DE . Na mocy twierdzenia Cevy odcinki AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie, więc AB i KF są harmonicznie sprzężone. Ponadto trójkąty AEP i AFP są przystające. Korzystając dodatkowo z twierdzenia o dwusiecznej, możemy więc napisać: $\frac{|AP|}{|PF|} = \frac{|AE|}{|EF|} = \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AK|}{|BK|}$. Pozostaje skorzystać z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwusiecznej. Niech R będzie punktem przecięcia AQ i PT (dopuszczamy $R = \infty$). Odcinki AB i NP są harmonicznie sprzężone (zadanie 1(b) z poprzedniego kącika), zatem również odcinki TP i MR są harmonicznie sprzężone – więc $R = \infty$.

Zadania

- Dany jest trapez $ABCD$. Punkty P i Q są środkami podstaw, odpowiednio, AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie R , a przedłużenia ramion – w punkcie S . Okręgi o średnicach PQ i RS przecinają się w punktach K i L . Udowodnić, że $|\sphericalangle QKR| = 45^\circ$.
- Punkt X leży na wysokości AD trójkąta ABC . Proste BX i CX przecinają, odpowiednio, odcinki AC i AB w punktach E i F . Udowodnić, że prosta AD jest dwusieczną kąta EDF .

- Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB w punktach, odpowiednio, D, E, F . Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek DE w punkcie P . Wykazać, że $AP \perp BP$.
- Dany jest okrąg ω o średnicy AB . Punkt P leży na prostej AB , przy czym punkt B znajduje się na odcinku AP . Na okręgu ω wybrano taki punkt T , by prosta PT była do tego okręgu styczna. Punkt M jest środkiem odcinka PT , a punkt N jest rzutem prostopadłym punktu T na odcinek AB . Proste NT i BM przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że $AQ \parallel PT$.

