



deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

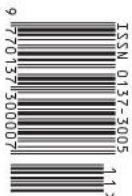
$h=6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s $\pi=3,141592...$

NR 11 (618) 2025

CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltamiedu.pl

O obrotach
w czaso-
przestrzeni
str. 2



Nakład: 2700 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 11 (618) 2025

Twierdzenie Nikomacha a tabliczka mnożenia

Paweł Rafał Bieliński

str. 1

O obrotach w czasoprzestrzeni

Bartłomiej Bąk, Bartosz Zawora

str. 2



Zadania

str. 4

Przygody z kołem od roweru

Alex Schwarzenberg-Czerny

str. 5

Matematyczne sekrety systemu bonus-malus

Karolina Pawlik

str. 6

 Odległości par według Langforda

Bartłomiej Pawlik

str. 8

 Z lotu ptaka

Marta Fikus-Kryńska

str. 8

Matematyka i literatura: OuLiPo

Miroslaw Lachowicz

str. 10

O sztucach, szaleństwie i nieskończoności

Życie i twórczość Georga Cantora

Szymon Janiszewski

str. 13

Georg Cantor i liczby przestępne, rok 1874

Grzegorz Łukaszewicz

str. 16

 Aktualności

Trudne tematy

str. 20

Klub 44

str. 21

 Prosto z nieba: Supernowa, która wybucha dwa razy

str. 22

 Niebo w listopadzie

str. 23

 Wielomiany symetryczne

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W dniu 28 września 2025 roku zmarł

Krzysztof Nowiński

Jeden z założycieli ICM UW

Autor *Delta*

Redaktor rubryki zadaniowej

w latach 1979–1984

Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac.,
Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie Nikomacha a tabliczka mnożenia

Paweł Rafał BIELIŃSKI

Nauczyciel, Warszawa

W Δ_{25}^6 przedstawiliśmy sprytny, wizualny dowód tożsamości zwanej twierdzeniem Nikomacha. Dla naturalnych $n \geq 1$ mamy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Tym razem przedstawimy zupełnie inny dowód, którym uczymy obchodzony 15 listopada Międzynarodowy Dzień Tabliczki Mnożenia.

O nieoczywistym zastosowaniu tabliczki mnożenia pisaliśmy również w Δ_{25}^7 .

Dla wygody przyjmijmy oznaczenie n -tej liczby trójkątnej $T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Zauważmy także, że prawdziwa jest równość

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n^2.$$

Czytelnik Obdarzony Niezwykłą Pamięcią przypomina sobie, że we wspomnianym artykule *Trójkąty, kwadraty, sześciąty* ta pomocnicza tożsamość została uzasadniona geometrycznie.

Istotnie, łatwo jest naszkicować argument indukcyjny: dla $n = 1$ jest to oczywiście prawda ($1 = 1^2$), przechodząc zaś z n do $n + 1$, dopisujemy składniki $(n + 1) + n$ po lewej stronie, gdy prawa wzrasta o $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Zatem różnica stron nie zmienia się, a wzór jest słuszny dla wszystkich n .

Dla dowodu głównej tożsamości zastosujemy technikę podwójnego zliczania, dwukrotnie wyznaczając sumę liczb w kwadratowym narożu $n \times n$ tabliczki mnożenia.

Zliczanie kolumnami. Najpierw obliczymy sumę liczb w każdej z kolumn, a następnie dodamy tak otrzymane sumy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121

Suma liczb w k -tej kolumnie naszego naroża wynosi, licząc od góry,

$$1k + 2k + 3k + \dots + nk = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot k = kT(n).$$

Suma liczb w całym narożu $n \times n$ jest więc równa

$$\begin{aligned} 1 \cdot T(n) + 2 \cdot T(n) + 3 \cdot T(n) + \dots + n \cdot T(n) \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot T(n) = T(n)^2. \end{aligned}$$

Jest to prawa strona głównej tożsamości.

Zliczanie warstwami. Podzielimy badane naroże na warstwy następująco: pierwsza warstwa zawiera tylko samo narożne pole; druga – pozostałe trzy pola zawarte w narożu 2×2 ; trzecia – pozostałych 5 pól

w narożu 3×3 i tak dalej: k -ta warstwa zawiera te pola naroża $k \times k$, które nie zawierają się w narożu $(k - 1) \times (k - 1)$. Jasne jest, że początkowe n warstw doskonale pokrywa całe naroże $n \times n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121

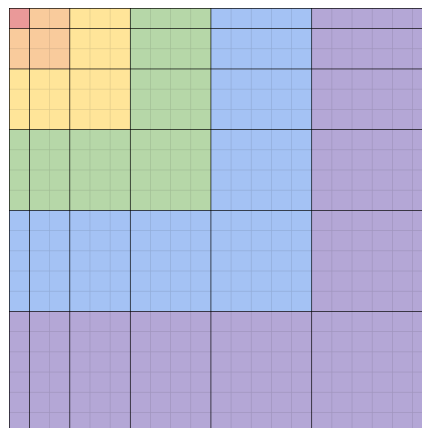
Obliczmy sumę liczb zawartych w k -tej warstwie. Wynosi ona

$$\begin{aligned} 1k + 2k + 3k + \dots + (k-1)k + k^2 + (k-1)k + \dots \\ + 3k + 2k + 1k \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k + (k-1) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot k \\ = k^2 \cdot k = k^3, \end{aligned}$$

zgodnie z równością wykazaną we wstępie. Suma wszystkich liczb w narożu $n \times n$, pogrupowanych w kolejne warstwy, wynosi więc $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$. Ponieważ jest to lewa strona głównej tożsamości, jej dowód możemy uznać za zakończony.

Dowód ten ma kilka zalet; jedną z nich, która jak dotąd się nam nie ukazała, jest możliwość zademonstrowania go geometrycznie. Poniższa ilustracja pozwala zastąpić uprzednie zliczanie kolumnami prostym obliczeniem pola kwadratu.

Kolekcjonerzy dowodów mogą zajrzeć również do Małej Delt w Δ_{94}^{10} , gdzie Jarosław Górnicki przedstawia diagram jeszcze innego argumentu geometrycznego.



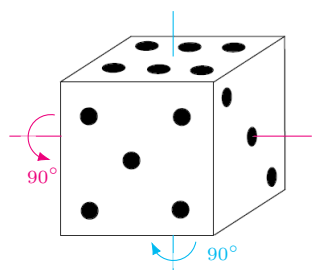
Dla Czytelnika Pragnącego Działać zostawiamy jeszcze jedno wyzwanie: Jaką tożsamość uzyskamy, stosując analogiczną technikę dla tabliczki mnożenia o wymiarach $n \times 2n$?

O obrotach w czasoprzestrzeni

Czyli od sześcienniej kostki przez strukturę grupy do obrotu Wignera i precesji Thomasa

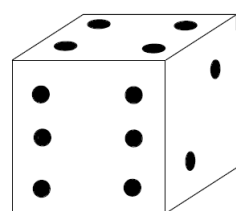
Bartłomiej BĄK, Bartosz ZAWORA

Doktoranci, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

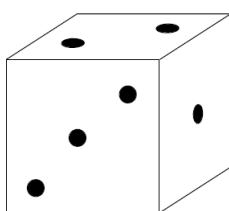


Rys. 1. Stan początkowy kostki z zaznaczonymi obrotami

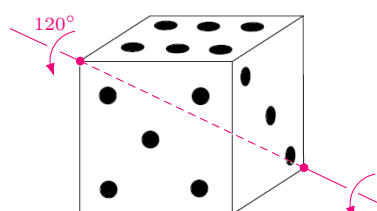
Obroty to bardzo proste zjawiska z życia codziennego, a zarazem niezwykle interesujące obiekty matematyczne. Bardzo dobrze można je „zwizualizować” i zbadać szereg ich własności przy użyciu zwykłej sześcienniej kostki. Po pierwsze, obroty kostki są na ogół nieprzemienne, co oznacza, że wykonanie dwóch tych samych ruchów w różnej kolejności prowadzi do różnego stanu końcowego. Dla przykładu wyobraźmy sobie, że na stole leży kostka w położeniu przedstawionym na rysunku 1. Wykonamy zaznaczone ruchy w różnej kolejności, prowadzące do stanów przedstawionych na rysunkach 2 i 3. Co jeszcze ciekawsze, każde takie „podwójne” obrócenie można osiągnąć poprzez pojedynczy obrót, ale wykonany wokół innej osi, co zostało pokazane na rysunkach 4 i 5.



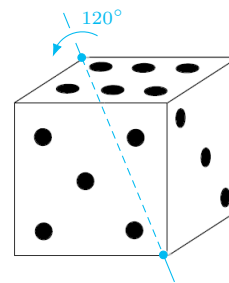
Rys. 2. Kostka po wykonaniu obrotu wokół osi pionowej, a następnie poziomej



Rys. 3. Kostka po wykonaniu obrotu wokół osi poziomej, a następnie pionowej



Rys. 4. Pojedynczy obrót kostki, który ze stanu podstawowego (rys. 1) generuje stan z rysunku 2

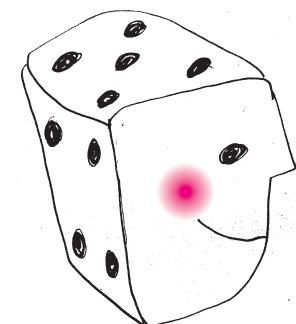


Rys. 5. Pojedynczy obrót kostki, który ze stanu podstawowego (rys. 1) generuje stan z rysunku 3

Czytelnik Wnikliwy zauważy, że do dopełnienia struktury grupy potrzebna jest jeszcze *łączność działania*, w tym przypadku składania obrotów.

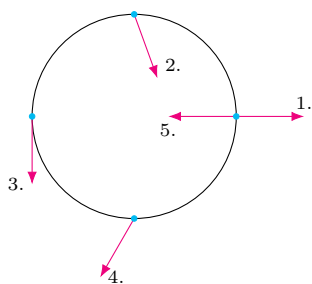
Inną, niezbyt zaskakującą własnością obrotu jest jego *odwracalność*, która oznacza, że zawsze jesteśmy w stanie wrócić do stanu początkowego, wykonując obrót wokół tej samej osi w przeciwną stronę. Do kompletu wypada dolożyć stwierdzenie, że brak obrotu również jest obrotem, fachowo zwanym *identycznością*. Powyższe własności obrotów, w języku matematyki, odpowiadają strukturze *grupy*, a ta konkretna grupa nosi nazwę *grupy obrotów*, w literaturze oznaczana jako $SO(3)$, gdzie cyfra 3 odnosi się do wymiaru przestrzeni. Możemy dalej rozważyć zbiór obrotów, które zachowują pewną wybraną płaszczyznę. Takie obroty również tworzą grupę (tym razem przemenną!) $SO(2)$, a ponieważ są wyodrębnione z większego bytu, określa się je mianem *podgrupy*, co oznacza, że złożenie dwóch obrotów zachowujących wyróżnioną płaszczyznę również jest takim obrotem. Czytelnik Wtajemniczony powinien wiedzieć, że fakt wyodrębnienia pewnej podgrupy z większej grupy w ogólności wcale nie oznacza, że pozostałe elementy (wraz z identycznością, która jest elementem wspólnym wszystkich podgrup danej grupy) tworzą podgrupę. Ta, wydawałoby się, mało istotna informacja będzie miała kluczowe znaczenie w dalszej części tego artykułu.

Żeby zacząć mówić o *obrotach w czasoprzestrzeni*, trzeba najpierw przybliżyć, czym w zasadzie jest *czasoprzestrzeń*. Punkty w zwykłej trójwymiarowej przestrzeni scharakteryzowalibyśmy za pomocą trzech liczb opisujących odległość od wybranego przez nas punktu (środką) w trzech prostopadłych kierunkach. Ustalenie tego środka i tych trzech kierunków określa się mianem *wyboru układu współrzędnych*. Idąc tym tokiem rozumowania, czasoprzestrzeń byłaby zestawem czterech liczb, gdzie jedna z nich (tradycyjnie jest to pierwsza) oznaczałaby upływ czasu od wybranego przez nas momentu, a pozostałe trzy dotyczyłyby przestrzeni. Jednakże czas jest w pewien sposób wyróżniony spośród tych czterech składowych czasoprzestrzennych na skutek stałości prędkości światła. Okazuje się bowiem, że gdy obiekty poruszają się dostatecznie szybko względem naszego układu (np. 10% wartości prędkości światła, która wynosi $c = 299\,792\,458$ m/s), to odczuwany przez nie upływ czasu oraz mierzone długości różnią się względem tego, co my mierzymy. Dokładniej rzecz ujmując, obiekty (spoczywające w naszym układzie) mierzone w układzie



Oczywiście są to paradoksy pozorne, wynikające z tego, że na co dzień nie doświadczamy efektów relatywistycznych i nasza „intuicja” zawodzi. W celu pogłębienia wiedzy odsyłamy do innych artykułów *Delty*: „Paradoks Roberta Korzeniowskiego” i „Geometria na wirującej karuzeli” Andrzeja Dragana lub „Na czym polega paradoks bliźniąt” Piotra Zalewskiego.

Na określenie przekształcenia Lorentza zmieniającego prędkości używa się też (zgodnie z zaleceniami Polskiego Towarzystwa Fizycznego) słów *pchnięcie* albo *poryw*, zamiast obco brzmiącego słowa *boost*.



Rys. 6. Precesja spinu elektronu poruszającego się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Miara kąta rozwarcia α wynika z relatywistycznego składania prędkości i jest zadana warunkiem

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_P}{v_W} \sqrt{1 - \frac{v_W^2}{c^2}}, \text{ a w przypadku nierelatywistycznym } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_P}{v_W}.$$

poruszającym się (względem nas) ulegają *skróceniu Lorentza*, natomiast czas dla obserwatorów ruchomych płynie wolniej (względem naszego układu), i jest to tzw. *dylatacja czasu*. Takie „niecodzienne” właściwości skutkują powstawaniem wielu ciekawych „paradoksów”. Ich badaniem zajmuje się *szczególna teoria względności*, która zagościła w świecie fizyki dzięki Albertowi Einsteinowi.

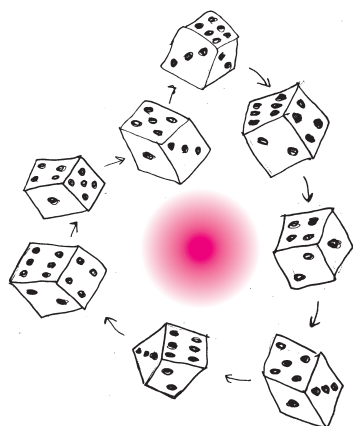
Aby zobaczyć świat oczami innego obserwatora, potrzebna jest stosowna formuła opisująca przejście z jednego układu do drugiego, tzw. *transformacja*. Jak już wiemy, obserwatorzy spoczywający względem siebie, ale patrzący w różne strony (czyli tacy, którzy wybrali różne kierunki) różnią się względem siebie o obrót, co sugeruje nam, że grupa obrotów należy do zbioru transformacji czasoprzestrzeni, bo przecież otaczający nas świat nie uległ zmianie, a jedynie sposób, w jaki na niego patrzymy. Natomiast żeby opisać przejście pomiędzy obserwatorami, którzy patrzą w tę samą stronę, ale poruszają się względem siebie, potrzebna jest tzw. *transformacja Lorentza*, nazywana też *boostem*, dzięki której można analizować i tłumaczyć wspomniane wcześniej „paradoksy”. Co bardzo ważne, ta transformacja w przypadku małych prędkości (względem prędkości światła) jest praktycznie nieodróżnialna od używanej na co dzień i zgodnej z naszą intuicją *transformacji Galileusza*, według której: jeśli stoimy na peronie i mija nas pociąg z prędkością V , to względem pasażera tegoż pociągu to peron „odjeżdża” w przeciwną stronę, również z prędkością V , podczas gdy upływ czasu dla obu obserwatorów jest jednakowy. Zbiór wszystkich tych transformacji czasoprzestrzeni określa się mianem *grupy Lorentza* – pełni ona niezwykle istotną rolę we współczesnej fizyce i matematyce, i to własności tej grupy odgrywają kluczową rolę w dalszej części tego artykułu.

Pokrótkie omówiliśmy już sześcienną kostkę, grupę obrotów i kilka interesujących nas własności czasoprzestrzeni, więc teraz przejdziemy do *precesji Thomasa*. Efekt ten można opisać w następujący sposób: gdy jakiś obiekt porusza się z prędkością relatywistyczną (porównywalną z prędkością światła c) i kierunek tej prędkości ulegnie zmianie, to ciało (względem nieruchomego obserwatora) obróci się w płaszczyźnie, w której dokonała się zmiana prędkości. Oryginalnie efekt ten dotyczył precesji spinu elektronu (czyli zmiany kierunku wewnętrznego momentu pędu) podczas ruchu orbitalnego wokół jądra atomu. Upraszczając, wyobraźmy sobie, że elektron jest malutką, doskonałą kulką, do której przyczepiona jest strzałka (symbolizująca spin). W trakcie ruchu jednostajnego po okręgu kierunek strzałki będzie się obracał ze stałą prędkością kątową, co przedstawia rysunek 6.

Powyższe zjawisko wynika z drugiego (aczkolwiek bardziej elementarnego) tytułowego efektu, mianowicie *obrotu Wignera*, nad którym się teraz pochylimy. Można go przedstawić w następujący sposób: względem spoczywającego laboratorium porusza się dwóch podróżników: jeden na wschód z prędkością v_W , a drugi na północ z prędkością v_P , i każdy z nich ma osie swojego układu współrzędnych ustawione zgodnie ze swoimi kierunkami ruchu. Otóż według podróżnika udającego się na wschód ten poruszający się na północ jest obrócony względem pozycji zarejestrowanej przez laboratorium! Jest to dość zaskakująca obserwacja, ale dlaczego w ogóle ma ona miejsce? Co jest przyczyną takiego efektu? Spróbujemy na to odpowiedzieć w dwójnasób: od strony fizyki oraz matematyki (oczywiście oba te obrazy są spójne i kompatybilne, natomiast argumenty dotyczą nieco różnych aspektów).

Z punktu widzenia fizyki kluczowe jest to, że skrócenie Lorentza występuje **wyłącznie** w kierunku ruchu obserwatora, podczas gdy pomiary w kierunkach prostopadłych nie ulegają zmianie. Krótko mówiąc, jadąc z prędkością v przez most o długości L , stwierdzimy, że jest on krótszy niż wskazywałaby na to mapa, bo uzyskalibyśmy wynik $L\sqrt{1 - v^2/c^2}$, natomiast jest tak samo szeroki. Jeśli dołożymy do tego fakt, że względem podróżnika jadącego na wschód podróżnik jadący na północ porusza się pod kątem rozwartym względem wschodniego kierunku, co samo w sobie nie jest efektem relatywistycznym, dostajemy egzotyczną kombinację różnych nieprostopadłych kierunków i częściowych

W ogólności, jeżeli mamy co najmniej dwa wymiary przestrzenne, to boosty nie tworzą podgrupy, natomiast boosty wzdłuż tego samego kierunku przestrzennego już tworzą grupę, i to przemienną.



skrótów Lorentza oraz oczywiście dylatacji czasu. Złożenie tych wszystkich efektów daje obrót o kąt ϕ spełniający następujące tożsamości:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\frac{v_W v_P}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_W^2}{c^2}} + \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}}, \quad \sin \phi = \frac{\frac{v_W v_P}{c^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v_W^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}}.$$

Matematycznie sprawa jest dużo prostsza: jak już wspomnieliśmy, obroty tworzą podgrupę grupy Lorentza, natomiast boosty już nie. Wynika stąd, że złożenie dwóch dowolnych boostów wcale nie musi być boostem. Powstaje więc pytanie: czym jest takie złożenie? Odpowiedź jest dość prosta: złożeniem obrotu i boostu, dwóch nietrywialnych cegiełek grupy Lorentza.

A jak to się ma do oryginalnego problemu precesji spinu elektronu? Otóż kluczowy jest ruch po okręgu, który co prawda zachowuje długość wektora prędkości, ale nieustannie zmienia jego kierunek! W związku z tym w każdej chwili czasu naszemu elektronowi trzeba przyporządkować nowy układ współrzędnych (tzw. układ chwilowo współporuszający się), co oznacza, że w każdej chwili czasu potrzebny jest obrót, by uczynić zadość transformacji Lorentza, spójności grupy Lorentza i tym samym szczególnej teorii względności. Dla zaspokojenia ciekawości podajemy ogólny wzór na tę częstość:

$$(2) \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \vec{a} \times \vec{v},$$

gdzie $\vec{a}$ oznacza przyspieszenie, jakiego doznaje ciało. W przypadku elektronu na orbicie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem dośrodkowym, wobec czego zachodzi następująca równość:

$$(3) \quad \vec{\Omega} = -\vec{\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

gdzie $\vec{\omega}$ oznacza prędkość kątową elektronu. Z powyższego wzoru wynika również, że precesja spinu odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu obiegowego elektronu. Wracając jeszcze na chwilę do rysunku 6, widzimy, że częstość precesji Thomasa Ω jest dwukrotnie mniejsza niż prędkość kątową elektronu ω , bo w trakcie pełnego obiegu strzałka obróciła się o 180° , co pozwala wyznaczyć prędkość elektronu $v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$.

Czytelników spragnionych wyzwań i rachunków zapraszamy do lektury załącznika (umieszczonego na stronie czasopisma), gdzie przedstawione są dokładne rachunki uzasadniające umieszczone w tym artykule rezultaty.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1834. Okrąg podzielono na $2n$ łuków o długości 1. Punkty podziału są połączone w pary, tworząc n cięciw. Każda cięciwa dzieli okrąg na dwa łuki, a długość każdego z nich jest parzysta. Udowodnić, że n jest liczbą parzystą.

M 1835. Punkt na płaszczyźnie nazywamy *kratowym*, jeśli obie jego współrzędne są liczbami całkowitymi. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych, zawierający we wnętrzu dokładnie dwa punkty kratowe. Udowodnić, że prosta łącząca te dwa punkty kratowe przechodzi przez wierzchołek trójkąta lub jest równoległa do jednego z jego boków.

M 1836. Liczby rzeczywiste $0 < a, b, c, d < 1$ są takie, że

$$abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d).$$

Udowodnić, że

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1131. Samochód napędzany jest silnikiem wysokoprężnym (Diesla), w którym wtrysk paliwa poprzedzony jest 20-krotnym sprężeniem powietrza w cylindrze – tzn. w wyniku sprężania objętość powietrza zassanego z otoczenia (atmosfery) zmniejszona jest do $1/20$ jej wartości początkowej. Jaką temperaturę osiąga powietrze w cylindrze w chwili wtrysku paliwa? Przyjmij, że silnik zasysa powietrze z otoczenia o temperaturze $t = 20^\circ\text{C}$.

F 1132. Gaz doskonały jest poddawany przemianie, w której jego ciśnienie p i objętość V spełniają związek:

$$p^\alpha V = \text{const}; \quad \alpha > 1.$$

Czy podczas rozprężania gazu jego temperatura T rośnie, czy maleje? Jakiej jest molowej ciepło przemiany?

Przygody z kołem od roweru

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

Kto bawił się kołem rowerowym wyjętym z widelca, wie, że kręcące się koło rowerowe działa jak żyroskop, a przewrócenie go na drugą stronę nie jest prostą operacją i wymaga przyłożenia momentu sił do osi. Powstaje pytanie, jaką pracę trzeba wtedy wykonać? Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że skoro efekt jest ten sam jak w przypadku zatrzymania koła i rozpędzenia go w przeciwnym kierunku, to praca wynosi dwukrotną wartość energii kinetycznej w każdym ze stanów, czyli $I_1\Omega^2$, gdzie I_1 to moment bezwładności koła, a Ω to kątowa prędkość obrotu.

Przed wydawaniem osądów warto odwołać się do popularnego pokazu z fizyki (np. youtu.be/dUeLMEGxRW8), podczas którego człowiek siedzący nieruchomo na obracalnym stołku trzyma przed sobą poziomo obracające się koło. Gdy przewróci je na drugą stronę, sam zaczyna się obracać, ale powrót do poprzedniej pozycji zatrzymuje ten obrót. Zachowanie momentu pędu stanowi proste wyjaśnienie tego zjawiska. By uprościć rozważania, przyjmijmy, że moment bezwładności koła I_1 i jego masa M_1 są zaniedbywalnie małe wobec tych stołka i siedzącej osoby $I_2 \gg I_1$ i $M_2 \gg M_1$. Pozwoli nam to w obrocie stołka zaniedbać moment bezwładności koła względem osi stołka. Przyjmijmy też, że czas doświadczenia jest na tyle krótki, że pracę sił tarcia można zaniedbać.

O ile początkowo prędkość kątowa stołka wynosiła $\omega_0 = 0$, a koła $\Omega > 0$, to potem $\omega > 0$ dla stołka i $-\Omega + \omega$ dla koła w zewnętrznym układzie nierotującym. To ostatnie uwzględnia zachowanie bezwzględnej prędkości kątowej koła w układzie stołka przy braku hamowania. Mamy zatem następujący warunek zachowania momentu pędu układu:

$$I_1\Omega + 0 = I_1(-\Omega + \omega) + I_2\omega,$$

skąd otrzymujemy

$$\omega = \frac{2I_1\Omega}{I_1 + I_2} \approx \frac{2I_1}{I_2}\Omega.$$

Pracę W ocenimy w układzie zewnętrznym poprzez zmianę energii kinetycznej stołka od 0 do $(1/2)I_2\omega^2$, czyli

$$W = \frac{1}{2} \frac{I_2 4I_1^2 \Omega^2}{I_2^2} = 2 \frac{I_1^2}{I_2} \Omega^2.$$

Stąd wniosek, że jeśli tylko stołek z eksperymentatorem będzie miał dość duży moment bezwładności, to praca może być dowolnie mała, najlepiej by eksperymentator po prostu stał na Ziemi. Zaraz, zaraz, przecież by przekręcić koło, trzeba się z nim solidnie mocować, to gdzie podziła się ta praca? Nie ma tu paradoksu: jeśli koło wiruje początkowo wokół osi z , to para sił $\mathbf{D}$ konieczna do odwrócenia osi obrotu o 180° względem osi x jest prawie równoległa do osi y , przy czym odstępstwo od równoległości jest tym mniejsze, im większy jest stosunek I_2/I_1 . Oś, wokół której wiruje koło, obraca się w płaszczyźnie xz , a główna składowa siły D_y jest do tej płaszczyzny prostopadła. Nie wykonuje ona więc żadnej pracy, a jedynie pełni rolę więzów utrzymujących oś obrotu koła w płaszczyźnie xz .

W przypadku granicznym, jeśli przyjmijmy, że prędkości są stałe (nie ma przyspieszeń) i znamy moment bezwładności $I_x = I_y = I'$ względem osi x i y , to wartość pary sił D_y można znaleźć na podstawie równań ruchu w układzie nieruchomym względem koła.

Przyjmujemy zatem, że prędkość obrotu osi z względem osi y znika, $\omega_y = 0$, a względem osi x jest w przybliżeniu stała, $\omega_x = \text{const}$ (nie należy jej mylić z ω). Mamy jeszcze $\omega_z = \Omega = \text{const}$. Stosowne równania ruchu to równania Eulera. Ponieważ wszystkie prędkości są stałe, lewe strony tych równań wyrażone przez przyspieszenia kątowe równe są zero. Wypiszemy je tutaj bez żadnego dowodu, dla $\Delta = I_1 - I' > 0$ i pary sił o składowych D_x, D_y, D_z :

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta \omega_y \omega_z + D_x = 0 + D_x && \Rightarrow D_x = 0 \\ 0 &= +\Delta \omega_z \omega_x + D_y = +\Delta \Omega \omega_x + D_y && \Rightarrow D_y = -\Delta \Omega \omega_x \\ 0 &= (I' - I') \omega_x \omega_y + D_z = 0 + D_z && \Rightarrow D_z = 0 \end{aligned}$$

Jeśli momenty bezwładności koła rowerowego przybliżymy przez te dla pierścienia z pręta o masie M i promieniu R , to $I_1 = I_z = MR^2$, a $I' = I_x = I_y = MR^2/2$.

Oczywiście by zacząć przekręcać oś obrotu koła, potrzebne jest pewne niezerowe przyspieszenie, przynajmniej na początku. Wtedy po lewej stronie równania pojawi się niezerowy wyraz i w związku z tym D_x też będzie różne od zera. W praktyce oznacza to, że praca będzie różna od zera, a im szybciej przewracamy koło, tym więcej pracy trzeba wykonać. Jednak jeżeli przekręcamy oś obrotu koła dostatecznie wolno, to możemy to zrobić kosztem dowolnie małej pracy.



Matematyczne sekrety systemu bonus-malus

* Wydział Matematyki Stosowanej,
Politechnika Śląska

Karolina PAWLIK*



Wyobraźmy sobie, że każdy nasz manewr za kierownicą jest obserwowany przez niewidzialnego sędziego. Ten sędzia nie śpi, nie ocenia emocji, nie ma litości. Zapisuje każdy rok bezszkodowej jazdy jako zasługę i każdy wypadek jako przewinienie. Tym sędzią jest system bonus-malus – mechanizm, który decyduje, jak wysoko ubezpieczyciel wyceni związane z nami „ryzyko”. Początki wspomnianego systemu sięgają połowy XX wieku. Pierwsze rozwiązania pojawiły się we Francji i w Niemczech, a wkrótce system zyskał popularność w innych krajach. Jego celem było nagradzanie kierowców za bezszkodową jazdę (*bonus*) i karanie za szkody (*malus*). W Polsce system pojawił się w latach 90. Firmy zaczęły wprowadzać zniżki za lata bez szkód i wyższe za wypadki, motywując kierowców do bezpiecznej jazdy. Dziś dzięki technologii mechanizm ewoluuje, co nie zmienia faktu, że jego tajemnice są bezapelacyjnie oparte na matematycznej formalizacji łańcuchów Markowa.

Podstawowe założenia systemu są całkowicie zgodne ze zdrowym rozsądkiem – ten, kto generuje większe koszty dla ubezpieczalni, powinien płacić więcej. Nietrudno jednak skonstruować zachowujący pozory matematycznej poprawności argument przeciwko stosowaniu takiego rozwiązania. Kierowca, który doprowadził w danym roku do wypadku, mógłby zwrócić uwagę, że fakt ten nie czyni go bardziej podatnym na wypadek w przyszłych latach, czemu więc miałby płacić za ubezpieczenie więcej niż w przeszłości? To trochę jak z rzucaniem monetą – jeśli rzuciłem trzy razy i za każdym razem wypadł orzeł, to – jeśli tylko moneta jest uczciwa – szansa na wypadnięcie orla w kolejnym rzucie wynosi niezmiennie 50%. No właśnie – *jeśli tylko moneta jest uczciwa!* A co, jeśli nie możemy tego przyjąć za pewnik?

W kontekście ubezpieczeń dobrą ilustracją będzie tu następujące zadanie, którego warianty często pojawiają się w szkole na lekcjach z rachunku prawdopodobieństwa. W dużej firmie transportowej zatrudniającej kierowców ciężarówek postanowiono wprowadzić system motywacyjny oparty na bezszkodowej jeździe. Firma uznała, że jej pracownicy dzielą się na dwie kategorie – kierowcy o niskim (30%) ryzyku spowodowania szkody w danym roku oraz kierowcy o ryzyku wysokim, równym 40%. Zakłada się ponadto, że w ogólnej populacji kierowców ciężarówek ostrożniejsi stanowią 80%. Poznajemy kierowcę Andrzeja, który w tym roku miał drobną stłuczkę na parkingu – w jaki sposób informacja ta wpływa na oszacowanie prawdopodobieństwa, że mimo to jest on ostrożnym kierowcą? Oczywiście odpowiednim narzędziem jest w tej sytuacji wzór Bayesa, zgodnie z którym szukane prawdopodobieństwo warunkowe to:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ostrożny}|\text{wypadek}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{wypadek}|\text{ostrożny})\mathbb{P}(\text{ostrożny})}{\mathbb{P}(\text{wypadek}|\text{ostrożny})\mathbb{P}(\text{ostrożny}) + \mathbb{P}(\text{wypadek}|\text{ryzykant})\mathbb{P}(\text{ryzykant})} \\ &= \frac{30\% \cdot 80\%}{30\% \cdot 80\% + 40\% \cdot 20\%} = 75\%.\end{aligned}$$

Analogiczny rachunek dla kierowcy Piotra, który w poprzednim roku nie miał żadnego wypadku, pozwala stwierdzić, że warunkowe prawdopodobieństwo jego przynależności do grupy kierowców ostrożnych to około 82%. Zatem nie ma sprzeczności w tym, że choć zakładamy, że Piotr ma rokrocznie to samo prawdopodobieństwo spowodowania wypadku, to fakt, iż nie miał go w tym roku, zwiększa nasze oszacowanie owego prawdopodobieństwa.

Powyższy przykład dawał jedynie matematyczną motywację dla wprowadzenia systemu bonus-malus. Jego dokładniejsza analiza ilościowa opiera się na *łańcuchach Markowa*. Chodzi tu o rodzinę zmiennych losowych, uporządkowaną w czasie, w której tylko bezpośrednia przeszłość ma wpływ na przyszłe zmienne. Mówiąc precyzyjnie, dyskretny łańcuch Markowa (o skończonej przestrzeni stanów $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, K\}$) to ciąg zmiennych losowych X_n o wartościach w Ω , spełniający

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

O łańcuchach Markowa można było przeczytać na przykład w Δ_{07}^3 czy Δ_{13}^9 .

dla wszystkich $n = 0, 1, \dots$ oraz $i_0, \dots, i_{n+1} \in \Omega$. Jeśli prawa strona powyższej równości nie zależy od n (dla ustalonych wartości i_n i i_{n+1}), mówimy, że łańcuch Markowa jest *jednorodny*. Jego dynamikę można wówczas opisać za pomocą liczb:

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad i, j \in \Omega,$$

które razem tworzą tzw. *macierz przejścia*. Rozważmy teraz system bonus-malus, w którym kierowca danego pojazdu płaci składkę S_1 , jeżeli zgłosił szkodę w ciągu ostatnich dwóch lat, w przeciwnym razie płaci niższą składkę S_2 . Istotne są zatem dla nas trzy stany: pierwszy – szkoda wystąpiła w ostatnim roku, drugi – szkoda wystąpiła tylko w przedostatnim roku, oraz trzeci – brak szkód w przeciągu dwóch lat. Jeśli założymy, że dany kierowca ma w każdym roku prawdopodobieństwo spowodowania szkody równe p , to odpowiednia macierz przejścia będzie wyglądać następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ p & 0 & 1-p \end{bmatrix}$$

O rozkładach stacjonarnych można było przeczytać w *Delcie*, na przykład $\Delta_{12}^{12}, \Delta_{19}^{11}$.

Klasycznym pytaniem dotyczącym łańcuchów Markowa jest określenie ich *rozkładu stacjonarnego*. Jest to graniczna częstotliwość przebywania w poszczególnych stanach w odległym horyzoncie czasowym. Mając daną macierz przejścia $A = [a_{ij}]_{i,j \leq K}$, rozkład stacjonarny $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ można wyznaczyć z układu równań:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \pi_i = \pi_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, K,$$

z dodanym warunkiem $\pi_1 + \dots + \pi_K = 1$. W przypadku wyżej określonej macierzy $\mathbb{P}$ równania przybierają postać:

$$\begin{cases} p(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) = \pi_1 \\ (1-p)\pi_1 = \pi_2 \\ (1-p)(\pi_2 + \pi_3) = \pi_3 \end{cases}.$$

Zauważmy, że ten konkretny łańcuch od samego początku znajduje się w rozkładzie stacjonarnym: szanse na bycie w poszczególnych stanach po pierwszych dwóch (a także dowolnych N) latach ubezpieczenia to właśnie odpowiednio p , $p(1-p)$ oraz $(1-p)^2$. W tym przypadku nasza analiza mogłaby zatem być prostsza, jednak wprowadzony język łańcuchów Markowa staje się nieodzowny w bardziej skomplikowanych systemach bonus-malus.

Biorąc pod uwagę $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, dostajemy z pierwszego równania $\pi_1 = p$, zatem z drugiego $\pi_2 = p(1-p)$ i z ostatniego $\pi_3 = (1-p)^2$.

Zastosujemy teraz wyżej wprowadzone pojęcia do rozwiązania następującego zadania optymalizacyjnego. W ramach wprowadzenia zauważmy, że niewątpliwą korzyścią dla firm ubezpieczeniowych ze stosowania systemu bonus-malus jest zniechęcanie ubezpieczonych do zgłaszania szkód. Spójrzmy teraz na tę kwestię od strony ubezpieczonego, który postanowił zgłaszać tylko te szkody, które przekroczyły pewien próg w . Dąży przy tym do takiego wyboru parametru w , aby zminimalizować oczekiwaną wartość łącznych kosztów –

sumy składki i kosztu własnego. Musimy jeszcze założyć coś o (losowej) wysokości szkody. Dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy, że jej wartość X ma *rozkład jednostajny* na przedziale $[0, M]$, co oznacza, że szansa na to, że pojedyncza szkoda przekroczy wartość v z przedziału $[0, M]$, to $1 - v/M$. Ponieważ ubezpieczony nie planuje zmieniać ubezpieczalni przez dłuższy czas, postanowił dokonać optymalizacji przy założeniu, że związany z jego historią szkodowości łańcuch Markowa osiągnął rozkład stacjonarny.

Zauważmy, że strategia ubezpieczonego sprawia, że we wcześniej przedstawionej macierzy przejścia $\mathbb{P}$ zamiast p pojawia się prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia *i zgłoszenia* szkody, czyli $p(1 - w/M)$. Dla uproszczenia napisów przyjmujemy dalej $w' = w/M$.

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami rozkład stacjonarny jest zatem równy:

$$\begin{cases} \pi_1 = p(1 - w'), \\ \pi_2 = p(1 - w')(1 - p(1 - w')), \\ \pi_3 = (1 - p(1 - w'))^2. \end{cases}$$

Całkowity oczekiwany koszt składa się z wartości oczekiwanej składki:

$$\pi_1 S_1 + \pi_2 S_1 + \pi_3 S_2 = S_1 - (S_1 - S_2)(1 - p(1 - w'))^2,$$

oraz wartości oczekiwanej kosztu pokrywania szkód z własnej kieszeni. Szansa na wystąpienie szkody to p , szansa na to, że jest ona mniejsza od w , to w/M , a jeśli już wystąpiła i jest mniejsza od w , to jej wartość oczekiwana (przy założeniu rozkładu jednostajnego) to $w/2$. Dlatego szukana wartość oczekiwana to $pw^2/(2M)$. Ostatecznie ubezpieczony chce zminimalizować względem $w \in [0, M]$ wielkość

$$S_1 - (S_1 - S_2)(1 - p(1 - w/M))^2 + pw^2/(2M).$$

Jest to trójmian kwadratowy względem w , którego wartość minimalna jest osiągana dla

$$w^* = \frac{2(S_1 - S_2)(1 - p)pM}{pM - 2(S_1 - S_2)p^2}.$$

O ile tylko wartość ta leży w przedziale $[0, M]$, jest ona szukany, optymalnym progiem. Wstawiając dla przykładu konkretne wartości $p = 0,1$, $S_1 = 1100$, $S_2 = 900$ oraz $M = 20\,000$ otrzymamy $w^* \approx 360,72$.

Warto podkreślić, że łańcuchy Markowa znajdują szerokie i praktyczne zastosowanie w wielu dziedzinach, takich jak teoria kolejek, analiza systemów ubezpieczeniowych, ekonomia czy biologia. Przykładem może być modelowanie ewolucji populacji, gdzie przejścia między różnymi stanami (np. liczebnością gatunków) w zależności od czynników takich, jak mutacje, selekcja naturalna czy migracje. Łańcuchy Markowa wykorzystywane są także w analizie procesów transkrypcji genów czy w badaniach nad rozprzestrzenianiem się mutacji genetycznych w populacjach, co jest kluczowe w genetyce i genomice. Stanowią nieocenione narzędzie w modelowaniu zjawisk stochastycznych.



Ciągiem Langforda nazywamy każdy taki ciąg długości $2n$, złożony z liczb $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$, że dla każdego $1 \leq r \leq n$ pomiędzy wystąpieniami liczby r znajduje się dokładnie r liczb.

Nie ma ciągów Langforda dla $n = 1, 2$. Mając dane $n = 3$, można wskazać tylko jeden (z dokładnością do rewersu) taki ciąg:

2, 3, 1, 2, 1, 3.

Zachęcam do samodzielnego wyznaczenia ciągu Langforda dla $n = 4$. Co ciekawe, nie ma ciągów Langforda dla $n = 5, 6$, ale dla $n = 7$ są – jednym z nich jest

4, 6, 1, 7, 1, 4, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 2, 5.

Ustalmy, dla jakich liczb naturalnych n może istnieć ciąg Langforda długości $2n$. Jeżeli w takim ciągu liczba r po raz pierwszy występuje na pozycji a_r , to jej drugie wystąpienie przypada na pozycję $(a_r + r + 1)$. Zauważmy, że wśród liczb postaci a_r i $(a_r + r + 1)$ dla $1 \leq r \leq n$ każda z liczb $1, 2, \dots, 2n$ pojawia się dokładnie raz. Mamy zatem:

$$\sum_{r=1}^n (a_r + a_r + r + 1) = \sum_{i=1}^{2n} i.$$

Powyższe równanie można łatwo przekształcić do postaci:

$$\sum_{r=1}^n a_r = \frac{n(3n-1)}{4},$$

której lewa strona jest liczbą całkowitą – więc prawa też musi mieć tę własność. Wynika stąd, że n jest liczbą podzielną przez 4 lub przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Oznacza to, że dla tych liczb naturalnych n , których reszta z dzielenia przez 4 wynosi 1 lub 2, nie ma ciągów Langforda długości $2n$.

Co ciekawe, prawdą jest również naturalne uzupełnienie powyższego stwierdzenia: jeżeli n przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 3, to istnieje ciąg Langforda długości $2n$ (uzasadnienie tego faktu wymaga jednak trochę więcej finezji).

Czego zatem jeszcze o ciągach Langforda nie wiemy? Zdaje się, że wraz ze wzrostem odpowiednich wartości n liczba różnych ciągów Langforda długości $2n$ rośnie bardzo szybko, ale nie ma dokładnego (nawet asymptotycznego) opisu tego wzrostu. Dla $n = 7$ istnieje 26 takich ciągów, dla $n = 8$ jest ich 150, a największą dokładną wartością, jaką znamy, jest ta dla $n = 28$, wynosząca nieco ponad półtora tryliarda.



Z lotu ptaka

Każdy kraj ma ptaki, na jakie sobie zasłużył. Brytyjczycy na przykład za swojego ptaka narodowego uznają rudzika. Spora część populacji wyspiarskiej tego niewielkiego ptaka zostaje przez cały rok na wyspach, szczególnie samce, zwłaszcza ostatnio – wraz z ociepleniem klimatu. Te sympatyczne ptaszki swoim żywym śpiewem umilają życie wyspiarzom nawet w ponure zimowe dni. Cóż, moja jesień zaczyna się raczej wzmożonym krakaniem wymieszanym z wyższymi krzykami gigantycznych stad gawronów i kawek. Ciągną o zachodzie słońca na „nocowanki” na starych drzewach w parku, obok którego mieszkam.

Warszawa niepostrzeżenie zmienia jesienią swój zestaw podskakujących krukowatych – dominującą w lecie wronę siwą zastępują gawrony i kawki. To nasi goście z północy, którzy przylecieli wygrzewać się w dużym mieście, gdzie łatwiej o jedzenie.

I tu dochodzimy do kłopotliwej sprawy. Każde dziecko może zadać przecież niewinne pytanie: Dlaczego ptaki odlatują na zimę i skąd wiedzą, dokąd lecieć i jak wrócić? Dorośli zwykle wymigują się odpowiedzią, że tak nakazuje im instynkt (wersja seniorska), albo że tak nakazują im geny (wersja rodzicielska). Niestety, czuję się w obowiązku zmartwić pokolenie Zet. Obecnie obowiązująca wersja prowadzi do fizyki kwantowej.

Przy podróży na dalekie dystanse ptaki używają wielu metod nawigacji. Kierują się położeniem Słońca i gwiazd, zapamiętują ukształtowanie terenu i znaki wskazujące drogę, np. rzeki, łańcuchy górskie, w czym dodatkowo pomaga

im zmysł węchu. Młode ptaki, podążając za doświadczonymi starszymi, uczą się takich map podróży. Odkąd bada się migrację ptaków, postulowany jednak był dodatkowy sposób odnajdowania właściwej drogi. Są przecież gatunki przemierzające ogromne odległości, które rok po roku wracają do tego samego gniazda na wiosnę. Rekordziści z naszych terenów, jaskółki i bociany, lądują nawet w RPA, czyli ponad 10 tys. km od Polski.

Przyrodnicy uznali, że ptaki (i inne migrujące zwierzęta) kierują się polem magnetycznym Ziemi. W latach 60. wykazano na przykład, że rudziki umieszczone w piwnicy (bez dostępu do światła słonecznego), którym zmieniano pole magnetyczne w ich otoczeniu, wykazywały chęć do lotu w różnych kierunkach. Gołębie z przyklejonymi magnesami gubiły drogę w pochmurne dni. Jednak jak to się dzieje, długo pozostawało zagadką.

Tu trzeba wspomnieć o pracy z 1978 roku, w której fizycy z Instytutu Chemii Fizycznej Maxa Plancka w Getyndze formułują hipotezę o kwantowym podłożu tego zjawiska. Piszą: „Procesy transferu elektronów, dzięki którym powstają pary rodników w koherentnych stanach spinowych (singletowych lub trypletowych), ulegają wpływowi słabych pól magnetycznych. Na podstawie tego odkrycia proponujemy mechanizm działania chemicznego kompasu, który wykazuje wrażliwość na orientację ziemskiego pola magnetycznego wynikającą z anizotropii nadsubtelnego oddziaływania niesparowanych spinów elektronowych w reakcji redoks. Taki mechanizm może wyjaśniać zdolność wielu gatunków biologicznych do orientowania się w polu magnetycznym Ziemi”. W przybliżeniu oznacza to, że istnieją reakcje chemiczne, w których powstają wolne rodniki – czyli atomy z niesparowanymi elektronami. One zaś ulegają wpływowi pola magnetycznego. Jeśli takie sytuacje miałyby miejsce w żywych komórkach – może być to mechanizmem wyczuwania pola magnetycznego Ziemi przez zwierzęta.

Pozostało „tylko” odszukać kandydatów na taki kwantowy detektor. Henrik Mouritsen, biolog z Uniwersytetu w Oldenburgu badający przez wiele lat migrację ptaków, przyznaje, że nigdy nie podejrzewał, że zaprowadzi go to do fizyki kwantowej. Jego zespół szukał kandydata na czujnik pola magnetycznego Ziemi od 2004 roku. Wyniki pracy, do której stopniowo angażowano coraz więcej specjalistów z różnych dziedzin i różnych krajów, opublikowane zostały w magazynie *Nature* w 2021 roku.

Iglą (biologicznego kompasu) w stogu siana było białko ErCRY4 z grupy tzw. kryptochromów. Są to cząsteczki ewolucyjnie stare, występujące i u roślin, i u zwierząt, fotoreceptory, które absorbują niebieskie światło. U roślin regulują m.in. kielkowanie i wzrost, u zwierząt związane są z działaniem cyklu dobowego. ErCRY4 odnaleziono w komórkach na obrzeżach siatkówki oka rudzika. Okazało się także, że synteza tego białka

zwiększa się w okresie, kiedy ptaki wyruszają na wędrówkę.

Eksperymenty laboratoryjne na zsyntetyzowanym w laboratorium białku rudzika i kury domowej wykazały, że ich wrażliwość na pole magnetyczne różni się, jest większa u migrującego, a mniejsza u ptaka osiadłego.

Efekty kwantowe pojawiają się tu wtedy, kiedy foton wzbudza elektrony w kryptochromie i powstają pary rodników, których niesparowane elektrony mają ten sam lub różny spin. Przeskakują między tymi stanami miliony razy na sekundę. Tworzy się układ niezwykle czuły na pole magnetyczne, nawet tak niewielkie, jak pole magnetyczne Ziemi. W zależności od ustawienia względem linii pola jedna z wersji zaczyna przeważać, przez co uruchamiana jest inna reakcja i powstaje inna cząsteczka. To pokazują badania laboratoryjne. Jest prawdopodobne, że ptak, zmieniając położenie ciała w polu magnetycznym Ziemi, wpływa na reakcje zachodzące w komórkach oka, a to rejestrowane jest w mózgu. Rudzik może zatem dosłownie widzieć układ pola magnetycznego, co pomaga mu utrzymać kierunek lotu. To oczywiście tylko hipoteza, na razie nikt nie udowodnił, że efekty kwantowe faktycznie mogą wpływać na percepcję zwierzęcia.

Teoria o kwantowym charakterze zmysłu odczuwania pola magnetycznego Ziemi konkurowała z inną, która zakładała, że w dziobie ptaków znajdują się komórki zawierające magnetyt, a ten, działając jak igła kompasu, pobudza komórki nerwowe i decyduje o utrzymaniu kursu. Okazało się jednak, że wykrywane związki żelaza są raczej produktami rozpadu krwinek, które kumulują się w makrofagach, a nie, jak przypuszczano, w neuronach. Dodatkowo wykazano, że ptaki reagują na układ linii pola, ale nie „rozdzielają” biegunów – inaczej mówiąc, ptak z naszej półkuli, migrujący z północy na południe, przeniesiony na drugą półkulę będzie zmierzał w kierunku równika. To przeczyłoby teorii o miniaturowych igłach kompasu obracających się w osi pn-pd. Zatem dziś uznawana za bardziej prawdopodobną jest hipoteza kwantowa „zmysłu magnetycznego”.

To może z naszymi ptakami nie jest tak źle? Córką sąsiadki zaskoczyła mnie ostatnio pytaniem, dlaczego bociany pojawiają się jako symbol w Portugalii. A przecież wiadomo, że to Polska bocianem stoi. Okazuje się, że portugalskie długonogi nie migrują, a gniazda budują na skalistych klifach nad oceanem. Wychodzi na to, że nasze bociany wolą polecieć na zimę hen daleko, a później wrócić do Polski, niż wygrzewać się na skałach cały rok. Widać, są lepsze niż portugalskie. Lepsze, bo kwantowe.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Literatura

- Schulten i wsp., „A biomagnetic sensory mechanism based on magnetic field modulated electron spin motion”, *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 111 (1978).
Xu i wsp., „Magnetic sensitivity of cryptochrome 4 from a migratory songbird”, *Nature* 594 (2021).

Matematyka i literatura: OuLiPo

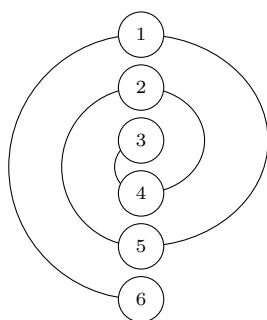
Miroslaw LACHOWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



D. Bellos, *Mathematics, poetry, fiction: the adventure of the OuLiPo*, BSHM Bulletin, vol. 25, 2010, 104–118.

Wiersz w stanie śladowym
1, 2, 3, 4, 5,
6, 7, 8, 9, 10,
12?
11!



Idąc wzdłuż spirali, zaczynając od dołu, odczytujemy kolejne wiersze, z których mamy zaczerpnąć kończące słowa: 6, 1, 5, 2, 4, 3.

Czy ma sens szukanie związków matematyki z literaturą? Czy to, co znajdziemy, nie będzie zbyt naciągane i powierzchowne? Już sam fakt, że zadanie to nie wydaje się łatwe, powinien jednak zachęcić wiele osób poszukujących, w tym związanych z matematyką, do jego zgłębienia. Wszak, jak coś trudne, to wartościowe: trudność jest największą wartością, przynajmniej w matematyce. Czy nauka nie polega właśnie na łączeniu odległych bytów? Wymieńmy na przykład takie czasopisma, jak *Journal of Mathematics and the Arts* oraz *Journal of Humanistic Mathematics*, w których regularnie pojawiają się artykuły tropiące takie związki. Matematyka i literatura są zbyt stare, by nie było okresu, kiedy to „miały się ku sobie”.

Bardzo lubię następującą metaforę. Matematyka i literatura są jak dwie strony tej samej monety. Nigdy się nie spotykają, ale razem tworzą całość. Matematyka i literatura przetwarzają rzeczywistość, są wynikiem naszego doświadczenia i obserwacji świata. Są czystymi produktami naszych umysłów.

W tym artykule przedstawię francuską grupę literacką OuLiPo. Czytelników Zainteresowanych dodatkowymi informacjami odsyłam do pracy Davida Bellosa oraz bibliografii w niej zamieszczonej. OuLiPo powstało w Paryżu w latach 60. ubiegłego stulecia. Jednym z celów działania grupy było opracowanie zasad matematycznych w literaturze. Próbowano opierać literaturę na wzorcach matematycznych, szczególnie inspirując się kombinatoryką, logiką, ale też regułami szachowymi.

Za twórców grupy uchodzą pisarz Raymond Queneau (1903–1976) oraz François Le Lionnais (1901–1984), inżynier, matematyk i pisarz. Obok przykład prowokacji literackiej Le Lionnais’a – utwór *Wiersz w stanie śladowym* – zdecydowanie lepiej wychodzi, gdy się go deklamuje i jednocześnie interpretuje, zwracając uwagę na interpunkcję. Bardziej znanym w świecie literatury jest zapewne Queneau. Ma nawet „swoją” stację metra w Paryżu.

Nazwa „OuLiPo” pochodzi od *Ouvroir de Literature Potentielle*, czyli Warsztaty Literatury Potencjalnej. Grupa działała długo i jest, być może, jedną z najdłuższych działających grup literackich. Trudno się dziwić, skoro zasady organizacyjne głoszą, że członkiem zostaje się na wieczność. Zebrania grupy gromadziły licznych widzów, zachwyconych prowadzonymi dyskusjami. Do grupy należeli także George Perec (1936–1982) oraz Italo Calvino (1923–1985), ten ostatni jako członek honorowy. Pełną listę wiecznych członków OuLiPo można znaleźć w Internecie lub w wymienionej wcześniej pracy. Warto tu zwrócić uwagę, że rodzina George’a Pereca pochodziła z Polski (znajdująca się w Warszawie ulica Pereca wzięła jednak swoją nazwę od Icchoka Pereca, również pisarza).

Queneau zainteresował się utworem zwanym sekstyną liryczną, zapewne wymyśloną przez XIII-wiecznego trubadura Arnaut Daniela. Sekstyny pisali m. in. Dante, Petrarca i Barańczak. Jest to utwór o specyficznej strukturze, składający się z 6 strof 6-wersowych i końcowej strofy 3-wersowej. Ostatnie wyrazy w wersach każdej strofy są różne. Powtarzają się jednak między strofami, za każdym razem w innym porządku. Zmiana kolejności w stosunku do poprzedniej strofy odbywa się według tego samego, „spiralnego”, sposobu, na przykład zamieszczonego obok. Postępując według tego schematu, otrzymamy następującą strukturę (w kolumnach przedstawiona jest kolejność ostatnich wyrazów w poszczególnych strofach):

1	6	3	5	4	2
2	1	6	3	5	4
3	5	4	2	1	6
4	2	1	6	3	5
5	4	2	1	6	3
6	3	5	4	2	1

M.P. Saclolo, *How a Medieval Troubadour Became a Mathematical Figure*, 2011, Notices of the American Mathematical Society, 2011, 58(5); correction–addition in Letters to the Editor, Notices of the American Mathematical Society, 2011, 58(7).

M. Lachowicz, *Intuicja matematyczna w Raju?*, Δ_{21}^9 .



R. Queneau, *Sto tysięcy miliardów wierszy*, Halart 2008. Zdjęcie: Thomas Guest, CC BY 2.0, via Wikimedia Commons

Edward Stachura, *Się*, 1977, str. 171.

R. Queneau, *Ćwiczenia stylistyczne*, Czyły Barbarzyńca, 2005.

Dorota Kassjanowicz, *30 znikających trampolin*, Albus, 2016; II wydanie, 2022.

George Perec, *Zniknięcie*, Lokator, 2022.

Gdybyśmy dokonali kolejnego kroku, wróciłibyśmy do układu w pierwszej strofie. Otrzymaliśmy zatem strukturę okresową o okresie 6, przy czym każdy wyraz końcowy był za każdym razem w wersji o innym numerze. Queneau zadał sobie pytanie, czy taki spiralny schemat wciąż ma przedstawioną własność, jeżeli 6 zamienić na inną liczbę naturalną n ? Jeśli tak, liczbę n nazywamy *dopuszczalną* lub *liczbą Queneau*, zaś samą wynikającą strukturę: *n -iną* lub *n -queningą*. Rozważmy dla przykładu $n = 4$. Spiralny sposób mieszania daje nam kolejność 4, 1, 3, 2. Ostatni wyraz z 3 wersu pozostał na swoim miejscu, a zatem 4 nie jest liczbą dopuszczalną.

Sam Queneau (literat, ale też członek Francuskiego Towarzystwa Matematycznego!) udowodnił, że liczby postaci $n = 2jk + j + k$, dla liczb naturalnych j i k , nie są dopuszczalne, np. 4, 7, 10, 12 nie są, oraz znalazł wszystkich 31 liczb nie większych od 100, które są dopuszczalne, np. 69. Badania nad tymi liczbami były przeprowadzone w kilku zaawansowanych matematycznie pracach. Odnosiłki można znaleźć w bibliografii do pracy M.P. Saclolo (patrz margines). Zagadnienie to stało się źródłem inspiracji do rozwoju interesujących idei matematycznych. Zatem literatura odegrała tu podobną rolę, jaką w historii niejednokrotnie odgrywała fizyka, dając impuls do badań matematycznych. Interesującym pytaniem jest, czy A. Daniel mógł w XIII wieku zdawać sobie sprawę z wewnętrznego bogactwa jego sekstyny? Podobne wrażenie intuicji wychodzącej ponad możliwą wiedzę odnajdujemy u Dantego.

Bardzo znanym dziełem Queneau jest utwór *Sto tysięcy miliardów wierszy*. Jest to zbiór 10 sonetów. Każdy sonet składa się z 14 wersów, w taki sposób, że kolejne wersy są ze sobą wymienne. Jeżeli ponumerujemy wszystkie wersy od 1 do 14, to następnie możemy wymienić każdy wers k z każdym innym (tzn. z innego sonetu) wersem k bez utracenia rymów i sensu (poetyckiego) całości. W rezultacie możemy sobie złożyć „własny” sonet, mając 10 możliwości do utworzenia każdego wersu. Ponieważ wersów jest 14, więc mamy 10^{14} możliwości i tyleż różnych możliwych sonetów. Liczba 10^{14} to właśnie sto tysięcy miliardów, $10^{14} = 10^2 \times 10^3 \times 10^9$. Czas potrzebny na przeczytanie wszystkich możliwych sonetów Queneau to około 200 milionów lat bezustannego czytania, a zatem z punktu widzenia życia ludzkiego jest porównywalny z nieskończonością. W ten sposób autor stworzył dzieło, którego sam w pełni nie mógł kontrolować. Może to przyczynek do dyskusji o sztucznej inteligencji?

Na mniejszą skalę zasady kombinatoryki stosował Edward Stachura w powieści *Się*. Zdanie (jakże mi bliskie) „Się szło powolutku skrajem drogi straszliwie i cudownie samotnym” pojawia się 22 razy z przestawionymi (spermutowanymi) wyrazami, w taki sposób, że tworzy całość poetycką. Oczywiście wszystkich możliwych permutacji jest dużo więcej niż 22, ale sens poetycki miał wartość nadrzędną.

W *Ćwiczeniach stylistycznych* Queneau opowiada banalną historyjkę o mężczyźnie w autobusie paryskim na 99 sposobów, od „ścisłego”, „filozoficznego”, „trzynastozgłoskowego” po „obraźliwy”. Wielokrotnie spotkałem opinię, że jest to jedna z najśmieszniejszych książek. Napisana zgodnie z zasadą OuLiPo, wedle której nic tak nie sprzyja literaturze jak ograniczenia formalne. Czyżby znowu to było wyabstrahowanie naszego odczucia świata? W podobny sposób konstruuje swoją książkę dla dzieci Dorota Kassjanowicz. Jest to historia znikającej ogrodowej trampoliny opowiedziana na 30 sposobów, pełna zabawy słowami i odniesień do różnych konwencji. Książka, która może być źródłem zabawy zarówno dla dzieci, jak i dorosłych, w domu, na lekcjach polskiego czy na zajęciach teatralnych. Gorąco polecam każdej wrażliwej osobie, lubiącej językowe niespodzianki i wyzwania!

Twórczość Georga Pereca jest bardzo trudna do skrótowego przedstawienia. Niedawno ukazały się tłumaczenia na język polski dwóch jego książek, które chciałbym przybliżyć Czytelnikom *Delty*. Pierwszą jest *La Disparition*, czyli *Zniknięcie*. Po jej ukazaniu się w roku 1969 we Francji niektórzy krytycy byli pełni uznania za swoisty, nowatorski język. Zapewne nie wszyscy zauważyli,

Oto fragment znanego utworu z polskiego tłumaczenia *Zniknięcia*:
Litwo! Ojczyzno moja! Tyś jak zdrowia okaz,
Ów tylko cię dozgonną miłością pokocha,
Kto cię stracił. Dziś urok twój całą osobą
Widzę i opisuję, bo tęsknię za tobą.
 ...
 Nie pojawia się tu litera „e”, natomiast pojawia się litera „ę”. Wyjaśnienie znajdzie Czytelnik w posłowiu książki.



Plac Pereca w Paryżu

G. Perec, *Życie instrukcja obsługi*, Lokator, 2021.

Michał Paweł Markowski, *Georges Perec: zapisywanie pustki*, Tygodnik Powszechny, nr 28, 2766, 14 lipca 2002.

R. C. Bose, E.T. Parker, S.S. Shrikhande, *Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture*, Canadian Journal of Mathematics 12, 1960.

H.H. Frisinger, *The solution of a famous two-centuries-old problem: The Leonhard Euler–Latin Square Conjecture*, Historia Mathematica 8, 1981.

I. Calvino, *Opowieści kosmikomiczne*, Muza, 1996.

I. Calvino, *Jeżeli $t = 0$* , PIW, Warszawa 2021.

I. Calvino, *Niewidzialne miasta*, WAB, Warszawa 2013.
 Polski tytuł zbioru odbiega od włoskiego – *Ti con zero*, czyli T_0 .

że to, co w książce znika, to litera „e”, która, wraz z wersjami akcentowanymi, jest najczęściej występującą literą w języku francuskim (ok. 14%). Dla porównania, w języku polskim najczęściej pojawia się „a” – z częstotliwością w przybliżeniu 9%. Bez litery „e” w języku francuskim nie da się powiedzieć podstawowych słów, jak „matka”, „ojciec”, „rodzina” (nie da się też rzucić *merde!*). Nie można też wypowiedzieć się bezpośrednio o sobie.

Są różne interpretacje owego „skazania” litery „e” na zagładę. Odniesienie się do nich znacznie przerastałoby rozmiary tego artykułu, jak i kompetencje autora. Warto, po przeczytaniu książki, zwrócić uwagę na posłowie, w którym tłumacze Renée Koelblen i Stanisław Waszak (matematyk i filolog, tłumacze piosenek) wyjaśniają różne aspekty książki i jej tłumaczenia. Tłumacze zrobili to, czego nie mógł zrobić Perec – korzystali z programu komputerowego. Podobnie jak Perec, skazali na zagładę literę „e”. Stosowali na przykład zasadę, że zamiast „zrobiłem” występuje „zdarzyło mi się zrobić”. W hiszpańskim tłumaczeniu unicestwieniu uległa litera „a”.

Omówienie skomplikowanej struktury matematycznej w książce Pereca *Życie instrukcja obsługi* zdecydowanie wykracza poza ramy tego artykułu. Perec opisuje w niej historię mieszkańców 10–piętrowej kamienicy, gdzie na każdym piętrze jest 10 mieszkań. Perec narzucił sobie pewne ścisłe reguły, których w większości Czytelnik zapewne nie zauważy. Niemniej reguły te są skrupulatnie przestrzegane. Na przykład sposób poruszania się po mieszkaniach kamienicy oparty jest na ruchu konika szachowego, każde pole (mieszkanie) przechodzimy tylko raz.

Aspektem kombinatorycznym struktury książki jest rozmieszczenie w mieszkaniach elementów różnych rodzajów: kolorów, biżuterii, tkanin... Perec stworzył listy 10 elementów wybranych rodzajów i połączył te listy w pary. W ramach każdej takiej pary starał się tak rozmieścić wszystkie możliwe dwójki elementów (po jednym z obu rodzajów) w mieszkaniach, by „możliwości nie powtarzały się w wierszach i kolumnach”. Zagadnienie nawiązuje do hipotezy Eulera, który przypuszczał, że taki sposób rozmieszczania jest niemożliwy (dla układu 10×10 czy ogólniej $(4k + 2) \times (4k + 2)$). W roku 1959 Bose, Parker, Shrikhande udowodnili, że Euler nie miał racji: jest to możliwe! Więcej informacji o tej ciekawej historii można znaleźć w artykule Karola Gryszy z Δ_{24}^7 , a także w tekstach przytoczonych na marginesie.

Książka *Życie instrukcja obsługi* została uznana przez opiniotwórcze czasopismo francuskie *Le Monde* za jedną ze 100 najważniejszych powieści XX wieku.

Jednym z najwybitniejszych pisarzy włoskich był Italo Calvino. W *Opowieściach kosmikomicznych* są wprost fajerwerki fantazji i humoru. Bohaterem i narratorem jest mający wiek Wszechświata Qfwfq, przeżywający niesamowite przygody. Bazą są naukowe, lub paronaukowe, teorie. Na przykład historia „Wszystko w jednym punkcie” odnosi się do Wielkiego Wybuchu. Książka pokazuje, że ścisłość i abstrakcję naukową można połączyć z finezją i dowcipem. Opowiadanie „Hrabia Monte Christo” w zbiorze *Jeżeli $t = 0$* nawiązuje do książki Alexandra Dumasa z 1844 roku. Jest to historia więźnia osadzonego w hipersferycznym więzieniu, z którego nie może się wydostać. *Jeżeli zdołam zbudować w myśli twierdzę, z której nie sposób uciec, ta wymyślona twierdza albo będzie tożsama z prawdziwą – w takim przypadku jest pewne, że nigdy się stąd nie wydostaniemy; ale przynajmniej zyskamy spokój kogoś, kto wie, że tkwi tutaj, ponieważ nie mógłby znajdować się gdzie indziej...*

Niewidzialne miasta, to książka opowiadająca o spotkaniu Marca Polo z Kubilaj-Chanem (Kublaj-Chanem). Obie postacie są historyczne i rzeczywiście mogło dojść do ich spotkania. Marco Polo był podróżnikiem z Wenecji opisującym (i, jak się uważa, „kolorującym”) swoje podróże, a Kubilaj-Chan – wnukiem Czyngis-Chana i władcą jednego z największych imperiów w historii świata. Marco Polo opowiada władcy o miastach jego imperium, których on, władca, nigdy nie widział. Każdy rozdział zawiera pięć opisów miast, z których każde ma nazwę będącą żeńskim imieniem i każde jest z odniesieniem do kultury,

języka, czasu, pamięci, śmierci i doświadczenia ludzkiego. Struktura książki jest wyraźnie oparta na wzorcach matematycznych. Oto kończący fragment z książki *Niewidzialne miasta*, odpowiedni na ponure czasy: *Piektło żyjących nie jest czymś, co nastanie; jeśli istnieje, jest już tutaj, jest piekłem, w którym żyjemy na co dzień, które tworzymy, przebywając razem. Są dwa sposoby, aby nie sprawiało ono cierpienia. Pierwszy jest nietrudny dla wielu ludzi: zaakceptować piektło i stać się jego częścią, aż przestanie się je dostrzegać. Drugi jest ryzykowny i wymaga ciągłej uwagi i ćwiczenia: odszukać i umieć rozpoznać, kto i co pośród piekła piekłem nie jest, i utrwalić to, i rozprzestrzenić.*

O sztucach, szaleństwie i nieskończoności

Życie i twórczość Georga Cantora

*Studium Matematyki, Uniwersytet Radomski im. Kazimierza Pułaskiego

Artykuł powstał na bazie wykładu pod tym samym tytułem, wygłoszonego podczas konferencji *Kształcenie myślenia analitycznego a realizacja podstawy programowej*, zorganizowanej przez Radomski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli i Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki 15 marca 2025 roku.



Młody Georg Cantor

Szymon JANISZEWSKI*

Pochodzenie, dzieciństwo

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor urodził się 3 marca 1845 roku w Petersburgu jako najstarsze dziecko Marii Anny Böhm i Georga Woldemara Cantora. Ojciec był zamożnym kupcem i finansistą. O jego pochodzeniu, dzieciństwie i młodości wiadomo niewiele: urodził się pomiędzy 1809 a 1814 rokiem, prawdopodobnie w Kopenhadze, do której jego rodzice sprowadzili się z Hiszpanii lub Portugalii. Rodzina Marii Anny wywodziła się z Austrii. Jej stryj, Joseph Böhm, był utalentowanym i znanym muzykiem, dyrektorem wiedeńskiego konserwatorium. Maria Anna i Georg Woldemar pobrali się w 1842 roku w Petersburgu, w obrządku luteranśkim. Maria Anna była katoliczką, Georg Woldemar – luteraninem, i to bardzo pobożnym, więc wybór zboru jako miejsca zawarcia związku małżeńskiego raczej nie dziwi. Oddanie ewangelicyzmowi Georg Woldemar przekazał najstarszemu synowi. Biografowie Georga juniora nie są zgodni co do liczby rodzeństwa przyszłego wielkiego matematyka – w źródłach można znaleźć informacje o czwórce lub szóstce dzieci Marii Anny i Georga Woldemara. Pewna jest za to informacja o chorobie ojca rodziny, z którym młody Georg był bardzo związany emocjonalnie. W połowie XIX wieku gruźlica była nieuleczalna, łagodzona jedynie jej przebieg terapią klimatyczną. Właśnie w poszukiwaniu bardziej sprzyjających warunków klimatycznych Cantorowie opuścili Petersburg, i w 1856 roku przenieśli się do Niemiec: najpierw do Wiesbaden, a później – do Frankfurtu. Georg Cantor junior z nostalgią wspominał swoje rosyjskie dzieciństwo – w Niemczech, gdzie spędził resztę swojego życia, nigdy nie czuł się najlepiej.

Młodość, małżeństwo, rozkwit kariery

Po ukończeniu szkół, w 1862 roku, Georg rozpoczął studia w Höhere Gewerbeschule Darmstadt (obecnie Uniwersytet Techniczny w Darmstadt), by wkrótce przenieść się na Politechnikę Federalną w Zurychu. Tam również długo nie zagrzał miejsca – w 1863 roku ponownie zmienił uczelnię. Tym razem na Uniwersytet Berliński. Stało się to już po śmierci ojca. Odziedziczony spadek (pół miliona ówczesnych marek) umożliwiał skromnemu profesorowi matematyki godne życie jeszcze wiele lat później.

Podczas studiów w Berlinie Cantor słuchał wykładów takich sław, jak Leopold Kronecker, Karl Weierstrass i Ernst Kummer, zaprzyjaźnił się z Karlem Schwarzem. Doktorat z teorii liczb obronił w 1867 roku, przy merytorycznym wsparciu Kroneckera i Kummera. Po ukończeniu studiów i krótkim, kilkumiesięcznym zatrudnieniu w berlińskiej szkole dla dziewcząt, przyjął posadę *privatdozenta* na Uniwersytecie w Halle, gdzie profesorem matematyki był Eduard Heine. Zachęcany przez niego Cantor zajął się teorią szeregów trygonometrycznych. W 1872 roku opublikował artykuł, w którym udowodnił, że ciągłość funkcji na przedziale implikuje jednoznaczność jej reprezentacji w postaci szeregu trygonometrycznego. W artykule znalazły się jednak pewne przemyślenia autora, które wskazywały, że skieruje swój umysł

Privatdozent było to najniższe stanowisko akademickie na niemieckim uniwersytecie – otwierało możliwość prowadzenia badań pod afiliacją uczelni i zajęć ze studentami, ale bez prawa do wynagrodzenia.

Journal für die reines und angewandte Mathematik założone przez Augusta Leopolda Crellego w 1826 roku (stąd popularna nazwa *Crelle's Journal*) było w owym czasie najbardziej prestiżowym czasopismem matematycznym w Niemczech, a może i na świecie.

W XIX wieku w Niemczech na stanowiska profesorskie mianował właściwy minister. Procedura przewidywała zgłoszenie przez uniwersytet trzech kandydatur, a minister kolejno zwracał się do wymienionych zapytaniem, czy są zainteresowani stanowiskiem.

Wielokrotnie dementowana plotka głosi, że Alfred Nobel nie ufundował swojej nagrody w dziedzinie matematyki z powodu romansowej natury Mittag-Lefflera. Inna, nosząca pewne znamiona prawdopodobieństwa, informacja wskazuje, że Mittag-Leffler przyczynił się do przyznania Nagrody Nobla Marii Skłodowskiej-Curie, przełamując opory niektórych członków Komitetu Noblowskiego przed przyznaniem wyróżnienia kobiecie.

Cantor był na szczęście leczony łagodnymi metodami (głównie ciepłymi kąpielami) w nowo wybudowanej, pięknej uniwersyteckiej klinice psychiatrycznej, gdzie, jako słynny już profesor Cantor, cieszył się specjalnymi względami – m.in. miał nawet swój gabinet.



Leopold Kronecker

w inną stronę, mocno odległą od szeregów Fouriera. Także w 1872 roku (w wieku zaledwie 27 lat) Cantor uzyskał awans na stanowisko profesora nadzwyczajnego.

Wiosną 1874 roku Georg zaręczył się z przyjaciółką siostry – Vally Guttman. 8 sierpnia tego samego roku para wstąpiła w związek małżeński. Cantorowie doczekali się szóstki dzieci, (najmłodszy, Rudolf, urodził się w 1886 r.). Małżeństwo zawarte z miłości przetrwało wszystkie burze. Niebagatelny wpływ na szczęście rodzinne miał charakter Georga, który w domowym zaciszu był człowiekiem bardzo zgodnym i łagodnym.

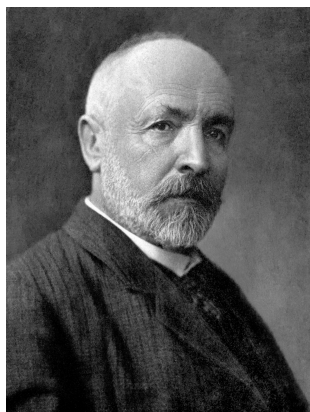
W latach siedemdziesiątych Cantor intensywnie korespondował z Richardem Dedekindem, który zajmował się zagadnieniem continuum zbioru liczb rzeczywistych. Zainspirowany tą problematyką Cantor przesłał do *Crelle's Journal* artykuł zawierający dosyć szokujący wniosek o istnieniu bijekcji z kwadratu na odcinek. Rezultat ten zirytował Kroneckera, który, jako redaktor czasopisma, wstrzymał publikację. Dopiero po interwencji Dedekinda, w 1878 roku artykuł mógł się ukazać. Sytuacja ta uwolniła potężną niechęć między Kroneckerem i Cantorem, który nigdy więcej niczego nie opublikował w *Crelle's Journal*. Przyjaźń z Dedekindem także zakończyła się raczej gwałtownie. Po śmierci Heinego, w październiku 1881 roku, pojawił się vacat na stanowisku profesora matematyki w Halle. Cantor zaproponował na to stanowisko Dedekinda, Heinricha Webera i Franza Mertensa (kolejność nazwisk istotna). Wszyscy trzej odmówili. Ostatecznie nominację uzyskał Friedrich Wangerin. Cantor nigdy nie nawiązał z nim bliższych stosunków: ani towarzyskich, ani naukowych. Korespondencja z Dedekindem zakończyła się, i przyjaźń też.

Nowym przyjacielem i powiernikiem Cantora został wpływowy (i niezwykle bogaty) szwedzki matematyk Gösta Mittag-Leffler. Był on fundatorem i redaktorem prestiżowego czasopisma *Acta Mathematica*. Mittag-Leffler zaproponował Cantorowi publikację kilku jego wcześniejszych prac we francuskim tłumaczeniu, którym zajęli się studenci Charles'a Hermite'a (między innymi Henri Poincaré). Cykl ukazał się w pierwszej połowie 1883 roku, wraz z nowym, oryginalnym artykułem. Kolejne publikacje pojawiły się w 1884 i 1885 roku. Podtytuł tej drugiej – *drugi komunikat* – wywołał spore zamieszanie. Pierwszym komunikatem miała być inna praca, która powinna była ukazać się w tym samym numerze czasopisma, ale została przez Cantora wycofana po (raczej błędnych) sugestjach Mittag-Lefflera. W wyniku tego zamieszania zażyłość obu uczonych zanikła.

Choroba. Konflikt z Kroneckerem

Podczas intensywnej pracy naukowej i wymiany korespondencji z Mittag-Lefflerem, latem 1884 roku, Cantor przeżył załamanie nerwowe. Dzisiaj uważamy, że był to pierwszy epizod choroby dwubiegunowej (zwanej do niedawna psychozą maniako-depresyjną). Ze wspomnień córki Elsy wiadomo, że początek choroby był gwałtowny i niespodziewany. Po około dwóch miesiącach stan uczonego uległ pewnej poprawie, tak że mógł on wrócić do swoich codziennych obowiązków. Ale odtąd życie Cantora naznaczały epizody manii i depresji oraz kolejne pobyty w szpitalach psychiatrycznych. Wielokrotnie podejmowane próby zmiany miejsca pracy – aplikował na stanowiska profesorskie w Berlinie i Getyndze, bo Uniwersytet w Halle postrzegany był jako prowincjonalny – kończyły się porażkami, prawdopodobnie pod wpływem zakulisowych działań Kroneckera. Potwornym ciosem dla wrażliwego matematyka-filozofa była śmierć syna Rudolfa w 1899 roku. Napastliwe wystąpienie Juliusa Königa podczas III Kongresu Matematyków w 1904 roku w Zurychu, mające w zamyśle autora podważyć teorie Cantora, także poskutkowało nawrotem choroby, mimo że już następnego dnia Ernst Zermelo obalił argumenty Königa.

„Naukowy szarlatan”, „renegat”, „deprawator młodzieży” – Kronecker nie hamował języka w ocenach, nie tylko pracy, ale również osoby Cantora. Zajadłość, z jaką ten, wybitny przecież, matematyk atakował młodszego kolegę, może zadziwiać. Cantor przynajmniej dwukrotnie podejmował próby pojednania ze swoim dawnym nauczycielem. Po raz pierwszy wspomniął o tym



Georg Cantor w wieku dojrzałym

Równoliczność odwzorowuje bardzo pierwotną i intuicyjną ideę liczenia na palcach. Obrazowy przykład dotyczy kelnera rozkładającego sztucze na wielkim stole, na którym ktoś inny wystawił mnóstwo talerzy. Kelner nie musi liczyć talerzy, by położyć odpowiednią liczbę widelców. Wystarczy, by przy każdym talerzu położył jeden widelec.

Galileusz zauważył, że można jednoznacznie powiązać każdą liczbę naturalną z liczbą parzystą, chociaż zbiór liczb parzystych jest właściwym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Kurt Gödel, podobnie jak Cantor, zajmował się podstawami matematyki – logiką, problemami aksjomatyzacji, ale także teorią względności. I również zmarł w szpitalu psychiatrycznym.

Bibliografia

1. Amir Aczel, „Tajemnica alefów”, Rebis, 2002.
2. Joseph Dauben, „Georg Cantor and the Origins of Transfinite Set Theory”, *Scientific American*, 248(6).
3. Ivor Grattan-Guinness, „Towards a Biography of Georg Cantor”, *Annals of Science*, 27(4).
4. Helena Rasiowa, „Wstęp do matematyki współczesnej”, PWN, 2012.

Fotografie pochodzą z domeny publicznej: commons.wikimedia.org

w liście do Mittag-Lefflera z wakacji w górach Harzu, w 1884 roku. Ponownie spróbował w 1891 roku, gdy jako przewodniczący Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego (wybrany mimo sprzeciwu Kroneckera) zaprosił swojego adwersarza do wygłoszenia wykładu na pierwszym zjeździe Towarzystwa. Ale Kronecker z tego zaproszenia skorzystał już nie mógł, gdyż czuwał przy łóżku umierającej żony, a kilka miesięcy po jej śmierci również odszedł z tego świata. Trudno przypisać wzajemną niechęć tych dwóch nietuzinkowych osobistości tylko różnicom w poglądach na filozoficzne podstawy matematyki. Wydaje się, że jej przyczyny musiały być bardziej złożone – możliwe, że także osobiste. Jedno jest chyba pewne – Kronecker wywarł ogromny wpływ na zdrowie i życie Cantora.

Schyłek

Do przejścia na emeryturę w 1913 roku Cantor pracował jako profesor Uniwersytetu w Halle. Był matematykiem sławnym i uznanym (w 1904 roku brytyjskie Royal Society nagrodziło go medalem Sylwestera, a w 1912 roku Uniwersytet w St. Andrews nadał mu tytuł doktora honoris causa), ale jego prace wydane po 1886 roku nie osiągnęły wcześniejszego poziomu. Cieszył się przychylnością władz uczelni, które z wyrozumiałością traktowały jego kolejne hospitalizacje, umożliwiając mu prowadzenie wykładów, gdy jego stan na to pozwalał, i zatrudniając zastępstwa podczas licznych i długotrwałych nieobecności. W 1917 roku Cantor po raz ostatni trafił do sanatorium, gdzie 6 stycznia 1918 zmarł na atak serca.

Dzieło

Badając szeregi trygonometryczne, Cantor przyjął Weierstrassowską koncepcję liczby niewymiernej jako nieskończonego ciągu jej przybliżeń dziesiętnych. Podejście to wywoływało sprzeciw środowisk matematyków, filozofów, a nawet teologów, bo wymagało zaangażowania tzw. *nieskończoności dokonanej*. Problemu tego można było (przynajmniej częściowo) uniknąć, stosując pojęcie granicy, które opierało się na *nieskończoności potencjalnej*. Dedekind, szczegółowo analizując strukturę zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, zauważył, że oś liczbowa jest nieskończenie bardziej złożona niż zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Złożoności tej jednak nie sformalizował. Uczynił to dopiero Cantor w swoim artykule z 1874 opublikowanym w pechowym dlań *Crelle's Journal*. W pracy tej Cantor wprowadził pojęcie równoliczności zbiorów, rozumianej jako istnienie odwzorowania wzajemnie jednoznacznego (czyli bijekcji) jednego zbioru na drugi. Możliwość zdefiniowania odwzorowania wzajemnie jednoznacznego między zbiorem i jego podzbiorem właściwym, uważana przez sławnych poprzedników (np. przez Galileusza) za paradoks, przez Cantora została uznana za immanentną cechę zbiorów nieskończonych. Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$ Cantor nazwał przeliczalnymi i udowodnił, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny. W publikacji z 1891 roku natomiast pokazał ideę *metody przekątniowej*, dzisiaj zwanej *metodą przekątniową Cantora*, którą zastosował w dowodzie nieprzeliczalności $\mathbb{R}$. Oznaczało to ni mniej ni więcej, że istnieją istotnie „różne” nieskończoności: większe i mniejsze. Rozważając zależności między nimi, Cantor najpierw wprowadził liczby porządkowe, a potem kardynalne (moce zbiorów), wraz z całą ich arytmetyką. Nieco później oznaczył liczbę kardynalną zbioru $\mathbb{N}$ hebrajską literą $\aleph_0$ – tego symbolu używamy do dziś.

Z porównania mocy zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ zrodziło się naturalne pytanie: czy istnieje zbiór, którego moc jest istotnie większa od $\aleph_0$ i istotnie mniejsza od mocy zbioru $\mathbb{R}$, oznaczanej $\mathfrak{c}$ (od continuum). Cantor wierzył, że nie. Dowód tego przypuszczenia, nazwanego hipotezą continuum, był źródłem niekończących się udręk Cantora. Można nawet zauważyć pewną korelację między intensywnością prac nad hipotezą i pobytami autora w szpitalach psychiatrycznych. Hipoteza continuum tak bardzo oddziaływała na umysły matematyków, że David Hilbert przedstawiając w 1900 roku listę najważniejszych nierozwiązanych problemów ówczesnej matematyki, umieścił ją na pierwszym miejscu. Hipoteza continuum doczekała się rozwiązania w 1964 roku. Paul Cohen, bazując na wcześniejszych wynikach Kurta Gödla, wykazał, że hipoteza continuum jest niezależna od pozostałych aksjomatów teorii mnogości.

Georg Cantor i liczby przestępne, rok 1874

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Georg Cantor (1845–1918)



Joseph Liouville (1809–1882)

Liczbami *algebraicznymi* nazywamy pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych. Liczby *niealgebraiczne* to liczby, które nie są algebraiczne. W tym artykule rozważamy tylko liczby rzeczywiste.

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

[...] i to jest główną naszą troską, byśmy niczego nie przyjmowali za prawdę, co najmniejszemu nawet podlega powątpiewaniu. – René Descartes

Albowiem zastąpienie możliwości logicznej pojęcia (mianowicie, że pojęcie nie zaprzecza samemu sobie) możliwością transcendentalną rzeczy (mianowicie, że jakiś przedmiot odpowiada pojęciu) może zwodzić i zadowalać tylko naiwnych. – Immanuel Kant

Naszym celem jest przedstawienie artykułu Georga Cantora z 1874 roku, będącego pierwszą publikacją z nowej dziedziny matematyki – teorii mnogości – w szerszym kontekście historycznym, a w szczególności, omówienie jego pięknego i mającego duży potencjał wyniku:

Mając dowolny ciąg liczb rzeczywistych S i dowolny przedział $[\alpha, \beta]$ na prostej rzeczywistej, można w $[\alpha, \beta]$ wyznaczyć liczbę η , która nie należy do S . Można zatem wyznaczyć nieskończenie wiele takich liczb η w $[\alpha, \beta]$.

Oryginalne sformułowanie było wyrażone w terminologii zrozumiałej przez współczesnych i zawierało ograniczenia dodatkowe, świadomie wprowadzone przez Cantora dla podkreślenia konstruktywności i przejrzystości rozważań.

Twierdzenie 1 [Cantor, 1874]. *Jeśli mamy (przeliczalnie) nieskończony ciąg $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$ różnych od siebie liczb rzeczywistych, które przebiegają według jakiejś reguły, to w każdym danym przedziale $[\alpha, \beta]$ można wyszczególnić liczbę η (a więc także nieskończenie wiele z nich), która nie występuje w tym ciągu (jako jego element).*

Cantor użył powyższego twierdzenia w tym samym artykule do dowodu **istnienia liczb niealgebraicznych** (zob. margines) oraz do sformułowania, jako wniosku, twierdzenia o niemożliwości ustawienia zbioru wszystkich liczb rzeczywistych w ciąg ponumerowany liczbami naturalnymi, czyli o **nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych**. Porządek logiczny argumentacji Cantora jest następujący.

Zaproponował on sposób ustawienia liczb algebraicznych w ciąg, dowodząc tym samym ich przeliczalności. Następnie argumentuje, że jeśli za S weźmiemy ciąg wszystkich liczb algebraicznych, to powyższe twierdzenie dowodzi istnienia nieskończenia wielu liczb *niealgebraicznych*, inaczej *przestępnych*, w dowolnym przedziale na prostej liczbowej.

W końcu formułuje wniosek, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny – zakładając jego przeliczalność i biorąc za S ciąg zawierający wszystkie liczby rzeczywiste, otrzymujemy sprzeczność.

Zauważmy, że z przeliczalności zbioru liczb algebraicznych i nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych wynika istnienie oraz nieprzeliczalność zbioru liczb przestępnych, ale ta odwrócona argumentacja daje niekonstruktywny dowód istnienia tych ostatnich i Cantor nie zamieścił jej w rozważanym artykule.

Pierwszą konkretną liczbę przestępną podał Joseph Liouville w 1851 roku, ale już w roku 1844 pokazał, jak można je konstruować. Wcześniej tylko domniemywano, że pewne liczby są liczbami przestępnymi. Liczba z 1851 to liczba α dana wzorem:

$$(1) \quad \alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{10^{r!}} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \dots$$

Dowód Liouville'a przestępności liczby α opierał się na jego własnym wyniku znanym dziś jako Twierdzenie Aproksymacyjne Liouville'a [Havil, 2012]:

Jeśli α jest pierwiastkiem niewymiernym nieredukowalnego wielomianu

$$(2) \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

o współczynnikach całkowitych, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje tylko skończenie wiele liczb wymiernych p/q spełniających nierówność

$$|\alpha - p/q| < 1/q^{n+\varepsilon}.$$

Liouville pokazał, że w przypadku liczby α określonej w (1) powyższa nierówność zachodzi dla nieskończonego ciągu liczb wymiernych p_k/q_k , gdzie

$$p_k = 10^{k!} \left(\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots + \frac{1}{10^{k!}} \right), \quad q_k = 10^{k!}.$$

Istotnie, porównując $|\alpha - p_k/q_k|$ z szeregiem geometrycznym, mamy

$$\frac{1}{10^{(k+1)!}} + \frac{1}{10^{(k+2)!}} + \dots < \frac{1}{10^{(k+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{\frac{10}{9}}{q_k^{k+1}} < \frac{1}{q_k^{n+\varepsilon}}$$

dla wszystkich k spełniających $q_k^{k+1-n-\varepsilon} > 10/9$, zatem α nie może być liczbą niewymierną algebraiczną. Z racji swej konstrukcji – jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe – nie jest też liczbą wymierną, a więc jest liczbą przestępną.

Dowód Cantora istnienia liczb przestępnych, jak wspomnieliśmy powyżej, oparty jest na **Twierdzeniu 1**, które jego autor dowodzi następująco. Niech S będzie ciągiem $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ liczb rzeczywistych postulowanym w twierdzeniu. Z tego ciągu wybieramy pierwsze dwie liczby należące do wnętrza przedziału $[\alpha, \beta]$, oznaczamy mniejszą z nich przez α_1 , a większą przez β_1 . Powtarzamy tę procedurę dla przedziału $[\alpha_1, \beta_1]$, znajdując w jego wnętrzu liczby α_2 i β_2 , należące do ciągu S . Powtarzamy tę procedurę dla przedziału $[\alpha_2, \beta_2]$ i tak dalej. Otrzymamy w ten sposób pewien ciąg przedziałów zstępujących.

Jeśli ciąg ten jest skończony, tzn. $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \dots, [\alpha_N, \beta_N]$ dla pewnej liczby naturalnej N , to we wnętrzu ostatniego przedziału znajduje się co najwyżej jeden element ω ciągu S . Wtedy dowolna różna od ω liczba we wnętrzu tego przedziału nie należy do ciągu S .

Jeśli natomiast ciąg przedziałów jest nieskończony, to zachodzi zbieżność:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha_\infty \leq \beta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n.$$

Albo wspólna część tych przedziałów jest niezdegenerowanym przedziałem $[\alpha_\infty, \beta_\infty]$, i wówczas dowolna liczba η we wnętrzu przedziału nie należy do ciągu S , albo $\alpha_\infty = \beta_\infty =: \eta$. Zauważmy, że η nie może należeć do ciągu S , gdyż dla każdego n , ω_n nie należy do $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$. Twierdzenie jest udowodnione.

Spełniający pełne wymagania konstruktywistów dowód twierdzenia Cantora można znaleźć w [Bishop, 1985].

Cantor obawiał się, że redakcja znakomitego czasopisma, w którym publikowali wcześniej Niels Abel i Carl Friedrich Gauss, mogłaby odrzucić jego artykuł ze względu na użyte w nim nowatorskie argumenty, w tym zanegować jego przełomowy wynik o niemożliwości ustawienia zbioru wszystkich liczb rzeczywistych w ciąg ponumerowany liczbami naturalnymi. Użył zatem pewnego podstępu. Już sam tytuł artykułu *O własności zbioru wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych* miał uspokoić, czy może zmylić, redaktorów, a szczególnie nieprzejednanego konstruktywistę Leopolda Kroneckera (1823–1891), sugerując, że główny wynik artykułu dotyczy możliwości ustawienia w ciąg liczb algebraicznych. Artykuł został szybko opublikowany.

Należy w tym miejscu oddać sprawiedliwość Kroneckerowi, jednemu z największych matematyków XIX wieku, przedstawianemu czasem niesłusznie jako wroga samego Cantora. Kroneckerowi zależało na tym, aby matematyka była oparta na solidnych podstawach i, będąc redaktorem, blokował artykuły zawierające enigmatyczne argumenty, w szczególności te oparte na nieostrych definicjach rozważanych obiektów i ryzykownej logice.

Uważał, że dopuszczenie do argumentacji matematycznej *niekonstruktywnych i nieintuicyjnych* uzasadnień nie powinno mieć miejsca. W końcu jednak do tego doszło, Kronecker przegrał, przeważyły nowe nurty i... pojawiły się paradoksy, a w ślad za nimi poważny kryzys w matematyce, która utraciła spójność



Konstrukcja matematyczna (a) i pewnik wyboru (b):

(a) Niech A będzie zbiorem niepustych, parami rozłącznych przedziałów $\{(n, n+1) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ na prostej liczbowej. Określamy zbiór S jako zbiór liczb $\{n + 1/2 : n = 1, 2, 3, \dots\}$ będących środkami tych przedziałów.

(b) Dla każdej rodziny A niepustych zbiorów parami rozłącznych istnieje zbiór S , do którego należy dokładnie jeden element z każdego ze zbiorów należących do rodziny A .

Konstrukcja w punkcie (a) jest oczywista dla każdego, natomiast przyjęcie stwierdzenia w punkcie (b) za prawdziwe jest aktem wiary w przypadku nieskończonej, w szczególności nieprzeliczalnej, liczby zbiorów.



i pewność [Kline, 1982]. Kronecker byłby przerażony, gdyby się dowiedział, że np. stwierdzenie (b), zamieszczone na marginesie, będzie w niedalekiej przyszłości zaliczone do aksjomatów tak zwanych podstaw matematyki. Obecny trend ku myśleniu algorytmicznemu, będący konsekwencją łatwo dostępnych efektywnych komputerowych technik obliczeniowych, można uznać za swoistą rehabilitację na długo odsuniętego w cień Kroneckera.

Następny artykuł Cantora, z roku 1878, i dalsze prace zawierają już coraz odważniejsze rozważania dotyczące operacji na zbiorach nieskończonych, wywołując głosy krytyczne. Zarzuty dotyczyły między innymi samej materii dowolnych zbiorów nieskończonych i niekonstruktywności dowodów. Zarzut niekonstruktywności dowodu istnienia liczb przestępnych został też sformułowany pod adresem jego pierwszego artykułu, tego z 1874 roku, co było oczywistym nieporozumieniem, wynikającym z tego, że, jak to wyraził A. Kanamori: „w opisach twórczości Cantora w większości przypadków odwrócono kolejność wnioskowania o istnieniu liczb przestępnych, ustalając najpierw nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych, a dopiero potem wyciągając wniosek o istnieniu [liczb przestępnych] z przeliczalności zbioru liczb algebraicznych”. [Wikipedia]

Choć pojawiały się też głosy broniące konstruktywności dowodu istnienia liczb niealgebraicznych w artykule [Cantor, 1874], np. w 1930 roku Abraham Fraenkel stwierdził, że metoda opisana w tym artykule jest „metodą, która – nawiasem mówiąc, wbrew powszechnej interpretacji – jest zasadniczo konstruktywna, a nie tylko egzystencjalna”, to nieporozumienie co do charakteru tego dowodu trwało nadal. Jeszcze w 1968 roku Mark Kac i Stanisław M. Ulam [Kac, 1968] pisali:

„Kontrast między metodami Liouville’a i Cantora jest uderzający, a metody te stanowią doskonałą ilustrację dwóch całkowicie odmiennych podejść do udowadniania istnienia obiektów matematycznych. Liouville jest czysto konstrukcyjny, Cantor jest czysto egzystencjalny”.

Zobaczmy najpierw, jak ten „czysto egzystencjalny” dowód Cantora wygląda na prostym przykładzie.

Przykład. Niech $[\alpha, \beta] = [1, 2]$ oraz niech

$$(3) \quad S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \dots \right\}$$

będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych we wnętrzu tego przedziału, ustawionych według widocznej reguły.

Pierwszymi dwoma wyrazami ciągu S są $\frac{3}{2}$ i $\frac{4}{3}$. Oznaczmy $\alpha_1 = \frac{4}{3}$, $\beta_1 = \frac{3}{2}$. Pierwszymi dwoma wyrazami ciągu S należącymi do przedziału $[\alpha_1, \beta_1]$ są liczby $\alpha_2 = \frac{7}{5}$ i $\beta_2 = \frac{10}{7}$. Pierwszymi dwoma wyrazami ciągu S należącymi do przedziału $[\alpha_2, \beta_2]$ są liczby $\alpha_3 = \frac{24}{17}$ i $\beta_3 = \frac{17}{12}$, definiujące przedział $[\alpha_3, \beta_3]$. Okazuje się, że gdy mamy liczby α_1 i β_1 , następne wyrazy ciągu par (α_n, β_n) : $(\frac{24}{17}, \frac{17}{12})$, $(\frac{41}{29}, \frac{58}{41})$, $(\frac{140}{99}, \frac{99}{70})$, ..., definiuje następujący prosty algorytm. Na początku, w przedziale $[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$ mamy wskazać dwie pierwsze liczby ciągu S należące do tego przedziału. Liczby te, zgodnie z ustawieniem elementów ciągu S , będą miały możliwie najmniejsze mianowniki. Liczbą o najmniejszym mianowniku w tym przedziale jest liczba $\frac{7}{5}$ jako medianta liczb $\frac{4}{3}$ i $\frac{3}{2}$, czyli liczba $\frac{4}{3} < \frac{4+3}{3+2} < \frac{3}{2}$. Jako drugą liczbę bierzemy $\frac{10}{7}$, mediantę liczb $\frac{7}{5}$ i $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5} < \frac{7+3}{5+2} < \frac{3}{2}$, kierując się tym, że $5 + 2 < 3 + 5$. Zatem: $\frac{7}{5} = \alpha_2$ i $\frac{10}{7} = \beta_2$. W następnym kroku medianta $\frac{17}{12}$ liczb $\frac{7}{5}$ i $\frac{10}{7}$ będzie liczbą β_3 , i ta naprzemiennosc się utrzyma. Postępując dalej, otrzymujemy dwa ciągi, rosnący i malejący:

$$\frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \frac{24}{17} < \frac{41}{29} < \frac{140}{99} < \frac{239}{169} < \dots < \frac{338}{239} < \frac{99}{70} < \frac{58}{41} < \frac{17}{12} < \frac{10}{7} < \frac{3}{2}.$$

Uzasadnienie poprawności przedstawionego algorytmu Czytelnik odnajdzie w artykule o ciągach Fareya z Δ_{10}^5 . Wyłuszczone liczby $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$ są kolejnymi reduktami rozwinięcia liczby $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy [Łukaszewicz, 2025], co też wynika z powyższej konstrukcji. Widzimy zatem,

Dla $\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1}$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}$ dalsze redukty ułamka łańcuchowego liczby $\sqrt{2}$ dane są wzorem rekurencyjnym:
 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2p_n + p_{n-1}}{2q_n + q_{n-1}} = \frac{(p_n + p_{n-1}) + p_n}{(q_n + q_{n-1}) + q_n}$, co oznacza, że medianta mediany i reduktu jest reduktem.

że w naszym przypadku procedura Cantora zastosowana do ciągu (3) prowadzi do wykazania istnienia liczby niewymiernej $\sqrt{2}$.

Jeśli za S weźmiemy odpowiednio ustawiony ciąg liczb algebraicznych, to analogiczna procedura doprowadzi do liczby przestępnej, którą można obliczyć z żadaną dokładnością n miejsc po przecinku, posługując się programem komputerowym, opisanym w [Gray, 1994]. Zilustrujmy ją pokrótce. Przyporządkujmy wielomianowi (2) stopnia n liczbę $h = n + |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ i nazwijmy ją wysokością wielomianu. Uporządkowanie w ciąg wszystkich liczb algebraicznych zaproponowane przez Cantora polega na ustawieniu najpierw w ciąg wszystkich wielomianów według rosnącego h , znalezieniu wszystkich pierwiastków wielomianów dla każdego h i uporządkowaniu ich według wielkości w obrębie h , a następnie ustawieniu ich w ciąg kolejnymi grupami.



Wysokość h	Stopień n	Wielomian	Pierwiastki
2	1	x	0
3	1	$2x, x \pm 1$	0, ± 1
	2	x^2	
4	1	$3x, 2x \pm 1, x \pm 2$	0, $\pm \frac{1}{2}$ $\pm 1, \pm 2$
	2	$2x^2, x^2 \pm 1, x^2 \pm x$	
	3	x^3	
5	1	$4x, 3x \pm 1, 2x \pm 2, x \pm 3$	0, $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \sqrt{2}, \pm 2, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$
	2	$3x^2, 2x^2 \pm 1, x^2 \pm 2, 2x^2 \pm x, x^2 \pm 2x, x^2 \pm x \pm 1$	
	3	$2x^3, x^3 \pm 1, x^3 \pm x, x^3 \pm x^2$	
	4	x^4	

Tabela powyżej przedstawia wszystkie wielomiany do wysokości $h = 5$ wraz z ich pierwiastkami. Te ostatnie ustawiamy w ciąg (bez powtórzeń),

$$\{0, -1, 1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -3, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{2}, \dots\}.$$

Ograniczając się do przedziału $[\alpha, \beta] = [0, 1]$, otrzymujemy ciąg

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \dots\} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots\}$$

będący podciągiem tego poprzedniego i zawierający wszystkie liczby algebraiczne w tym przedziale. Zbiór liczb algebraicznych zawiera zbiór liczb wymiernych jako swój podzbiór, jest zatem gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych. Stąd procedura Cantora zastosowana do ciągu S wyznaczy dokładnie jedną liczbę przestępną: $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$.

Moglibyśmy spytać, dla jakiej najmniejszej liczby n zachodzi $|\beta_n - \alpha_n| < \frac{1}{10^6}$. Innymi słowy, pytanie dotyczy przybliżenia liczby η z dokładnością do $\frac{1}{10^6}$. Program komputerowy oparty na metodzie Cantora z 1874 roku, opisany w [Gray, 1994], wymaga asymptotycznie co najmniej $O(2^{n^{1/3}})$ kroków, aby wyznaczyć n dokładnych cyfr, zatem jest mało efektywny. Przybliżenie liczby η z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku wymaga przebiegnięcia ponad miliona liczb ω_n , mamy $\alpha_7 = \omega_{1406370} = 0,57341146 \dots$ oraz $\beta_7 = \omega_{1057887} = 0,57341183 \dots$

W artykule [Gray, 1994] opisana jest też alternatywna metoda, gdzie wystarczy tylko $O(n^2 \log^2 n \log \log n)$ kroków, co jest liczbą do przyjęcia w praktyce obliczeniowej.

Bibliografia

- [Bishop, 1985] E. Bishop, D. Bridges, *Constructive Analysis*, Springer, 1985.
- [Cantor, 1874] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, [O własności zbioru wszystkich rzeczywistych liczb algebraicznych], J. Reine Angew. Math. 77 (1874), 258–262.
- [Gray, 1994] R. Gray, *Georg Cantor and Transcendental Numbers*, The American Mathematical Monthly, 1994, Vol. 101(9), 819–832.
- [Havil, 2012] J. Havil, *The Irrationals*, Princeton University Press, 2012.
- [Kac, 1968] M. Kac, S. M. Ulam, *Mathematics and Logic*, New York, 1968.
- [Kline, 1982] M. Kline, *Mathematics. The Loss of Certainty*, OUP, 1982.
- [Łukaszewicz, 2025] G. Łukaszewicz, *Geometria liczb, algorytmy Herona i Euklidesa i łańcuchowe*, Delta 10/2025.
- [Wikipedia] *Cantor's first set theory article*, en.wikipedia.org/wiki/Cantor's_first_set_theory_article (dostęp: 04.08.2025).



Trudne tematy

Studenci fizyki znają nazwisko Johannesesa Starka przede wszystkim w kontekście rozszczepienia linii widmowych pierwszego stanu wzbudzonego atomu wodoropodobnego, do którego dochodzi, jeśli atom ten znajdzie się w polu elektrycznym. Jeśli zaglądną do bibliografii czytanych przez siebie źródeł, mogą też kojarzyć Philippa Lenarda, którego jednym z ważniejszych osiągnięć naukowych było stwierdzenie, że energia elektronów wybijanych z metalu w zjawisku fotoelektrycznym zależy tylko od częstości padającego promieniowania, nie zaś od jego natężenia, co utorowało drogę koncepcji kwantów światła.



Co łączy wymienionych naukowców? Na pewno to, że każdy z nich był laureatem Nagrody Nobla z fizyki (Lenard w 1905 roku, Stark 14 lat później). Mniej osób wie, że byli oni od lat 20. ubiegłego wieku zwolennikami Adolfa Hitlera i kluczowymi postaciami dla sformułowania idei narodowej fizyki niemieckiej, określanej zwykle mianem *Deutsche Physik* od tytułu obszernego podręcznika napisanego przez Lenarda.

Ruch ten opierał się na wcześniejszych ideach, spisanych podczas I wojny światowej przez Wilhelma Wiena, który ubolewał nad zalewaniem niemieckiej fizyki angielską terminologią i zalecał przeciwstawianie się temu niebezpiecznemu trendowi (ze szczególnym uwzględnieniem promieni Röntgena internacjonalizowanych jako promienie X). Jednak Lenard ze Starkiem poszli o krok dalej, wyrażając swój sprzeciw wobec niedostatecznie narodowosocjalistycznych tez szczególnej teorii względności i włączając ją do „żydowskiej fizyki”. Trochę trudniej było im określić swój stosunek wobec mechaniki kwantowej – ostatecznie Werner Heisenberg był uznanym fizykiem pracującym w III Rzeszy i unikał wypowiedzania się w kwestiach politycznych. Lenard ze Starkiem nie popuścili jednak i jemu, publikując ksenofobiczne obelgi pod jego adresem na łamach biuletynu SS i blokując uzyskanie przez niego profesury w Monachium po śmierci Arnolda Sommerfelda.

Zwycięstwo to było jednak raczej pyrrusowe. Niechęć do Heisenberga nigdy nie rozrosła się do rozmiarów ogólnonarodowego zjawiska, w grze były też inne siły. Zdesperowana matka Heisenberga udała się do matki Heinricha Himmlera z żądaniem, by przestano przeszkadzać jej synowi w karierze. Himmler zadekretował badanie charakteru Heisenberga, które zakończyło się wynikiem pozytywnym, wydano zatem zakaz dalszych ataków. Himmler zaś obiecał Heisenbergowi, że po wygranej przez Niemcy wojnie SS sfinansuje utworzenie instytutu naukowego pod jego kierownictwem.

Żaden ze wzmiankowanych tu badaczy nie został wymazany z kart podręczników fizyki, jakkolwiek ulice i szkoły, które niegdyś nosiły ich imiona, od dawna mają nowych patronów. Sądzę, że świadczy to o sile środowiska fizyków, którzy byli i nadal są w stanie skutecznie oddzielić osobiste i polityczne postawy swoich kolegów od dokonań ściśle naukowych. Zastanawiam się jednak, czy taka separacja nie ma negatywnego wpływu na postawy studentów fizyki. Wiedza o tym, jakie postawy zajmowali wybitni naukowcy wobec wyzwań swoich czasów, jest w moim przekonaniu jednym ze źródeł siły do dokonywania osobistych etycznych wyborów.

Patrząc jednak na rosnącą polaryzację polityczną współczesnego świata i obserwując widoczne tu i ówdzie wciąganie nauki w bezwzględne tryby maszyny politycznej, nie mogę powstrzymać się od jeszcze jednego pytania. Czy i ta historia będzie się powtarzać jako swoja karykatura?

Krzysztof TURZYŃSKI

Klub 44 F



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
796 ($WT = 1,75$), 797 ($WT = 2,09$)
z numeru 4/2025

Jacek Konieczny	Poznań	41,11
Jan Zambrzycki	Białystok	4–37,38
Ryszard Woźniak	Kraków	34,00
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3–32,28
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6–21,47
Tomasz Wietecha	Tarnów	18–18,27
Krzysztof Zygan	Lubin	18,16
Paweł Kubit	Kraków	17,81

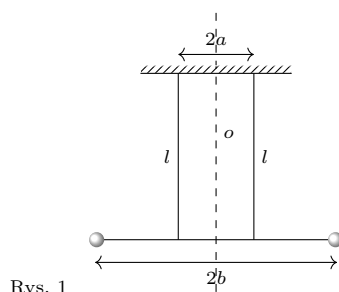
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2026

Zadania z fizyki nr 806, 807

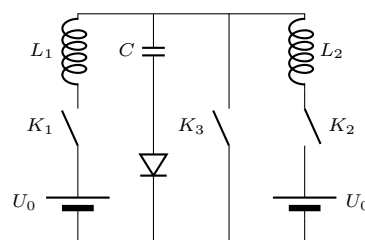
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

806. Hantla składa się z dwóch jednakowych małych kulek o masach m , zaczepionych na końcach lekkiego pręta i jest zawieszona w położeniu poziomym na dwóch nierozciągliwych niciach o długości l , oddalonych od siebie o $2a$ (rys. 1). Odległość między kulkami wynosi $2b$. Znaleźć okres małych drgań skrzętnych tej hantli.

807. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 klucz K_3 jest na początku zamknięty, a klucze K_1 i K_2 otwarte. W pewnej chwili zamknięto klucz K_1 , a po czasie $t_1 = 0,1$ s zamknięto klucz K_2 . Po kolejnym czasie $t_2 = 0,2$ s otwarto klucz K_3 . Znaleźć: 1) natężenie prądu przez cewkę L_1 po długim czasie od zamknięcia klucza K_1 ; 2) maksymalne napięcie na kondensatorze. Opory omowe zaniedbujemy, dioda jest idealna. Przyjmujemy $L_1 = 1$ H, $L_2 = 0,5$ H, $C = 10$ μ F, $U_0 = 10$ V.

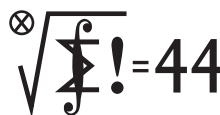


Rys. 1



Rys. 2

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
899 ($WT = 1,36$) i 900 ($WT = 1,56$)
z numeru 4/2025

Marcin Kasperski	Warszawa	46,36
Szymon Kitowski		41,11
Krzysztof Maziarz	Londyn	40,97
Andrzej Daniluk	Warszawa	40,76
Jerzy Cisło	Wrocław	40,19
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,09
Barbara Mroczek		37,01
Mikołaj Znamierowski		36,54
Roksana Słowik		35,92
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,90
Michał Adamaszek	Kopenhaga	31,26
Stanisław Bednarek	Łódź	31,20

Pan Marcin Kasperski – już podwójny
Weteran – sześć pełnych rund!

Zadania z matematyki nr 909, 910

Redaguje Marcin E. KUCZMA

909. Trójkąt prostokątny ABC ma boki $AB = 5a$, $BC = 4a$, $CA = 3a$ ($a =$ jednostka długości). Na boku BC leżą takie punkty D , E , że okręgi o średnicach CD i DE są styczne do boku AB odpowiednio w punktach P i Q . Przez dowolnie wybrany punkt X na odcinku AP prowadzimy prostą (różną od AP) styczną do okręgu CPD . Równoległa do niej prosta styczna do okręgu DQE przecina półprostą $QB \rightarrow$ w punkcie Y . Wyznaczyć minimalną długość odcinka XY , gdy punkt X zmienia swoje położenie na odcinku AP .

910. Rozważamy graf skierowany o nieskończenie wielu wierzchołkach ponumerowanych wszystkimi liczbami całkowitymi nieujemnymi. Krawędź zorientowana od wierzchołka ℓ do wierzchołka m prowadzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < m - \ell \leq 3$ oraz dokładnie jedna z liczb $m - \ell$, $m\ell$ jest podzielna przez 3. Dla każdej liczby naturalnej n obliczyć, ile jest ścieżek prowadzących od wierzchołka 0 do wierzchołka $3n$.

Zadanie 910 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

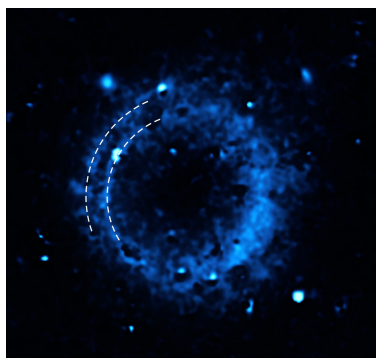
współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rys. 1. Wizualizacja układu podwójnego gwiazd, w którym prawdopodobnie dojdzie do wybuchu supernowej typu Ia. Źródło: NASA's Goddard Space Flight Center Conceptual Image Lab

Biały karzeł to tak naprawdę jądro gwiazdy, która miała zbyt małą masę, aby zakończyć swoje życie spektakularnym wybuchem supernowej. Taką małą masywną gwiazdą jest na przykład nasze Słońce. Po wyczerpaniu się helu i wodoru, podtrzymujących reakcje termojądrowe w jego wnętrzu, odrzuci otoczkę i pozostawi po sobie powoli stygnące jądro – białego karła – zbudowane z ciężkich pierwiastków.

Astronomowie znaleźli również dowody potwierdzające inny scenariusz wybuchu supernowych Ia, w którym dwa białe karły orbitują wokół siebie aż do momentu zderzenia. Jeśli ich łączna masa jest wystarczająco duża, aby doprowadzić do niestabilności, również mogą one wywołać supernową typu Ia.



Rys. 2. Zdjęcie podwójnego pierścienia, jaki tworzą pierwiastki wapnia (kolor niebieski) w pozostałościach po wybuchu supernowej typu Ia. Nałożone krzywe przedstawiają dwa pierścienie wapnia, który został wyrzucony podczas dwóch oddzielnych wybuchów. Dodatkowo na zdjęciu poniżej kolejny pierścień (pomarańczowy) tworzy wodór. Wewnątrz pierścieni kiedyś znajdował się biały karzeł



Źródło zdjęć: ESO/P. Das et al.

Mamy to. Kolejna teoria w astronomii potwierdzona obserwacyjnie. Niektóre supernowe wybuchają dwa razy!

Wybuch supernowej to spektakularne zjawisko astronomiczne często opisywane jako moment „śmierci” gwiazdy. W astronomii rozróżniane są dwa główne rodzaje supernowych (dzielone później na podtypy). Najpopularniejsze i najbardziej spektakularne wybuchy supernowych (typu II) następują pod koniec życia masywnych gwiazd, pozostawiając po takiej eksplozji czarną dziurę lub gwiazdę neutronową. Takie supernowe pojawiają się w naszej galaktyce Drogi Mlecznej mniej więcej raz na 50 lat. Doświadczony Czytelnik *Delty* może pamiętać wybuch ostatniej z 1987 roku (a Czytelnik Mniej Doświadczony może przeczytać relacje Tomasza Kwasta w Δ_{87}^{10}).

Najnowsze odkrycie dotyczy jednak trochę innego rodzaju supernowej, a mianowicie: supernowej typu Ia. Takie supernowe występują w układach podwójnych gwiazd, w których przynajmniej jedna z gwiazd to biały karzeł. Jeśli orbituje on wystarczająco blisko drugiej gwiazdy w tej parze, karzeł może wykraść materię swojego towarzysza (rys. 1). Gdy złodziejaszek ukradnie zbyt dużo materii, osiąga masę krytyczną, staje się niestabilny i ostatecznie eksploduje. Tę eksplozję nazywamy supernową typu Ia. Są one rzadkie i występują w Drodze Mlecznej mniej więcej raz na 500 lat. Możemy je jednak obserwować w innych galaktykach. Jest to ważne, ponieważ supernowe typu Ia mają bardzo przydatną cechę – maksymalna jasność wybuchu takiej supernowej jest zawsze taka sama. Dzięki temu naukowcy mogą dokładnie obliczyć odległość, jaka dzieli nas od supernowej. Wykorzystując je jako tak zwane świece standardowe, astronomowie odkryli przyspieszającą ekspansję Wszechświata. Dlatego najnowsze odkrycie potwierdzające sposób, w jaki wybuchają supernowe typu Ia, jest tak ważne. Pomaga nam zrozumieć, dlaczego mają one tak przewidywalną jasność.

Dotychczas większość teorii zakładała, że gdy biały karzeł osiąga masę krytyczną, następuje wówczas pojedyncza eksplozja. Jednak część badań teoretycznych i symulacji komputerowych sugerowała, że przynajmniej niektóre supernowe typu Ia można lepiej wyjaśnić podwójną eksplozją. W tym alternatywnym modelu biały karzeł tworzy wokół siebie warstwę skradzionego helu, która może stać się niestabilna przed osiągnięciem przez białego karła masy krytycznej i zapalić się, co wywołuje pierwszą eksplozję. Wybuch tworzy falę uderzeniową, która rozchodzi się wokół białego karła i do jego wnętrza, wywołując drugą detonację w jądrze gwiazdy – ostatecznie tworząc supernową. Nie było jednak dowodu obserwacyjnego na takie podwójne eksplozje. Aż do teraz.

Podwójny wybuch pozostawił po sobie ślad. Swego rodzaju odcisk palca w postaci podwójnego pierścienia gazu. Widoczny jest on na zdjęciach pozostałości po supernowej o numerze katalogowym SNR 0509-67.5, zaobserwowanych przy użyciu spektroskopu Multi Unit Spectroscopic Explorer (MUSE) zainstalowanego na Bardzo Dużym Teleskopie (VLT) w Chile (rys. 2). Sam wybuch tej supernowej miał miejsce kilkaset lat temu, jednak wciąż możemy obserwować jego następstwa. Pozostałości supernowej zawierają wiele pierwiastków, które we Wszechświecie są produkowane tylko przez gwiazdy. Między innymi widoczny na zdjęciu wapń (i inne ciężkie pierwiastki).

Dr Ivo Seitenzahl, jeden z kierowników obserwacji, podkreśla: „Ten namacalny dowód podwójnej detonacji nie tylko przyczynia się do rozwiązania długotrwałej zagadki, ale także oferuje wizualny spektakl”. Patrząc na zamieszczone obok zdjęcia, ja się z nim zgadzam.

Na podstawie publikacji naukowej: Priyam Das et al. „Calcium in a supernova remnant as a fingerprint of a sub-Chandrasekhar-mass explosion”, *Nature Astronomy* (2025).

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Wraz z początkiem listopada Słońce wkracza do gwiazdozbioru Wagi, gdzie spędzi pierwsze trzy tygodnie miesiąca, a ostatni jego tydzień ma przeznaczony na odwiedziny gwiazdozbioru Skorpiona. Do końca miesiąca obniży ono wysokość górowania o kolejne 7° , a 21 listopada Słońce przetnie równoleżnik -20° deklinacji i tym samym rozpocznie się trwający dwa miesiące okres najkrótszych dni i najdłuższych nocy w ciągu roku.

Nadal dość jasna jest planeta karłowata (1) Ceres, która w listopadzie zakreśli fragment pętli o długości około 3° , mniej więcej 3° na południowy wschód od gwiazdy 3. wielkości ι Ceti. Blask Ceres spadnie wyraźnie poniżej 8^m , a zatem do jej obserwacji niezbędny jest teleskop oraz ciemne niebo, na które można liczyć od drugiej dekady miesiąca, gdy Księżyc przeniesie się na niebo poranne. Sama planetoida w listopadzie przecina południk lokalny po godzinie 20, na wysokości około 27° .

Srebrny Glob zacznie miesiąc w fazie przekraczającej 80% od spotkania z parą planet Saturn-Neptun. 1 listopada Księżyc zajmie pozycję 9° na zachód od Saturna, by dobieć później przenieść się 3° na północ od Neptuna. Obie planety poruszają się nadal ruchem wstecznym, chociaż Saturn 29 listopada zmieni kierunek ruchu na prosty. Do tego czasu dystans między planetami urośnie do $4,5^\circ$. Neptun świeci z jasnością $+7,8^m$, Saturn natomiast zmniejszy swój blask do $+1^m$, przy tarczy o średnicy $18''$.

Posiadacze teleskopów o średnicy co najmniej kilkunastu centymetrów i powiększeniu ponad 100 razy mogą obserwować przejście Tytana, największego Księżyca Saturna, na tarczy planety 6 i 22 dnia miesiąca. Za pierwszym razem zjawisko rozpocznie się około 21:30 i potrwa aż do zachodu obu ciał niebieskich około godziny 2. Natomiast powtórkę można będzie obserwować z Polski 16 dni później od około 19:50 do godziny 1. Niestety na pojawienie się cienia tego księżycy trzeba czekać prawie 15 lat, aż do następnej równonocy na Saturnie.

5 listopada Księżyc przejdzie przez pełnię, świecąc 15° na zachód od Plejad i jednocześnie przechodząc przez perygeum swojej orbity. Dobę później zaś zakryje on wspomnianą gromadę gwiazd, mijając jednocześnie Urana w odległości 5° . Pechowo dla nas zakrycie najjaśniejszych gwiazd gromady zacznie się przed godziną 16, gdy Księżyc dopiero zaczyna pojawiać się nad widnokresem. A zatem zjawisko zajdzie bardzo nisko nad horyzontem, przy ciemniejącym niebie. W południowo-zachodniej Polsce Księżyc wszędzie już po jego zakończeniu. W trakcie nocy można obserwować oddalanie się Srebrnego Globu od Plejad, co jest dobrą okazją na ocenienie prędkości jego ruchu na tle gwiazd. Przy czym ze względu na bliskość perygeum jego prędkość jest bliska maksymalnej. Planeta Uran 21 listopada przejdzie przez opozycję względem Słońca, świecąc z jasnością $+5,6^m$. Do końca miesiąca Uran zbliży się na $0,5^\circ$ do pary mających podobną jasność gwiazd 13 i 14 Tau. W związku z opozycją Uran góruje około północy na wysokości prawie 60° .

W nocy z 9 na 10 listopada naturalny satelita Ziemi dotrze do Jowisza, zmniejszając przy tym

fazę do 72%. Do rana dystans między tymi ciałami niebieskimi zmniejszy się do 5° , jednocześnie 2° bliżej Księżyca znajdzie się Polluks, najjaśniejsza gwiazda Bliźniąt. Jowisz szykuje się do opozycji na początku przyszłego roku i właśnie zmienia kierunek swojego ruchu na wsteczny. W trakcie miesiąca jego jasność przekroczy $-2,5^m$, tarcza zaś – średnicę $44''$. Największa planeta Układu Słonecznego przecina południk lokalny 4 godziny po Uranie na podobnej doń wysokości, ale po wschodniej stronie punktu przesilenia letniego na ekliptyce.

12 listopada przypada ostatnia kwadra Księżyca, a dobieć później wszędzie on przed północą wraz z odległym odeń o $0,5^\circ$ Regulusem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa. W listopadowe poranki droga Słońca po niebie nadal tworzy duży kąt z widnokresem, stąd Srebrny Glob wznosi się wysoko i jest ozdobą nieba o tej porze doby, szczególnie bliżej nowiu, gdy bardzo dobrze widoczne jest światło popielate, czyli jego nocna strona oświetlona światłem słonecznym odbitym od Ziemi.

Księżyc spotka się ze Słońcem 20 dnia miesiąca, ale zanim to nastąpi, trzy dni wcześniej, jego tarcza przy fazie zmniejszonej do 8% pojawi się na niebie 2° od Spiki w Pannie. Sierp Księżyca w fazie 4% da się dostrzec nawet 18 listopada, gdy około godziny 6 zajmie on pozycję na wysokości 5° , niedaleko punktu SE widnokreśu. Jego odnalezienie ułatwi Spica, świecąca w odległości 10° na godzinie 1 względem niego.

Na przełomie listopada i grudnia o świcie tuż nad południowo-wschodnim widnokresem zacznie pojawiać się Merkury. Planeta 8 grudnia osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 21° . Początkowo Merkury wędruje na tle gwiazdozbioru Wagi i 30 listopada około 6:30 wzniesie się na wysokość 6° , świecąc z jasnością $-0,3^m$.

Nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokreśu poprawia się, a zatem po nowiu Księżyc dość szybko pojawi się na niebie wieczornym. Ciekawie zapowiada się jednak tylko jego spotkanie z Saturnem i Neptunem 29 dnia miesiąca, już po I kwadrze, gdy do jaśniejszej z planet zabraknie mu $2,5^\circ$.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 4



Rozwiązanie zadania M 1834.

Pokolorujmy $2n$ punktów podziału na przemian dwoma kolorami. Ponieważ dowolna cięciwa dzieli okrąg na dwa parzyste łuki, jej końce muszą mieć ten sam kolor. Ponieważ mamy n końców każdego koloru, n musi być parzyste.



Rozwiązanie zadania M 1835.

W dowodzie wykorzystamy wzór Picka (patrz Δ_{24}^{12}):

Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych ma pole równe $w + b/2 - 1$, gdzie w i b oznaczają liczby punktów kratowych, odpowiednio, we wnętrzu i na brzegu trójkąta.

Rozważmy trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach kratowych, mający w swoim wnętrzu dokładnie dwa punkty kratowe X i Y . Załóżmy, że prosta XY nie przechodzi przez żaden z wierzchołków ABC . Istnieje więc bok trójkąta (niech to będzie BC), którego prosta XY nie przecina. Wówczas trójkąty XBC i YBC mają tyle samo punktów kratowych wewnątrz (tj. nie mają żadnego) oraz na brzegu. Ze wzoru Picka wynika zatem, że pola tych trójkątów są równe. Wobec tego wysokości tych trójkątów opuszczone na prostą BC są równe, a zatem prosta XY jest równoległa do boku BC .



Rozwiązanie zadania M 1836.

Równość z założenia zadania oznacza, że

$$\frac{(1-a)(1-c)}{ac} = \frac{bd}{(1-b)(1-d)}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{1-a-c}{ac} &= \frac{(1-a)(1-c)}{ac} - 1 \\ &= \frac{bd}{(1-b)(1-d)} - 1 = \frac{b+d-1}{(1-b)(1-d)}. \end{aligned}$$

Zatem liczby $1-a-c$ oraz $b+d-1$ mają ten sam znak, więc

$$(1-a-c)(b+d-1) \geq 0.$$

Po przekształceniach dostajemy

$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$



Rozwiązanie zadania F 1131.

Sprężanie powietrza w silniku wysokoprężnym jest, w dobrym przybliżeniu, procesem adiabatycznym. Podczas przemiany adiabatycznej gazu doskonałego związek temperatury bezwzględnej gazu T i jego objętości opisuje zależność:

$$TV^{\kappa-1} = \text{const},$$

w której κ jest stosunkiem wartości c_p – molowego ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem do c_v – molowego ciepła właściwego w stałej objętości: $\kappa = c_p/c_v$. Powietrze jest mieszaniną gazów dwuatomowych: azotu (N_2) i tlenu (O_2) z bardzo niewielkimi domieszkami innych gazów. Dla gazu dwuatomowego $\kappa = 7/5$. Warunki podane w treści zadania odpowiadają temperaturze początkowej $T_0 = 293$ K i stosunkowi objętości początkowej V_0 do objętości końcowej V_1 równemu $V_0/V_1 = 20$. Mamy:

$$T_0 V_0^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1}, \quad \text{czyli} \quad T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\kappa-1}.$$

Liczbowo: $T_1 = 293 \cdot (20)^{0.4} \approx 961$ K $\approx 688^\circ\text{C}$. Samozapłon oleju napędowego następuje w temperaturze około 210°C .

Model użyty w zadaniu jest znacznie uproszczony, na przykład już podczas zasysania powietrze ogrzewa się od rozgrzanych części silnika, ale odpowiada zasadzie działania silnika wysokoprężnego.



Rozwiązanie zadania F 1132.

Równanie stanu jednego mola gazu doskonałego ma postać: $pV = RT$; R oznacza stałą gazową. Oznacza to, że $p = RT/V$. Po podstawieniu tego związku do równania przemiany otrzymujemy, że podczas tej przemiany:

$$\frac{T^\alpha}{V^{\alpha-1}} = \text{const}.$$

Oznaczmy tę stałą jako B , mamy:

$$T^\alpha = BV^{\alpha-1},$$

a więc dla $\alpha > 1$ rozprężaniu gazu (zwiększaniu jego objętości) towarzyszy wzrost temperatury. Do obliczenia ciepła przemiany skorzystamy ze związku ciepła dostarczanego podczas przemiany, dQ_{przem} , ze zmianami energii wewnętrznej gazu, dU , oraz pracą wykonaną przez gaz, $dW = -pdV$:

$$dQ_{\text{przem}} = dU + pdV = c_v dT + pdV,$$

c_v oznacza molowe ciepło w stałej objętości. Otrzymujemy dla molowego ciepła przemiany c_{przem} :

$$c_{\text{przem}} = \frac{dQ_{\text{przem}}}{dT} = c_v + p \frac{dV}{dT}.$$

Pochodną objętości względem temperatury obliczamy na podstawie związku V i T podczas przemiany. Ostatecznie otrzymujemy:

$$c_{\text{przem}} = c_v + \frac{\alpha}{\alpha-1} R.$$



Wielkimi krokami zbliża się kolejna edycja Ogólnopolskiej Matematycznej Konferencji Studentów „OMatKo!!!”. Już po raz dwunasty młodzi pasjonaci matematyki spotkają się, aby wspólnie odkrywać i zgłębiać fascynujący świat nauki. W programie wydarzenia znajdą się liczne wystąpienia, prelekcje, konkursy oraz okazje do integracji – wszystko w atmosferze sprzyjającej wymianie wiedzy i doświadczeń. Tegoroczna edycja odbędzie się na Politechnice Wrocławskiej w dniach 5–7 grudnia 2025 roku.

„OMatKo!!!” to największa w Polsce konferencja studencka poświęcona matematyce, kierowana do studentów i doktorantów z całego kraju. To przestrzeń, w której można zarówno rozwijać swoje zainteresowania, jak i zaprezentować wyniki badań – w formie referatów lub plakatów. Do udziału zapraszamy także koła naukowe, które chcą podzielić się swoimi pasjami i projektami. Konferencja stwarza również świetną okazję do nawiązywania kontaktów, spotkania potencjalnych pracodawców oraz integracji z innymi entuzjastami królowej nauk. To właśnie uczestnicy nadają wydarzeniu jego wyjątkowy charakter.

Aktualne informacje będą publikowane na kanałach społecznościowych konferencji. Zachęcamy do śledzenia:

- strona internetowa: omatko.im.pwr.edu.pl/
- Facebook: [web.facebook.com/omatkopwr/](https://www.facebook.com/omatkopwr/)
- Instagram: www.instagram.com/omatko.pwr/



Wielomiany symetryczne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zachęcam Czytelnika, aby powrócił na chwilę do kącika nr 2 w Δ_{19}^2 – są tam definicje kilku podstawowych pojęć, występujących również w niniejszym tekście.

Przez S_n będę oznaczał zbiór wszystkich permutacji ciągu $(1, 2, \dots, n)$. Rozważmy wielomian

$$(W) \quad W_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} x_{\sigma(2)}^{\alpha_2} \dots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

Zwróćmy uwagę, że permutujemy tu zmienne, pozostawiając wykładniki na swoich miejscach – można też na odwrót. Na użytek tego kącika, jeśli jest jasne, jakie zmienne występują, będę używał następujących zapisów:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n),$$

$$W_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$$

Z samej definicji wynika, że wielomian (W) jest symetryczny. Co więcej, z dokładnością do stałej jest to „najmniejszy” wielomian symetryczny, w którym występuje składnik $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)$.

Więcej światła powinien rzucić przykład:

$$\begin{aligned} W_{2,1,1}(x, y, z) &= x^2 y^1 z^1 + y^2 z^1 x^1 + z^2 x^1 y^1 + z^2 y^1 x^1 + y^2 x^1 z^1 + x^2 z^1 y^1 \\ &= 2x^2 yz + 2y^2 zx + 2z^2 xy. \end{aligned}$$

Mamy tu sumę sześciu jednomianów, bo $6 = 3!$, ale niektóre są równe. Co więcej, po uporządkowaniu wszystkie jednomiany mają ten sam współczynnik. To nie jest przypadek. Niech w ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ będzie n_0 zer, n_1 jedynek, n_2 dwójek itd. Wówczas wspólnym

współczynnikiem jednomianów po uporządkowaniu wielomianu (W) jest $n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \dots$, czego wykazanie pozostawiam Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie z kombinatoryki.

Skoro w wielomianie (W) wszystkie współczynniki są równe, rozpatruje się czasem unormowaną jego wersję, w której wszystkie współczynniki są jedynkami:

$$(M) \quad M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]}{n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}.$$

Jednymi z najważniejszych wielomianów symetrycznych są elementarne wielomiany symetryczne

$$(E) \quad E_k(x_1, \dots, x_n) = M_{1, \dots, 1, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

(w indeksie M jest dokładnie k jedynek). Pojawiają się one między innymi we wzorach Viete’a. W szczególności prawdziwa jest równość

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) = 1 - E_1 + E_2 - E_3 + \dots + (-1)^n E_n.$$

A na koniec pomnożymy wielomiany takie jak (W). Powiedzmy, że jeden z nich jest sumą k jednomianów, a drugi – l jednomianów, więc, mnożąc tradycyjnie, trzeba wykonać kl mnożeń (a liczby k i l mogą być równe n !). Poniższa równość pozwala zmniejszyć liczbę mnożeń do $\min\{k, l\}$:

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n] \cdot [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n] &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} (\alpha_{\sigma(1)+\beta_{\tau(1)}} \ \alpha_{\sigma(2)+\beta_{\tau(2)}} \ \dots \ \alpha_{\sigma(n)+\beta_{\tau(n)}}) \\ &= \sum_{\rho \in S_n} [\alpha_1+\beta_{\rho(1)} \ \alpha_2+\beta_{\rho(2)} \ \dots \ \alpha_n+\beta_{\rho(n)}]. \end{aligned}$$

Jako przykład obliczymy $[2110] \cdot [1100]$:

+	1100	1010	1001	0110	0101	0011
2110	3210	3120	3111	2220	2211	2121

To tylko 1/4 pełnej tabeli mnożenia przez (2110) , pozostałe trzy części są takie same. Otrzymujemy więc

$$[2110] \cdot [1100] = 8[3210] + 8[2211] + 4[3111] + 4[2220].$$

Zadania

- Wykazać, że każdy wielomian symetryczny zmiennych x i y można otrzymać z wielomianów $x + y$ oraz xy , za pomocą dodawania i mnożenia wielomianów oraz mnożenia przez stałą.
- Wiedząc, że

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b, \quad x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

znaleźć wielomian sześcienny, którego pierwiastkami są x, y, z .

- Niech $a, b, c, d \neq 0, 1$ będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że jeśli

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2,$$

to również $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$.

Wskazówki do zadań

1. Dla $a \leq b$ mamy $x^a y^b = x^a (y^b - a + a) = x^a y^b - a x^{a-1} y^b + a x^a y^{b-1}$, więc wystarczy przeprowadzić dowód dla wielomianów postaci $x^c + y^c$.

Ciekawostka. Jest to szczególnie przydatne zasada twierdzenia o wielomianach symetrycznych, wedle którego wszystkie wielomiany symetryczne n zmiennych można wygenerować z wielomianów $E_1, E_2, \dots, E_n$.

2. Z równości $a = E_1, b = E_2$ oraz $c = E_3 - 3E_1 E_2 + 3E_3$ wyznaczyć E_1, E_2, E_3 za pomocą a, b, c .

3. $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$ oraz $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$.

2. Warszawska Konferencja Nauczycieli Fizyki

Jak uczyć biofizyki?



projekt współfinansuje
miasto stołeczne
Warszawa



European
Recycling
Platform

A Landbell Group Company

22 listopada 2025

Wydział Fizyki UW

ul. Pasteura 5, Warszawa

wakonf2025.ptf.net.pl



Polskie Towarzystwo Fizyczne
Oddział Warszawski

**WYDZIAŁ
FIZYKI**
UNIwersytet
Warszawski

PTBF

Aktywni od 50 lat!

