



delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

IN-6.63.10-19
T-E-3.141592

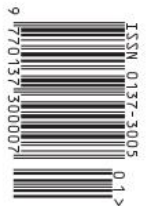
NR 1 (620) 2026

CENA 9 ZŁ VAT 8%
PŁ ISSN 0137-3005 I NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Maxwell, Szilárd,
Landauer, Bennett
i ich demon
s. 1

AKTUALNOŚCI
Tysiąc kotów
s. 17





SPIS TREŚCI NUMERU 1 (620) 2026

Maxwell, Szilárd, Landauer, Bennett
i ich demon

Krzysztof Byczuk

str. 1

 Skaningowa wizja
Marta Fikus-Kryńska

str. 4

 Zadania

str. 5

Teorie rozstrzygalne

Łukasz Kamiński

str. 6

 Zwierzę w pudełku

Bartłomiej Pawlik

str. 8

O obwodach poliomin

Piotr Pikul

str. 9

Bryły rozpięte na krzywych

Jarosław Górnicki

str. 10

„Sir Roger Penrose. Geniusz i jego droga
do rzeczywistości”

str. 13

Manewr transferowy Hohmanna: z niskiej
orbity ziemskiej na Marsa

Przemysław Borys

str. 14

 Aktualności

Tysiąc kotów

str. 17

Olimpiada Sztucznej Inteligencji

Witold Drzewakowski, Kamil Książek,

Michał Marcinkowski, Paulina

Tomaszewska

str. 18

Klub 44

str. 20

 Prosto z nieba: Co było pierwsze:
galaktyka czy czarna dziura?

str. 22

 Niebo w styczniu

str. 23

 Twierdzenie Cevy – podstawy

str. 25

W dniu 6 listopada 2025 roku zmarł

Profesor Wiesław Żelazko

Autor *Delty*

Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego
w latach 1996–2004

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana, Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Maxwell, Szilárd, Landauer, Bennett i ich demon

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział
Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

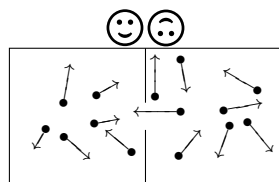
Krzysztof BYCZUK*

Spontaniczny przepływ ciepła zachodzi od ciała o wyższej temperaturze do ciała o niższej temperaturze. Jest to jedno ze sformułowań drugiej zasady termodynamiki według Clausiusa. Nie można uzyskać pracy w procesie cyklicznym, pobierając energię jedynie z jednego rezerwuaru. Jest to sformułowanie tej samej zasady termodynamiki, ale według Kelvina. Oba sformułowania są równoważne, patrz Δ_{20}^3 . Można je też zapisać matematycznie: Istnieje funkcja stanu S zwana entropią, patrz Δ_{19}^4 , która w układzie izolowanym, w którym zachodzi proces termodynamiczny, nigdy nie maleje: $\Delta S \geq 0$. Gdy zachodzi równość, to taki proces, z definicji, nazywamy odwracalnym.

Pozorna sprzeczność drugiej zasady termodynamiki z odwracalnymi w czasie prawami dynamiki Newtona w mechanice klasycznej pobudzała wyobraźnię uczonych, patrz Δ_{19}^1 . Już w 1867 roku James Maxwell zaproponował eksperyment myślowy mający obalić bezwzględną słuszość drugiej zasady termodynamiki. Rozwiązanie tego paradoksu zajęło 115 lat, a temat ten jest nadal żywy i interesujący. Doczekał się też weryfikacji doświadczalnej.

Maxwell

James Clerk Maxwell (1831–1879) –
szkocki fizyk i matematyk, laureat
Medalu Rumforda (1860).



Rys. 1. Schemat ilustrujący działanie demona Maxwella. Przegroda otwiera się tak, aby przepuścić szybkie cząstki lecące z prawego pudła do lewego i wolne cząstki lecące z lewego pudła do prawego. Po upływie pewnego czasu temperatury w obu pudłach będą różne. Lewe pudło będzie miało wyższą temperaturę, a prawe niższą.

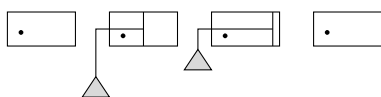
Demon (stgr. δαίμων, daimon, nadprzyrodzona potęga, dola; łac. *daemon*) – istota występująca w wielu wierzeniach ludowych, mitologiach i religiach, która zajmuje pozycję pośrednią między bogami a ludźmi, między sferą ziemsko-ludzką, materialną a sferą boską, czysto duchową; istota o cechach na wpół ludzkich, na wpół boskich; najczęściej nieprzyjazny człowiekowi duch, związany pierwotnie z pojęciem nieczystości sakralnej. (Wikipedia)

Leó Szilárd (1898–1964) –
węgiersko-amerykański fizyk i biolog
molekularny.

W eksperymencie myślowym James Maxwell zaproponował, aby podzielić przegrodą na dwie części pudło z gazem znajdującym się w równowadze termodynamicznej. Temperatury gazu w obu połówkach są identyczne, średnia energia kinetyczna cząsteczek również. Oznacza to jednocześnie, że w obu połówkach są cząsteczki zarówno szybsze, jak i wolniejsze. Maxwell wprowadził niewielki otwór w przegrodzie, otwieranie i zamykanie którego nie wymaga pracy. I na koniec wprowadził super-stworka, który ma mierzyć prędkości cząsteczek, i jeśli cząsteczka lecąca w stronę otworu z prawej strony ma prędkość większą od średniej prędkości, otwiera przegrodę i pozwala jej polecieć na lewą stronę. Odwrotnie, z lewej strony przepuszcza na prawo jedynie te cząsteczki, których prędkości są mniejsze od średniej. W efekcie po upływie pewnego czasu lewa strona ma więcej szybszych cząsteczek niż prawa i jej temperatura jest wyższa niż temperatura prawej strony. Teraz wystarczy podłączyć silnik cieplny pomiędzy tak stworzonymi rezerwuarami i uzyskać pracę. Powstało perpetuum mobile drugiego rodzaju. Oczywiście jest to sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki w sformułowaniu Clausiusa. Ciepło nie może przepływać bez początkowej różnicy temperatur. Parę lat później, w 1874 roku, Kelvin nazwał tego wyimaginowanego stworka demonem Maxwella. Choć w literaturze demon Maxwella był przedstawiany jako ktoś obdarzony inteligencją, to w istocie jest to odpowiednio zaprojektowane urządzenie pomiarowe.

Szilárd

Mimo gorących dyskusji żaden postęp w zrozumieniu problemu (paradoksu) demona Maxwella nie nastąpił – aż do 1929 roku. Wtedy to Leó Szilárd (czytaj Silard) zaproponował uproszczoną wersję rozumowania Maxwella, znaną obecnie pod nazwą silnika Szilárda. W swoim eksperymencie myślowym rozważył on pojemnik o objętości V z jedną cząsteczką (lub atomem) spełniającą równanie stanu gazu doskonałego $pV = k_B T$ (k_B jest to stała Boltzmanna). W wyniku zderzeń ze ściankami cząstka może wymieniać energię z otoczeniem i po każdym takim zderzeniu jej energia kinetyczna wraca do wartości odpowiadającej temperaturze otoczenia T . Demon umieszcza dokładnie po środku ruchomą nieważką przegrodę i sprawdza, po której stronie znajduje się cząsteczka. Po tej stronie, po której jest cząsteczka, umieszcza nieważką nici przewiniętą przez nieważki bloczek, a na końcu nici zawieszona jest masa. Wszystkie czynności zrobione przez demona nie wymagały wykonania pracy. Teraz, gdy cząsteczka uderzy (wielokrotnie) w przegrodę, spowoduje jego kwazistatyczne (odwracalne) przemieszczenie się i podniesienie masy na pewną wysokość. Tłok wykonał pracę, podniósł masę, a wykonana praca jest zgromadzona w postaci energii



Rys. 2. Schemat ilustrujący eksperyment myślowy opisujący działanie silnika Szilárda. Po lewej stronie ciśnienie gazu p wytwarzane przez jedną cząsteczkę poruszającą się chaotycznie i uderzającą w ścianki, po prawej stronie próżnia. Ponieważ energia wewnętrzna gazu doskonałego się nie zmienia, $U = \frac{3}{2}k_B T$, gaz pobrał ciepło z otoczenia, aby utrzymać stałą temperaturę T i wykonać pracę $\bar{W}$, co jest zgodne z pierwszą zasadą termodynamiki $\Delta U = Q + \bar{W}$.

Rolf Wilhelm (William) Landauer (1927–1999) – amerykański fizyk, znany z tzw. zasady Landauera. Zajmował się informatyką teoretyczną.

potencjalnej grawitacji. Wykonana praca nad układem przy maksymalnym przesunięciu się tłoka wynosi

$$W = - \int_{V/2}^V p(V) dV = -k_B T \ln 2 < 0,$$

czyli układ wykonał pracę równą $\bar{W} = k_B T \ln 2$. Mamy sprzeczność z drugą zasadą termodynamiki w sformułowaniu Kelvina. Dla utrzymania stałej temperatury (proces izotermiczny) układ pobrał z rezerwuaru ciepło w ilości $Q = k_B T \ln 2$, które zostało w całości zamienione na pracę. Entropia rezerwuaru zmalała o $\Delta S = Q/T = k_B \ln 2$. Szilárd i jego następcy błędnie uważali (bez podania dowodu), że proces pomiaru położenia cząsteczki musi produkować entropię nie mniejszą niż $k_B \ln 2$, aby uratować drugą zasadę termodynamiki.

Landauer

Najważniejszy krok w kierunku wyjaśnienia paradoksu demona Maxwella dokonał się w 1961 roku wraz z przełomową pracą Rolfa Landauera. Tematem pracy Landauera nie był jednak paradoks demona Maxwella *per se*, lecz problem przetwarzania logicznego, zapisywania i kasowania informacji. Sama matematyczna koncepcja informacji logicznej powstała w 1948 roku. Claude Shannon powiązał informację z prawdopodobieństwem otrzymania danego przekazu p_i . Im mniejsze jest to prawdopodobieństwo, tym większa musi być ilość informacji zawarta w tym przekazie. Wiadomość, której treść jest wcześniej znana, $p_i = 1$, nie zawiera żadnej informacji. Dla danego rozkładu prawdopodobieństwa $\{p_i\}$ Shannon wprowadził średnią informację $H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$, znaną obecnie jako entropia informacji. Logarytm przy podstawie 2 nawiązuje do układu binarnego i bitu informacji, stanu logicznego 0 lub 1. Podobno na pomysł, aby nazwać wielkość H entropią, wpadł John von Neumann, w konwersacji z Shannonem stwierdził, że i tak nikt nie rozumie, czym jest entropia, więc ta nazwa będzie dobra.

Landauer podzielił logiczne procesy przetwarzania informacji na odwracalne i nieodwracalne. Przykładem operacji odwracalnej jest operacja jednobitowa NOT lub dwubitowa CNOT. Jak widać z tabelki działania, znajomość bitu (bitów) końcowego pozwala jednoznacznie określić bit (bity) początkowy. Operacje odwracalne są iniekcją, odwzorowaniem jeden na jeden. Są też operacje nieodwracalne, na przykład operacja OR. Na podstawie znajomości bitu końcowego nie umiemy ustalić, jakie były bity początkowe.

Ponadto Landauer powiązał proces przetwarzania informacji z procesem fizycznym. Nośnikiem informacji zawsze jest jakiś układ fizyczny, a przetwarzaniu informacji musi towarzyszyć zjawisko fizyczne, zgodne z prawami fizyki. W szczególności zgodne z prawami termodynamiki. Na przykład stanowi logicznemu 0 odpowiada cząsteczka znajdująca się w lewej połowie pudełka, w stanie L , a stanowi logicznemu 1 odpowiada cząsteczka w prawej połowie, w stanie R . Oczywiście możliwe realizacje stanu jednego bitu jest bardzo wiele. Nośnikiem może być polaryzacja fotonu, magnetyzacja domeny magnetycznej, spin elektronu, stan ładunkowy bramki MOSFET i wiele innych możliwości.

Odwracalnym procesom logicznym odpowiadają w przyrodzie odwracalne procesy fizyczne, niezmieniające całkowitej entropii układu. Na przykład proces zapisywania czy zapamiętywania informacji jest procesem odwracalnym i polega na kopiowaniu jeden do jednego stanu pierwszego układu na drugi. Nie ma tutaj jakiejś minimalnej pracy, która byłaby potrzebna, aby skopiować stan jednego bitu na stan drugiego.

Najważniejszym spostrzeżeniem Landauera jest jednak obserwacja, że proces wymazywania pamięci jest nieodwracalny i tym samym odpowiadający mu proces fizyczny jest też nieodwracalny, generujący ciepło czy dyssypację energii i zwiększający całkowitą entropię układu. Faktycznie, jeśli umówimy się, że standardowym stanem odniesienia, nieniosącym informacji, jest stan, w którym cząsteczka jest w lewej połowie, to zarówno stan logiczny 0, jak i 1, którym

p	$\neg p$
0	1
1	0

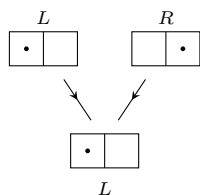
Odwracalna operacja logiczna NOT

p	q	p'	q'
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

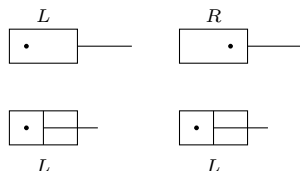
Odwracalna operacja logiczna CNOT

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nieodwracalna operacja logiczna OR



Rys. 3. Nieodwracalna operacja wymazania (skasowania) pamięci. Stany L i R są mapowane na ten sam stan odniesienia, zgodnie z naszą umową L . Znając tylko stan końcowy, nie wiemy, w jakim stanie początkowym był układ. Tej operacji nie można odwrócić.



Rys. 4. Fizyczna realizacja wymazania pamięci

Charles H. Bennett (ur. 1943) – amerykański fizyk, filozof.



odpowiadało położenie cząsteczki L i R , jest przekształcany w stan L , czyli logiczne 0. Po wymazaniu pamięci nie możemy już sprawdzić, jaki był stan początkowy bitu. Taki proces jest nieodwracalny i musi generować ciepło.

Pracę potrzebną do wymazania jednego bitu pamięci znajdziemy, biorąc pudełko o objętości V z jedną cząsteczką pozostającą w kontakcie z rezerwuarem o temperaturze T , znajdującą się z lewej, L , lub prawej, R , strony. Teraz od prawej strony przesuwamy bardzo powoli i bez tarcia (kwazistatycznie) tłok, redukując objętość z V do $V/2$. Niezależnie od tego, w jakim stanie początkowym była cząsteczka, po tej operacji znajduje się ona w standardowym stanie odniesienia L . Wykonana praca nad układem wynosi $W = k_B T \ln 2$. Praca ta przekazana jest do otoczenia w postaci ciepła Q .

Prawo Landauera stwierdza, że minimalna praca potrzebna do wymazania jednego bitu informacji z pamięci w danej temperaturze T wynosi $k_B T \ln 2$. O ile uczenie się, zapamiętywanie, teoretycznie nie wymaga pracy, to niestety zapominanie zawsze związane jest z pewną pracą. Dość przewrotna konkluzja.

Bennett

Wróćmy do drugiej zasady termodynamiki i demona Maxwella. W 1982 roku Charles Bennett powiązał odkrycia Landauera z ponadstuletnim paradoksem Maxwella. Nawiasem mówiąc, do podobnych wniosków doszedł już w 1970 roku Oliver Penrose. Aby demon Maxwella czy silnik Szilárda działały w sposób cykliczny, pamięć demona, w której zapisany był stan cząsteczki, musi być wymazana (zresetowana). Jedynie wtedy operacja pomiaru stanu cząsteczki mogła zostać powtórzona. Tak więc nie pomiar stanu cząsteczki, nie otwieranie przegrody lub mocowanie nitki i bloczka, jak błędnie zakładali Szilárd i inni, lecz proces kasowania pamięci prowadzi do dyssypacji energii i sprawia, że druga zasada termodynamiki jest nadal prawdziwa. Egzorcyzmy nad demonem Maxwella zostały dopełnione.

Największym chyba zaskoczeniem jest jednak powiązanie dwóch z pozoru zupełnie różnych światów, teorii informacji i termodynamiki. Z punktu widzenia teorii informacji bit w stanie 0 lub 1 ma entropię informacji równą $\log_2 2 = 1$, gdyż są dwie możliwości z tym samym prawdopodobieństwem $1/2$. Stan standardowy bez informacji 0 ma entropię $\log_2 1 = 0$, gdyż prawdopodobieństwo wystąpienia tego stanu wynosi jeden. Mamy więc zmianę entropii informacyjnej o jeden w nieodwracalnym logicznym procesie kasowania pamięci.

Zakładając teraz, że Landauerem, że procesom logicznym odpowiadają procesy fizyczne, możemy przyrównać entropię informacji i entropię termodynamiczną:

$$S = cH,$$

gdzie $c = k_B / \log_2 e$ jest związane ze zmianą podstawy logarytmu z 2 na e oraz z tym, że entropia termodynamiczna ma wymiar J/K . Tym samym zmiana entropii wynosi $\Delta S = k_B \ln 2$ i ilość energii oddanej jako ciepło $Q = T \Delta S = k_B T \ln 2$ wynosi dokładnie tyle co poprzednio.

Postscriptum

Po rozwiązaniu eksperymentu myślowego naukowcy rozpoczęli prawdziwe eksperymenty z demonem Maxwella w laboratoriach. Na przełomie XX i XXI wieku stały się możliwe eksperymenty, w których manipuluje się pojedynczymi atomami, elektronami czy fotonami. To otworzyło drogę do skonstruowania demona Maxwella. Na przykład w 2007 roku naukowcy wykorzystali bramkę zasilaną światłem, aby zademonstrować działanie demona Maxwella. W 2010 roku inny zespół opracował sposób wykorzystania energii wytworzonej przez informację demona do wprawienia kulki w ruch, w górę, a w 2016 roku naukowcy zastosowali koncepcję demona Maxwella do dwóch komór zawierających nie gaz, ale światło. Wykorzystano też aparat mechaniki kwantowej do sformułowania termodynamiki kwantowej i badania kwantowego odpowiednika demona Maxwella.

Jak widać, problem zamiany energii w pracę, pochodzący jeszcze z XIX wieku, jest nadal żywy i aktualny.

Literatura

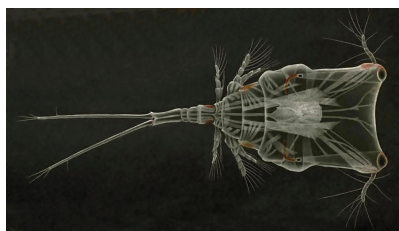
1. R. Landauer, *Information is physical*, „Physics Today”, May 1991, str. 23–29.
2. Ch. Bennett, *Notes on Landauer's principle, reversible computation, and Maxwell's demon*, „Studies in History and Philosophy of Modern Physics” **34**, (2003), str.501–510.
3. E. Lutz, S. Ciliberto, *Information: From Maxwell's demon to Landauer's eraser*, „Physics Today”, September 2015, str. 30–35.
4. K. Robertson, *The demons haunting*, „Physics Today”, November 2021, str. 44–50.
5. R. Feynman, *Przetwarzanie informacji*, PWN, 2022.

Skaningowa wizja

W 1891 roku niemiecki zoolog Seliq Exner w swojej książce *Die Physiologie der Facettirten Augen von Krebsen und Insekten (Fizjologia oczu złożonych skorupiaków i owadów)* opisał nietypową budowę oka morskiego skorupiak o nazwie *Copilia quadrata*. Intrygujący, acz niejasny, opis sprowokował wiele lat później naukowców z Wielkiej Brytanii do dokładnych badań tego dziwnego zwierzęcia. Oko *Copilia* przypomina konstrukcją pierwsze inżynierskie rozwiązania stosowane w... telewizorach.

Według opisu z końcówki XIX wieku *Copilia* miała parę oczu składających się z dwóch soczewek: jednej leżącej na powierzchni i drugiej leżącej we wnętrzu ciała zwierzęcia, mniej więcej w połowie jego długości. Najbardziej uderzający był, jak pisał Exner, „stały i żwawy ruch” wewnętrznej soczewki.

Opis sporządzony przez niemieckiego zoologa był na tyle intrygujący, że wciągnął Brytyjczyków w poszukiwania przedstawicieli gatunku. Nie było to proste, w wodzie z 14 połowów przeprowadzonych w zatoce Neapolitańskiej na głębokości 200 m udało im się znaleźć 9 osobników. Niby nie tak mało, jednak zważywszy, że mowa tu o zwierzęciu praktycznie przezroczystym, wielkości maksymalnie 3 mm, z czego połowę stanowi cieniutki „ogon” (ang. *tail*, choć słowo to w języku polskim zarezerwowane jest dla kręgowców). Złowione skorupaki poddano dokładnym badaniom, które opublikowano w artykule „The curious eye of *Copilia*”, w prestiżowym *Nature* w 1964 roku.



Copilia quadrata
Źródło: Biodiversity HeritageLibrary,
CC BY 2.0, Wikimedia Commons

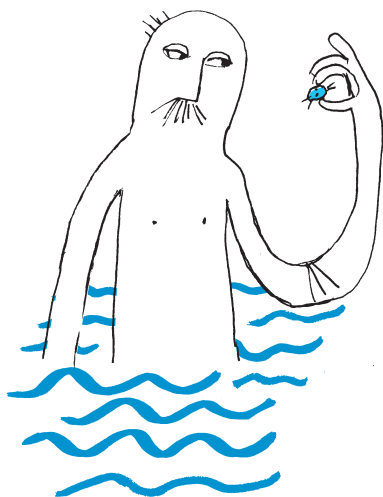
Copilia quadrata należy do widłonogów, maleńkich skorupiaków zamieszkujących powszechnie wody słone i słodkie. Ciało samic *Copilia* jest przejrzyste, dzięki czemu pod mikroskopem widać wewnętrzne struktury w działaniu, także oka. Dwie soczewki, ułożone jedna nad drugą, połączone są delikatną stożkowatą błoną. Dolna soczewka połączona jest ze zgiętą w łuk pomarańczową strukturą, będącą receptorem. Z niego prowadzi pojedynczy nerw do mózgu skorupaka. Zewnętrzna soczewka jest sztywno zakotwiczona w skorupce pokrywającej zwierzę. Za to wewnętrzna pozostaje zawieszona na systemie elastycznych więzadeł i mięśni, które zawiadują ruchem soczewki i przyklejonego do niej receptora. Wewnętrzne soczewki obu oczu wykonują stałe oscylacyjne ruchy niezależne od ruchów zwierzęcia.

Exner opisał budowę oka tego skorupaka 5 lat po tym, jak niemiecki wynalazca Paul Nipkow opatentował „elektryczny teleskop”, który w dużej mierze przyczynił się do rozwoju telewizji. Oba te twory opierają się na podobnej idei: tworzenia obrazu metodą skanowania.

Tarcza Nipkowa była podstawowym elementem pierwszych telewizorów i kamer telewizyjnych. Urządzenie składało się z obracającej się tarczy z serią spiralnie położonych otworów. Gdy tarcza się obracała, każdy otwór przesunął się po innej linii obrazu, skanując go w ten sposób od góry do dołu. Światło, przechodzące przez otwory, trafiało na światłoczułą komórkę, która zamieniała zmienną intensywność światła na proporcjonalnie zmienny sygnał elektryczny. Sygnał był następnie przesyłany z odbiornika, w którym znajdowały się identyczna, działająca w tym samym tempie, tarcza i układ odwracający sygnał na świecące punkty, odbierany przez ludzkie oko jako ruchomy obraz. Tarcza Nipkowa działała zatem jak mechaniczny skaner, który rozkładał obraz na pojedyncze punkty w czasie.

Brytyjscy naukowcy badający skorupaka uznali, że układ soczewek i ich ruch przypomina rozwiązanie stosowane w mechanicznej telewizji skaningowej stosującej dysk Nipkowa.

Dolna soczewka w oku *Copilia* porusza się charakterystycznym ruchem przypominającym ząbki piły, skanuje otoczenie punktowo, po kolei, trochę jak dzieje się to w trakcie czytania – kolejno następujące po sobie litery składamy w słowa, śledząc tekst od góry do dołu kartki. Do takiego sposobu rejestracji obrazu wystarczy jeden receptor i jeden nerw wzrokowy, zupełnie inaczej niż w ludzkim oku, w którym znajduje się około 126 milionów receptorów i wiele



nerwów składających się w gruby „kabel” nerwu wzrokowego. Jednak aby otrzymać precyzyjny obraz w układzie jednoreceptorowym, potrzebny jest solidny system przetwarzania, którego u małego skorupiak nie ma.

Proces ewolucji weryfikuje różnego rodzaju rozwiązania. Niektóre z nich znikły wraz z ginącymi gatunkami, o wielu nigdy się nie dowiemy. Czasem można jednak podejrzewać, jakie „pomysły” generuje natura. Wciąż trwają, choć nie rozwinęły się masowo i nie utrwały u wyższych organizmów. Co najważniejsze, widzenie *Copilia quadrata* oparte na skanowaniu z jej prostym układem nerwowym może nie dawać dobrej jakości obrazu, jednak wychwytuje ruch. Jest wystarczające dla tych niewielkich skorupiaków, by uniknąć tego, co się rusza. Jest kluczowe do przeżycia, podobnie jak dla miliardów podobnych stworzeń nieustannie narażonych na pożarcie przez drapieżniki.

I dobrze, że system jest na tyle mocny, by przetrwać, a na tyle wadliwy, by zostać pożartym. Bo małe skorupaki i ich larwy stanowią krytyczny element w sieci pokarmowej wód. Olbrzymia obfitość tych stworzeń, związana z ich mizerną szansą na przeżycie, umożliwia rozkwit życia w innych, bardziej złożonych formach: stawonogów, gąbek, jamochłonów, mięczaków i ryb. A na końcu, pośrednio, ssaków. Także takich jak ja.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

„The curious eye of *Copilia*”
Gregory R.L., Ross H.E. i Moray N.
Nature 201 (1964)



Zadania

Przygotował Arkadiusz HESS

F 1135. Częstka jest wyrzucona pionowo w górę z powierzchni Ziemi z prędkością wystarczającą, aby osiągnąć nieskończoną wysokość (zaniedbując opór powietrza). Udowodnij, że czas potrzebny do osiągnięcia wysokości h dany jest wzorem:

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2R}{g}} \left[\left(1 + \frac{h}{R} \right)^{3/2} - 1 \right],$$

R to promień Ziemi, a g przyspieszenie grawitacyjne na jej powierzchni.

[Źródło: *Newtonian Dynamics*, Richard Fitzpatrick.]

F 1136. Hydroniusz Kranowski postanowił wykonać w ogrodzie ciekawe doświadczenie. Zamierzał zmierzyć przepływ wody z kranu ogrodowego z wykorzystaniem jedynie linijki. Ustalił, że średnica przy miejscu wypływu ma $d_1 = 10$ mm, a w odległości $\Delta L = 0,5$ m od tego miejsca średnica strumienia wynosi $d_2 = 6$ mm. Pomóż Hydroniuszowi obliczyć natężenie przepływu wody Q w jednostkach m^3/s .

[Zadanie oraz grafika zaczerpnięte z książki: *100 prostych doświadczeń z wodą i powietrzem* Ryszarda Błażejewskiego.]

Przygotował Dominik BUREK

M 1840. Wielomian $x^3 + px^2 + qx + r$ ma trzy pierwiastki w przedziale $(0, 2)$. Udowodnić, że

$$-2 < p + q + r < 0.$$

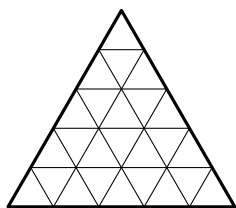
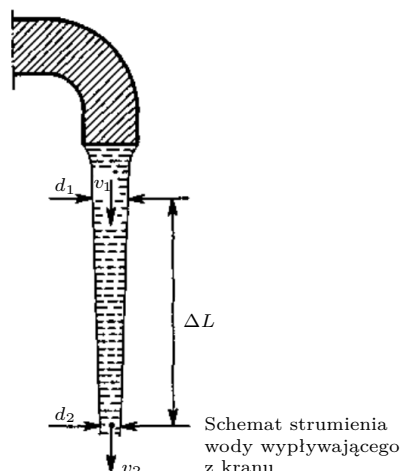
M 1841. Dana jest liczba całkowita dodatnia n taka, że

$$\text{nwd}(n, n+1) < \text{nwd}(n, n+2) < \dots < \text{nwd}(n, n+35).$$

Udowodnić, że

$$\text{nwd}(n, n+35) < \text{nwd}(n, n+36).$$

M 1842. Tabliczka czekolady w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości p składa się z p^2 kostek, czyli kawałków w kształcie trójkąta równobocznego o bokach długości 1, równoległych do boków tabliczki czekolady. Dwóch graczy na zmianę może odłamać kawałek w kształcie trójkąta (łamiąc wzdłuż jednej z linii podziału czekolady na kostki). Gracz, który nie ma ruchu lub zostawi przeciwnikowi dokładnie jedną kostkę, przegrywa. Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą. Który z graczy ma zwycięską strategię?



Rozwiązania na str. 24

Teorie rozstrzygalne

Łukasz KAMIŃSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Od wieków ludzie marzą o narzędziu, które byłoby w stanie odpowiedzieć na każde pytanie. Nie bez powodu wymyślone zostały wyrocznie, magiczne kule. . . czy też sztuczna inteligencja. Intuicja podpowiada jednak, że nawet jeśli którekolwiek z powyższych odpowie na nasze pytanie, to do odpowiedzi powinniśmy podejść z ograniczonym zaufaniem. Czy da się zatem stworzyć narzędzie, które nigdy się nie myli?

Ograniczmy się do pytań matematycznych. Naszym celem jest więc maszyna, która po otrzymaniu matematycznego stwierdzenia odpowiada, czy jest ono prawdziwe, czy też nie. Jeśli założymy, że pytania będą dotyczyły ustalonej struktury matematycznej, zaś stwierdzenia, o których prawdziwość pytamy, będą wyrażone w pewnym formalnym języku, to czy możemy mieć nadzieję na sukces?

Logika pierwszego rzędu

Stwierdzenia (zdania) będziemy formułować w tzw. *logice pierwszego rzędu*. W uproszczeniu oznacza to, że możemy używać zmiennych (np. $x, y, \dots$), kwantyfikatorów $\forall, \exists$, standardowych spójników logicznych $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$, nawiasów oraz symboli funkcyjnych i relacyjnych z pewnego ustalonego wcześniej zbioru, zwanego *sygnaturą*. Na przykład sygnaturą może być $\{=, +, \cdot\}$, zaś zdaniem logiki pierwszego rzędu nad tą sygnaturą $\forall x \exists y (y + y = x)$ lub też $\forall x \forall y \forall z (x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow x + y = x + z)$. Z drugiej strony, zdanie $\forall x \in \mathbb{R} \exists y (x \cdot x) \cdot x = y$ nie jest poprawne, i to z kilku powodów: w rozważanej w tym przykładzie sygnaturze nie ma symbolu relacyjnego $\in \mathbb{R}$ czy też $\in$, a ponadto w logice pierwszego rzędu przy kwantyfikatorach nie może stać nic więcej oprócz samych tylko zmiennych. Zajmijmy się więc zdaniami, które są poprawne. Czy zatem $\forall x \exists y (y + y = x)$ jest zdaniem prawdziwym? To zależy od kontekstu! Przykładowo w zbiorze liczb naturalnych, gdzie $+$ oraz $\cdot$ interpretujemy standardowo jako dodawanie i mnożenie, zdanie $\forall x \exists y (y + y = x)$ nie jest prawdziwe. Jeśli jednak zapytamy o jego prawdziwość w zbiorze liczb rzeczywistych (gdzie $+$ oraz $\cdot$ znów interpretujemy standardowo), to poprawna odpowiedź brzmi: prawda. Nasze pytania powinny więc dotyczyć ustalonej *struktury*, czyli zbioru wraz z interpretacjami symboli z sygnatury. *Teorią* struktury nazywamy zbiór wszystkich zdań prawdziwych w tej strukturze. Przykładowo, przez $\langle \mathbb{N}; +, \cdot, = \rangle$ oznaczamy strukturę liczb naturalnych ze standardowo zdefiniowanymi działaniami $+$ oraz $\cdot$, zaś przez $Th\langle \mathbb{N}; +, \cdot, = \rangle$ oznaczamy jej teorię. Mówimy, że teoria jest *rozstrzygalna*, jeśli istnieje algorytm, który mając dane na wejściu zdanie logiki pierwszego rzędu, jest w stanie poprawnie odpowiedzieć, czy należy ono do tej teorii.

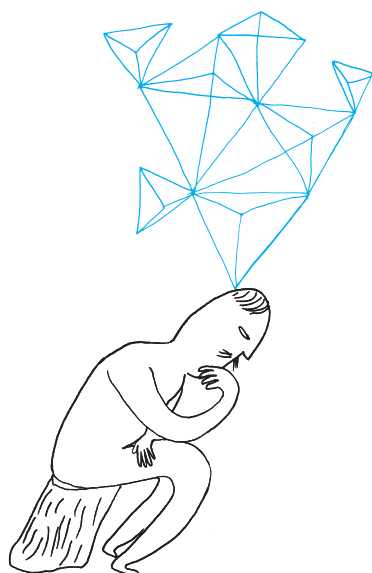
(Nie)rozstrzygalność w liczbach naturalnych

Pochylmy się nad teorią $Th\langle \mathbb{N}; +, \cdot, = \rangle$. Zauważmy, że za pomocą mnożenia można zdefiniować m.in. relację podzielności. Ścisłej rzecz biorąc, można wprowadzić relację $a|b$, która jest tak naprawdę skrótem zdania $\exists c (a \cdot c = b)$. Mając do dyspozycji relację podzielności, można też napisać formułę $P(p)$ orzekającą, iż p jest liczbą pierwszą: $\forall a \forall b (a \cdot b = p \Rightarrow (a = p \vee b = p) \wedge \neg(a = b))$. Podobnie dzięki dodawaniu możemy porównywać liczby, bo $a \leq b$ jest tak naprawdę skrótem zdania $\exists c (a + c = b)$. To pozwala już wyrażać naprawdę wiele twierdzeń. Gdyby ktoś skonstruował maszynę potrafiącą rozstrzygać, czy dane zdanie należy do tej teorii, byłby to prawdziwy przełom!

Jednak, jak można się było spodziewać, nie jest tak dobrze! Teoria $Th\langle \mathbb{N}; +, \cdot, = \rangle$ rozstrzygalna nie jest, co wnioskujemy z jednego ze słynnych twierdzeń Gödla. Czy w takim razie cała nadzieja przepadła? Może po prostu chcieliśmy zbyt wiele? Co by na przykład było, gdyby powstrzymać się od używania mnożenia? Badania nad teorią $Th\langle \mathbb{N}; +, = \rangle$ prowadził już w 1929 roku Mojżesz Presburger (od jego nazwiska jest ona nazywana arytmetyką Presburgera). Z jego pracy

O teoriach rozstrzygalnych można przeczytać również w nieco starszych wydaniach *Delt*y, np. Δ_{74}^7 .

Można by chociażby zapytać o prawdziwość zdania:
 $\forall_N \exists_p \exists_q (p \geq N \wedge q = p + 2 \wedge P(p) \wedge P(q))$.



można wywnioskować, że teoria ta jest rozstrzygalna! Załóżmy jednak, że jesteśmy zachłanni i chcemy móc używać jeszcze jakiejś relacji, zachowując przy tym rozstrzygalność. Wiemy już, że rozszerzenie arytmetyki Presburgera o mnożenie to zbyt dużo. Jednak może jeśli ograniczymy się do dorzucenia relacji podzielności $|$, to zachowamy rozstrzygalność? Niestety nie. Widzieliśmy już, że mając dodawanie, możemy zdefiniować relację porządku $\leq$. Podobnie $+$ oraz $|$ pozwalają już zdefiniować mnożenie. Formalnie chcemy umieć zastąpić każde wystąpienie $c = a \cdot b$ równoważnym zdaniem nieużywającym symbolu mnożenia „ $\cdot$ ”. Zauważmy, że gdybyśmy mogli podnosić do kwadratu, to byłoby łatwo. Istotnie, zdanie $c = a \cdot b$ jest równoważne zdaniu $c + c + a^2 + b^2 = (a + b)^2$. Ale jak zdefiniować na przykład a^2 ? Niech x będzie najmniejszą liczbą większą od 1, spełniającą $(a - 1)|(x - 1) \wedge (a + 1)|(x - 1)$. Wówczas jeśli $2|a$, to $x = a^2$, zaś jeśli $2 \nmid a$, to $x + x = a^2$ (polecamy zastanowić się nad precyzyjnym uzasadnieniem tego rozumowania). To już wystarczy do stworzenia definicji. Wniosek jest taki, że $Th(\mathbb{N}; +, |, =)$ nie jest rozstrzygalna, bo nad sygnaturą $\{+, |, =\}$ jesteśmy w stanie wyrazić to samo co nad sygnaturą $\{+, \cdot, =\}$.

Jak widać, nie jest łatwo rozszerzyć arytmetykę Presburgera, zachowując przy tym rozstrzygalność. Istnieją jednak nietrywialne przykłady, jak to zrobić. Jednym z nich jest arytmetyka Semënova, czyli arytmetyka Presburgera z dodatkiem funkcji $\text{pow}_2(n) = 2^n$. Zachęcam Czytelnika do pomyślenia nad ciekawymi przykładami zdań w logice pierwszego rzędu nad sygnaturą tej teorii.

Mnożenie nie takie straszne

Powróćmy do struktury $(\mathbb{N}; +, \cdot, =)$. Czy mnożenie samo w sobie jest odpowiedzialne za nierozstrzygalność jej teorii? Wcale nie! Okazuje się, że teoria $Th(\mathbb{N}; \cdot, =)$ jest rozstrzygalna, co zostało ogłoszone w pracy Thoralfa Skolema, a później w pełni udowodnione przez Andrzeja Mostowskiego. Na część tego pierwszego teorii tę nazywamy arytmetyką Skolema. Podobnie jak wcześniej, zastanówmy się, co można dodać do arytmetyki Skolema, zachowując rozstrzygalność. Oczywiście dodawanie odpada, ale może na przykład relacja porządku $\leq$? Po pierwsze, za pomocą $\leq$ można zdefiniować funkcję następnik $\text{succ}(n) = n + 1$ (Czytelniku, sprawdź sam!). Następnie można zdefiniować dodawanie za pomocą tzw. tożsamości Tarskiego:

$$a + b = c \vee c = 0 \iff \text{succ}(ac) \cdot \text{succ}(bc) = \text{succ}(c^2 \text{succ}(ab)).$$

Wynika stąd, że $Th(\mathbb{N}, \cdot, \leq)$ rozstrzygalna nie jest (bo w przeciwnym wypadku $Th(\mathbb{N}; +, \cdot, =)$ byłaby rozstrzygalna). Istnieją jednak relacje, które można dorzucić, nie tracąc rozstrzygalności. Przykładem jest relacja $a \sim b$, która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b mają dokładnie tyle samo dzielników pierwszych, nie wliczając krotności (np. $20 \sim 6$). Fakt ten został udowodniony w 1959 roku przez Salomona Fefermana i Roberta Vaughta.

Nie tylko liczby naturalne

Jak dotąd przyglądaliśmy się wyłącznie strukturze liczb naturalnych. Rozważmy więc teraz liczby rzeczywiste. W tym miejscu Czytelnik może poczuć się zaskoczony. Alfred Tarski udowodnił, iż struktura $(\mathbb{R}; +, \cdot, =)$ ma rozstrzygalną teorię! Ma to kilka ciekawych następstw. Przykładowo, twierdzenie to implikuje istnienie algorytmu, który rozstrzyga, czy dane równanie wielomianowe (np. $x^4 - 3x + 4 = 0$) ma rozwiązanie rzeczywiste. Innym zastosowaniem mogą być zadania z geometrii analitycznej, które to da się zakodować jako zdania nad sygnaturą $\{+, \cdot, =\}$. Z twierdzeniem Tarskiego jest też związany intrygujący problem otwarty. Nie wiadomo, czy teoria struktury $(\mathbb{R}; +, \cdot, \exp, =)$ (gdzie $\exp(x)$ oznacza funkcję e^x) jest rozstrzygalna, czy też nie. Można za to udowodnić, że teoria struktury $(\mathbb{R}; +, \cdot, \sin, =)$ jest nierozstrzygalna.

Na zakończenie dopowiedzmy jeszcze, że teoria $Th(\mathbb{Q}; +, \cdot, =)$ jest nierozstrzygalna (co zostało udowodnione przez Julię Robinson), a teoria $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, =)$ jest rozstrzygalna (co pozostawiamy jako ćwiczenie). Czytelnikowi pragnącemu dowiedzieć się więcej na opisany tu temat polecamy m.in. artykuł *A Survey of Arithmetical Definability* autorstwa Alexisa Bèsa.

Więcej o zastosowaniach tego twierdzenia pisze Lorenzo Clemente w Δ_{23} .

Podpowiedź: rozstrzygalność $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, =)$ udowadniamy, korzystając z rozstrzygalności $Th(\mathbb{R}; +, \cdot, =)$.



Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

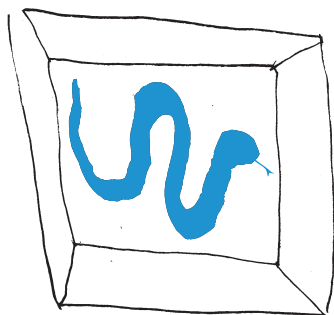
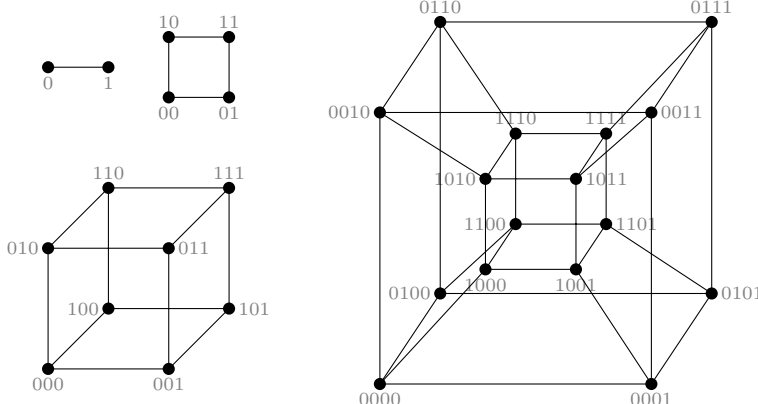
Jakie zwierzątko jest schowane w pudełku? Fizyk zakrzyknąłby: Oczywiście, że kot! Natomiast matematyk wie, że może chodzić o pewnego jadowitego gada, któremu poświęcony jest niniejszy odcinek naszego Kąta.

Zacznijmy od teoriografowego uogólnienia pojęcia *pudełka*. Kostką n -wymiarową nazywamy graf mający 2^n wierzchołków, każdy z nich etykietujemy jednoznacznie ciągiem binarnym długości n i przyjmujemy, że dwa wierzchołki są połączone krawędzią, gdy ich ciągi binarne różnią się na dokładnie jednej pozycji – takie dwa wierzchołki nazywamy *sąsiednimi*.

Poniżej pokażemy przykładowe reprezentacje graficzne kostek wymiaru nie większego niż 4.

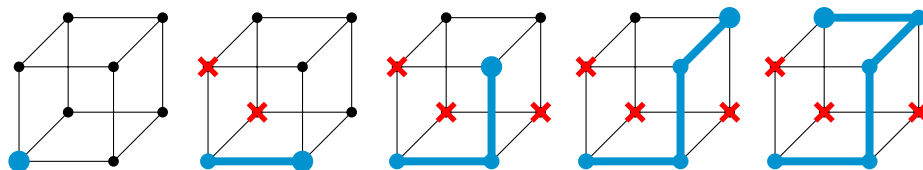
Informatyk mógłby stwierdzić, że chodzi o ciągi binarne, których odległość Hamminga jest równa 1.

Gdybyśmy dodali dwa warunki geometryczne: 1) każda krawędź ma taką samą, ustaloną, długość i 2) każde dwie sąsiednie krawędzie są wzajemnie prostopadłe, to zaprezentowane kostki moglibyśmy nazwać n -wymiarowymi hipersześcianami, a załączony rysunek prezentowałby przykładowe rzuty na płaszczyznę kilku najprostszych hipersześcianów. Są nimi, odpowiednio, odcinek, kwadrat, sześcian i tesseract.



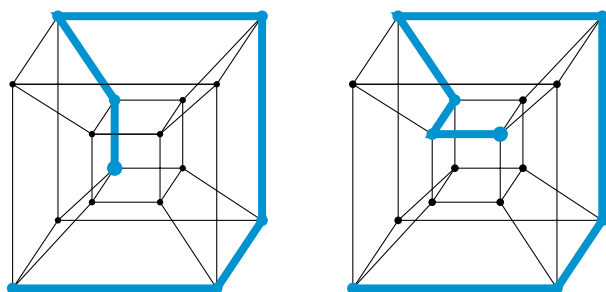
Skonstruujemy ścieżkę w następujący sposób. W rozważanej kostce zaczynamy w dowolnie wybranym wierzchołku i w każdym kroku przechodzimy z ostatnio odwiedzonego wierzchołka do wierzchołka z nim sąsiadującego tak długo, jak jest to możliwe zgodnie z zasadą: po dotarciu do nowego wierzchołka jego poprzednik wraz ze wszystkimi swoimi sąsiadami jest już niedostępny.

Zademonstrujemy to na przykładzie kostki trójwymiarowej (pudełka):



Otrzymaną w ten sposób ścieżkę nazywamy *wężem*.

Długością węża nazywamy liczbę krawędzi, przez które przechodzi. Zauważmy, że każdy węź w trójwymiarowej kostce ma długość równą 4, natomiast w czterowymiarowej można skonstruować węże różnych długości!



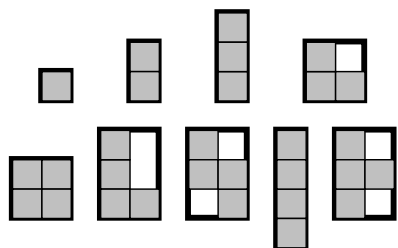
Co ciekawe, dla każdego $n \geq 2$ można łatwo skonstruować relatywnie krótkiego węża – mającego długość $2n - 2$ (czy wiesz jak?). Trochę trudniej jest uzasadnić, że krótsze węże nie występują w przyrodzie. Natomiast określenie rozmiaru najdłuższego węża jest nie lada wyzwaniem! Obecnie znamy go tylko dla wymiarów $n \leq 8$:

1, 2, 4, 7, 13, 26, 50, 98

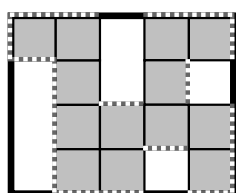
(OEIS: A099155). Jak długi może być węź w 9-wymiarowym pudełku? Jeżeli uda Ci się, Czytelniku, znaleźć odpowiedź na to pytanie, to daj mi znać!

Już wiemy, że w pudełku matematyka można znaleźć to samo, co w kieszeni skąpca. Wracając jednak do kotów – zauważmy, że one też bywają umieszczane w różnych miejscach. Koty w pudełkach są uwielbiane przez fizyków, koty w workach przez hazardzystów, a koty w internecie przez nas wszystkich!

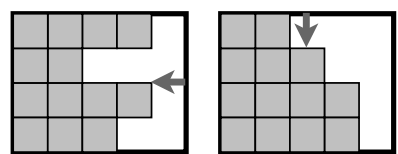
*Wydział Matematyki i Informatyki UJ



Małe układy kwadratowych kafelków (poliomina) i ich prostokąty ograniczające



Prostokąt ograniczający poliomino, na którego obwodzie zaznaczono krawędzie przypisane do obwodu prostokąta



Otrzymany efekt – spójność kolumn i wierszy – jest nazywany *wypukłością poliomina*

Poukładamy jednostkowe kwadraty na płaszczyźnie. Jeden kwadrat oczywiście nie pozwala na żadną mnogość konfiguracji, a jego obwód wynosi 4 jednostki. Dwa też nie dają dużej swobody, jeśli chcemy, aby przylegały do siebie bokami. Przy takim założeniu można ułożyć tylko kostkę domina, o obwodzie 6. Począwszy od trzech kwadratów, pojawia się jakaś dowolność. Możliwości są jednak tylko dwie i obie dają taki sam obwód powstałego wielokąta. Cztery kwadraty można zestawić na aż 5 sposobów, w tym jeden o obwodzie 8 – takim samym, jak osiągany przez 3 kafelki. Jednak obwód obszaru pięciopoleowego już nie może wynosić zaledwie 8 jednostek. Czytelnik może spróbować wyznaczyć kilka kolejnych wartości minimalnego obwodu figury ułożonej z n kwadratów (czyli tytułowego *poliomina*).

W tym artykule przedstawimy pełny dowód jawnego wzoru na minimalny obwód. Wydaje się on całkiem ciekawy, ze względu na różnorodność kolejnych etapów, choć wszystkie są elementarne.

Możemy od razu przyjąć, że konfiguracje kafelków nie składają się z oddzielonych części; zsuwając ewentualne „wyspy”, możemy zmniejszyć łączny obwód, ponieważ miejsce styku przestanie się doliczać do obwodu. Zauważmy teraz, że na każdym układzie kwadratów można opisać dokładnie jeden minimalny prostokąt. Dowolny wiersz i dowolna kolumna tego prostokąta są przecinane przez co najmniej dwie krawędzie zewnętrzne ułożonej figury – tę przed pierwszym i tę za ostatnim polem leżącym w rozważanym wierszu. Możemy przypisać te krawędzie jednoznacznie do jednostkowych krawędzi tworzących obwód prostokąta – tych, które wyznaczają krawędzie rozważanego wiersza/kolumny. W ten sposób wykazaliśmy, że obwód prostokąta ograniczającego jest nie większy niż obwód układu kwadratowych kafelków.

Zauważmy teraz, że kafelki z danego wiersza możemy zsunąć na jedną (np. lewą) stronę, tak aby tworzyły jeden prostokąt (wysokości 1). Postępując tak z każdym wierszem, zapewnimy, że żaden z nich nie zawiera więcej niż dwóch krawędzi. Potem podobnego zsunęcia możemy dokonać w każdej z kolumn. Czy to nie „popsuje” nam żadnego wiersza? Nie, ponieważ po zsunięciu wierszy liczba kafelków w kolejnych kolumnach może się tylko zmniejszać – zatem po zsunięciu kolumn otrzymamy nierosnące „wieże”. Należy zauważyć, że podczas tego całego zsuwania prostokąt ograniczający mógł się pomniejszyć, ale to nie przeszkadza – wszak szukamy minimalnego obwodu. Zatem zachowując (lub wręcz zmniejszając) prostokąt ograniczający, byliśmy w stanie ułożyć wszystkie pola tak, że każdy wiersz i kolumna zawierają dokładnie dwie krawędzie, czyli obwód figury jest teraz równy obwodowi prostokąta ograniczającego!

Pytanie zatem sprowadza się do tego, jaki najmniejszy obwód może mieć prostokąt o polu co najmniej n ?

Aby to rozstrzygnąć, pokażemy najpierw, że możemy ograniczyć uwagę do pewnego szczególnego typu prostokątów.

Rozważmy dwa prostokąty, $a \times b$ i $c \times d$, o jednakowym obwodzie. Zachodzi wtedy $(a+b)^2 = (c+d)^2$, czyli $2(cd - ab) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$. Mając tę zależność, otrzymujemy kolejną:

$$\underbrace{(a-b)^2 - (c-d)^2}_{\text{różnice długości boków}} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd = 4 \underbrace{(cd - ab)}_{\text{pola}},$$

która oznacza, że prostokąt o mniejszej różnicy długości boków ma większe pole! Gdybyśmy mieli ustalony, całkowity obwód $2k$, to byłoby wiadomo, że aby zmaksymalizować pole prostokąta o takim obwodzie,

należy znaleźć dwie liczby całkowite a, b spełniające $a + b = k$ oraz minimalizujące różnicę $|a - b|$.

Nie trzeba chyba tłumaczyć obserwacji, że obwód prostokąta o całkowitych długościach boków jest liczbą parzystą.

Dla parzystego k odpowiedź to oczywiście $a = b = k/2$ (nie sposób o mniejszą różnicę), a przypadek nieparzysty wymaga: $a = \frac{k-1}{2} = \lfloor k/2 \rfloor$, $b = \frac{k+1}{2} = \lceil k/2 \rceil$ (równość jest niemożliwa, wobec nieparzystości, więc różnica $b - a = 1$ jest optymalna). Tak określone prostokąty będziemy nazywać *wypchanymi*.

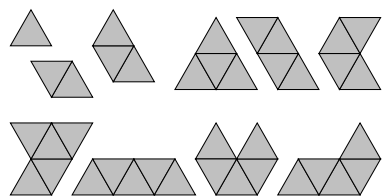
$\lfloor x \rfloor$ (podłoga z x) to największa liczba całkowita nie większa od x , natomiast $\lceil x \rceil$ (sufit z x) to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od x . Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

Zauważmy, że jeśli n komórek można umieścić w prostokącie ograniczającym o obwodzie $2k$, to można je umieścić w wypchanym prostokącie o takim samym obwodzie. Teraz musimy tylko wyznaczyć najmniejsze k ,

dla którego wypchany prostokąt o obwodzie $2k$ ma pole co najmniej n .

Prostokąt ograniczający figury realizującej minimalny obwód dla danego pola nie musi być wypchany. Ważne, że istnieje wśród nich (figur minimalizujących...) choć jedna o tej własności.

Niech k będzie największą liczbą całkowitą spełniającą $k^2 < n$. Wtedy albo n kafelków mieści się w prostokącie $k \times (k+1)$, albo dopiero w kwadracie $(k+1) \times (k+1)$. Pierwszy przypadek oznacza, że $k^2 < n \leq k^2 + k$, co po pomnożeniu przez 4 daje $4k^2 < 4n \leq 4k^2 + 4k$. Jeśli z prawej strony dodamy 1, to nierówność będzie zachowana, a zyskamy możliwość zwinięcia do kwadratu: $(2k)^2 < 4n \leq (2k+1)^2$, czyli $2k < \sqrt{4n} \leq 2k+1$. To oznacza ni mniej, ni więcej, tylko $\lceil 2\sqrt{n} \rceil = 2k+1$. Drugi przypadek jest analogiczny. Wiedząc, że $k^2 + k < n \leq (k+1)^2$, ponownie mnożymy przez 4 i otrzymujemy, że $(2k+1)^2 < 4n \leq (2k+2)^2$. Dodając 1 do $4k^2 + 4k$, pozornie straciliśmy siłą nierówność, ale zauważmy, że $(2k+1)^2$ jest liczbą nieparzystą, czyli równość jednak nie może wystąpić. Po spierwiastkowaniu otrzymujemy $\lceil 2\sqrt{n} \rceil = 2k+2$. W obu przypadkach sufit z podwojonego pierwiastka



Kształty ułożone z 1–5 trójkątów równobocznych. Nazywa się je „poliamondami”, ponieważ po angielsku dwa trójkąty tworzą „di-amond” (karo, $\diamond$). Jako że „diament” nie jest w Polsce zwyczajową nazwą rombu, moglibyśmy nazywać konfiguracje trójkątów „poliapezami”, skoro trzy tworzą „tr(i)-apez”...

Tym razem jakakolwiek różnorodność pojawia się dopiero przy czterech polach, choć wszystkie trzy przypadki mają ten sam obwód (6). Dla pięciu kafelków również każda konfiguracja daje taki sam obwód (7). Do tego momentu otrzymujemy bardzo przyjemny postęp arytmetyczny, ale sześć trójkątów równobocznych pozwala nam zbudować sześciokąt foremny, którego obwód wynosi 6. Okazuje się, że funkcja minimalnego obwodu dla kafelków trójkątnych nie jest nawet monotoniczna!

Można by się spodziewać, że dla dużych n obwód „okrągłej masy” trójkątów zacznie zachowywać się „normalnie”, ale w pewnym sensie „skacze” jeszcze bardziej:

$$3, 4, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 9, 8, 9, 10, 9, 10, 11, 10, 11, 12, 11, 12, 13, 12, 13, 14, \dots$$

Dopełnieniem tego obrazu grozy jest jawny wzór:

$$2 \left\lceil \frac{n + \sqrt{6n}}{2} \right\rceil - n.$$

Jego elementarne wyprowadzenie przedstawimy w części drugiej.

Bryły rozpięte na krzywych

Jarosław GÓRNICKI*

* Kontakt: gornicki59@gmail.com

Znany już w starożytności problem izoperymetryczny:

Który z trójkątów o ustalonym obwodzie ma największe pole?

rozwiążemy elementarnie, korzystając z nierówności między średnimi.

Przypomnijmy, że średnia geometryczna dodatnich liczb jest nie większa niż ich średnia arytmetyczna. Dla trzech dodatnich liczb x, y, z stwierdzenie to przybiera postać:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z),$$

wiec jeśli $x + y + z = d$, to iloczyn xyz ma wartość największą, gdy $x = y = z = \frac{1}{3}d$, bo wtedy $xyz = (\frac{1}{3}d)^3 = [\frac{1}{3}(x + y + z)]^3$.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c można łatwo obliczyć, korzystając ze znanego już od I wieku wzoru *Herona*:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

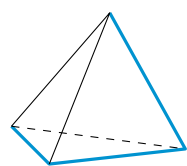
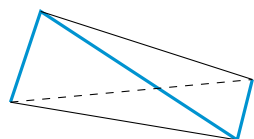
dlatego przy ustalonym obwodzie $a + b + c$ wartość S jest największa, gdy $p - a = p - b = p - c$, czyli gdy $a = b = c$.

Wykazaliśmy więc twierdzenie:

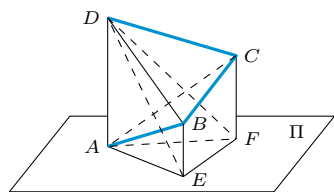
Czytelników, którzy nie znają dowodu tego faktu, zachęcamy do wykazania go, szczególnie w używanym w tym artykule przypadku trzech liczb.

Rozwiązanie problemu izoperymetrycznego podane jest w książce: J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, WN PWN, Warszawa 2009, w artykułach *Nierówności, wypukłość i ekstrema* oraz *Własności ekstremalne figur izoperymetrycznych*.

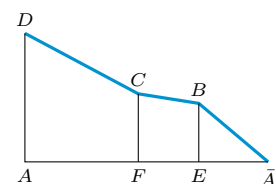
Krzywą nazywamy *prostowalną*, gdy istnieje możliwość określenia jej długości jako granicy ciągu długości łamanych coraz lepiej ją przybliżających.



Rys. 1

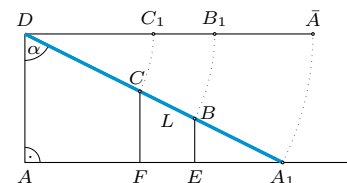


Rys. 2



Rys. 3. Sytuacja przed optymalizacją

Wielościan to bryła ograniczona płaszczyznami. Wielościan jest *wypukły*, gdy leży po jednej stronie każdej ze swoich ścian.



Rys. 4. Sytuacja po optymalizacji

Twierdzenie 1. *Trójkąt o danym obwodzie ma największe pole, gdy jest równoboczny.*

Prawdziwy jest fakt ogólniejszy (znany już w starożytnej Grecji):

Twierdzenie 2 (Zenodor, III/II w. p.n.e.). *Wielokąt o ustalonym obwodzie ma największe pole, gdy jest foremny.*

Problematyka „ekstremalna” w przestrzeni trójwymiarowej (czyli w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$) jest odrobinę bardziej kłopotliwa. Naszym celem będzie rozwiązanie elementarnymi środkami następującego problemu:

Problem. *Jaki kształt krzywej (prostowalnej) o długości L zapewnia, że najmniejszy zbiór wypukły zawierający tę krzywą ma największą objętość.*

Problematyka ta pojawiła się w XX wieku m.in. w pracach J. Egerváry’ego, M. Krejna, Z. Melzaka, A. Nudelmana, I. Schoenberga.

Czworościan ekstremalny. Zaczniemy od prostej sytuacji. Łamaną o czterech wierzchołkach, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy *szkieletem czworościanu* (rys. 1). Nasz problem w tym przypadku ma postać: *jaki szkielet $ABCD$ o danej długości $AB + BC + CD = L$ rozpina czworościan $ABCD$ o największej objętości?*

Rozwiążemy ten problem, sprowadzając go do omówionego już problemu izoperymetrycznego na płaszczyźnie. Przyjmijmy, że w czworościanie $ABCD$ długość boku AD jest równa h (oczywiście $h < L$). Niech Π będzie płaszczyzną prostopadłą do boku AD zaczepioną w punkcie A . Wtedy rzut prostopadły czworościanu $ABCD$ na płaszczyznę Π jest trójkątem AEF (rys. 2).

Lemat 1. *Objętość V czworościanu $ABCD$ dana jest wzorem*

$$(1) \quad V = \frac{1}{3}hS,$$

gdzie h jest długością boku AD , a S jest polem trójkąta AEF .

Czworościany $ABCD$ i $ABFD$ mają wspólną ścianę – trójkąt ABD . Ponieważ punkty C i F są w takiej samej odległości od płaszczyzny trójkąta ABD , więc objętości tych czworościanów są równe. Podobnie czworościany $ABFD$ i $AEFD$ mają wspólną ścianę – trójkąt AFD . Punkty B i E są w takiej samej odległości od płaszczyzny trójkąta AFD , więc objętości tych czworościanów są równe. Zatem czworościany $ABCD$ i $AEFD$ mają równe objętości, a objętość czworościanu $AEFD$ wyraża się wzorem (1). $\square$

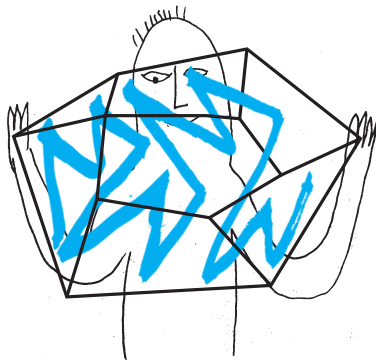
Lemat 2. *Szkielet $ABCD$ o długości L i odległości $AD = h$ ($h < L$) rozpina czworościan $ABCD$ o największej objętości, gdy boki AB , BC , CD mają równe długości i tworzą z odcinkiem AD kąty równe $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$.*

Zgodnie ze wzorem (1) objętość V czworościanu $ABCD$ będzie największa, gdy największe będzie pole S , bo h jest ustalone. Musimy więc określić długość i położenie w przestrzeni boków AB , BC i CD tak, aby pole trójkąta AEF było największe. Zgodnie z twierdzeniem 1 osiągniemy to, jeśli zmaksymalizujemy obwód trójkąta AEF , jednocześnie sprawiając, że będzie to trójkąt równoboczny.

Bryła $DABEFC$ jest wielościanem wypukłym o podstawie trójkątnej i ścianach bocznych prostopadłych do płaszczyzny Π .

Rozetnijmy ten wielościan wzdłuż pionowych krawędzi DA , BE , CF oraz pozostałych krawędzi szkieletu. Teraz połóżmy ściany $DAFC$, $CFEB$, BEA na płaszczyźnie Π na zewnątrz trójkąta AEF . Następnie przesunąć je w taki sposób, aby połączyć je pasującymi do siebie bokami (rys. 3).

Odcinek AA' ma długość równą obwodowi trójkąta AEF , utworzonego z rzutów prostopadłych odcinków DC , CB , BA na płaszczyznę Π . Rzuty te będą w sumie najdłuższe, gdy punkty D, C, B, A' (rys. 3) będą leżały na jednej prostej. Będzie ona nachylona do odcinka DA pod kątem $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$ (rys. 4). Warunki $AF = FE = EA$ zapewnimy, gdy boki DC , CB , BA szkieletu $ABCD$ będą tej samej długości. Ten opis jednoznacznie wyznacza położenie wierzchołków czworościanu: na płaszczyźnie Π stawiamy prawidłowy graniastosłup trójkątny,



którego pionowa krawędź $DA = h$ ($A \in \Pi$), a podstawa ma obwód równy $\sqrt{L^2 - h^2}$. Kolejne odcinki DC , CB , BA leżą na kolejnych ścianach bocznych graniastosłupa, tworząc za każdym razem kąt $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$ z odcinkiem DA (oczywiście ten sam efekt uzyskamy, gdy kolejne odcinki AB , BC , CD będą tworzyły za każdym razem kąt α z odcinkiem AD). Tak utworzony szkielet $ABCD$ o długości L i odległości $DA = h$ ($h < L$) rozpina czworościan $ABCD$ o największej objętości. $\square$

Objętość tak określonego czworościanu, zgodnie ze wzorem (1), jest równa $V = \frac{\sqrt{3}}{108} \cdot h(L^2 - h^2)$, gdzie $0 < h < L$. Łatwo sprawdzamy, że przyjmuje ona wartość największą dla $h = \frac{L}{\sqrt{3}}$, więc czworościan ekstremalny ma objętość równą $\frac{1}{162} \cdot L^3 \approx 0,006 \cdot L^3$. Co ciekawe, czworościan foremny o krawędzi $\frac{L}{3}$ ma objętość równą $\frac{\sqrt{2}}{324} \cdot L^3 \approx 0,0044 \cdot L^3$, czyli istotnie mniejszą niż czworościan ekstremalny.

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie o czworościanie ekstremalnym:

Twierdzenie 3. Szkielet $ABCD$ o długości L rozpina czworościan o największej objętości, gdy kolejne boki AB , BC , CD leżą na kolejnych ścianach bocznych prawidłowego graniastosłupa trójkątnego o pionowej krawędzi $AD = \frac{L}{\sqrt{3}}$ i obwodzie podstawy $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L$, a każdy z odcinków AB , BC , CD tworzy z krawędzią AD kąt $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Wielościan ekstremalny. Uogólnijmy teraz rozważania dotyczące czworościanu ekstremalnego na wielościany o większej liczbie wierzchołków. Łamaną $A_0A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$), dla której każda płaszczyzna przechodząca przez punkty A_0 i A_n ($A_0 \neq A_n$) ma nie więcej niż jeden punkt wspólny z łamaną $A_1A_2 \dots A_{n-1}$, nazywamy *szkieletem*.

Przyjmijmy, że szkielet $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ ma długość $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n = L$, a długość odcinka A_0A_n jest równa h ($h < L$). Trójkątne ściany $A_0A_1A_n$, $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, $\dots$, $A_0A_{n-1}A_n$ oraz $A_nA_{n-1}A_0$, $A_nA_1A_2$, $A_nA_2A_3$, $\dots$, $A_nA_{n-2}A_{n-1}$ wycinają w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wielościan $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ rozpięty przez szkielet $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ (rys. 5).

Niech Π będzie płaszczyzną prostopadłą do odcinka A_0A_n zaczepioną w punkcie A_0 . Wtedy rzut prostopadły wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ na płaszczyznę Π jest n -kątem $A_0A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}$ o polu S_n (rys. 5).

Ponieważ wielościan $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ jest skończoną sumą czworościanów $A_0A_1A_2A_n$, $A_0A_2A_3A_n$, $\dots$, $A_0A_{n-2}A_{n-1}A_n$, a do każdego z nich ma zastosowanie lemat 1, więc prawdziwy jest następujący rezultat:

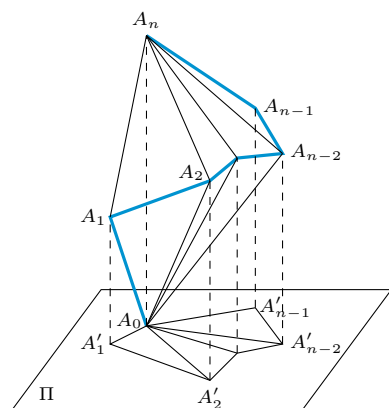
Lemat 3. Objętość W_{n+1} wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ dana jest wzorem

$$(2) \quad W_{n+1} = \frac{1}{3} h S_n,$$

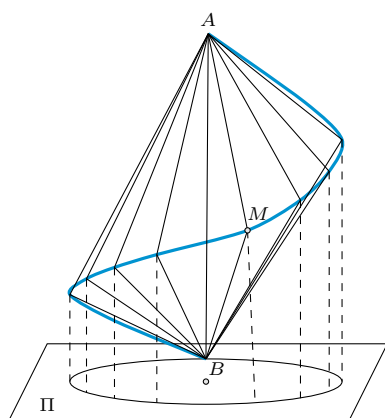
gdzie h jest długością odcinka A_0A_n , a S_n jest polem n -kąta $A_0A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}$.

Korzystając z twierdzenia 2 (Zenodora) oraz powtarzając rozumowanie uzasadniające lemat 2, uzyskujemy następującą konstrukcję maksymalizującą objętość wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ rozpiętego na szkielecie $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ o długości L i odległości $A_0A_n = h$ ($h < L$): na płaszczyźnie Π stawiamy prawidłowy graniastosłup n -kątny o pionowej krawędzi $A_0A_n = h$ ($A_0 \in \Pi$), którego podstawa ma obwód równy $\sqrt{L^2 - h^2}$. Kolejne odcinki A_0A_1 , A_1A_2 , $\dots$, $A_{n-1}A_n$ leżą na kolejnych ścianach bocznych graniastosłupa, tworząc za każdym razem z odcinkiem A_0A_n kąt $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$.

Ponieważ pole n -kąta foremnego ($n \geq 3$) o boku długości a i kącie środkowym $\gamma = \frac{2\pi}{n}$ dane jest wzorem $S_n = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, więc ze wzoru (2) objętość wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ (którego rzut prostopadły na płaszczyznę Π jest n -kątem foremnym) dana jest wzorem $W_{n+1} = \frac{1}{12} \cdot h(L^2 - h^2) \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Objętość ta jest największa, gdy $h = \frac{L}{\sqrt{3}}$, i wówczas $W_{n+1} = \frac{1}{18\sqrt{3}} L^3 \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Mamy więc twierdzenie:



Rys. 5



Rys. 6

Jeśli na prostokątnym arkuszu papieru narysujemy prostą, która nie jest prostopadła do któregośkolwiek brzegu, i nawiniemy ten arkusz na walec o podstawie kołowej, to narysowana linia prosta przybierze kształt linii śrubowej. Gdy środek podstawy walca o promieniu $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$ jest środkiem kartezjańskiego układu współrzędnych (oś walca pokrywa się z osią OZ), to linia śrubowa o skoku $\frac{L}{\sqrt{3}}$, leżąca na powierzchni bocznej walca dana jest równaniami parametrycznymi: $x(t) = \frac{L}{\pi\sqrt{6}} \cdot \cos t$, $y(t) = \frac{L}{\pi\sqrt{6}} \cdot \sin t$, $z(t) = \frac{L}{2\pi\sqrt{3}} \cdot t$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz $B = (x(0), y(0), z(0))$, $A = (x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi))$ (rys. 6).

Twierdzenie 4. Szkielet $A_0A_1 \dots A_n$ o długości L rozpina wielościan o największej objętości, gdy kolejne boki $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$ leżą na kolejnych ścinach bocznych prawidłowego graniastostupa n -kątowego o pionowej krawędzi $A_0A_n = \frac{L}{\sqrt{3}}$ i obwodzie podstawy $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L$, a każdy z odcinków $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ tworzy z krawędzią A_0A_n kąt $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Śrubostopek podwójny. Możemy teraz przejść do rozwiązania naszego oryginalnego problemu. Z geometrii różniczkowej wiemy, że krzywa przestrzenna leżąca na powierzchni walca jest linią śrubową wtedy i tylko wtedy, gdy styczna do niej w każdym jej punkcie tworzy stały kąt z kierunkiem osi walca. Zatem gdy liczba n będzie rosła nieograniczenie, to prawidłowe graniastostupy n -kątne coraz „ściślej” będą przylegać do walca o wysokości $BA = \frac{L}{\sqrt{3}}$ i promieniu podstawy $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$ (rys. 6), a łamana $BA_1A_2 \dots A_{n-1}A$ (której kolejne odcinki tworzą stały kąt $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ z odcinkiem AB równoległym do osi walca) coraz dokładniej będzie aproksymować krzywą leżącą na powierzchni bocznej walca, która jest jednym zwojem linii śrubowej (helisy) o skoku $\frac{L}{\sqrt{3}}$.

Jeśli punkt M porusza się po linii śrubowej, to odcinki BM oraz AM zakreślają powierzchnie stożkowe i powstaje bryła śrubostopek podwójny (rys. 6). Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}$, więc objętość tak powstałego śrubostopka podwójnego jest równa $\lim_{n \rightarrow \infty} W_{n+1} = \frac{1}{18\pi\sqrt{3}} L^3 \approx 0,01 \cdot L^3$.

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie postawionego problemu:

Twierdzenie 5 (J. Egerváry, 1949). Spośród wszystkich brył rozpiętych na gładkiej krzywej o długości L największą objętość ma bryła będąca otoczką wypukłą jednego zwoju linii śrubowej o skoku $\frac{L}{\sqrt{3}}$ na powierzchni walca kołowego o promieniu podstawy $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$.

„Sir Roger Penrose. Geniusz i jego droga do rzeczywistości”

Książka „Sir Roger Penrose. Geniusz i jego droga do rzeczywistości” autorstwa Patchena Barssa to opowieść o jednym z najoryginalniejszych umysłów XX wieku, matematyku, fizyku i filozofie. Autor ukazuje swojego bohatera w gronie wybitnych postaci świata nauki i sztuki, a zarazem na tle środowiska, z którego wyrastał. Rodzina Penrose’ów to ludzie utalentowani, których pasja intelektualna kształtowała atmosferę domu – choć dzieciństwo Rogera nie było wolne od trudności w przestrzeni emocjonalnej – to właśnie w tym świecie rodził się jego niezwykle sposób myślenia.

Podczas lektury tej biografii czytelnik przenosi się w fascynujący świat idei, teorii i odkryć. Książkę czyta się jednym tchem – to dynamiczny strumień faktów biograficznych, przeplatających się z refleksjami o nauce, matematyce i naturze poznania. Niekoniecznie trzeba być znawcą fizyki teoretycznej, aby czerpać przyjemność z lektury, podążając za bohaterem w jego „podróżach” po tajemniczych strukturach Wszechświata. Prawda i piękno to motywy wiodące, siła napędowa w poszukiwaniach Rogera Penrose’a – to pojęcia, które łączy w swojej naukowej i filozoficznej refleksji. Sam uczony mówi o procesie odkrywania w sposób ujmujący prostotą i szczerością:

„A gdy ulegamy fascynacji jakimś zagadnieniem, kierujemy się jego wewnętrzną estetyką. Czasami

okazuje się, że to, czym się zajmowaliśmy, można wykorzystać w jakimś innym obszarze, ale w wielu przypadkach tak nie jest. To jedna z najwspanialszych cech matematyki. [...] Często robimy coś bez żadnego powodu, tylko dlatego, że mamy na to ochotę, i właśnie dzięki temu dokonuje się postęp, który w przeciwnym razie nigdy by nie nastąpił” [s. 289].

Współpracownicy Penrose’a wspominają jego nieprawdopodobny, niemal mistyczny sposób myślenia: „Odkrycia Penrose’a wyglądają tak, jak gdyby były dziełem jakiejś nadludzkiej formy życia”. Barss nie pomija jednak bardziej ludzkich wątków – trudności w relacjach, napięcie emocjonalnych i dylematów, które towarzyszyły uczonemu w życiu osobistym. To postać z krwi i kości... W książce czytamy o jego ludzkich ograniczeniach, problemach z kobietą, którą poślubił, oraz jego „muzami” – wybrankami jego potrzeby twórczej. Dzięki temu portret Penrose’a zyskuje głębię i wiarygodność.

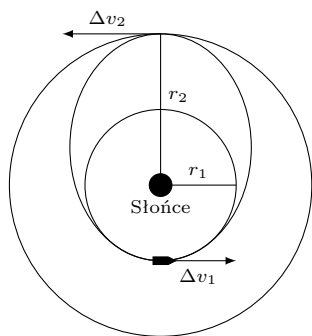
„Roger Penrose” to opowieść o człowieku, który całe życie próbował dotrzeć do skraju ludzkiego pojmowania rzeczy. Książkę polecam wytrawnym poszukiwaczom prawdy w fizyce, poszukiwaczom estetyki w matematyce, a przede wszystkim wielbicielom emocji związanych z odkrywaniem prawdy o życiu wybitnych ludzi.

Marzanna WAWRO

Manewr transferowy Hohmanna: z niskiej orbity ziemskiej na Marsa

* Wydział Chemiczny, Politechnika Śląska
w Gliwicach

O manewrze Hohmanna pisał również Grzegorz Derfel w Δ_{20}^8 . Ciekawemu Czytelnikowi polecamy zajrzeć do wspomnianego artykułu, który opisuje również manewr dwueliptyczny.



Przemysław BORYS*

O manewrze Hohmanna słyszał każdy, kto oglądał film lub czytał książkę *Marsjanin*. Tym właśnie sposobem odbywały się tamtejsze przeloty między Ziemią i Marsem. Manewr ten polega na przeniesieniu pojazdu kosmicznego z jednej orbity kołowej na inną z wykorzystaniem „transferowej” orbity eliptycznej. Takiej drogi nigdy nie pokonuje się, lecąc w linii prostej i hamując dopiero u celu – byłoby to marnotrawstwo energii. Jak się zaraz przekonamy, w manewrze Hohmanna czasami w ogóle nie ma potrzeby hamowania (w najprostszej wersji tylko się przyspiesza).

W manewrze Hohmanna wykorzystuje się dwie sekwencje włączania silników, generujące przyrosty prędkości Δv_1 w perycentrum oraz Δv_2 w apocentrum (rysunek obok). Aby określić wielkości skoków Δv_1 i Δv_2 , skorzystamy z zasady zachowania energii na orbicie:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}.$$

Równanie to szczególnie łatwo jest analizować w apocentrum i perycentrum orbity eliptycznej – punktach największego zbliżenia do ogniska i największego oddalenia (aphelium r_2 i peryhelium r_1 dla ciał krążących wokół Słońca).

Z zasady zachowania energii:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}.$$

Ponadto w tych punktach (na rysunku: punkty, w których zadaje się impulsy prędkości) prędkość jest prostopadła do promienia, dzięki czemu można łatwo obliczyć iloczyn wektorowy dla momentu pędu:

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2.$$

Z podstawienia powyższego równania do poprzedniego (w celu wyeliminowania v_1):

$$\begin{aligned} v_2^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) &= 2GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\ \Rightarrow v_2^2 \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2} &= 2GM \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla elipsy $r_1 + r_2 = 2a$ (dwukrotna wielkość półosi wielkiej), po skróceniu $(r_1 - r_2)/r_1$ mamy:

$$v_2^2 = \frac{GM r_1}{a r_2} = \frac{GM(2a - r_2)}{a r_2} = \frac{2GM}{r_2} - \frac{GM}{a}.$$

Korzystając z powyższego równania, możemy wyznaczyć wartość całkowitej energii ciała na orbicie o danej długości wielkiej półosi:

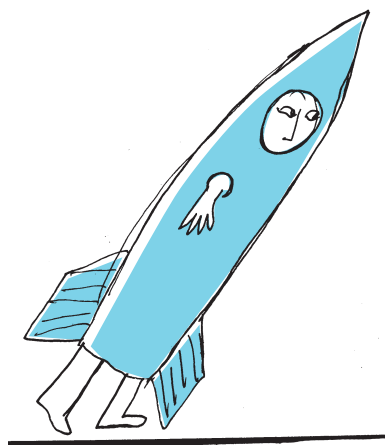
$$E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{2a} - \frac{GMm}{r_2} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Podstawiając tę wartość do zasady zachowania energii przytoczonej na początku i skracając masę, uzyskujemy tzw. *równanie vis-viva* (w języku polskim tłumaczone niekiedy jako „całka siły żywej”):

$$(*) \quad v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Za pomocą tego równania można łatwo znaleźć przyrosty prędkości potrzebne do zmiany orbity. Jeżeli początkowo jesteśmy na orbicie kołowej, to $a = r = r_1$. Potem przechodzimy na orbitę eliptyczną, gdzie $a = (r_1 + r_2)/2$. W końcu docieramy do perycentrum elipsy (ew. apocentrum, jeśli planujemy obniżyć orbitę), gdzie znowu promień równy jest półosi: $a = r = r_2$.

Transfer z orbity ziemskiej na marsjańską



Policzmy przykładowe przyrosty prędkości podczas transferu na orbitę Marsa (orbita kołowa o promieniu $r_2 = 229$ mln km) z orbity ziemskiej o promieniu $r_1 = 150$ mln km). Orbity liczone są wokół Słońca, więc $GM_\odot = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$. Z równania (*) mamy:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \cdot \frac{1}{150}} = 29,4 \text{ km/s}, \\ v_{12}(r_1) &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \left(\frac{2}{150} - \frac{2}{150 + 229} \right)} = 32,4 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v_1 = 3,0 \text{ km/s}, \\ v_{12}(r_2) &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \left(\frac{2}{229} - \frac{2}{150 + 229} \right)} = 21,2 \text{ km/s}, \\ v_2 &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \cdot \frac{1}{229}} = 23,8 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v_2 = 2,6 \text{ km/s}, \end{aligned}$$

przy czym v_{12} to prędkość na orbicie eliptycznej łączącej orbity Ziemi i Marsa.

W praktyce transfer rzadko jest wykonywany z orbity ziemskiej poza polem grawitacyjnym Ziemi i rzadko wejście na orbitę marsjańską zachodzi daleko od Marsa. Rozpoczynając misję na niskiej orbicie okołoziemskiej (Low Earth Orbit – LEO), $v_{\text{LEO}} = 7,9 \text{ km/s}$, musielibyśmy się po pierwsze wyzwoić z pola grawitacyjnego Ziemi ($M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $r_{\text{LEO}} = 6371 \text{ km}$), a po drugie nadać sondzie prędkość transferową względem Ziemi. Uwzględniając, że dysponujemy już częścią energii kinetycznej, związanej z ruchem po orbicie LEO, możemy rozpisać zachowanie energii:

$$\Delta E = \frac{m(v_{\text{LEO}} + \Delta v)^2}{2} - \frac{mv_{\text{LEO}}^2}{2} = \frac{GMm}{r_{\text{LEO}}} - \frac{mv_{\text{LEO}}^2}{2} + \frac{m(v_{12} - v_1)^2}{2},$$

$$v_{\text{LEO}} + \Delta v = 11,5 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v = 3,6 \text{ km/s}.$$

Powyższą zależność energetyczną można wyrazić w bardziej typowy sposób, mianowicie: aby uzyskać prędkość v_∞ po uwolnieniu się z pola grawitacyjnego planety, przy założeniu prędkości ucieczki $v_{\text{II}} = \sqrt{2GM/R}$, trzeba nadać pojazdowi kosmicznemu prędkość:

$$(**) \quad v = \sqrt{v_{\text{II}}^2 + v_\infty^2}.$$

Prędkości mierzymy tu względem planety – energia najpierw jest wykorzystywana na pokonanie pola grawitacyjnego (w wielkości v_{II}^2), a pozostała część pozostaje zachowana w postaci energii kinetycznej. Jest to ten sam wzór, który mamy wyżej dla ΔE . Zaniedbujemy tutaj efekty oddziaływania ze Słońcem i w tym przybliżeniu zajmujemy się orbitą hiperboliczną (w odległościach pojedynczych milionów kilometrów od planety możemy zaniedbać zakrzywienie trajektorii związane z oddziaływaniem ze Słońcem, co upraszcza analizę!).

Załóżmy teraz, że docieramy w okolice Marsa i zastanawiamy się, jak skorygować prędkość, aby zostać przez niego przechwyconym i wejść na jego orbitę. Skorzystamy z równania (**) łączącego prędkość orbitalną z prędkością ucieczki i prędkością v_∞ , tym razem dla danej prędkości zbliżenia do planety, $v_\infty = v_2 - v_{12}(r_2) = 2,7 \text{ km/s}$. Prędkość ucieczki z Marsa, którego masa wynosi $M_\sigma = 6,39 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, a promień $r_\sigma = 3390 \text{ km}$, to:

$$v_{\text{II},\sigma} = \sqrt{\frac{2GM_\sigma}{r_\sigma}} = 5,0 \text{ km/s}.$$

W efekcie, po przechwyceniu przez grawitację planety, przy założeniu maksymalnego zbliżenia aż do odległości r_σ , prędkość na orbicie hiperbolicznej (w przybliżeniu zaniedbującym oddziaływanie ze Słońcem) wyniesie:

$$v = \sqrt{5,0^2 + 2,7^2} = 5,7 \text{ km/s}.$$

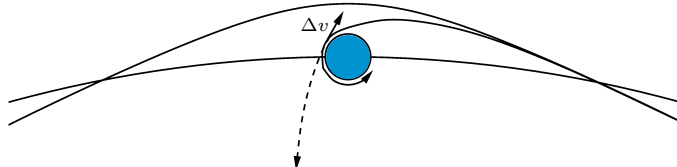
Jako pożyteczne ćwiczenie dla Czytelników proponujemy obliczenie przyrostu Δv_2 z wykorzystaniem orbit hiperbolicznych, omówionych w Δ_{25}^{10} . Wystarczy wyznaczyć parametr zderzenia dla minimalnego zbliżenia do samej powierzchni planety, a następnie wyznaczyć prędkość mijania planety z zachowania momentu pędu.

Odejmując od tego wyniku prędkość orbitalną Marsa (3,6 km/s), uzyskujemy wartość drugiego skoku prędkości:

$$\Delta v_2 = v - v_{I,\odot} = 2,1 \text{ km/s.}$$

W konsekwencji całkowity „budżet delta-v” dla wyprawy na Marsa wynosi:

$$3,6 + 2,1 = 5,7 \text{ km/s.}$$



Aby bliżej uświadomić sobie związek modelowania wejścia na orbitę z orbitami hiperbolicznymi, warto spojrzeć na powyższy rysunek, gdzie Mars orbituje po okręgu, a kołową orbitę przecina elipsa Hohmanna. Pod wpływem grawitacji Marsa w pobliżu planety elipsa (tak naprawdę w tej skali i elipsa Hohmanna, i koło orbity Marsa wyglądają jak linia prosta!) ugina się i przypomina lokalnie hiperbolę. Dzięki impulsowi prędkości z hiperboli wchodzimy na orbitę kołową wokół Marsa.

Zamiast takich obliczeń łatwiej jest wykorzystać tzw. *mapy delta-v* – tabele skoków prędkości niezbędnych do dotarcia z punktu startowego do docelowego. Na takiej mapie rozpoczynamy sumowanie czynników, np. od orbity LEO na Ziemi, a kończymy na LMO nad Marsem.

Strefy oddziaływań planet

Mapy delta-v są dość czytelne, ale wątpliwości może wzbudzić pojęcie „przechwycenia” czy „wejścia w sferę oddziaływania” planety. Sfera oddziaływania definiowana jest jako miejsce, gdzie pojazd kosmiczny – pomiędzy planetą a Słońcem (czy ogólniej: pomiędzy mniejszym ciałem niebieskim a dominującym ciałem niebieskim) – odczuwa zerową siłę wypadkową grawitacji oraz odśrodkową:

$$\frac{GMm}{R^2} + m\omega^2(r_1 - R) - \frac{GM_\odot m}{(r_1 - R)^2} = 0,$$

r_1 oznacza tu promień orbity planety, a R to odległość strefy oddziaływania od planety.

Ponieważ orbitalna prędkość kątowna planety wynika z równowagi siły odśrodkowej z przyciąganiem Słońca:

$$\omega^2 r_1 = \frac{GM_\odot}{r_1^2}.$$

Jednocześnie różnica dwóch ostatnich członów względem punktu równowagi w r_1 jest mała, i aby uprościć rachunki, można skorzystać z następującego przybliżenia:

$$\frac{1}{(r_1 - R)^2} \approx \frac{1}{r_1^2} - R \left[\frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{r_1^2} \right) \right] = \frac{1}{r_1^2} + 2 \frac{R}{r_1^3}.$$

Mamy zatem:

$$\frac{GMm}{R^2} + \frac{GM_\odot m}{r_1^2} - \frac{GM_\odot m}{r_1^3} R = \frac{GM_\odot m}{r_1^2} + 2 \frac{GM_\odot m}{r_1^3} R.$$

I stąd możemy wyznaczyć promień sfery oddziaływania dla Ziemi:

$$R = r_1 \sqrt[3]{\frac{M}{3M_\odot}} = 1,5 \text{ mln km.}$$

Literatura

RR Bate, DD Mueller, JE White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover, 1971.

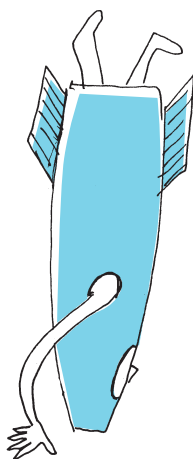
W. Hohmann, *Attainability of Celestial Bodies*, NASA, 1925. (równania (41), (45), rys. 25)

JE Marsden, SD Ross, *New Methods in Celestial Mechanics and Mission Design*, *Bulletin of the AMS*, vol. 43, s. 43, 2005.

RD Johnson, Ch Holbrow, *Space Settlements*, NASA, 1977.

Kalkulator trajektorii transferowych: <https://trajbrowser.arc.nasa.gov/>

Mapa „delta-v”: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/93/Solar_system_delta_v_map.svg





Tysiąc kotów

Ile kotów jest na świecie? Wikipedia podaje szacunkowe liczby między 600 milionów a miliardem, ze Stanami Zjednoczonymi na czele względem liczby kotów zawłaszczających gospodarstwa domowe, jednak źródła tych danych pozostają niejasne.

Można pokusić się o mniej poważne pytanie: ilu jest fizyków na świecie? Od razu wpadamy tutaj w drobną pułapkę, no bo jak dokładnie zdefiniować fizykę i fizyka. A że jest to sprawa wielkiej wagi, to wiem z własnego doświadczenia, z posiedzeń komisji habilitacyjnych, które potrafią zaciekle dyskutować, ile fizyki jest w fizyce.

Załóżmy jednak, że interesuje nas oszacowanie rzędu wielkości liczby fizyków i namysł, jak zmieniła się ona w ciągu ostatniego stulecia. Znane zdjęcie z piątej konferencji Solvaya z roku 1927 ukazuje grupę 29 fizyków, z których siedmiu otrzymało wcześniej lub później Nagrodę Nobla, co stanowi podstawę publicznego przekonania, że była to wówczas liczba bardzo mała. Jednak publikacje American Institute of Physics podają tu liczbę kilku tysięcy, opierając się na liczbie istniejących na uniwersytetach katedr fizyki, z założeniem, że każda miała na pewno swojego profesora, który zarządzał co najmniej jednym asystentem.

A dzisiaj? W przeciwieństwie do kotów, dane są trudniejsze do pozyskania, jednak raz pozyskanymi łatwiej jest zarządzać. Unia Europejska miała w 2023 roku, według danych Eurostatu, 2,15 miliona naukowców, więc, przyjmując robocze założenie, że 10% z nich to fizycy, otrzymujemy wynik 215 tysięcy. Udział fizyków w populacji naukowców jest, oczywiście, swego rodzaju zgadnięciem, polegającym na codziennym doświadczeniu autora, wspartym jednak przesadami innych osób próbujących odpowiedzieć na postawione tutaj pytanie.

W przypadku innych krajów możemy wykorzystać dane *Global Innovation Index* podające liczbę naukowców na milion mieszkańców. W tym wskaźniku prym wiodzie Korea Południowa z wynikiem 7980, co przekłada się na 41 tysięcy fizyków. Na drugim miejscu są Stany Zjednoczone, dla których stosunek ten wynosi 4450, więc możemy zaryzykować stwierdzenie, że mieszka tam 150 tysięcy fizyków. Swoją drogą, na Quantum Summit India, który odbył się w lipcu 2025 roku w Bengaluru, Duncan Haldane i David Gross, obaj laureaci Nagrody Nobla z fizyki, wskazali, że wysoki wynik amerykańskiej nauki opiera się na silnym drenażu mózgów z innych części świata, zwłaszcza z Indii, które ze wskaźnikiem 255, zresztą malejącym w czasie, dostarczają światu tylko 37 tysięcy fizyków. W liczbach bezwzględnych przodują Chiny z dość wysokim stosunkiem na poziomie 1850 i dużą liczbą ludności, co pozwala sądzić, że jest tam około 260 tysięcy fizyków.

Powtarzając to ćwiczenie dla najludniejszych krajów świata, dochodzimy do liczby 900 tysięcy, więc przy naszej dokładności można dla lepszego efektu powiedzieć, że na świecie żyje około miliona fizyków.

Dużo to czy mało? Na pewno wynik ten wskazuje na ogromne zwiększenie dostępności szkolnictwa wyższego, co w połączeniu ze dwuipółkrotnym wzrostem liczby ludności w ciągu ostatniego stulecia przełożyło się na wzrost liczby uniwersytetów. W końcu, przyjęty na świecie model edukacji zakłada, że moralne prawo do kształcenia studentów wywodzi się z prowadzenia badań naukowych.

W każdym razie, nie pomyli się znanadto, kto powie, że na jednego fizyka przypada globalnie jakieś tysiąc kotów. Przy ostrożnym założeniu, że fizyk jest społecznie co najmniej tak samo użyteczny jak kot, wciąż jesteśmy po bezpiecznej stronie.



Krzysztof TURZYŃSKI

Olimpiada Sztucznej Inteligencji

Witold DRZEWAŁOWSKI^{1,*,\dagger}, Kamil KSIĄŻEK^{2,\dagger},
Michał MARCINKOWSKI^{3,*}, Paulina TOMASZEWSKA^{4,*,\dagger}

¹Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

²Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

³Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

⁴Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

*Komitet Główny OAI

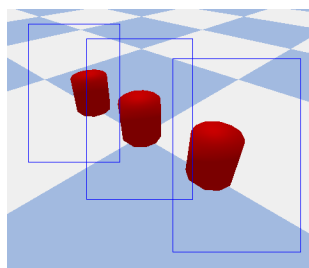
^{\dagger}Komitet Merytoryczny OAI

Sztuczna inteligencja coraz śmielej wkracza w nasze codzienne życie – modele językowe są podstawą działania chatbotów, silniki grające w szachy pomagają zarówno w szkoleniu początkujących graczy, jak i arcymistrzów, systemy wnioskowania rozwiązują skomplikowane zadania matematyczne. Za tym wszystkim stoją różnorodne algorytmy uczenia maszynowego i ogromne ilości danych. Jak to wszystko działa? Co stoi u podstaw tych systemów? Jak są one zbudowane? **Olimpiada Sztucznej Inteligencji** (OAI) została stworzona właśnie dla osób zainteresowanych tym obszarem wiedzy i technologii.

Co to jest OAI? Olimpiada Sztucznej Inteligencji to ogólnopolskie zawody adresowane do uczniów szkół ponadpodstawowych i podstawowych. Obecnie trwa III edycja Olimpiady, kolejna rozpocznie się w roku szkolnym 2026/2027. Wzorem innych olimpiad, takich jak matematyczna i informatyczna, OAI składa się z trzech etapów: I etapu zdalnego, II etapu lokalnego oraz III etapu finałowego. W roku szkolnym 2025/2026 I etap rozpoczął się 1 grudnia 2025 roku i zakończy się 25 stycznia 2026, II etap odbędzie się w dniach 6–8 marca 2026 roku w czterech miastach: Krakowie, Poznaniu, Warszawie i Wrocławiu. Finał będzie miał miejsce od 17 do 19 kwietnia 2026 roku w Poznaniu. OAI jest wspierana przez Ministerstwo Edukacji Narodowej. Jej organizatorem jest Fundacja Edukacji i Rozwoju Sztucznej Inteligencji oraz wydziały matematyki i informatyki uniwersytetów Jagiellońskiego, im. Adama Mickiewicza, Warszawskiego i Wrocławskiego.

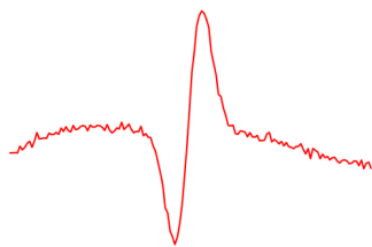
Jak wyglądają zadania? Zadania inspirowane są realnymi problemami pojawiającymi się w przemyśle i nauce. Uczestnicy muszą przeanalizować duży zbiór danych i znaleźć w nim ukryte zależności, tworząc własny model sztucznej inteligencji, np. sieć neuronową. W poprzednich edycjach zadania dotyczyły m.in. wykrywania nieprawidłowości w sygnale EKG (ilustrującym pracę serca), detekcji halucynacji w danych wygenerowanych przez duże modele językowe, czy predykcji sumy pieniędzy na zdjęciu z monetami. Jedno z zadań związane było z analizą wideo przedstawiającą grę w trzy kubki. Na filmach kubki były zamieniane miejscami, a zadaniem było wskazanie, na jakiej pozycji finalnie znalazł się każdy kubek. Kolejne zadanie dotyczyło ataków na modele AI, aby „zmusić” je do popełniania błędów. Aby lepiej zilustrować, na czym mogą polegać zadania, opiszemy bardziej szczegółowo dwa z nich.

- **Wykrywanie zaburzeń sygnału EKG** (II OAI, 1. etap). W tym zadaniu uczestnik dostaje zbiór danych zawierający syntetyczne sygnały EKG, czyli zapis pracy serca w czasie. Część sygnałów EKG jest prawidłowa, a część odpowiada wybranym schorzeniom, np. migotaniu przedsionków. Zadaniem uczestnika jest wyodrębnienie z fragmentów EKG czterech liczbowych cech sygnału, które pozwolą najlepiej przewidzieć obecność schorzeń. Dobór cech jest oceniany przez jakość wytrenowanego na ich podstawie modelu uczenia maszynowego, którego uczestnicy nie mogą zmieniać. Im lepsze cechy, tym dokładniejsze przewidywania modelu oraz wyższa ocena rozwiązania. Zadaniem uczestników było odkrycie anomalii, które znajdowały się tylko w szczególnych fragmentach sygnału. Jedno z rozwiązań polegało na podzieleniu sygnału EKG na fragmenty i usunięciu z niego odcinków odpowiadających tzw. zespołowi QRS, reprezentującemu główną aktywność skurczową serca. Pozostałe fragmenty, odpowiadające sygnałowi pomiędzy kolejnymi uderzeniami serca, zawierały większość anomalii i były podstawą dalszej analizy statystycznej. Badano między innymi wartości bezwzględne różnic między kolejnymi odczytami w czasie, a ostateczne cechy były konstruowane na podstawie ich odchylenia standardowego, średniej kroczącej, amplitudy lub innych statystyk. Zaznaczamy, że rozwiązanie nie wymagało wiedzy medycznej, a całe niezbędne wprowadzenie, włącznie z opisem zespołu QRS, było przedstawione w treści zadania.

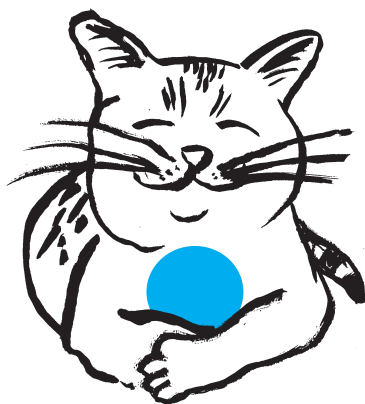


Zadanie z grą w trzy kubki wymagało śledzenia obiektów występujących w filmie

Halucynacje AI to zjawisko, w którym sztuczna inteligencja generuje fałszywe lub nieprawdziwe informacje, prezentując je jako fakty. Powstają one, ponieważ modele AI przewidują najbardziej prawdopodobne odpowiedzi na podstawie wzorców w danych treningowych, a nie na prawdziwym zrozumieniu rzeczywistości, co może prowadzić do zmyślenia faktów, dat, a nawet źródeł.



Sygnał EKG ze zbioru treningowego



W powyższym zadaniu nacisk postawiony był na analizę danych wejściowych. Model nie był modyfikowany przez użytkownika. Nie zawsze jednak tak jest. Poniżej opiszemy zadanie z finałowego etapu, w którym należało dotrenować dostarczony model sieci neuronowej.

- **Stylizacja tłumaczeń maszynowych (II OAI, 3. etap).** Uczestnicy w ramach zadania dostali wytrenowany już model niewielkich rozmiarów do tłumaczeń z języka angielskiego na język polski oraz zdania w języku angielskim zawierające specjalistyczne terminy z dziedziny uczenia maszynowego. Dla każdego z takich zdań zbiór danych zawierał również listę występujących w nich specjalistycznych terminów oraz oczekiwane tłumaczenie tego zdania na język polski. Jednakże w tym tłumaczeniu terminy specjalistyczne są przetłumaczone inaczej niż dokonałby tego dostarczony model – stosowane są polskie odpowiedniki, podczas gdy celem tego zadania było pozostawienie angielskich terminów. Zadanie to wymagało implementacji pętli do wydajnego dotrenowania modelu z uwzględnieniem nowoczesnych technik, takich jak zmiana tempa treningu w ramach kolejnych etapów poprzez zmniejszanie współczynnika uczenia, z uwzględnieniem fazy „rozgrzewki”. Takie rozwiązanie często nie skutkowało jednak maksymalną liczbą punktów. Kluczowa była następująca obserwacja: aby skutecznie naśladować styl tłumaczeń obecny w zbiorze danych, model musi opanować dwie umiejętności: (1) rozpoznawanie fraz specjalistycznych oraz (2) odpowiednie tłumaczenie tych fraz. Uczestnicy, którzy to dostrzegli, wykorzystali dodatkową informację dostępną w danych – listy słów kluczowych przypisane do każdego zdania. Na ich podstawie oznaczali w tekście źródłowym (angielskim) frazy specjalistyczne (np. za pomocą znaczników `<...>`). Dzięki temu model nie musiał samodzielnie uczyć się, które wyrażenia wymagają zmiany stylu, a które nie. Jego zadaniem było jedynie nauczyć się, że frazy oznaczone należy tłumaczyć zgodnie ze specyficznym stylem, a w tłumaczeniu pomijać same znaczniki.

Wiele zadań wymaga obliczeń na kartach graficznych (GPU), do których zapewniamy dostęp podczas etapów stacjonarnych. Zadania są w pełni automatycznie oceniane na specjalnie przygotowanej infrastrukturze systemu sprawdzającego.

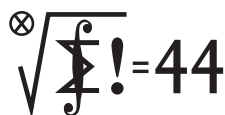
Dlaczego warto? Poza satysfakcją i świetną przygodą Olimpiada to szansa na rozwinięcie bardzo przydatnych umiejętności oraz możliwość spotkania rówieśników z całej Polski zainteresowanych sztuczną inteligencją. Na etapy lokalne i finał zapraszamy naszych partnerów i firmy wspierające Olimpiadę – jest wtedy okazja do uczestniczenia w ciekawych wykładach i zobaczenia, jak AI jest stosowana w praktyce. Finaliści mają ułatwiony lub wolny wstęp na coraz większą liczbę kierunków na polskich uczelniach. Dla najlepszych uczestników organizujemy obóz naukowy, którego poprzednie edycje odbywały się w Krzyżowej i Polanicy-Zdroju. Uczestnicy poznają tam bardziej zaawansowane zagadnienia, takie jak modele dyfuzyjne w wizji komputerowej, sieci typu transformer czy metody trenowania modeli językowych. Co roku Olimpiada wyłania polską reprezentację na zawody międzynarodowe. Dotychczas odbyły się dwie edycje Międzynarodowej Olimpiady Sztucznej Inteligencji (ioai-official.org). W obu tych olimpiadach nasza reprezentacja osiągnęła wspaniałe sukcesy. Na ostatniej międzynarodowej olimpiadzie w Pekinie polska reprezentacja zdobyła 7 medali (3 złote, 3 srebrne, 1 brązowy), zajmując w nieoficjalnej klasyfikacji medalowej **2 miejsce na świecie**.

Jak zacząć? Wszystkie potrzebne informacje, materiały przygotowujące do Olimpiady, a także zadania z poprzednich edycji znajdują się na stronie oai.edu.pl oraz w mediach społecznościowych Olimpiady. W ramach Olimpiady prowadzimy również różnorodne szkolenia. Przed I etapem organizujemy cykl wykładów wprowadzających, podczas których od podstaw przedstawiamy zagadnienia z zakresu uczenia maszynowego. Omawiamy m.in. podstawy uczenia maszynowego, elementy wizji komputerowej i przetwarzania języka naturalnego. Wprowadzamy uczestników do programowania w Pythonie, trenujemy pierwsze sieci neuronowe, pokazujemy algorytmy klasteryzacji, sieci konwolucyjne do rozpoznawania obrazów oraz wektory zanurzeń słów Word2Vec.

Warto podkreślić, że dla większości naszych uczestników start w Olimpiadzie był ich pierwszą przygodą z AI – jesteśmy jednak przekonani, że jest to dopiero początek ich fascynującej podróży.



Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
903 ($WT = 1,45$) i 904 ($WT = 1,36$)
z numeru 6/2025

Jerzy Cisko	Wrocław	46,09
Szymon Kitowski		43,92
Barbara Mroczek		43,05
Andrzej Daniluk	Warszawa	40,76
Mikołaj Znamierowski		40,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,54
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,09
Roksana Słowik		37,51
Michał Adamaszek	Kopenhaga	37,30
Stanisław Bednarek	Łódź	37,24

Moment godny uwagi: pan Jerzy Cisko –
44 p. po raz osiemnasty!

905. Z uwagi na równość $f(x) = x - g(x)$, gdzie $g(x) = x(x^2 + 1)^{-1}$, warunek zadania jest (dla liczb całkowitych $a, b, c \geq 1$) równoważny temu, by suma $g(a) + g(b) + g(c)$ była liczbą całkowitą. W przedziale $[1, \infty)$ funkcja g jest malejąca. Jej wartości dla argumentów $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ wynoszą, kolejno:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots,$$

więc jedyną możliwą całkowitą wartością wypisanej sumy jest $g(a) + g(b) + g(c) = 1$. Przyjmijmy (b.s.o.), że $a \leq b \leq c$; wówczas $g(a) \geq g(b) \geq g(c)$ oraz $g(a) \geq \frac{1}{3}$, czyli $a = 1$ lub $a = 2$. Dalej, musi być $g(b) \geq \frac{1}{2}(1 - g(a))$. Dla $a = 1$ oraz dla $a = 2$ to daje, odpowiednio, $g(b) \geq \frac{1}{4}$ oraz $g(b) \geq \frac{3}{10}$; w obu przypadkach to oznacza, że $b \leq 3$.

Pozostaje sprawdzić, czy dla uzyskanych par (a, b) ($= (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)$) różnica $1 - (g(a) + g(b))$ jest możliwą wartością $g(c)$. Jedynie dla $a = 2, b = 3$ tak jest; wtedy także $c = 3$ i $g(2) + g(3) + g(3) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 1$, zaś $f(2) + f(3) + f(3) = (2 + 3 + 3) - 1 = 7$. To jedyna możliwa wartość sumy $f(a) + f(b) + f(c)$.

906. Ustalmy kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$, w którym parabola P jest dana równaniem $y = x^2, z = 0$ (b.s.o., bo wszystkie parabole są podobne). Ma ona wierzchołek $\mathbf{w} = (0, 0, 0)$ i ognisko $\mathbf{f} = (0, \frac{1}{4}, 0)$ (kierownicą jest prosta $x = z = 0, y = -\frac{1}{4}$). Weźmy dowolny stożek obrotowy C , na którym leży P . Przyjmijmy, że wierzchołkiem C jest punkt $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Oznaczmy przez φ miarę kąta ostrego między jego osią obrotu i tworzącą i niech $c = \cos \varphi$ (zatem $0 < c < 1$). Niech $\mathbf{u} = (u, v, w)$ będzie wersorem kierunkowym osi obrotu, zorientowanym tak, by $v > 0$ (wersor to wektor o długości 1).

Dowolnie wybrany punkt przestrzeni $\mathbf{p} = (x, y, z)$ leży na stożku C wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między wektorami $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ oraz $\mathbf{u}$ ma miarę φ lub $\pi - \varphi$; czyli gdy jego kosinus (dany znanym wzorem $\frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|}$) jest równy $\pm c$. Skoro $\|\mathbf{u}\| = 1$, warunek ten po rozpisaniu na współrzędne przybiera postać

$$(1) \quad u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = \pm c \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Zadania z matematyki nr 913, 914

Redaguje Marcin E. KUCZMA

913. Niech m będzie liczbą naturalną nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę zbioru M , zawartego w przedziale $[-m, m]$, złożonego z liczb całkowitych, w którym każda trójka różnych liczb ma sumę różną od zera.

914. Znaleźć wszystkie pary a, b liczb rzeczywistych różnych od zera, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |\sin(ax)| + |\cos(bx)|$ jest okresowa.

Zadanie 914 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2025

Przypominamy treść zadań:

905. Niech $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{-1}$. Wyznaczyć wszystkie całkowite dodatnie wartości sumy $f(a) + f(b) + f(c)$ dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c .

906. W przestrzeni (trójwymiarowej) dana jest parabola P . Niech R będzie zbiorem wszystkich punktów, będących wierzchołkami stożków obrotowych, na których leży P [przez stożek obrotowy rozumiemy tu powierzchnię powstałą przez obrót prostej wokół przecinającej ją (nie prostopadle) innej prostej (osi obrotu)].

Udowodnić, że zbiór R także jest parabolą oraz wyjaśnić, jak są usytuowane jej wierzchołek i ognisko względem wierzchołka i ogniska paraboli P . [Wierzchołek paraboli to punkt jej przecięcia z osią symetrii; ognisko to punkt (w jej płaszczyźnie) określony przez własność: każdy punkt paraboli jest jednakowo odległy od ogniska i od pewnej prostej (zwanej kierownicą)].

Jest to więc równanie powierzchni stożka C . Parabola P leży na niej, jeśli po podstawieniu $y = x^2, z = 0$ równanie (1) jest spełnione dla każdej liczby rzeczywistej x . Przez podniesienie stronami do kwadratu wnosimy, że zawieranie $P \subset C$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(2) \quad (u(x - x_0) + v(x^2 - y_0) + w(-z_0))^2 = c^2((x - x_0)^2 + (x^2 - y_0)^2 + z_0^2) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

To równość dwóch wielomianów zmiennej x , czwartego stopnia. Przyrównując współczynniki przy x^4 po lewej i prawej stronie, a następnie współczynniki przy x^3 , dostajemy równości $v^2 = c^2, 2uv = 0$; czyli (pamiętając, że $v > 0, c > 0$): $v = c, u = 0$. Wstawiamy te wartości do (2) i po redukcji dostajemy równanie

$$(3) \quad -2cwz_0(x^2 - y_0) + w^2z_0^2 = c^2(x - x_0)^2 + z_0^2c^2.$$

Kolejne przyrównanie współczynników, tym razem przy x^2 oraz x^1 , pokazuje, że $-2cwz_0 = c^2, -2c^2x_0 = 0$, skąd $wz_0 = -\frac{1}{2}c, x_0 = 0$. Równanie (3) redukuje się do postaci $-c^2y_0 + (-\frac{1}{2}c)^2 = c^2z_0^2$, czyli $y_0 = \frac{1}{4} - z_0^2$.

Zważywszy, że stożek C (zawierający parabolę P) był wybrany dowolnie, więc jego wierzchołek był dowolnym punktem zbioru R , widzimy, że zbiór R jest opisany równaniami

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{4} - z^2.$$

Jest zatem parabolą, leżącą w płaszczyźnie $x = 0$, izometryczną z parabolą P . Jej wierzchołkiem jest punkt $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \frac{1}{4}, 0)$, a ogniskiem punkt $\tilde{\mathbf{f}} = (0, 0, 0)$ (obraz ogniska paraboli P w tej izometrii). Pierwszy z nich pokrywa się z ogniskiem paraboli P , drugi z jej wierzchołkiem: $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{w}$. To właśnie usytuowanie, o które chodziło w zadaniu.

[Autor zadania, Janusz Fiett, zwrócił uwagę na artykuł *Stożkowe* (w Δ_{13}^{12}), w którym jest opisana własność pozwalająca uprościć rozwiązanie: sfera wpisana w stożek, styczna do płaszczyzny przecinającej jego powierzchnię wzdłuż paraboli, ma punkt styczności z tą płaszczyzną będący ogniskiem tej paraboli. Zachęcamy Czytelników do zapoznania się z tym artykułem i do dopracowania rozwiązania tą metodą.]

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2026

Zadania z fizyki nr 810, 811

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

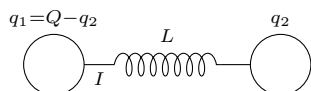
810. Gładki, jednorodny sznurek o długości l i masie m przerzucony jest przez niewielki nieruchomy blok tak, że w chwili początkowej pozostaje w równowadze, a po lekkim przesunięciu zaczyna ześlizgiwać się z bloku. Znaleźć siłę nacisku sznurka na blok w chwili, gdy jego długość z jednej strony wynosi $l/3$.

811. Naładowany kondensator płaski znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są prostopadłe do płaszczyzn okładek. Odległość między okładkami wynosi d , indukcja pola magnetycznego B . Wewnątrz kondensatora, koło ujemnie naładowanej okładki znajduje się źródło powolnych elektronów wysyłanych w różnych kierunkach. Jakie musi być napięcie między okładkami, aby elektrony ogniskowały się z możliwie najlepszą dokładnością na dodatnio naładowanej okładce? Oddziaływanie między elektronami zanedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2025

Przypominamy treść zadań:

W treści zadania **803** w wydrukowanej wersji numeru wrześniowego pojawił się oczywisty błąd – ładunek kuli nienaładowanej nie mógł zmaleć dwukrotnie, bo wynosił zero.



802. Podróżny stał obok początku wagonu z numerem porządkowym k . Pociąg ruszył z miejsca, po czym okazało się, że wagon o numerze m mijal pasażera przez t sekund. Ile czasu przejeżdżał obok tego pasażera wagon o numerze n ? Pociąg poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym, długości wagonów są jednakowe, odległości między wagonami zanedbywalne. Podróżny nie poruszał się względem peronu.

803. Dwie metalowe kule o promieniach R znajdują się w bardzo dużej odległości od siebie i połączone są cienkim przewodnikiem, w którego rozcięcie włączona jest cewka o współczynniku samoindukcji L . W chwili początkowej jedna z tych kul naładowana jest ładunkiem Q , druga nienaładowana. Po jakim czasie ładunek kuli naładowanej zmaleje dwukrotnie?

802. Oznaczmy przez Δt_i czas, w którym i -ty wagon przejeżdża obok podróżnego ($i \geq k$). Wtedy

$$(1) \quad l = \frac{a \Delta t_k^2}{2} \Rightarrow \Delta t_k = \sqrt{\frac{2l}{a}},$$

gdzie a jest przyspieszeniem pociągu, l długością wagonu. Zgodnie z treścią zadania

$$(2) \quad \Delta t_m = t.$$

Oznaczmy przez t_i czas, w którym przejechały obok podróżnego wagony, zaczynając od numeru k , a kończąc na numerze i . Zachodzą związki:

$$(3) \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

W czasie t_i obok podróżnego przejechało $i - k + 1$ wagonów, zatem

$$(4) \quad (i + 1 - k)l = \frac{a t_i^2}{2} \Rightarrow t_i = \sqrt{\frac{2l(i + 1 - k)}{a}},$$

stąd zgodnie z (1)

$$t_i = \Delta t_k \sqrt{i + 1 - k}, \quad t_{i-1} = \Delta t_k \sqrt{i - k}.$$

Uwzględniając (2) i (3):

$$\begin{aligned} \Delta t_m &= \Delta t_k (\sqrt{m + 1 - k} - \sqrt{m - k}) \\ \Rightarrow \Delta t_k &= \frac{t}{\sqrt{m + 1 - k} - \sqrt{m - k}}. \end{aligned}$$

Szukany czas wynosi:

$$\Delta t_n = t \frac{\sqrt{n + 1 - k} - \sqrt{n - k}}{\sqrt{m + 1 - k} - \sqrt{m - k}}.$$

803. Oznaczmy przez q_2 ładunek, który przeszedł do chwili t na kulę nienaładowaną (rys.), ładunek na pierwszej kuli wynosi w tym momencie $q_1 = Q - q_2$, a napięcie na cewce

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q - q_2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q - 2q_2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Natężenie prądu w cewce $I = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt}$ zmienia się zgodnie z wzorem

$$U = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{Q - 2q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = L \frac{d^2 q_2}{dt^2}.$$

Wprowadzając nową zmienną $q = \frac{Q}{2} - q_2$, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 RL} = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego z warunkami początkowymi

$$q(0) = \frac{Q}{2}, \quad I(0) = 0.$$

Częstość drgań wynosi $\omega = \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0 RL}}$, okres drgań

$T = 2\pi\sqrt{2\pi\epsilon_0 RL}$. Ładunek na pierwszej sferze $q_1 = \frac{Q}{2} + q$ różni się od q tylko stałą, czyli drga z takim samym okresem. Zmaleje więc dwukrotnie po czasie

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{2\pi\epsilon_0 RL}.$$

Po tym czasie ładunki na obu sferach wyrównają się do wartości $\frac{Q}{2}$, a napięcie między sferami spadnie do zera.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

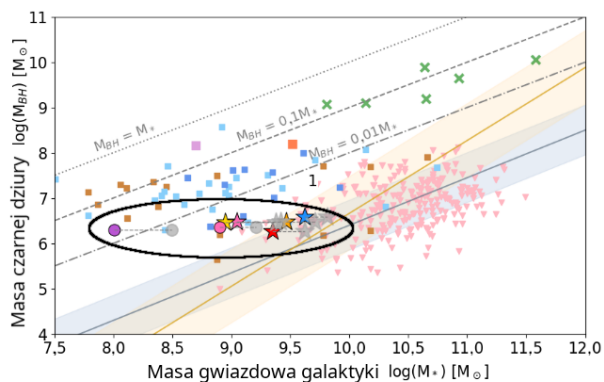


O problemie jajka i kury można przeczytać również w Δ_{24}^4

Supermasywna czarna dziura w centrum Drogi Mlecznej ma masę 4 miliony razy większą od Słońca – jest więc stosunkowo niewielka w porównaniu z supermasywnymi czarnymi dziurami występującymi w niektórych innych galaktykach. Na przykład czarna dziura w centrum galaktyki Holmberg 15A ma masę co najmniej 40 miliardów mas Słońca.

Aby to sprawdzić, musimy zajrzeć w przeszłość Wszechświata do momentu, gdy tworzyły się pierwsze galaktyki. Na szczęście możemy to robić za pomocą teleskopów, ponieważ światło podróżuje przez rozszerzający się Wszechświat ze skończoną prędkością. Gdy więc obserwujemy odległe galaktyki, to widzimy je takimi, jakie były miliardy lat temu. Absolutnym rekordzistą w obserwacjach odległych galaktyk jest oczywiście Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba, którego obserwacje i tym razem wykorzystano.

Grupa badawcza pod kierunkiem Sophii Geris z Kavli Institute for Cosmology, University of Cambridge, opublikowała w listopadzie 2025 roku wyniki obserwacji, które wykazują, że nawet najmniejsze czarne dziury, jakie jesteśmy w stanie obserwować, znajdujące się w centrach najodleglejszych galaktyk są wciąż... zbyt masywne w stosunku do masy galaktyk, w których się znajdują (patrz wykres).



Wykres zależności masy supermasywnej czarnej dziury od masy galaktyki. Różne symbole przedstawiają pomiary w różnych momentach istnienia Wszechświata. W szczególności trójkąty przedstawiają pomiary we współczesnym Wszechświecie, a kwadraty w odległym (czyli młodym) Wszechświecie. Punkty zaznaczone elipsą pokazują najnowsze pomiary mas czarnych dziur odległego Wszechświata. Są one zdecydowanie większe niż przewidywania modelu zaznaczone żółtą linią. Źródło: Sophia Geris et al. (2025)

Wyjaśnienie tego stanu rzeczy może być oczywiście kilka. Pierwsze wytłumaczenie związane jest z niepewnościami pomiarowymi. Możliwe jest, że obserwujemy tylko szczególnie jasne obiekty (bo tylko ich światło jesteśmy

Już starożytni filozofowie głowili się nad pytaniem: co było pierwsze, jajko czy kura? Astronomowie od jakiegoś czasu poszukują rozwiązania podobnej zagadki. Zastąpmy tylko kurę galaktyką, a jajko supermasywną czarną dziurą. Pytanie brzmi: czy jako pierwsza powstaje galaktyka gwiazd, a dopiero potem jedna z tych gwiazd wybucha jako supernowa, pozostawiając po sobie czarną dziurę w centrum? Czy może to galaktyki gwiazd powstają „wokół” istniejącej już wcześniej supermasywnej czarnej dziury?

Zacznijmy od tego, co wiemy. We współczesnym Wszechświecie prawie każda duża galaktyka, w tym nasza Droga Mleczna, ma w swoim centrum supermasywną czarną dziurę o masie od setek tysięcy do kilku miliardów razy większej od masy Słońca. Wiemy też, że masy tych czarnych dziur są związane z masą galaktyki, w której się znajdują. Im większa i masywniejsza jest galaktyka, tym masywniejsza jest supermasywna czarna dziura w jej centrum. Naukowcy interpretują to jako dowód na to, że obecnie oba te obiekty ewoluują razem. Ale czy tak było zawsze?

w stanie zarejestrować). Drugie wytłumaczenie jest zdecydowanie bardziej ekscytujące – czarne dziury we wczesnym Wszechświecie mają tak duże masy w stosunku do mas ich galaktyk, ponieważ powstały jako pierwsze!

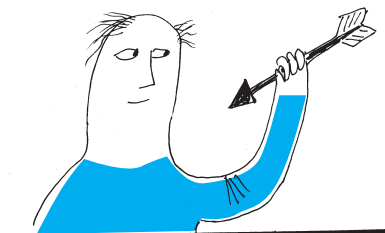
Czyżbyśmy zatem znaleźli odpowiedź? Otóż nie do końca, pojawia się kolejne pytanie: jak te ogromne, supermasywne czarne dziury powstały w tak krótkim czasie? Jak dotąd jedynym potwierdzonym obserwacyjnie procesem, podczas którego powstają czarne dziury, jest wybuch supernowej. Kiedy gwiazda o masie ponad 20 razy większej od Słońca wyczerpie swoje paliwo, jej jądro zapada się, tworząc czarną dziurę. Tak powstałe czarne dziury są jednak malutkie w porównaniu do supermasywnych czarnych dziur (te pierwsze mają masy kilku mas Słońca, a te drugie nawet miliardy mas Słońca). Wiemy, że czarne dziury mogą „rosnąć” i przybierać na masie, pochłaniając otaczającą je materię lub łącząc się z innymi pobliskimi czarnymi dziurami. Jednak proces wzrostu trwa miliardy lat i maksymalne tempo, w jakim czarna dziura może przybierać na wadze, jest fizycznie ograniczone. Nie mamy więc na razie wytłumaczenia na istnienie supermasywnych czarnych dziur we wczesnym Wszechświecie. Jest oczywiście kilka hipotez. Jedna z nich zakłada, że czarne dziury we wczesnym Wszechświecie mogły powstać bezpośrednio w wyniku zapadnięcia się masywnych chmur gazu, bez udziału gwiazd. W tym momencie trwają poszukiwania dowodów obserwacyjnych.

Co więc było pierwsze? Galaktyka czy supermasywna czarna dziura? Prawdopodobnie czarna dziura. Ale nie wiemy na pewno. Dam znać, gdy coś się zmieni.

Napisane na podstawie publikacji: Sophia Geris et al. (2025) “JADES reveals a large population of low mass black holes at high redshift”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, <https://doi.org/10.1093/mnras/staf1979>.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Styczeń zastanie Słońce w gwiazdozborze Strzelca. Powoli zwiększa ono wysokość górowania nad horyzontem. Dopiero jednak od trzeciej dekady miesiąca wędrówka Słońca na północ przyspieszy, gdy przetnie równoleżnik -20° deklinacji. Niewiele wcześniej Słońce wejdzie do gwiazdozbioru Koziorożca, gdzie pozostanie do połowy lutego.

Początek miesiąca rozświetli blask Księżyca, gdyż Srebrny Glob 3 stycznia przejdzie przez pełnię. Niestety oznacza to, że promieniujące w tym samym czasie Kwadrantydy są niewidoczne. W Nowy Rok Księżyc w fazie 96% spotka się z El Nath, drugą co do jasności gwiazdą Byka, podczas pełni natomiast przejdzie w połowie drogi między Polluksem, najjaśniejszą gwiazdą Bliźniąt, a Jowiszem. Okolice Księżyca w pełni wraz z nim są w opozycji do Słońca. Faktyczna opozycja największej planety Układu Słonecznego przypada tydzień po tym spotkaniu. W tym roku jest to średnia opozycja tej planety. Jowisz pojaśnieje do $-2,7^m$, a jego tarcza urośnie do $47''$. Planeta porusza się ruchem wstecznym i 19 stycznia przejdzie mniej niż $0,5^\circ$ od świecącej z jasnością $3,5^m$ gwiazdy Wasat (δ Gem).

Początek stycznia tego roku to szczególny moment również dlatego, że 6 dnia miesiąca Wenus przechodzi przez koniunkcję górną ze Słońcem, a 9 to samo czyni Mars. A zatem przy pełni Księżyca Mars, Wenus, Słońce, Ziemia, Księżyc i Jowisz ustawia się w kosmosie prawie na jednej linii. Niedaleko niej znajdzie się także Merkury, ale ten koniunkcję górną ze Słońcem osiągnie 21 stycznia. Kolejne dwa dni później w koniunkcji ze Słońcem znajdzie się planeta karłowata Pluton.

Księżyc natomiast po spotkaniu z Jowiszem powędruje dalej i 6 stycznia wieczorem wejdzie 2° od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, zmniejszając przy tym fazę do 85%. Po południu 10 stycznia przypada ostatnia kwadra Srebrnego Globu, który pokaże się nad widnokresem już kolejnej doby w towarzystwie świecącej $2,5^\circ$ nad nim Spiki, najjaśniejszej gwiazdy w Pannie.

Na porannym niebie naturalny satelita Ziemi pozostanie do połowy miesiąca, znikając w brzasku Słońca już trzy dni przed przypadającym 18 stycznia nowiem. Wynika to z tego, że Srebrny Glob przebywa wtedy pod ekliptyką, której nachylenie do porannego widnokreśu od początku roku się pogarsza. W tym czasie warto wspomnieć o jego spotkaniu z Antaresem w dniach 14 i 15 stycznia, gdy jego bardzo cienki sierp w fazie najpierw 19%, a następnie 12% zbliży się za każdym razem na około 6° do najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona.

W trzeciej dekadzie stycznia ekliptyka tworzy duży kąt z widnokresem o zmierzchu, stąd po nowiu Księżyc rozgości się na wieczornym niebie. 23 stycznia jego faza urośnie do 23%, a jego tarcza pokaże się 5° nad parą planet Saturn–Neptun. W styczniu obie planety kierują się już na północny wschód i do końca miesiąca dystans między nimi spadnie do poniżej 2° . Jasność Saturna zmniejszy się do $+1,1^m$, przy średnicy tarczy $17''$. Blask Neptuna wynosi $+7,9^m$. 19 stycznia rano naszego czasu Saturn przejdzie mniej niż $1'$ od gwiazdy 24 Psc. Do zapadnięcia ciemności dystans między tymi ciałami niebieskimi urośnie do $100'$. 9 stycznia od godziny 17:45 i 25 stycznia od 17:30 posiadacze większych teleskopów

z powiększeniem ponad 100 razy mogą pokusić się o dostrzeżenie Tytana na tarczy Saturna.

Dobę później Srebrny Glob zwiększy fazę do 33%. Tego wieczora zakryje on gwiazdę 4. wielkości δ Psc. Może ktoś pamiętać, że w latach 2015–2017 niedaleko tej gwiazdy i sąsiadującej z nią świecącej z podobną doń jasnością ϵ Psc swoje pętle na niebie kreśliła planeta Uran. Polska znajdzie się na południowej granicy zjawiska i na południe od linii mniej więcej Biała Podlaska–Bielsko-Biała do zakrycia nie dojdzie. Dodatkowo zjawisko zacznie się przy zachodzącym Słońcu, a w południowo-zachodniej części Polski nawet tuż przed jego zachodem. A zatem widoczne jest tylko odkrycie δ Psc, które nastąpi około godziny 15:50, w zależności od położenia obserwatora. W zachodniej Polsce – trochę wcześniej, we wschodniej – trochę później. Pechowo, lepiej będzie widoczne odkrycie, do którego dojdzie przy jasnym brzegu księżycowej tarczy, co jest trudniejsze do obserwowania.

26 stycznia Księżyc przejdzie przez I kwadrę, a dobę później wejdzie do gwiazdozbioru Byka i zakryje Plejady. Tym razem zjawisko jest dobrze widoczne w naszym kraju przed północą, ale na polskim niebie Srebrny Glob zakryje tylko cztery jasne gwiazdy z północno-zachodniego krańca gromady: 18, 19 (Taygeta), 20 (Maia) i 21 (Sterope) Tauri. Przy czym Maia zniknie za księżycową tarczą na północny wschód od linii mniej więcej Darłowo–Hajnówka. Gdzieś na tej trasie można polować na szczególnie atrakcyjne zakrycie brzegowe tej gwiazdy, gdy wielokrotnie pojawia się ona i gaśnie w miarę przechodzenia między zagłębieniami i wybrzuszeniami profilu księżycowej tarczy. Zakrycie Plejad potrwa od około godziny 22:20 do 23:45.

W ostatnich dniach stycznia Srebrny Glob stopniowo zwiększy fazę prawie do pełni, spotykając się najpierw ponownie z El Nath, 29 dnia miesiąca, a następnie z Jowiszem i Polluksem 30 i 31 stycznia.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania M 1840.

Oznaczmy przez a , b i c pierwiastki wielomianu. Wtedy

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Wstawiając $x = 1$, mamy

$$1 + p + q + r = (1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

Każda z liczb a , b i c leży w przedziale $(0, 2)$, zatem każda z liczb $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ leży ściśle pomiędzy w przedziale $(-1, 1)$. Wynika stąd, że iloczyn $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$ również leży w przedziale $(-1, 1)$. Zatem

$$p + q + r = (1 - a)(1 - b)(1 - c) - 1$$

leży w przedziale $(-2, 0)$.



Rozwiązanie zadania M 1841.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$ mamy $\text{nwd}(n, n + k) \leq k$, gdyż jeśli liczba pierwsza p dzieli n i $n + k$, to dzieli również ich różnicę k . Wobec tego skoro $\text{nwd}(n, n + 1) = 1$ i $\text{nwd}(n, n + k)$ rośnie dla $k = 1, 2, \dots, 35$, to $\text{nwd}(n, n + k) = k$ dla $k = 1, 2, \dots, 35$. W szczególności oznacza to, że wszystkie liczby $1, 2, \dots, 35$ dzielą n , więc $36 = 4 \cdot 9$ również dzieli n , a zatem

$$\text{nwd}(n, n + 36) = 36 > 35 = \text{nwd}(n, n + 35).$$

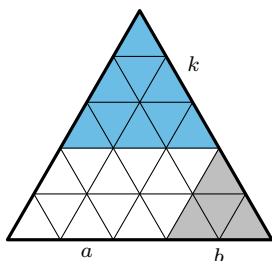


Rozwiązanie zadania M 1842.

Zwycięską strategię ma gracz drugi.

Pierwszego gracza oznaczmy przez A , drugiego przez B . Opiszemy teraz strategię wygrywającą dla B . Przypuśćmy, że A zjada kostkę wymiaru k , pozostawiając trapez o bokach k , $p - k$, p , $p - k$. Niech $a = \max(k, p - k)$, $b = \min(k, p - k)$. Ponieważ $\text{nwd}(a, b) = \text{nwd}(k, p - k) = 1$, więc $a \neq b$. Gracz B zjada zatem trójkąt o boku $p - k$, pozostawiając równoległobok o wymiarach a na b . Teraz rozpatrzymy dwa przypadki:

- Załóżmy, że A zjada kawałek o wymiarach mniejszych niż b , wtedy B zjada kawałek symetryczny względem środka równoległoboku i wygrywa, gdyż A w tym momencie nie ma ruchu.
- Jeśli zaś A zjada trójkąt o boku b , pozostawia trapez o bokach $a - b$, b , a , b , gdzie znowu $\text{nwd}(a - b, b) = \text{nwd}(a, b) = 1$. Gracz B , kontynuując swoją strategię, doprowadzi do sytuacji, w której $a = b = 1$ (gdyż $\text{nwd}(a, b) = 1$), co oznacza, że po ruchu A pozostaje ostatnia kostka, stąd B wygrywa.



Pytanie: Który z graczy ma wygrywającą strategię, jeśli bok czekolady jest liczbą złożoną?



Rozwiązanie zadania F 1135.

Rozważamy cząstkę wyrzuconą pionowo w górę z powierzchni Ziemi z prędkością ucieczki. Pomijamy opór powietrza. Zasada zachowania energii daje:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Podstawiamy $GM = gR^2$, gdzie g to przyspieszenie ziemskie na powierzchni, a R to promień Ziemi:

$$v(r) = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}}.$$

Aby obliczyć czas, jaki zajmuje cząstce osiągnięcie wysokości h , zauważamy, że prędkość nie jest stała – zmienia się wraz z odległością od środka Ziemi. Nie możemy więc użyć prostego wzoru $t = \frac{s}{v}$, ponieważ nie ma jednej prędkości dla całej drogi.

Zamiast tego dzielimy ruch na nieskończenie małe odcinki drogi dr , w których prędkość $v(r)$ można uznać za prawie stałą. Dla każdego takiego odcinka czas przebycia wynosi właśnie $dt = \frac{dr}{v(r)}$. Sumując te małe czasy dla wszystkich odcinków od $r = R$ do $r = R + h$, otrzymujemy całkowity czas ruchu jako właśnie całkę:

$$\begin{aligned} t &= \int_R^{R+h} \frac{dr}{v(r)} = \int_R^{R+h} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2gR^2}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \int_R^{R+h} \sqrt{r} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \cdot \left[\frac{2}{3} r^{3/2} \right]_R^{R+h} = \frac{2}{3\sqrt{2gR^2}} \left((R+h)^{3/2} - R^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Zauważmy, że $(R+h)^{3/2} = R^{3/2} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{3/2}$, więc:

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2R}{g}} \left[\left(1 + \frac{h}{R} \right)^{3/2} - 1 \right].$$



Rozwiązanie zadania F 1136.

Przeanalizujemy sytuację wypływu wody z kranu (zobacz rysunek na s. 5). Na skutek działania siły grawitacji strumień wody przyspiesza w miarę oddalania się od wylotu. Zgodnie z zasadą ciągłości (jedną z postaci prawa zachowania masy) objętość przepływającej cieczy na jednostkę czasu pozostaje stała. Przykładowo dla dwóch przekrojów poprzecznych, oznaczonych jako 1-1 oraz 2-2, możemy zapisać:

$$(*) \quad Q = v_1 A_1 = v_2 A_2,$$

gdzie v_1 i v_2 to średnie prędkości przepływu cieczy w przekrojach o polach powierzchni, odpowiednio, A_1 oraz A_2 .

Choć dzisiaj równanie $(*)$ wydaje się oczywiste, zostało ono sformułowane dopiero w XVII wieku.

Dla cieczy idealnej (czyli takiej, w której można pominąć straty energii) równanie Bernoulliego zastosowane do przepływu między punktami 1-1 i 2-2 przyjmuje postać:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho_w g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho_w g} + z_2.$$

Zakładając, że ciśnienia w obu punktach są równe ($p_1 = p_2 = p_a$) oraz że różnica wysokości $z_1 - z_2 = \Delta L$, powyższe równanie upraszcza się do postaci:

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = -\Delta L.$$

Uwzględniając związek między prędkością a przepływem: $Q = vA = v\pi d^2/4$, ostateczny wzór na strumień objętościowy przyjmuje postać:

$$Q = \frac{\pi d_2^2 \sqrt{2g\Delta L}}{4\sqrt{(d_1/d_2)^4 - 1}}.$$

Zatem aby wyznaczyć natężenie przepływu, wystarczy zmierzyć trzy wielkości geometryczne: średnice strumienia w dwóch przekrojach oraz odległość między tymi przekrojami. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy natężenie $3,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$.



Twierdzenie Cevy – podstawy

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wśród olimpijczyków oraz pasjonatów geometrii szeroko znane jest

Twierdzenie Cevy. W trójkącie ABC na bokach, odpowiednio, BC , CA , AB leżą punkty P , Q , R . Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok i niech

$$s = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}.$$

Wówczas odcinki AP , BQ , CR mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $s = 1$.

Teza twierdzenia jest prawdziwa również, gdy jeden z punktów P , Q , R należy do boku trójkąta, a pozostałe dwa leżą na przedłużeniach odpowiednich boków. Tutaj ograniczę się jednak do przypadku wymienionego w twierdzeniu.

Dowód ($\Rightarrow$). Załóżmy najpierw, że odcinki AP , BQ , CR mają punkt wspólny K . Oznaczmy pola $[BKC]$, $[CKA]$, $[AKB]$ przez, odpowiednio, P_A , P_B , P_C . Jest jasne (wspólne wysokości), że $\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{[KBP]}{[KCP]}$. Stosunki pól są równe, więc także $\frac{a_1}{a_2} = \frac{[ABP] - [KBP]}{[ACP] - [KCP]} = \frac{P_C}{P_B}$. Mnożąc tę równość z dwiema analogicznymi, otrzymamy tezę.

Trygonometryczne twierdzenie Cevy.

W trójkącie ABC leżą punkty P , Q , R na bokach, odpowiednio, BC , CA , AB . Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i niech

$$t = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Wówczas odcinki AP , BQ , CR mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$.

Dowód. Uzgodnijmy, że $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$. Wystarczy udowodnić, że $s = t$. Zauważmy najpierw, że $\frac{a_1}{a_2} = \frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{\frac{1}{2}c|AP|\sin \alpha_1}{\frac{1}{2}b|AP|\sin \alpha_2} = \frac{c \sin \alpha_1}{b \sin \alpha_2}$. Mnożąc stronami tę równość przez dwie analogiczne, otrzymamy $s = t$.

Z tego twierdzenia można również korzystać dla samych trzech cięciw danego okręgu – wystarczy tylko miary odpowiednich kątów, długości boków są niepotrzebne. Sama równość

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c \sin \alpha_1}{b \sin \alpha_2}$$

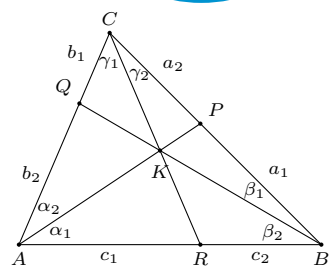
ma swoją wartość – można ją używać w twierdzeniu Cevy, zamieniając, wedle uznania, proporcje podziałów boków na ich trygonometryczną wersję.

Zadania

- Wykaż, że następujące czewiany w trójkącie ostrokątnym przecinają się w jednym punkcie: środkowe (w środku ciężkości), dwusieczne (w środku okręgu wpisanego), wysokości (w ortocentrum).
- Wykazać, że odcinki łączące punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z przeciwległymi wierzchołkami przecinają się w jednym punkcie (punkt Gergonne'a).
- Udowodnić za pomocą twierdzenia Cevy, że w trapezie, niebędącym równoległobokiem, następujące punkty leżą na jednej prostej: środki podstaw, punkt przecięcia się przekątnych oraz punkt przecięcia się prostych zawierających ramiona trapezu.
- Częścią wspólną kwadratów $ABCD$ i $APQR$ jest odcinek AR . Wykazać, że proste BP , CQ i DR przecinają się w jednym punkcie.
- Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej na bok CB , natomiast K jest dowolnym punktem wewnętrznym tej wysokości. Proste BK i CK przecinają odcinki AC i BC w punktach, odpowiednio, E i F . Udowodnić, że prosta AD jest dwusieczną kąta FDE . (Kanadyjska OM, 1994)
- Odcinki AD , BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC i przecinają się w punkcie H . Punkty K , L , M leżą, odpowiednio, na odcinkach BC , CA , AB oraz

$$HK \perp EF, \quad HL \perp FD, \quad HM \perp DE.$$

Udowodnić, że odcinki AK , BL i CM przecinają się w jednym punkcie. (XIV WLM)



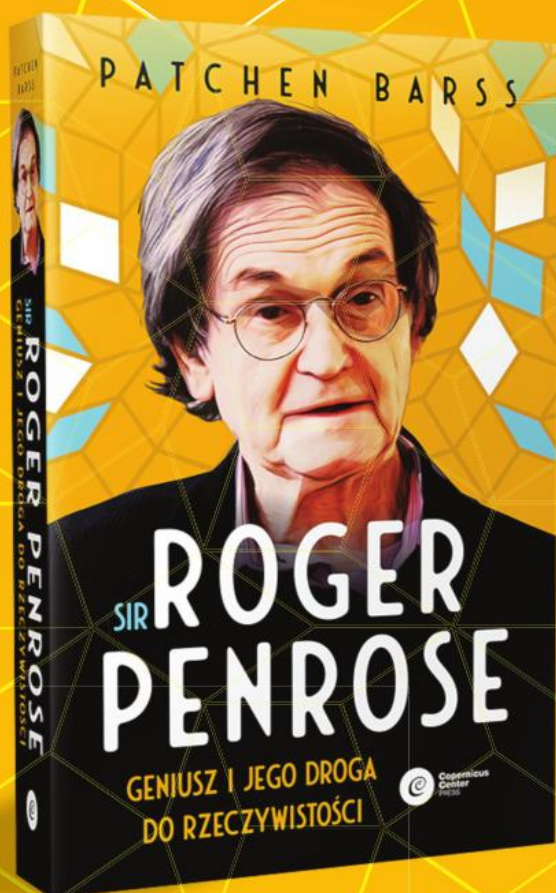
Twierdzenie Cevy

Dowód ($\Leftarrow$). Zakładamy, że $s = 1$. Przypuśćmy, że mimo tego odcinki AP , BQ , CR nie przecinają się w jednym punkcie. Niech AP i BQ przecinają się w punkcie K . Niech prosta CK przecina odcinek AB w punkcie $R' \neq R$. Z udowodnionej już implikacji ($\Rightarrow$) mamy równość $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{|AR'|}{|R'B|} = 1 = s$, z której wynika, że $\frac{|AR'|}{|R'B|} = \frac{c_1}{c_2}$. Jednak to jest niemożliwe, ponieważ punkty R i R' są różne.

Odcinki lub proste AP , BQ i CR nazywa się krótko **czewianami**. Twierdzenie Cevy można również wyrazić za pomocą kątów. Jest to

Wskazówki do zadań

- Dla środka ciężkości wystarczy klasyczna wersja twierdzenia Cevy. W przypadku dwusiecznych i wysokości odmianna trygonometryczna wygląda nieco korzystnie.
- Na początek wystarczy twierdzenie o styczności.
- Przydatny lemat (przy oznaczeniach o styczności).
- Odpowiednie proporcje dla trójkąta BRQ można znaleźć dzięki trygonometrii albo podobieństwu trójkątów ukrytemu w trapezach. Wygodnie jest odnosić wszystko do długości boków danych kwadratów.
- Poprowadźmy przez punkt A prostą $\ell \parallel BC$. Niech P i Q będą przecięcia prostych ℓ i, odpowiednio, prostych DE i DF . Z twierdzenia Talesa otrzymamy $|AQ| = \frac{|AF| \cdot |BD|}{|BF|}$ i analogiczną formułę na $|AP|$. Resztę załatwi twierdzenie Cevy dla trójkąta ABC .
- Na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Biorąc jako P punkt przecięcia prostych MH i DE (pod kątem prostym) i rachując na kątach, dojdziemy do równości $|\angle AHM| = |\angle BAC|$ oraz pięciu analogicznych. To, wraz z twierdzeniem sinusów zastosowanym do trójkąta AHM i analogicznych, wystarcza do zastosowania twierdzenia Cevy kończącego dowód.



„Delta” poleca

Biografia geniusza, którego odkrycia zmieniły oblicze nauki.

Polecamy książkę autorstwa Patchena Barssa "Sir Roger Penrose. Geniusz i jego droga do rzeczywistości". Na podstawie odbywających się w ciągu 5 lat niemal cotygodniowych wideokonferencji i rozmów telefonicznych oraz wywiadów przeprowadzonych w Anglii, Kanadzie i Stanach Zjednoczonych Patchen Barss stworzył fascynujący obraz Noblisty. Co ciekawe, autor przyznaje, że choć ściśle współpracował z Rogerem Penrose'em, to nie zatwierdzał on maszynopisu ani nie miał wpływu na wybór osób, z którymi przeprowadzone były wywiady. Nie jest to z pewnością obraz „przefiltrowany”, wyidealizowany.

Gorąco polecamy lekturę tej biografii.