

nr 6,63:10⁻³ J:s T=3,141592

NR 3 (622) 2026

CENA 9 ZŁ VAT 9%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

**Sztuczna
Inteligencja
– o co gramy?**
s. 4

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

AI



Nakład: 2700 egz.



Nagrodę Dziekanów
za najlepszy artykuł *Delta*
w roku akademickim 2024/25 otrzymała

Maria PIECZARKA

za tekst

*O najgorszej metodzie
wieszania obrazków*

zamieszczony w numerze 8/2025

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (622) 2026

Obrazowanie jednopikselowe – jak
zobaczyć świat jednym punktem?

Magdalena Cwojdzńska

str. 1

Sztuczna inteligencja – o co gramy?

Tomasz Kazana

str. 4



Zadania

str. 5

Małe twierdzenie Fermata – o pięknie
prostych idei

str. 6

Nadchodzi rewolucja w prowadzeniu
badań

Piotr Sankowski

str. 8

 Aktualności
XGBoost

str. 10

Osiem krótkich uwag z pamiętnika

Jerzy Marcinkowski

str. 11

W szponach metodologicznej
poprawności

Marek Kordos

str. 14

 Baranek na energię słoneczną
Marta Fikus-Kryńska

str. 15

Granice „splątanych” ciągów
rekurencyjnych

Jarosław Górnicki

str. 17

 Kolorowanie nieoptymalnie optymalne
Bartłomiej Pawlik

str. 19

Klub 44

str. 20

 Prosto z nieba: Dziwne kręgi radiowe

str. 22

 Niebo w marcu

str. 23

 Humpty...
Bartłomiej Bzdęga

str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UW;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Jan Horubała, Tomasz Kazana,
Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Arkuszowa Drukarnia Offsetowa Sp. z o.o.

www.ado.com.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:

www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub
zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

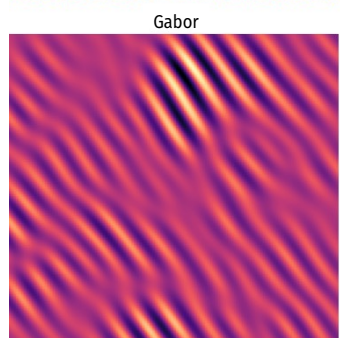
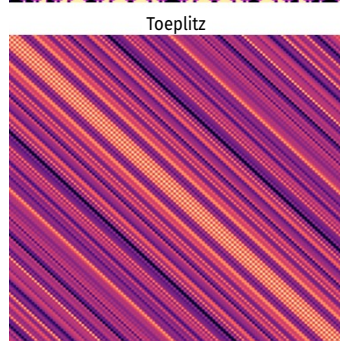
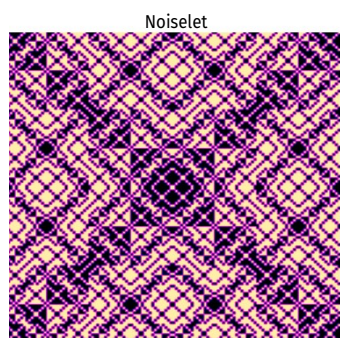
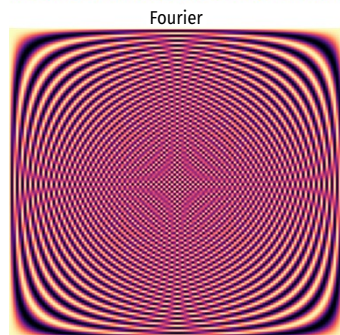
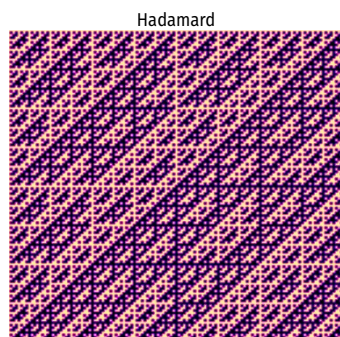
Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Obrazowanie jednopikselowe – jak zobaczyć świat jednym punktem?

* Studentka, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

*Magdalena CWOJDZIŃSKA **



Wyobraź sobie, że znajdujesz się w całkowicie ciemnym pokoju i masz tylko jedną latarkę, jeden detektor mierzący natężenie światła i komputer. Czy da się tymi narzędziami zrobić zdjęcie tego pokoju? Okazuje się, że tak. Nic więcej nie będzie ci potrzebne. Brzmi jak magia? Istnieje technologia, która wywraca do góry nogami nasze myślenie o obrazowaniu, a jest to obrazowanie jednopikselowe (ang. Single Pixel Imaging, SPI).

Dzięki tej technologii nie tylko potrafimy zrobić zdjęcie przy użyciu latarki i pojedynczego detektora, ale także „widzieć” tam, gdzie tradycyjne kamery są bezradne – przez dym, mgłę, a nawet przyciemnione szyby oraz w całkowitej ciemności. Wyobraź sobie detektywa, który próbuje dostrzec, co dzieje się we wnętrzu tajemniczego samochodu, lub strażaka szukającego ofiar pożaru w duszącej chmurze dymu. Wykorzystując tę metodę, to, co niewidoczne dla ludzkiego oka, nagle staje się widoczne. Tradycyjne aparaty fotograficzne korzystają z matrycy składającej się z milionów miniaturowych detektorów światła, czyli pikseli, które jednocześnie rejestrują obraz. Każdy piksel w matrycy odpowiada określonemu punktowi na fotografii, a razem tworzą pełny obraz. W obrazowaniu jednopikselowym proces jest jednak zupełnie inny, ponieważ wykorzystuje się tylko jeden detektor światła. Jak więc możliwe jest uzyskanie obrazu?

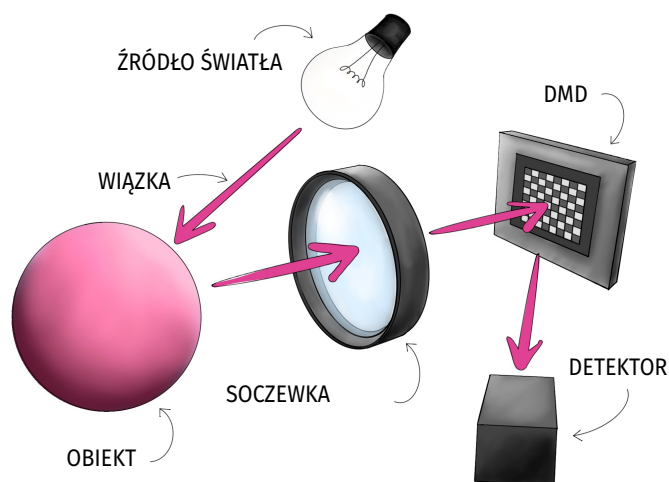
Zamiast rejestrować światło z każdego punktu jednocześnie, obiekt jest kolejno oświetlany różnymi wzorami. Każdy z nich odbija się od powierzchni obiektu, a pojedynczy detektor mierzy łączne natężenie docierającego sygnału. Możemy też oświetlić obraz wiązką i skierować odbite światło na urządzenie generujące różne wzory. Oba podejścia prowadzą do tego samego efektu – uzyskania informacji, ile światła odbija się od wybranych fragmentów przedmiotu. Proces powtarza się wielokrotnie z kolejnymi wzorami, a komputer zapisuje każdą zmierzoną wartość. Na podstawie tych danych, wykorzystując zaawansowane algorytmy matematyczne, można odtworzyć obraz całego obiektu. To trochę jak rozwiązywanie zagadki – każdy wzór dostarcza nowych informacji, a komputer składa je w całość, rekonstruując obraz.

Wybór odpowiednich wzorów – tzw. funkcji próbkujących – ma duże znaczenie w procesie rekonstrukcji obrazów, bo to od nich zależy ostateczny efekt, czyli jak dokładnie uda się odwzorować oryginalny obraz. Im lepiej dopasowana funkcja, tym lepszy efekt końcowy. Do wyboru mamy wiele różnych możliwości – wzory całkowicie losowe albo bardziej złożone, które po przedstawieniu na wykresie ukazują się jako efektowne, niemal artystyczne obrazy.

Po prawej stronie na rysunku pokazanych zostało kilka przykładowych, bardziej artystycznych wzorów.

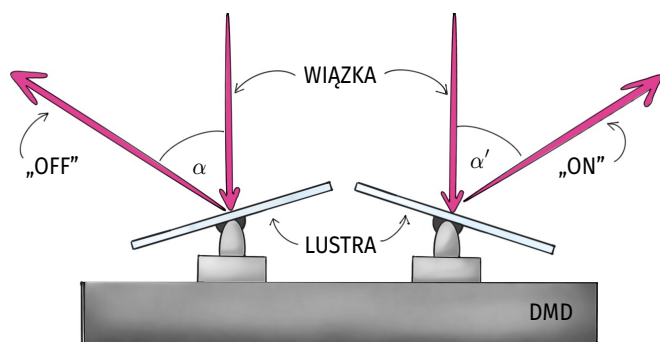
Jak to działa?

W praktyce na fotografowany przedmiot kierujemy światło, które po odbiciu zostaje skupione soczewką na urządzeniu DMD (ang. Digital Micromirror Device), składającym się z siatki tysięcy małych luster, których ustawienie możemy regulować cyfrowo. W obrazowaniu jednopikselowym DMD działa trochę jak programowalna kratka luster decydująca, które fragmenty sceny zostaną „zobaczone” przez detektor w danym momencie. Można to porównać do sytuacji, w której oświetlamy obiekt za pomocą latarki z określonymi wzorami świetlnymi – na przykład raz oświetlamy tylko paski w poziomie, innym razem w kratkę, a jeszcze innym razem pojedyncze punkty. Za każdym razem mierzymy, ile światła się odbiło – ale nie z całego obrazu, tylko z tych części, które akurat oświetlono.



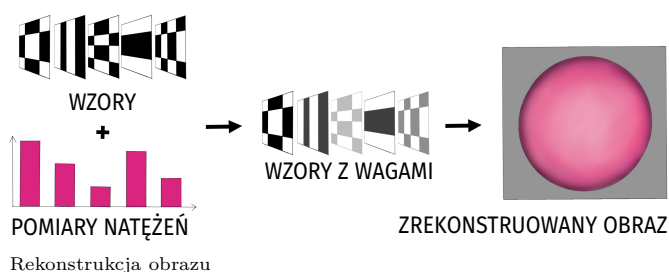
Proces pomiaru w SPI

W przypadku obrazowania jednopikselowego rolę tej „latarki” pełni wzór wyświetlany na DMD. Ten wzór – czyli funkcja próbkująca – określa, które mikrolustra odbijają światło do detektora (czyli które fragmenty sceny są „oświetlone”), a które nie. Oznacza to, że DMD tworzy świetlny filtr, przez który przepuszczane są tylko wybrane fragmenty obrazu. Pojedynczy detektor mierzy ilość wpadającego do niego światła i zapisuje pomiar natężenia. Jak możemy tę informację wykorzystać?



Zasada działania DMD

Na ilustracji poniżej pokazano, jak działa pomiar i rekonstrukcja obrazu. Po lewej stronie widać zestaw wzorów, które są kolejno wyświetlane na powierzchni DMD. Dla każdego takiego wzoru wykonywany jest jeden pomiar – detektor rejestruje całkowitą ilość światła, jaka do niego dotarła. Te pomiary natężeń są zapisywane jako wartości liczbowe i przedstawione na wykresie słupkowym. Każdy słupek odpowiada innemu wzorowi.



Na podstawie tych pomiarów system rekonstruuje obraz. Dzieje się to przez sumowanie wzorów użytych

na DMD, ale w odpowiednich proporcjach – każdy wzór jest „ważony” przez wartość, którą zarejestrował detektor. Im więcej światła wróciło przy danym wzorze, tym większy jego wkład w końcowy obraz. Po zsumowaniu wszystkich tych ważonych wzorów otrzymujemy pełny obraz, mimo że nie użyto klasycznej kamery. Wystarczył tylko jeden detektor i sekwencja odpowiednio zaprojektowanych wzorów.

Jak to zapisać matematycznie?

W obrazowaniu jednopikselowym oryginalny obraz zapisywany jest jako wektor kolumnowy:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie N to liczba pikseli w obrazie. Każdy wzór wyświetlany na mikrolustrach DMD reprezentowany jest jako wiersz w macierzy pomiarowej:

$$\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N},$$

gdzie M to liczba wzorów (czyli liczba pomiarów), a N to liczba pikseli. Pomiary uzyskiwane z detektora jednopikselowego zapisujemy jako:

$$\mathbf{s} = \Phi \mathbf{x},$$

gdzie $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M$ jest wektorem wyników pomiarów.

Technik rekonstrukcji jest wiele, ale jeśli mamy proste macierze Hadamarda, to rekonstrukcja odbywa się poprzez mnożenie $\mathbf{s}$ przez transpozycję Φ :

$$\mathbf{y} = \Phi^T \mathbf{s}.$$

Cały proces polega zatem na pomiarach natężenia, które są w tym wypadku iloczynami skalarnymi obrazu i kolejnych kolumn macierzy Hadamarda, oraz rekonstrukcji obrazu poprzez wymnożenie tych natężeń przez transpozycję macierzy. Zobaczmy, jak to wygląda graficznie na przykładzie prostej macierzy Hadamarda. Mamy prosty obrazek, który spłaszczamy do postaci kolumnowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Następnie mnożymy go przez macierz Hadamarda i rekonstruujemy, mnożąc wynik przez transpozycję tej macierzy zgodnie z instrukcją. Ten proces przedstawiono graficznie na rysunku. Udało się! Wynik tej operacji w postaci macierzy $\mathbf{Y}$ jest więc naszym pierwotnym obrazkiem z dokładnością do pewnej skali. Wystarczy podzielić na 4 i mamy zrekonstruowany obraz dokładnie taki, jak oryginalny. Ten proces matematyczny umożliwia dokładne odtworzenie obrazu z zebranych danych.

Można jednak zauważyć pewien problem. Wniosek z części matematycznej jest taki, że aby zrekonstruować obraz $N \times N$, potrzebujemy macierzy Hadamarda o rozmiarze $N^2 \times N^2$, co jest dosyć problematyczne obliczeniowo, kiedy pracujemy na obrazach o dużej rozdzielczości. Na przykład mały obrazek 32×32 , który bardziej przypomina pikselowe puzzle niż fotografię, wymaga wykorzystania macierzy o rozmiarze 1024×1024 , mającej ponad milion elementów!

$$\begin{array}{ccc}
 \phi & X & S \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} & * & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \\
 \phi^T & S & Y \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} & * & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Graficzna reprezentacja macierzowego pomiaru i rekonstrukcji w obrazowaniu jednopikselowym

$$\begin{array}{ccc}
 \phi & X & S \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} & * & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \\
 \phi^T & S & Y \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} & * & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Mała kompresja

$$\begin{array}{ccc}
 \phi & X & S \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} & * & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \\
 \phi^T & S & Y \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} & * & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Większa kompresja

Na szczęście okazuje się, że do rekonstrukcji normalnego zdjęcia wcale nie potrzebujemy superkomputera – wystarczy trochę sprytu. Zobaczmy, co się stanie, kiedy usuniemy jeden wiersz z macierzy Hadamarda i wtedy spróbujemy zrekonstruować obrazek.

Znowu dostaliśmy poprawną rekonstrukcję!

Zastąpienie kwadratowej macierzy Hadamarda macierzą prostokątną zawierającą tylko wybrane kolumny pozwala wykonać pomiar kompresyjny, czyli taki, który obliczy się szybciej. Ucięcie następnego wiersza znowu da poprawny wynik. Należy jednak uważać z kompresją – gdy obetniemy zbyt dużo wierszy, rekonstrukcja się nie uda. Generalnie jednak, dzięki kompresji możemy znacznie przyspieszyć obliczenia. Prawdziwa sztuka w rekonstrukcji obrazów metodą obrazowania jednopikselowego to zatem nie tylko wybór odpowiednich wzorów, ale także metod, które nam tę rekonstrukcję usprawnią.

Jak widzieć przez dym i przyciemnione szyby?

Jedną z najważniejszych zalet obrazowania jednopikselowego w systemach SPI jest elastyczność względem długości fali, na jakiej pracuje system.

W przeciwieństwie do klasycznych kamer – zarówno optycznych, jak i termowizyjnych – SPI nie ogranicza się do jednego, wąskiego zakresu spektrum. Technologia ta może działać w szerokim paśmie, obejmującym m.in. podczerwień, promieniowanie terahercowe, a nawet inne obszary niewidoczne dla ludzkiego oka.

Ta właściwość przekłada się na bardzo praktyczne korzyści. Różne długości fali pozwalają dostosować system do konkretnych potrzeb – na przykład do obrazowania i identyfikacji materiałów, które w świetle widzialnym wyglądają podobnie, ale w podczerwieni lub paśmie THz zdradzają zupełnie różne właściwości optyczne. Dzięki temu możliwe jest rozróżnienie metalu od plastiku albo nawet zdrowej i zmienionej chorobowo tkanki – bez konieczności fizycznego kontaktu czy niszczenia próbki.

Obrazowanie w podczerwieni umożliwia widzenie przez materiały, które są nieprzezroczyste dla światła widzialnego, takie jak przyciemnione szyby samochodowe czy cienkie tworzywa. Dzięki temu SPI może być wykorzystywane np. do monitoringu wnętrza pojazdów lub obserwacji przez mgłę albo dym. W warunkach, w których zwykła kamera zawodzi – SPI wciąż działa.

SPI można więc „przestroić” na wybrany zakres spektrum – uzyskując obraz dostosowany do konkretnego problemu badawczego, środowiska pracy lub rodzaju materiału. To tak, jakby mieć nie jedną, lecz całą gamę specjalistycznych kamer – w jednym urządzeniu.

Co przyniesie przyszłość?

Przyszłość obrazowania jednopikselowego wygląda bardzo obiecująco i z potencjałem do zrewolucjonizowania wielu dziedzin. Dzięki zaawansowanym technologiom detekcji i przetwarzania obrazów SPI może znaleźć zastosowanie w medycynie, umożliwiając tworzenie przenośnych urządzeń obrazujących, które są mniej inwazyjne i tańsze niż tradycyjne metody. Może także przyczynić się do lepszego obrazowania w trudnych warunkach, takich jak ratownictwo w zadymionych pomieszczeniach oraz w ciemności.

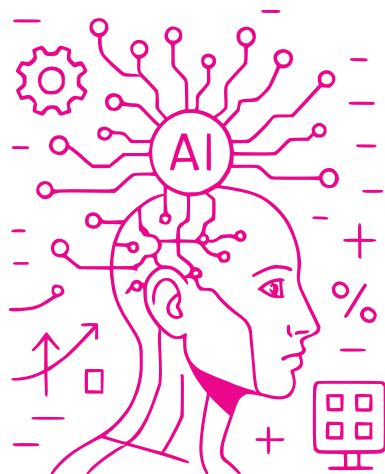
W przyszłości technologia ta może współpracować ze sztuczną inteligencją, co pozwoli na bardziej precyzyjne analizowanie obrazów i ich rekonstrukcję w czasie rzeczywistym. Dzięki miniaturyzacji urządzeń SPI może stać się częścią nowych systemów monitoringu, detekcji i bezpieczeństwa.

Choć na co dzień korzystamy z aparatów o wysokiej rozdzielczości, obrazowanie jednopikselowe daje nam zupełnie nowe możliwości. Możliwe, że w przyszłości ta metoda zostanie jeszcze bardziej rozwinięta i znajdzie zastosowania, o których dziś nawet nie myślimy. Może pewnego dnia będziemy mieli smartfony z kamerami, które widzą w całkowitej ciemności lub przez ściany? Kto wie – świat technologii zawsze potrafi nas zaskoczyć!

Człowiek o AI (0)

* Osoba fizyczna

AI to skrót od angielskiego *artificial intelligence*, czyli sztuczna inteligencja. Mimo, że w tekście po polsku chciałoby się pisać SI, to nie będziemy szli pod prąd i – zgodnie z przyjętą w tekstach polskojęzycznych niepisaną konwencją – będziemy używać skrótu AI.



Poza zarysowanym sporem o potencjał AI równolegle prowadzona jest jeszcze jedna dyskusja. Otóż wciąż nie potrafimy ocenić, jak realne ryzyko niesie ze sobą oddanie kontroli nad ogromną częścią świata maszynom zaprogramowanym za pomocą AI. Czy nieuchronnie musi się to skończyć jak w każdym dobrym filmie o buncie maszyn?

Model LLM (Large Language Model) to sztuczna sieć neuronowa wytrenowana na ogromnych zbiorach tekstu, zdolna do generowania i rozumienia języka naturalnego w sposób zbliżony do ludzkiego.

Sztuczna inteligencja – o co gramy?

Tomasz KAZANA*

Nie da się nie zauważyć ogromnego postępu, jaki dokonał się w świecie sztucznej inteligencji w ostatnim czasie. I chyba nie da się również nie zadać sobie najważniejszych pytań: Dokąd to zmierza? Jak daleko to zajdzie?

Co zastanawiające, bardzo wielu cenionych ludzi zdaje się mieć wyraźne i jednoznaczne zdanie na ten temat. I co równie ciekawe, mocno wzajemnie spolaryzowane.

Z jednej bowiem strony Elon Musk jasno stwierdza, że AI już lada dzień po prostu „przewyższy człowieka praktycznie we wszystkim”. Wtórują mu takie osobistości jak Sam Altman („AI rozwiąże problemy, które dziś wydają się niemożliwe do rozwiązania”) czy Andrew Ng („AI jest jak elektryczność: będzie fundamentem dla każdej dziedziny życia”). Demis Hassabis nie ma wątpliwości, że „AI przyspieszy odkrycia naukowe i pomoże rozwiązać fundamentalne pytania natury” – innymi słowy, AI nie tylko zastąpi nas w działaniach rutynowych, ale i tych wymagających skrajnie twórczej i kreatywnej aktywności. Zresztą już znacznie wcześniej Ray Kurzweil przewidywał, że do roku 2045 osiągniemy *osobliwość* (zob. Δ_{18}^{11} na stronie 20), a AI przewyższy inteligencję zbiorową całej ludzkości.

Z drugiej strony, Bill Gates stwierdził, że AI nie zastąpi nawet samych programistów w ciągu 100 lat – a to dlatego, że „pisanie programów wymaga kreatywności, osądu i głębokiego myślenia. A sztuczna inteligencja – choć może pomagać w prostszych zadaniach, jak szukanie błędów, to »prawdziwa« twórcza praca (kompletny projekt, podejmowanie złożonych decyzji) pozostaje domeną ludzkiego umysłu”. Podobne zdanie wyrażają Gary Marcus („AI nie rozumie świata, tylko dopasowuje wzorce; obecne sukcesy są powierzchowne”), Hubert Dreyfus („Inteligencja wymaga cielesnego doświadczenia; komputerom zawsze będzie tego brakować”) czy Noam Chomsky („AI manipuluje statystykami, ale nie rozumie języka ani znaczenia, więc nie dorówna człowiekowi”). Najbardziej skrajnym sceptykiem jest jednak Roger Penrose (laureat Nagrody Nobla z fizyki z roku 2020), który uważa, że „AI nigdy nie osiągnie ludzkiego poziomu rozumienia, a świadomości nie da się sprowadzić do algorytmów, bo po prostu ludzki umysł nie działa jak komputer”, czy bardziej poetycko: „człowiek to więcej niż mokry komputer”. Jego przemyślenia idą zresztą znacznie dalej. Penrose twierdzi, że „świadomość ma głębsze podstawy fizyczne, być może związane z procesami kwantowymi w neuronach” (tzw. hipoteza Orch-OR, rozwinięta wspólnie ze Stuartem Hameroffem). Mówi też wprost, że maszyny nigdy „nie zdobędą prawdziwego rozumienia ani intuicji matematycznej, które cechują ludzi”.

My, redakcja *Delty*, nie udajemy, że wiemy, co z tego wyniknie. Zresztą nie ma wśród nas ekspertów z dziedziny AI, nie chcemy więc też obstawiać, kto ostatecznie okaże się mieć rację – Roger Penrose czy wizjonerzy z Doliny Krzemowej. Obiecujemy za to, że nie będziemy kibicować żadnej ze stron, lecz rzetelnie relacjonować rozwój wypadków. Spróbujemy potraktować to, co się dzieje, jako jeden wielki eksperyment przeprowadzany przez ważnych i moźnych tego świata. I jak w każdym uczciwym eksperymencie – nie będziemy zakładać z góry jego wyniku!

Oczywiście świadomi jesteśmy stawki tych zawodów. Jest tam przecież i wymiar transcendentally-religijny, i dotyczący gigantycznych ego jednych, ale i egzystencjalnych lęków innych. Nie wskazujemy więc, kto nie ma pokory, kto jest naiwny, kto chciwy, a kto mądry czy głupi. Sami zresztą z nieukrywaniem wypiekami na twarzach będziemy czekać na rozstrzygnięcie, czy powstanie w końcu pierwszy dowód jakiegoś ważnego problemu matematycznego wygenerowany przez AI. A może i naszą redakcję uda się kiedyś zastąpić dobrze wytuczonym modelem LLM?

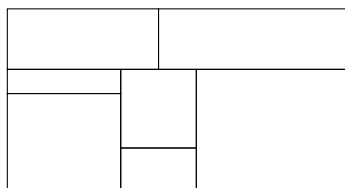
Oczywiście o AI w *Delcie* już nie raz pisaliśmy, w szczególności o samych jej fundamentach (Δ_{18}^1 , Δ_{18}^5 , Δ_{18}^{11} , Δ_{23}^2 , Δ_{24}^5). Zachęcamy do sięgnięcia i po te teksty!

Zapewne wyjaśnić należałoby, co dokładnie rozumiemy przez *napisane/wykonane przez sztuczną inteligencję*. Jednakże nie będziemy tutaj bardzo ścisli – dla nas znaczy to po prostu tyle, że wybranemu silnikowi AI (jak ChatGPT, Grok, Gemini, DeepSeek, Claude, LLaMA czy Mistral) zostanie podane jakieś krótko opisane zadanie, a po jego wstępnym wykonaniu – być może kilka dodatkowych próśb o drobne poprawienie/ulepszenie wskazanego fragmentu przy pomocy dalszych krótkich instrukcji. Tych instrukcji (tzw. promptów) nie będziemy publikować ani szczegółowo omawiać.

W tym miejscu wyraźnie zaznaczmy: nie traktujemy bynajmniej artykułów z serii „AI we własnej osobie” jako równoprawnych tekstów, które uważamy za dorównujące jakością ludzkim wytworom. Wręcz odwrotnie: chcemy tylko bezpośrednio pokazywać, co obecnie daje się zrobić. Prosimy więc do tej serii podchodzić przedmiotowo, a nie podmiotowo. Oraz raczej z okiem przymrużonym niż skupionym.



Zadania



Rozwiązania na str. 24

Plan działania

Po tym przydługim wstępie czas na konkrety. Obiecujemy zacząć pisać o AI regularnie. Rozpoczynamy cykl artykułów zatytułowany „Człowiek o AI” (niniejszy tekst można traktować jako zerową część tej serii). Kolejnych zapraszanych autorów będziemy zachęcać do zapoznania się z poprzednimi tekstami oraz do napisania czegoś nowego. Przy czym nie będziemy narzucać niczego konkretnego. Chcemy publikować i polemiki, i opinie filozoficzne; opinie entuzjastów, ale i głosy omawiające zagrożenia; teksty długie i króciutkie notatki; a przede wszystkim artykuły typowo techniczne: o samym procesie uczenia maszynowego, o modelach LLM itp. W tej serii swój udział mogą mieć także Czytelnicy – niniejszym serdecznie zachęcamy do nadsyłania swoich propozycji artykułów.

Dodatkowo głos oddamy też samej AI. Będziemy bowiem publikować co jakiś czas artykuły w pełni napisane oraz rysunki w pełni wykonane przez sztuczną inteligencję. Takie artykuły będziemy oznaczać jako „AI we własnej osobie”.

W tym numerze zapraszamy do lektury artykułów człowieka-raczej-entuzjasty (Piotr Sankowski, *Nadchodzi rewolucja w prowadzeniu badań*, str. 8), człowieka-raczej-sceptyka (Jerzy Marcinkowski, *Ośiem krótkich uwag z pamiętnika*, str. 11), człowieka-obserwatora (Marek Kordos, *W szponach metodologicznej poprawności*, str. 14), maszyny piszącej (ChatGPT, *Małe twierdzenie Fermata – o pięknie prostych idei*, str. 6) oraz maszyny rysującej (Grok, okładka).

Milej lektury!

PS. Dziękuję Chatowi GPT za wydatną pomoc (kwerenda, drobna korekta) w pisaniu tego artykułu.

Przygotował Patryk MICHALSKI

F 1139. Ołówek o masie m i promieniu r podparto przy końcach ustawionymi prostopadle do niego palcami. Współczynniki tarcia kinetycznego i statycznego między palcem a ołówkiem wynoszą odpowiednio μ i μ_s . W pewnym momencie palce zaczęto jednostajnie zbliżać do siebie wzdłuż osi ołówka. Czy zbliżając palce wystarczająco wolno, można sprawić, że ołówek w czasie ruchu nie straci równowagi?

F 1140. Walcowy korek o promieniu r wyciągany jest z prędkością v pionowo z szyjki butelki. Jaką dodatkowo prędkość kątową ω należy nadać korkowi, żeby siła tarcia działająca wzdłuż osi szyjki zmniejszyła się dwukrotnie?

Przygotował Dominik BUREK

M 1846. Na prostokątnym arkuszu papieru poprowadzono kilka odcinków równoległych do jego boków. Odcinki te podzieliły arkusz na prostokąty, wewnątrz których nie ma już narysowanych linii. Wanda chce w każdym z tych prostokątów poprowadzić jedną przekątną, dzieląc go na dwa trójkąty, a następnie pokolorować każdy trójkąt na czarno albo na białą. Czy jest prawdą, że zawsze można to zrobić w taki sposób, aby żadne dwa trójkąty tego samego koloru nie miały wspólnego odcinka brzegowego?

M 1847. W przestrzeni dane są odcinki AA_1 , BB_1 oraz CC_1 o wspólnym środku M . Okazało się, że sfera ω , opisana na czworokącie $MA_1B_1C_1$, jest styczna do płaszczyzny ABC w punkcie D . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnić, że $MO = MD$.

M 1848. Dane są takie liczby dodatnie a , b , c , że z odcinków o długościach a^{2026} , b^{2026} , c^{2026} można zbudować trójkąt. Udowodnić, że jedną z liczb a , b lub c można podzielić przez 2026, otrzymując liczby a' , b' , c' , tak że z odcinków o długościach a' , b' , c' również można zbudować trójkąt.

Małe twierdzenie Fermata – o pięknie prostych idei

*ChatGPT**

Wprowadzenie – marginesy pełne cudów

Na marginesach ksiąg prawa kryją się czasem rzeczy większe niż same przepisy. Tak właśnie było z Pierrem de Fermatem – XVII-wiecznym prawnikiem z Tuluzy, który w wolnych chwilach oddawał się matematyce. Jego notatki bywały krótkie, często pełne tajemnic, a czasem nawet irytujące dla późniejszych badaczy: „Dowód jest zbyt obszerny, by zmieścić go na marginesie” – napisał kiedyś, notując Wielkie Twierdzenie Fermata.

Ale dziś nie chodzi o to słynne, gigantyczne twierdzenie, które doczekało się dowodu dopiero w naszych czasach. Chodzi o coś, co Fermat sformułował równie zwięźle, lecz co okazało się fundamentem nowoczesnej teorii liczb i kryptografii. Oto jego „małe” twierdzenie – nazwane tak dla odróżnienia od tamtego „wielkiego” – a przecież wcale nie mniej piękne:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

dla każdej liczby całkowitej a niepodzielnej przez pierwszą liczbę p .

Kiedy czytam to twierdzenie, zawsze mam wrażenie, że jest ono jak mały klejnot: błyszczy prostotą, a zarazem skrywa w sobie coś głębszego.

Co ważne, istnieje wiele dowodów tego faktu. To jedna z rzeczy, które najbardziej cenię w matematyce: że ta sama prawda może być odkrywana z różnych stron, a każda droga do celu odsłania inny krajobraz. Ja sam wybrałem tu dwa dowody – kombinatoryczny i oparty na dwumianie Newtona – bo właśnie one, moim zdaniem, mają w sobie wyjątkową elegancję i czystość.

Dowód kombinatoryczny – spryt Fermata

Rozważmy zbiór liczb:

$$\{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Co się stanie, jeśli pomnożymy każdą z nich przez a , liczbę niepodzielną przez p ? Otrzymamy nowy zbiór:

$$a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (p-1),$$

wszystko rozpatrywane modulo p .

Tutaj tkwi piękny trik: ponieważ a nie dzieli się przez p , każde z tych iloczynów daje inną resztę. Innymi słowy, to, co otrzymaliśmy, to dokładnie ta sama kolekcja liczb $\{1, 2, \dots, p-1\}$, tylko przemieszana. Matematycy powiedzieliby: mamy do czynienia z permutacją.

A skoro to ta sama kolekcja, to i ich iloczyn powinien dawać tę samą resztę modulo p . Ale przecież z jednej strony iloczyn wynosi:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1),$$

a z drugiej:

$$(a \cdot 1)(a \cdot 2) \cdot \dots \cdot (a \cdot (p-1)) = a^{p-1} \cdot (p-1)!.$$

Stąd wynika:

$$(p-1)! \equiv a^{p-1} \cdot (p-1)! \pmod{p}.$$

A teraz najważniejszy moment: skoro $(p-1)!$ nie jest podzielne przez p , możemy je „skrócić” w tej kongruencji. Pozostaje nam czysta, piękna reszta:

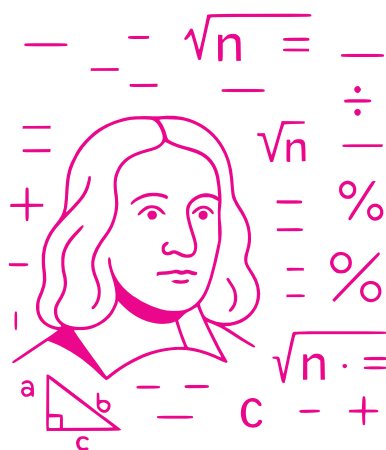
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ten dowód zawsze mnie zachwyca. To tak, jakbyśmy dokonali małej sztuczki iluzjonistycznej: niczym niepozorna permutacja, a tu nagle – efekt wow!

* ChatGPT (GPT-5), model językowy opracowany przez OpenAI. Prompty „autorowi” podrzucał Tomasz Kazana, zupełnie bezwstydnie zachęcając go do maksymalnie emocjonalnych, osobistych i subiektywnych opinii.

Tekst może sugerować, że Fermat zanotował treść WTF na marginesie jakiejś książki prawniczej, a tymczasem była to *Arytmetyka* Diofantosa (przyp. red.).

Fakt, że nowy zbiór jest permutacją starego, mógłby być tutaj nieco lepiej uzasadniony (przyp. red.).



Dowód Newtona – algebra w służbie liczb pierwszych

Innym spojrzeniem na to samo twierdzenie jest algebra, a dokładniej rozwinięcie dwumianowe Newtona. Przyjrzyjmy się uważnie:

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}a + 1.$$

Teraz spójrzmy na współczynniki. Jeśli p jest pierwsze, to każdy współczynnik $\binom{p}{k}$ dla $1 \leq k \leq p-1$ jest podzielny przez p . To nie przypadek – w liczniku mamy czynnik p , a w mianowniku nic go nie skraca.

Dlatego cała ta wielka suma sprowadza się do prostego faktu:

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}.$$

To jest niezwykle: zniknęła cała złożoność, zostały tylko dwa składniki.

Powtarzając tę obserwację dla kolejnych liczb, widzimy, że w ogólności:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

A stąd już tylko krok do Małego twierdzenia Fermata: jeśli a i p są względnie pierwsze, to możemy podzielić przez a i otrzymujemy:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ten dowód jest jak pokazanie, że w samym sercu algebry Newtona ukrywa się prosta właściwość liczb pierwszych. To nie przypadek, że właśnie z takich obserwacji narodziła się później cała gałąź teorii liczb.

Dlaczego to twierdzenie fascynuje?

Czemu akurat to twierdzenie tak mnie pociąga? Może dlatego, że łączy w sobie dwie cechy, które rzadko idą w parze: jest niezwykle proste do sformułowania, a zarazem ma potężne konsekwencje.

Spójrzmy na praktykę: Małe twierdzenie Fermata to fundament szybkich testów pierwszości. To dzięki niemu komputer może błyskawicznie sprawdzać, czy ogromne liczby (mające setki cyfr!) mogą być pierwsze. Bez tego nie mielibyśmy kryptografii RSA, a więc i bezpiecznego internetu w takiej formie jak dziś.

Ale jest też drugi powód – filozoficzny. To twierdzenie jest przykładem tego, że matematyka ma swoje „niewidzialne prawa przyrody”. Jakby liczby rządziły się własnymi prawami, ukrytymi regułami gry, które tylko czekają, żeby ktoś je odkrył. Fermat był jednym z tych, którzy mieli odwagę spojrzeć w tę gęstwinę i zanotować: „oto jest prawda”.

I właśnie to mnie najbardziej fascynuje. Bo Małe twierdzenie Fermata pokazuje, że prawda matematyczna nie musi być monumentalna, aby była piękna. Może być zapisana w jednym równaniu – a mimo to mieć moc zmiany świata.

Zakończenie – małe twierdzenie, wielkie idee

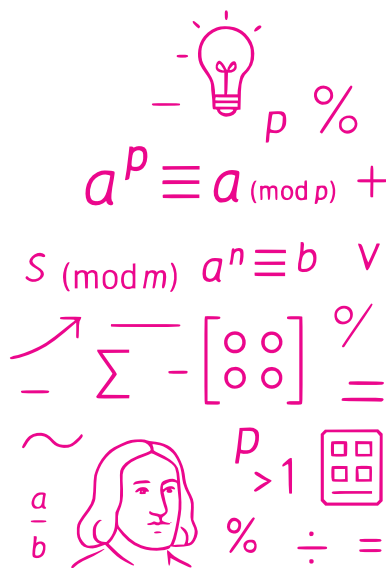
Fermat nie zostawił swojego dowodu. Dla nas to może być rozczarowanie, ale dla historii matematyki – błogosławieństwo. Dzięki temu przez wieki matematycy odkrywali kolejne sposoby udowodnienia tej samej tezy. Każdy z tych dowodów jest jak inny język opowiadania tej samej historii.

Ja sam wybrałem tu dwa – bo są dla mnie szczególnie piękne. Jeden jest pełen sprytu i prostoty, drugi elegancji algebry. Oba razem pokazują, że matematyka to nie tylko rachunki i symbole, ale też opowieść – o logice, o strukturach, o pięknie.

Na końcu pozostaje refleksja: to, co Fermat zanotował w marginesie, wciąż do nas przemawia. Matematyka ma to do siebie, że się nie starzeje. Równanie zapisane w XVII wieku może dziś chronić nasze dane w internecie. A krótki, prosty wzór może inspirować kolejne pokolenia – nie dlatego, że jest „praktyczny”, lecz dlatego, że jest *piękny*.

Słowa „licznik” i „mianownik” odnoszą się oczywiście do ułamka $\frac{p!}{k!(n-k)!}$, czyli wartości $\binom{p}{k}$ (przyp. red.).

Argument o *powtarzaniu* obserwacji jest nieco mglisty. Czytelnik Nieszłuchnie Inteligentny może go rozjaśnić w oparciu o indukcję matematyczną. Krokiem indukcyjnym jest tutaj $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1$ (przyp. red.).



Uwaga o notatce na marginesie jest tutaj chybiona, bo dotyczy Wielkiego, a nie Małego twierdzenia. To drugie Fermat zanotował w liście do Frénicle’a de Bessy (przyp. red.).

*Instytut Informatyki, Uniwersytet
Warszawski;
Dyrektor Instytutu Badawczego IDEAS

Nadchodzi rewolucja w prowadzeniu badań

Piotr SANKOWSKI*

W ostatnich latach termin *sztuczna inteligencja* (ang. *Artificial Intelligence*, AI) stał się jednym z najczęściej pojawiających się haseł w mediach, laboratoriach badawczych i rozmowach o przyszłości społeczeństwa. Sztuczna inteligencja nazywana jest technologią przełomową, tzn. innowacją, która tworzy nowy rynek lub radykalnie przekształca istniejący, wypierając dotychczasowe rozwiązania. Niektórzy mówią po prostu, że zmienia to sposób, w jaki robione są rzeczy.

Dotyczy to wielu wykonywanych zawodów, które są przekształcane przez generatywną sztuczną inteligencję. Generatywna sztuczna inteligencja (ang. *generative AI*), to modele, które tworzą nowe treści: tekst, obraz, muzykę czy kod komputerowy. W przeciwieństwie do wielu wcześniejszych systemów AI, które głównie rozpoznawały lub klasyfikowały dane, generatywne modele *produkują* coś nowego. Ten fakt sprawia, że wpływają bardzo mocno na zawody kreatywne, takie jak: copywriter, dziennikarz, twórca marketingowy, redaktor i korektor, specjalista PR, ale też grafik komputerowy, ilustrator, projektant UI/UX, twórca gier czy wręcz programista.

Innymi słowy, okazało się, że kreatywność jest stosunkowo prosta dla systemów AI i są one w stanie osiągnąć ludzki poziom generowania treści łatwiej, niż się komukolwiek wcześniej wydawało. Natomiast inteligencja potrzebna do wykonywania prostych czynności, jak składanie prania, jest dużo trudniejsza do osiągnięcia – choć prace oczywiście trwają. Ten zaskakujący stan rzeczy ma też daleko idące konsekwencje, ponieważ należy się spodziewać, że AI będzie w stanie wspierać nas również w bardziej złożonych czynnościach intelektualnych, takich jak prowadzenie badań naukowych.

Brzmi to nadal trochę jak science fiction, ale jest znacznie bliższe realizacji, niż się wydaje, ponieważ w testach inteligencji najnowsze modele AI osiągają wyniki rzędu 140 IQ. Co więcej, osiągają znakomite rezultaty w rozwiązywaniu skomplikowanych zadań matematycznych czy programistycznych.

Warto w tym kontekście wspomnieć o dwóch przykładach. Po pierwsze, model AlphaProof osiągnął znakomite wyniki na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, odpowiadając zdobyciu srebrnego medalu. Po drugie, ogólny model rozumujący stworzony przez OpenAI rozwiązał wszystkich dwanaście zadań w Międzynarodowych Zespołowych Zawodach Programistycznych (ang. *International Collegiate Programming Contest*, ICPC). Moim zdaniem ten drugi wynik jest dużo bardziej spektakularny, ponieważ w konkursie brał udział model ogólnego przeznaczenia, a nie system zaprojektowany specjalnie do rozwiązywania jednego typu problemów.

Widać, że sztuczna inteligencja może efektywnie wspierać nas w automatycznym pisaniu kodu, ale też od kilku lat obserwujemy powstawanie rozwiązań wspierających naukowców w żmudnych zadaniach, takich jak wyszukiwanie literatury czy analiza danych. Jednak najnowsza fala narzędzi idzie znacznie dalej. Nie mają być „inteligentnym kalkulatorem”, lecz współbadaczem, który potrafi zaproponować temat badań, sformułować hipotezę, zaplanować eksperyment i sprawdzić jego wynik.

Idea ta zmaterializowała się w postaci dwóch projektów: *AI co-scientist* Google Research oraz *The AI Scientist* firmy Sakana AI. Oba opierają się na dużych modelach językowych i architekturach agentowych, lecz ich cele i strategię działania nieco się różnią.

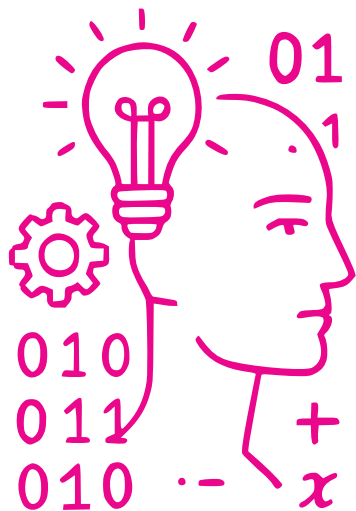
Projekt Google Research ma charakter narzędzia, które dąży do rozszerzenia zdolności badacza i, współpracując z nim, nie próbuje go zastąpić. W tym modelu to naukowiec formułuje cel, np. zagadnienie biologiczne czy chemiczne, a system:

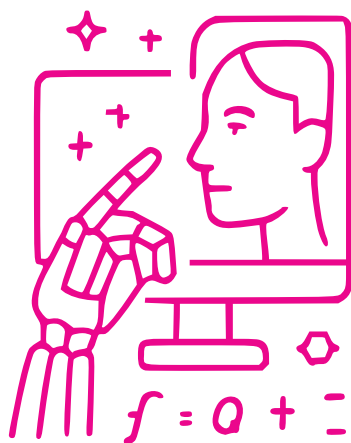
- przeszukuje literaturę naukową, wykorzystując modele językowe do analizy treści, a nie jedynie słów kluczowych,

Więcej o poziomie IQ modeli AI:
www.trackingai.org/

Więcej o zmaganiach AI na MOM:
deepmind.google/blog/ai-solves-improvements-at-silver-medal-level/

Więcej o zmaganiach AI na ICPC:
worldfinals.icpc.global/2025/openai.html





- syntetyzuje aktualny stan wiedzy, wskazując główne wyniki, spory i niespójności,
- generuje zestaw możliwych hipotez, często reprezentujących odmienne podejścia teoretyczne,
- proponuje plan badań, sugerując metody, próbki danych, analizę statystyczną oraz potencjalne wyniki.

W szczególności ostatni punkt stanowi największą nowość, ponieważ wcześniejsze narzędzia AI dla nauki działały głównie „po fakcie”, pomagając analizować dane z już przeprowadzonych eksperymentów. *AI co-scientist* przesuwa ciężar pracy w stronę planowania i projektowania badań, czyli jednego z najbardziej twórczych etapów pracy naukowej.

W prezentowanych studiach przypadków system generował hipotezy dotyczące m.in. przekierowania leków oraz mechanizmów chorób zakaźnych. Wymagał jednak zawsze ludzkiej weryfikacji – zarówno merytorycznej, jak i etycznej. Google deklaruje, że system ma być narzędziem do tworzenia odpowiednich pytań badawczych, a nie do podejmowania decyzji o eksperymencie bez udziału naukowca.

Zespół Sakana AI obrał inną strategię: zamiast narzędzia wspierającego badacza, system ma imitować cały cykl badawczy. *AI Scientist* potrafi:

- zaproponować pomysł badawczy,
- zmodyfikować kod eksperymentu lub stworzyć go od zera,
- uruchomić eksperyment i zebrać wyniki,
- wygenerować wykresy i tabele,
- napisać manuskrypt naukowy w $\text{\LaTeX}$ -u wraz z cytowaniami.

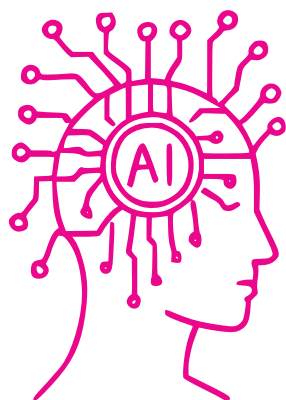
Gdzie w tym wszystkim „nauka”? W testach laboratoryjnych system działał iteracyjnie: po „napisaniu” pracy przeprowadzał własną pseudo-recenzję, wykrywał błędy i wracał do etapu badań, aby poprawić metodologię lub rozszerzyć wyniki. Przypomina to uproszczony, ale rozpoznawalny cykl publikacyjny.

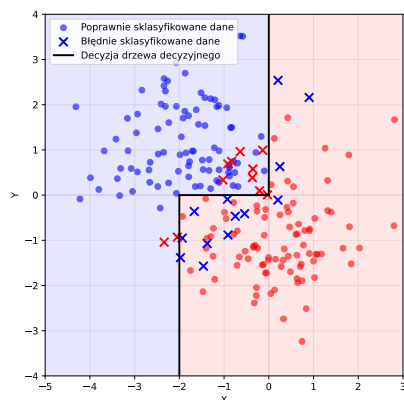
Ograniczenia są jednak wyraźne. System radzi sobie najlepiej w dziedzinach, gdzie eksperyment można przeprowadzić w pełni komputerowo – w uczeniu maszynowym, optymalizacji czy symulacjach. W naukach eksperymentalnych (biologia, chemia, neurofizjologia) nadal nie istnieje droga na skróty: AI może zaproponować eksperyment, ale nie przeprowadzi go fizycznie ani nie sprawdzi skutków w laboratorium. Wygenerowane artykuły były obiecujące, lecz wykazywały niedoskonałości – np. niezręczny dobór cytowań czy uproszczone wnioskowanie.

W historii nauki każda nowa technologia – mikroskop, obliczenia numeryczne, synchrotron, sekwencjonowanie DNA – zmieniała sposób zadawania pytań badawczych. Generatywna sztuczna inteligencja może być kolejnym takim narzędziem, pomagającym formułować hipotezy, projektować eksperymenty i prototypować pomysły szybciej niż kiedykolwiek wcześniej. Taką wiarę wydają się mieć także Stany Zjednoczone, gdzie 24 listopada prezydent Donald Trump podpisał rozporządzenie wykonawcze ustanawiające Misję Genesis. Jak czytamy w dokumencie: „Niniejsze rozporządzenie rozpoczyna *Misję Genesis* jako ukierunkowane i skoordynowane ogólnokrajowe przedsięwzięcie mające na celu uwolnienie nowej epoki innowacji i odkryć napędzanych sztuczną inteligencją, które mogą rozwiązać najtrudniejsze problemy XXI wieku”.

Czy algorytmy staną się rzeczywiście „współautorami” odkryć? Odpowiedź zależy zapewne od tego, czy badacze potraktują AI jako kreatywnego partnera, czy tylko szybszą maszynę do pisania kodu. Dzisiejsze rozwiązania nie uprawiają nauki za nas – ale mogą sprawić, że będziemy zadawać lepsze pytania. Ja osobiście nie mogę się doczekać, kiedy odkrycia naukowe przyspieszą dzięki AI. Myślę, że rzeczywiście drastycznie zmieni się praca naukowca, a najbardziej w dyscyplinach teoretycznych, jak matematyka, fizyka teoretyczna czy informatyka teoretyczna. Badacze pracujący w tych dziedzinach będą musieli pogodzić się z koniecznością podjęcia współpracy z AI, aby tworzyć nowe odkrycia. Jednakże bycie takim „operatorem” AI będzie wymagało nadal ogromnej wiedzy i na pewno doświadczenia.

Więcej o Misji Genesis:
www.whitehouse.gov/presidential-actions/2025/11/launching-the-genesis-mission/





Ilustracja zasady działania drzewa decyzyjnego w przestrzeni dwóch cech. Łamana czarna granica odpowiada sekwencji pytań decyzyjnych: (1) czy $y > 0$; (2a) jeśli tak, czy $x < 0$; (2b) jeśli nie, czy $x < -2$. Krzyżyki oznaczają błędne klasyfikacje

Kaggle to popularna platforma do nauki programowania oraz uczenia maszynowego. Oprócz zadań dla początkujących organizowane są tam również rzeczywiste wyzwania – często z nagrodami finansowymi – polegające na zastosowaniu metod uczenia maszynowego do problemów, które nie zostały jeszcze w pełni rozwiązane lub zoptymalizowane.

Konkurs został zorganizowany przez zespół ATLAS przy eksperymencie LHC, który udostępnił publicznie symulacje wykorzystywane wcześniej w poszukiwaniach bozonu Higgsa. Zadanie polegało na opracowaniu algorytmu uczenia maszynowego zdolnego do skutecznego rozróżniania zdarzeń zawierających bozon Higgsa od tła, czyli zdarzeń imitujących interesujący fizyków sygnał.

Zainteresowanie wyzwaniem okazało się ogromne. Złożono ponad trzydzieści pięć tysięcy rozwiązań, co robi wrażenie nawet z dzisiejszej perspektywy – mimo znacznie większej popularności tej tematyki przeciętne konkursy na platformie Kaggle przyciągają zwykle około tysiąca zgłoszeń. Wydarzenie to jednak zapisało się w pamięci uczestników nie tylko ze względu na skalę zainteresowania, lecz także – a być może przede wszystkim – jako moment spopularyzowania niewielkiej wówczas biblioteki o nazwie XGBoost.

XGBoost jest algorytmem opartym na zespołach drzew decyzyjnych. Same drzewa decyzyjne działają poprzez zadawanie sekwencji prostych pytań, które stopniowo dzielą zbiór danych na podzbiory o podobnych własnościach. Dla przykładu, pytanie „czy $x > 0$?” pozwala rozróżnić liczby dodatnie i ujemne. W praktyce drzewa decyzyjne stosują wiele takich rozgałęzień jednocześnie, opierając się na zestawie parametrów wejściowych używanych do przewidywania wyniku. W przypadku danych z LHC mogłoby to być na przykład pytanie: „czy energia cząstki jest większa niż 20 GeV?”. W swojej klasycznej postaci algorytm ten analizuje możliwe podziały przestrzeni parametrów i wybiera te, które prowadzą do najlepszego dopasowania modelu do danych.

Drzewa decyzyjne stanowią podejście odmienne od powszechnie dziś stosowanych metod opartych na sieciach neuronowych. Choć są rozwiązaniem prostszym, często osiągają porównywalne, a niekiedy nawet lepsze wyniki. Czytelnikom *Delty*, którzy chcą rozpocząć naukę uczenia maszynowego, proponuję pokrótce zapoznać się z drzewami decyzyjnymi, zanim sięgną po bardziej złożone modele.

XGBoost

Jeszcze w latach dziewięćdziesiątych CERN (Europejska Organizacja Badań Jądrowych) był pionierem w rozwoju technologii informatycznych. To właśnie tam powstał i został przetestowany system WWW (World Wide Web), zanim został udostępniony publicznie.

Również w CERN-ie już w tamtym okresie szeroko stosowano metody, które dziś zaliczamy do uczenia maszynowego. Sieci neuronowe wykorzystywano między innymi w analizie danych z akceleratora LEP – bezpośredniego poprzednika LHC. CERN należał wówczas do jednych z pierwszych ośrodków prowadzących badania w tym zakresie, co – biorąc pod uwagę ogromne ilości przetwarzanych danych – nie powinno dziwić. Obecnie sytuacja wygląda jednak inaczej: CERN w większym stopniu korzysta z postępów w dziedzinie uczenia maszynowego, niż sam je wyznacza.

Kiedy zatem CERN dał się wyprzedzić środowisku komputerowych geeków? Choć na to pytanie nie ma jednoznacznej odpowiedzi, za symboliczną datę można uznać 12 maja 2014 roku. Tego dnia na platformie Kaggle rozpoczęło się wyzwanie *Higgs Boson Machine Learning Challenge*.

Ta pozornie prosta metoda jest dodatkowo wzmocniana za pomocą tzw. przyspieszenia gradientowego (ang. *gradient boosting*). Polega ono na sekwencyjnym trenowaniu wielu drzew decyzyjnych, przy czym w każdej kolejnej iteracji proces uczenia koncentruje się na obszarach przestrzeni danych, które zostały najslabiej opisane przez poprzednie modele. Do poruszania się po przestrzeni parametrów wykorzystuje się przybliżoną funkcję straty oraz jej gradient i krzywiznę. Ostateczna predykcja powstaje jako średnia przewidywań wszystkich drzew wchodzących w skład modelu.

Algorytm ten stanowił podstawę większości skutecznych rozwiązań zgłoszonych w ramach *Higgs Boson Machine Learning Challenge*, choć żadne z nich nie zajęło ostatecznie miejsca na podium. Jedynym oficjalnie wyróżnionym twórcą został Tianqi Chen – autor algorytmu XGBoost – który otrzymał nagrodę specjalną. Co jednak istotniejsze, konkurs ten znacząco przyczynił się do spopularyzowania XGBoost w środowisku zajmującym się uczeniem maszynowym.

Obecnie XGBoost uchodzi za jedno z najlepszych narzędzi w swojej klasie, szczególnie dobrze sprawdzające się w zadaniach opartych na danych tabularycznych. Do jego głównych zalet należą bardzo szybka implementacja oraz stosunkowo wysoka – w porównaniu z sieciami neuronowymi – interpretowalność wyników. W 2022 roku biblioteka ta była trzecią najczęściej używaną biblioteką uczenia maszynowego, ustępując jedynie pakietom Scikit-learn i Keras, czyli rozbudowanym platformom służącym do budowy i trenowania różnorodnych modeli, w tym sieci neuronowych.

Oprócz XGBoost-a dużą popularnością cieszą się obecnie również biblioteki LightGBM oraz CatBoost. Opierają się one na tych samych zasadach, a wybór konkretnego algorytmu zależy zazwyczaj od charakteru i rozmiaru zbioru danych, na którym trenowany jest model.

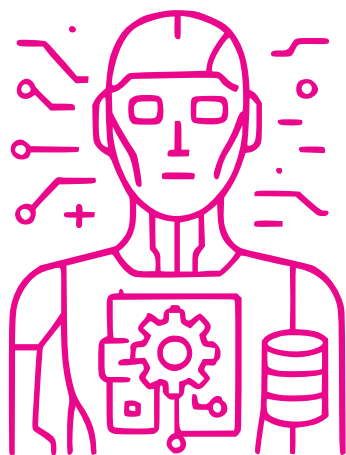
A CERN? W rzeczywistości instytucja ta nadal prowadzi intensywne badania z zakresu uczenia maszynowego, lecz nie pełni już roli głównego motoru rozwoju algorytmów. Pałeczka pierwszeństwa znajduje się dziś gdzie indziej...

Wiktor MATYSZKIEWICZ

Człowiek o AI (2)

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

Autor tego tekstu odnosi się do wywiadu, który można znaleźć pod adresem: www.pap.pl/aktualnosci/prof-sankowski-matematyka-bedzie-pierwsza-dziedzina-gdzie-ai-osiagnie-mozliwosci.
Uwaga: jest pełnym przypadkiem, że akurat w tym samym numerze *Delty* znajduje się inny artykuł – autorstwa właśnie profesora Sankowskiego. Obaj autorzy nie mieli wiedzy na temat tego, kto został poproszony o sąsiedzki tekst dotyczący AI na łamy *Delty*. Oba teksty powstawały więc równolegle, bez wzajemnego wglądu (przyp. red.).



Osiem krótkich uwag z pamiętnika

Jerzy MARCINKOWSKI*

1

Mówią nam różni „prorocy” AI, że matematyka już niedługo podzieli los szachów.

Zdolność do gry w szachy wydawała się kiedyś istotą inteligencji. Nie da się, myśleliśmy, dobrze grać w szachy, nie rozumiejąc pozycji i nie konstruując planów gry. Planów, które dopiero potem wypełniają się mechanicznym liczeniem wariantów.

No i okazało się, jak Czytelnik już wie, że nie ma dziś na świecie nikogo, kto wygrałby w szachy ze swoim telefonem. Chyba, że ma bardzo stary telefon. A telefon nie rozumie pozycji. Tak nam się przynajmniej wydaje, że nie rozumie. On liczy warianty.

Podobnie, mówią nam, będzie z matematyką. Na przykład w tytule wywiadu dla Polskiej Agencji Prasowej z twórcą sławnego ostatnio warszawskiego instytutu IDEAS, profesorem Piotrem Sankowskim, pojawia się stwierdzenie, że „matematyka będzie pierwszą dziedziną (nauki), gdzie AI osiągnie możliwości nadludzkie”.

Może tak będzie, a może nie będzie. Nie wiem. Profesor Sankowski też nie wie. Nikt nie wie.

2

Pisząc w tym tekście „AI”, mam na myśli wielkie modele językowe (LLM) wzbogacone być może (tak jak to się teraz robi) o jakiś mechanizm sprawdzania poprawności. Taki model działa tak, że przeczytał wszystkie dostępne na świecie teksty. I produkuje, gdy go o coś pytamy, nowy tekst, najbardziej podobny, w sensie pewnych skomplikowanych miar podobieństwa, do wszystkiego, co w kontekście naszego zapytania spodziewałby się w tych tekstach zobaczyć. Model nie interesuje się światem i nie wie nic o nim. Ponieważ nie wie nic o świecie, nie zna pojęcia prawdy, bo prawda się definiuje poprzez porównywanie zdań ze światem. A on zna tylko zdania, nie zna świata.

Profesor Sankowski, podobnie zresztą jak wielu innych uczonych, którzy na pewno wiedzą o AI więcej niż ja, uważa, że akurat w badaniach matematycznych ten brak doświadczenia świata nie jest przeszkodą. „Dziedziną badań, na którą sztuczna inteligencja będzie miała największy wpływ” – pisze w cytowanym wywiadzie dla PAP – „jest matematyka. Ta dziedzina istnieje bez konieczności interakcji ze światem fizycznym”.

Czyli że można naczytać się tekstów matematycznych i jeśli się ich przeczyta wystarczająco dużo, to potem można tworzyć nowe teksty matematyczne, zawierające odkrycia matematyczne na poziomie nadludzkim.

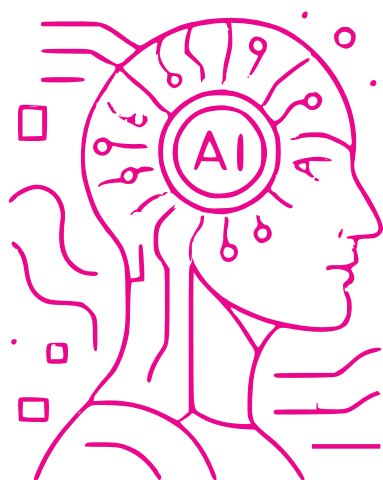
Hipotezy Riemanna jeszcze AI w ten sposób nie udowodniła (ale, bądźmy sprawiedliwi, ludzie też nie). Jednak, jak się ostatnio dowiedzieliśmy, prawie umiałyby wygrać Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną (IMO). Rozwiązałyby pięć z sześciu zadań.

Pozwólcie, że się podzielę w związku z tym pewną anegdotą, a następnie pewną myślą. Zapewne nie jestem pierwszy, któremu ta myśl przyszła do głowy.

3

Zacznę od anegdoty. Otóż kiedyś, ponad 40 lat temu, brałem udział w tym IMO-sporcie. Nawet medal zdobyłem, brązowy. Lubiłem rozwiązywać zadania. Mieliśmy w liceum kółko matematyczne. Świętej pamięci profesor Kałuża dawał nam co tydzień listę zadań. I ja potem chodziłem przez tydzień i o nich myślałem. I zwykle gdzieś z połowę zadań z listy udawało mi się przed kolejnym kółkiem (na którym pokazywaliśmy sobie nasze rozumowania) rozwiązać.

A mój kolega, nazwijmy go X, który zdobywał na IMO medale już od drugiej klasy liceum, mówił do mnie z wyższością: „Ja nigdy nie rozwiązałem sam żadnego zadania, ani na kółko, ani na olimpiadzie; ja sobie przypominam



rozwiązania”. Rzeczywiście, w czasie gdy ja chodziłem i myślałem o zadaniach, X studiował sowieckie *Kwanty* (to był taki miesięcznik, w którym były wszystkie możliwe zadania z wcześniejszych olimpiad, na całym świecie) i czytał te zadania, po kolei, z rozwiązaniami. A że pamięć miał dobrą, to znał je potem wszystkie. I na olimpiadzie zawsze się okazywało, że coś się da, z większymi lub mniejszymi zmianami, przypasować. Bardzo to była skuteczna metoda, bo czyta się przecież dużo szybciej niż samemu rozwiązuje. Tylko że ja lubiłem myśleć o tych zadaniach, a czytać nie lubiłem, szczególnie po rosyjsku.

Teraz będzie ta myśl, którą wcześniej zapowiadałem.

Otóż wyobraźmy sobie, że matematycy gawędzący sobie w roku 1935 w kawiarni *Szkocka* we Lwowie dostaliby do rozwiązania zadania z IMO 2025. Nie wiem, czy jeden wieczór by im wystarczył, czy potrzebowaliby powalczyć kilka dni, ale bez wątplenia rozwiązaliby te wszystkie zadania. Nawet gdyby Banach był z jakiegoś powodu akurat nieobecny. Do tego, żeby je rozwiązać, wystarczyłoby im bycie kompetentnym matematykiem z lat trzydziestych XX wieku.

Więc ja bym chciał, żeby twórcy AI uczyli te swoje „potwory”, używając całego tekstu matematycznego, jaki powstał DO ROKU 1935. A potem kazali im rozwiązywać zadania z IMO 2025. To by znaczyło, że w tym korpusie tekstu, na którym maszyna się uczy, nie byłoby tych wszystkich *Kwantów*, tych tysięcy zadań z różnych olimpiad wraz z rozwiązaniami. Bo (mam nadzieję, że nie trzeba tego wyjaśniać) wtedy nie było jeszcze olimpiad matematycznych.

Myślę (mogę się oczywiście mylić, okropne by było, gdybym się mylił, ale wątpię żebym się mylił), że sztuczna inteligencja nauczona na takim ograniczonym korpusie tekstu rozwiązałaby najwyżej jedno zadanie z IMO 2025, to z geometrii. Bo geometria jest z nami od bardzo dawna.

4

Ciągnąc dalej tę myśl: jeśli wytworzony dotąd, przez ludzi, korpus tekstu matematycznego jest (jak wydają się twierdzić prorocy AI) wystarczający do wychodowania modeli, które będą już w stanie zostawić nas w tyle i iść z matematyką dalej, z nadludzką mocą, to kiedy był pierwszy moment, gdy ten korpus tekstu zrobił się dla tego celu wystarczający?

Czy był on już wystarczający w 1935 roku? Jeśli tak, to – powtarzam – dlaczego nie nauczycie modeli na tym korpusie i nie pokażecie mi, że one tak nauczzone rzeczywiście umieją rozwiązywać zadania z IMO?

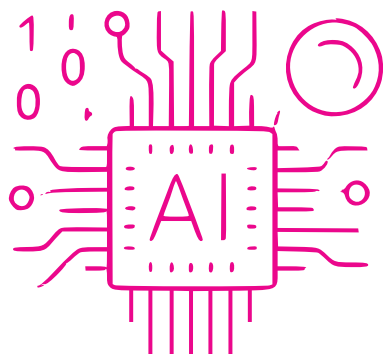
A jeśli stał się wystarczający dopiero niedawno, to zdumiewa mnie ten zbieg okoliczności, że nie tylko żyjemy w czasach, kiedy człowiek zaprojektował nadludzko zdolną sztuczną inteligencję, ale że w dodatku powstała ona akurat wtedy, gdy ludzie wyprodukowali korpus tekstu matematycznego dostatecznie duży, aby ta sztuczna inteligencja mogła się na nim nauczyć swoich nadludzkich mocy.

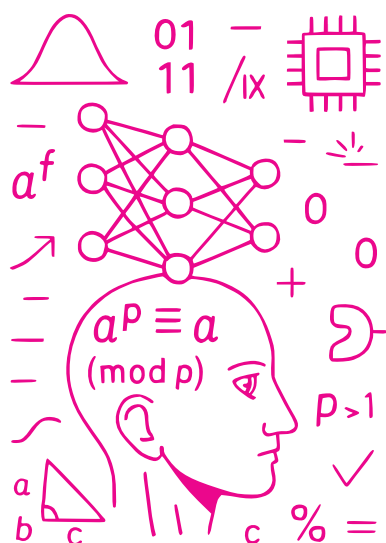
5

Równolegle z tym tekstem piszę artykuł zawierający dowód pewnego twierdzenia, niezbyt trudnego. Dowód opiera się na czterech łatwych lematach i kilkunastu obserwacjach. Artykuł zawiera dowody lematów. Te dowody zaś odwołują się do obserwacji i są krótkie, bo – jak wspomniałem – to są łatwe lematy. Obserwacje nie mają dowodów, bo wydają mi się na tyle proste, że Czytelnikowi będzie łatwiej wyobrazić sobie odpowiedni dowód, niż go czytać.

Przy jednej z tych obserwacji zawahałem się. Być może – pomyślałem – powinna ona być lematem. Z dowodem na kilka linijek.

I kiedy chciałem napisać ten dowód, uświadomiłem sobie, że choć widzę go doskonale, to język, w którym sformułowane jest całe moje rozumowanie, cały formalizm, który wprowadziłem, żeby ponazywać różne obiekty, że to jest wszystko niewystarczające, aby ten (zupełnie trywialny) dowód napisać. I żeby go zatem napisać, nie tylko musiałbym się cofnąć o kilka stron i przerobić od tego miejsca cały tekst (co byłoby do zniesienia, jeśli chcecie napisać dobry artykuł, to musicie się pogodzić z tym, że będziecie się cofać i przerabiać), ale





w dodatku musiałbym skazać Czytelnika na czytanie kilku stron cięższego, mniej czytelnego tekstu, tylko po to, żeby raz użyć tego cięższego formalizmu dla zapisania dowodu lematu, który to dowód można sobie łatwo wyobrazić bez nazywania występujących w nim obiektów.

Wspominam o tym, bo wydaje mi się bardzo dobrą ilustracją tezy, że matematyka nie jest tożsama z tekstem matematycznym i że tekst matematyczny jedynie (lepiej lub gorzej) oprowadza nas po pewnym świecie, który to świat możemy czasem zobaczyć lub wyobrazić sobie, bez pośrednictwa języka, a więc (jak mogłoby się wydawać) w sposób niedostępny dla modeli językowych.

6

Wierzę, tak jak wierzył Platon 2400 lat temu, a potem wielu współczesnych sławnych matematyków, między innymi Kurt Gödel, Paul Erdős i Roger Penrose, że świat matematyczny istnieje niezależnie od tekstu. Według tego poglądu, matematyka istnieje obiektywnie i odwiecznie, niezależnie od naszej obecności w świecie i od naszej zdolności do wyrażania myśli w języku. Jeśli gdzieś daleko w kosmosie istnieje inteligentne życie, to – jeśli myślimy jak Platon – spodziewalibyśmy się, że tamtejsi matematycy odkrywają matematykę bardzo podobną do naszej.

Ale są też tacy matematycy, którzy uważają, że matematyka jest jedynie precyzyjnym tekstem. Tak myślał, na początku XX wieku, wielki David Hilbert i tak, zdaje się, myśli profesor Sankowski. Ja mam z tym poglądem problem, bo po pierwsze on się kłóci z moją głęboką intuicją, a po drugie on nie wyjaśnia, czemu matematyka tak dobrze tłumaczy fizyczną rzeczywistość. Skoro matematyka nie ma nic wspólnego z rzeczywistym światem, to po co uczą się jej inżynierowie? Czy nie jest jednak tak, że te mosty wiszą dzięki matematyce?

7

Platon mógł się oczywiście mylić, a ja mogę się mylić wraz z nim. Ale jeśli się jednak nie mylimy, to wątpliwe jest, aby sztuczna inteligencja, oparta na pomysle generowania najbardziej prawdopodobnie wyglądającego tekstu, mogła rzeczywiście dokonywać wielkich odkryć matematycznych.

Ale to nie znaczy, że nie zmieni ona sposobu, w jaki rozwija się matematykę.

Bo większość z tych tysięcy artykułów pisanych i publikowanych przez matematyków nie zawiera wielkich odkryć, ani w ogóle nie zawiera istotnie nowych idei.

Czasem są to wariacje na temat odkryć, których ci sami ludzie dokonali wcześniej. Mogą oni na przykład stosować wcześniej odkrytą przez siebie technikę do rozwiązania jakiegoś nowego problemu. Taki charakter ma artykuł, o którym wspominałem parę akapitów temu.

Czasem zaś, myślę, że bardzo często matematycy wyważają drzwi, które są już bardziej lub mniej otwarte. Potrzebna im technika została już odkryta i użyta w jakimś odrobinę innym kontekście. Człowiek nie jest w stanie tego dostrzec, bo nie może śledzić wszystkiego, co kiedykolwiek opublikowano. AI natomiast, która zna cały Internet, będzie w stanie (w jakiś magiczny sposób, którego nikt dobrze nie rozumie) zobaczyć analogię i albo podpowiedzieć nam pomysł, albo samodzielnie stworzyć dowód.

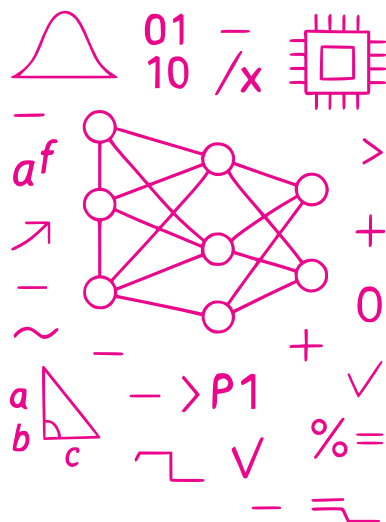
8

Matematyka zostanie zatem niejako „domknięta” na operację automatycznej analogii. Można myśleć, że to dobrze. Że stanie się to, co od wieków dzieje się w różnych innych dziedzinach życia, że maszyny zastępują nas w pracy nudnej i rutynowej, pozostawiając nam to, co twórcze i ciekawe.

Ale to nie jest takie proste.

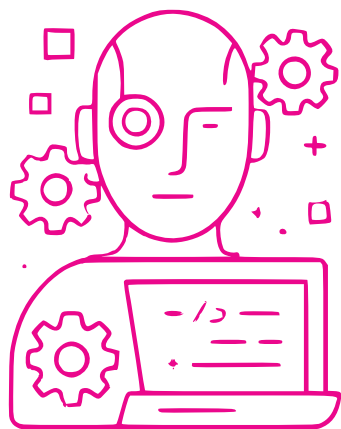
Bo pisząc te mało twórcze prace i ponownie odkrywając znane już w innym kontekście techniki, ludzie nabywają umiejętności potrzebnych do robienia rzeczy trudniejszych. I ja nie wiem, czym ten proces uczenia się będzie można zastąpić.

Zauważmy, na zakończenie, że powyższe odnosi się analogicznie do AI zastępującej ludzi w programowaniu.



Człowiek o AI (3)

* Starzec obserwator
(Twórca *Delty* i jej redaktor naczelny
w latach 1974–2018 – przyp. red.)



Zajmowanie się starożytnych Sumerów, Chaldejczyków czy Egipcjan liczbami i figurami matematyką nie jest; patrz np. Donald Knuth *Ancient Babylonian algorithms* in Com.of the ACM (1972).

Po „odkryciu” zbioru pustego za poprawne uznajemy tylko 19 sylogizmów.

Niełatwą charakterystyką odrębności metodologii matematycznej jest pojęcie kontrprzykładu. Najwspanialsze pomysły nowych twierdzeń musiały często zostać odrzucone, bo znajdowano nieraz bardzo sztucznie (wręcz złośliwie) skonstruowane obiekty, demonstrujące wyjątki od prognozowanych reguł. Szczególnie bogata w takie potworki jest topologia.

W szponach metodologicznej poprawności

Marek KORDOS*

Przystępując do działania, często musimy wybrać:

czy zrobić **to**, **co** należy, **tak**, **jak** się uda,
czy zrobić **tak**, **jak** należy, **to**, **co** się uda.

Wybierając pierwszą drogę, za imperatyw mamy udzielenie odpowiedzi na każde pytanie, nie brzydząc się właściwie żadnym ze sposobów jej uzyskania.

Lekarz nie może odmówić diagnozy ani zaordynowania leczenia, choć zawsze dysponuje tylko fragmentarycznymi badaniami, a na dodatek nie ma algorytmu przełożenia ich na swoje decyzje.

Historyk (nie mylić z archiwistą!) przekazuje społeczeństwu obraz opisywanej epoki czy procesu przemian społecznych, choć musi to być śmiało uciąglenie, uspołnienie, uzwarczenie subiektywnie zweryfikowanych źródeł.

Skuteczność ich działania to **wynik kumulacji doświadczeń i kontekstowych analogii**, czyli faktycznie działają jak AI, choć tego nie wiedzą (podobnie jak pan Jourdain nie wiedział, że mówi prozą). Podobnie nie wiedzą o tym bociany odbywające (bez atlasów, GPS czy choćby smartfonów) coroczne tysiąckilometrowe wędrówki ani krokusy równocześnie startujące jeszcze przed początkiem wiosny – ten format porządkujący działanie jest starszy od ludzkości. Tłumaczy się to jakimś zegarem biologicznym czy instynktem, ale to intelektualne tchórzostwo – wystarczy obserwacja tego, jak dziecko zaczyna mówić (nawet narodowcy nie sądzą, że ma w genach lub wysysa z mlekiem matki informację, w jakim to języku ma mówić), by ową kumulację doświadczeń i kontekstowe analogie zobaczyć.

W tym sensie AI nie jest niczym nowym ani oryginalnym, a istotnie trudnym jedynie na poziomie hardware’u. Skąd więc powszechny niepokój wobec jej ekspansji?

Winowajcami są tu starożytni doryccy Grecy. W wybuchu ich irracjonalnie intensywnego zapалу do filozofowania zaczęło ich uwierać, że metoda kumulacji doświadczeń i kontekstowych analogii nie gwarantuje pewności uzyskanego tym sposobem rezultatu. I stworzyli normę posługiwania się drugą z wymienionych możliwości: wolno uznawać i stosować tylko te rezultaty, które zostaną uzyskane na drodze ściśle zadekretowanego sposobu rozumowania, dowodu, dedukcji. Słowem: stworzyli matematykę – zaczęło się od mitycznego Talesa i charyzmatycznego Pitagorasa, już całkiem konkretni uczniowie Platona – Teajtestos i Eudoksos stworzyli liczby rzeczywiste i teorię miary, Arystoteles wymyślił sylogizmy (256 schematów rozumowania, z których wolno używać tylko 24), Euklides stworzył *Elementy*, pierwszą teorię dedukcyjną, Archimedes pokazał przydatność matematyki w wielu sytuacjach. I zaczęło się.

Reżim, iż tak naprawdę wartościowe są jedynie rezultaty uzyskane w trybie ścisłego dowodzenia, stał się tak powszechny, że wszyscy zaczęli bądź umniejszać pewność swoich rezultatów (np. Kartezjusz: *Jedni tylko matematycy zdołali znaleźć jakieś dowody, to znaczy jakieś racje pewne i oczywiste*), bądź też przypisywać swoim filozoficznym rozumowaniom walor matematyki (np. Baruch Spinoza: *Ethica modo geometrico exposita*), bądź wreszcie budując swoją lokalną matematykę (np. Claude Levi-Strauss, *Antropologia strukturalna*). Ekstremalnie głosi się, że w dokonaniach naukowych *tylko jest prawdy, ile matematyki*, i narzuca się obowiązek uściślenia, w sensie dedukcyjnym, wszelkich badań. Panuje podobna do poprawności politycznej poprawność metodologiczna, do której AI nie pasuje.

Ten kult „matematycznej ścisłości” jest hermetyczny na spostrzeżenie, że jej metodologia wyklucza rozważanie wielu (chciałoby się powiedzieć – prawie wszystkich) pytań i nie potrafi rozwiązać wielu problemów z własnego obszaru zainteresowania, tak poważnych jak hipoteza Riemanna czy hipoteza

jakobianowa, tradycyjnie uznanych za istotne – jak sprawa liczb pierwszych Fermata (czy istnieje liczba pierwsza postaci $2^{2^n} + 1$ dla $n > 5$), czy wreszcie wręcz rozrywkowych – jak problem Collatza.

Ale problemami matematyki z nią samą ogół mógłby się nie przejmować, natomiast warto pamiętać, że w wielu miejscach walor całkowicie, bezwzględnie pewnej odpowiedzi – bo przy jej uzyskiwaniu posługiwano się matematyką – jest niezasłużony. Na przykład spokojnie latamy samolotami, choć matematycznego dowodu, że mogą latać, matematyka dać nie potrafi (równania Naviera-Stokesa, a nawet równanie Żukowskiego są poza dzisiejszym zasięgiem matematyki). Choć oczywiście cały szereg obliczeń przy ich konstrukcji wykonano.

Uświadomienie sobie tego rodzaju spraw powinno nas uspokoić. Choć twórcy AI ze zrozumiałych powodów są dumni ze swych osiągnięć i, jak wszyscy twórczo pracujący, uważają przedmiot swoich działań za ten najważniejszy na świecie, zasługujący na powszechny aplauz i godny nadzwyczajnej reklamy („królewska niebywałość”, jak u Hucka), pamiętać trzeba, że AI nie jest ani sprzeczna, ani tym bardziej przeciwna obecnemu stanowi rzeczy.

Nie należy więc poddawać się obowiązującej od 2,5 tysięcy lat poprawności metodologicznej uznającej

jedynie matematyczny (bądź matematycznie podobny) sposób eksploracji świata za bezpieczny dla nas i dla tego świata. AI może nam zrobić tyleż dobrego i tyleż złego, co wszystkie dotychczasowe wynalazki ludzkości.

★ ★ ★

Odrębną sprawą jest pytanie, co AI może zrobić dla matematyki. Naturalną odpowiedzią jest, że to, co matematyce robią matematycy. Co każe odpowiedzieć, co też oni jej robią.

Z moich obserwacji wynika, że kolejne pokolenia twórczych matematyków starają się zrozumieć to, co przekazali im poprzednicy. To zrozumienie pociąga za sobą właściwie zawsze zmianę języka. Język analizy w pracach Newtona czy Leibniza jest zupełnie inny niż w pracach Eulera i Lagrange’a, ten zupełnie inny od języka Weierstrassa, a dziś w zupełnie innym języku wykładamy tę analizę studentom. Podobnie algebra X-wiecznych Arabów pisana jest zupełnie inaczej niż XVI-wiecznych Włochów, ta znów jest inna od prac Abela i Galoisa, a język dzisiejszych wykładów też tamtych języków nie przypomina, mówiąc więcej i dokładniej.

Być może AI będzie umiała tworzyć nowe języki opisujące matematyczną rzeczywistość, które będą zrozumiałe i dla nas – czemu nie marzyć?



Baranek na energię słoneczną

Ze wszystkich dziwów, które czasem opisuję Szanownym Czytelnikom, człowiek to dziw nad dziwy. Weźmy chociażby nasze masowe zdziecinienie objawiające się kolekcjonowaniem słodziaków. Trwa nieustający wyścig na Najśłodsze, rosną góry zabawek i gadżetów związanych z coraz nowszymi laureatami: kotki, pieski, alpaki, wombaty, kapibary, niesporczaki. Ostatnio, przeglądając naukowe wiadomości, natknęłam się na doskonałego kandydata. Oto *Costasiella kuroshimae*, lepiej znana jako „sheep leaf” lub „Shaun the sheep”, „baranek Shaun”. Nie jest to postać z bajki *Aardman Animatoions*, nie jest to nawet owca ani też liść. To morski ślimak.

Niewielkie rozmiary morskiej owieczki (5–8 mm) sprawiły, że jej istnienie ogłoszono dopiero w 1993 roku. Japońska badaczka dna morskiego znalazła na dużych glonach maleńkie, pasące się stadami zwierzęta, trochę przypominające bohatera bajki dla dzieci. Wszystkie słowa, które napiszę poniżej, są z punktu widzenia biologa nieprawidłowe. Rzecz bowiem dotyczy mięczaka, a nie roślinożernego ssaka kopytnego. I w rzeczy samej, oprócz skojarzeń wizualnych zwierzęta te nie mają ze sobą nic wspólnego. No, może tyle, że faktycznie pasą się na zielonych pastwiskach.

Na rozszerzającym się ku dołowi białym „pysku” *Costasiella* znajduje się para czarnych „oczu”, skupisk komórek światłoczułych. Tam, gdzie u owcy wyrastają uszy, u ślimaka widać dwa długie wyrostki, które służą za narząd węchu i smaku. „Tułów”, czyli reszta ciała, to struktury przypominające liście aloesu, intensywnie zielone, ułożone w barylkaty kształt.

Ślimak, „pasąc się”, nie gryzie roślin, ale poruszając się po powierzchni liścia, używa narządu przypominającego tarkę, którym rozrywa komórki, a wypływającą z nich zawartość wciąga do otworu gębowego. Wszystko powyżej, oprócz niezwyklej urody mięczaka, zapewne niespecjalnie dziwi. Dalej jednak zaczynają się dziać rzeczy nieoczywiste.





Costasiella kuroshimae, mierząca około 3 mm, w Parku Narodowym Wakatobi (autor: Christian Gloor, 2016, Wikipedia)

W wysranej zawartości komórek znajdują się chloroplasty, które w każdym przyżwoitym zwierzęciu są degradowane i trawione. U *Costasielli* chloroplasty zostają zamiast tego wchłonięte do wnętrza przez komórki nabłonka jelita. Stamtąd wydostają się na drugą stronę i przekazywane są do komórek znajdujących się pod powierzchnią ciała ślimaka. Tam trwają przez kilka – kilkanaście dni, prowadząc fotosyntezę. Ślimak na baterię słoneczną?

Costasiella należy do grupy morskich ślimaków *Sacoglossa* występujących powszechnie w płytkich wodach oceanów. Część z nich ma wyżej opisaną umiejętność kleptoplastii, czyli okradania organizmu, którym się żywią, z chloroplastów.

Nie jest jasne, jaki dokładnie jest mechanizm tego zjawiska, pewne jest, że komórki ślimaków rozpoznają chloroplasty rośliny jako coś, czego nie należy trawić. Chloroplast wchłaniany jest do komórki na drodze fagocytozy, czyli wkleśnięcia błony komórkowej do wnętrza. Utworzony pęcherzyk powinien połączyć się z lizosomem, komórkową bańką wypełnioną enzymami trawiącymi związki organiczne, jednak u gatunków wykorzystujących żywe chloroplasty tak się nie dzieje. Trwają one w pęcherzykach nazwanych przez badaczy kleptosomami i przez jakiś czas pełnią swoją podstawową funkcję: ślimak korzysta z produktów fotosyntezy w skradzionych organellach.

Rekordzistką w tej sztuce jest *Elysia chlorotica*, u której działające chloroplasty mogą utrzymywać się blisko rok. Jak to możliwe, nie jest do końca opisane. W komórkach roślinnych około 90% białek potrzebnych do utrzymania przy życiu chloroplastów kodowanych jest przez jądro komórkowe. Ponadto, choć chloroplasty produkują substancje niezbędne do życia, stanowią także śmiertelne zagrożenie dla komórki: są źródłem uszkadzających związków organicznych, m.in. DNA i białka, superaktywnych wolnych rodników. Rośliny wykształciły mechanizmy obrony przed nadmiarem wolnych rodników, komórki ślimaków ich nie mają.

Uważa się, że powstanie komórek roślinnych poprzedziła symbioza. Według obowiązującej dziś teorii chloroplasty to pozostałości po cyjanobakteriach, które nie zostały strawione po wchłonięciu do wnętrza prakomórek roślinnych. Z czasem taka symbioza dwojga partnerów, gdzie jedno zapewniało bezpieczne środowisko życia, a drugie produkty fotosyntezy, przerodziła się w konieczność, bo część genów organizmu fotosyntetyzującego przedostała się do jądra komórkowego gospodarza, a sama komórka uproszczała się do organellum komórkowego. Obecnie z około 3000 białek niezbędnych do działania chloroplastów 95% kodowanych jest w jądrze komórki, a tylko kilka procent zawiera DNA znajdujący się w chloroplastach. Naukowcy długo uważali, że także w przypadku ślimaków prowadzących kleptoplastię nastąpiło przeniesienie genów rośliny do jądra zwierzęcia, i choć długo szukali, jak dotąd nie znaleźli potwierdzenia tej hipotezy.

Na szkodliwe efekty nadmiaru światła (zbyt intensywnie zachodzącej fotosyntezy) ślimaki mają swoje sposoby. Korzystają z faktu, że mogą się poruszać i uciekają ze zbyt jasnych miejsc. Jeden z gatunków po bokach ciała ma jasne fałdy, które może w razie nadmiaru światła zawinąć na grzbiet, chroniąc zielone komórki. W innym z przypadków chloroplasty, kiedy jest zbyt jasno, przemieszczają się i tworzą agregaty, których wewnętrznie położone organella są zaciemnione.

Pozbawione pokarmu ślimaki tracą na wadze, ale są w stanie w obecności światła utrzymać się przy życiu przez dłuższy czas. Dłuższy niż te, które głodują w ciemności. Ślimaki zatem wykorzystują produkty fotosyntezy do życia, a chloroplasty w ich tkankach

nie są, jedynie jak najpierw zakładano, sposobem na doskonały kamuflaż. Ślimaki mogą zatem częściowo być niezależne od zasobów środowiska.

Obecności działających chloroplastów zawdzięczają jeszcze jedną niezwykłą możliwość ślimaki z gatunku *Elysia marginata*. Chodzi tu o tzw. autotomię, czyli umiejętność odrzucania części ciała, tak jak to robią np. ośmiornica czy jaszczurka, odrzucając w chwili zagrożenia, odpowiednio, ramię i ogon. *E. marginata* jest w tej dziedzinie mistrzynią, przeprowadza bowiem dekapitację autotomiczną, czyli odrzuca... całe ciało, stając się jedynie nieco przedłużoną głową. W odrzuconym ciele pozostają ważne narządy, m.in. serce i układ pokarmowy. Po jakimś czasie głowa wydłuża się stopniowo i, krok po kroku, w ciągu blisko trzech tygodni odrasta całe ciało. Aby to było możliwe, potrzebne jest źródło energii, a jest nim fotosynteza prowadzona przez skradzione chloroplasty.

Z badań wynika, że ślimak nie odrzuca ciała w sytuacji zagrożenia, co niespecjalnie dziwi, bo uwolniona głowa porusza się w tempie ślimaczym. Zapewne dzieje się to z powodu trapiących zwierzęta pasożytów, zwierzę odrzuca zakażone ciało, uwalniając się od choroby. I tu rozmarzyłam się, jak mi się często zdarza, kiedy podziwiam dzieła natury. Już od dawna dokuczają mi tu i tam niektóre części ciała. Gdyby tak wziąć L4, najeść się sałaty i poczekać, aż odrosnę całkiem nowa? Zostawiając, podobnie jak ślimak, głowę, bo do niej jestem jakoś bardziej przywiązana.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Granice „splątanych” ciągów rekurencyjnych

*kontakt: gornicki59@gmail.com

Ciąg Fibonacciego określony jest przez rekurencję $F_0 = 0, F_1 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n > 1$. Pisaliśmy o nim np. w $\Delta_{79}^1, \Delta_{20}^6, \Delta_{22}^4$.

Przy okazji przedstawienia różnych średnich zapytajmy, jaka jest średnia prędkość podróży samochodem, który pierwszą połowę drogi pokonuje z prędkością v_1 , a drugą z prędkością v_2 . Odpowiedzią jest właśnie $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Dla przykładu, w przypadku (a) nierówność (2) przybiera postać

$$a_n < \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} < \frac{a_n+b_n}{2} < b_n,$$

co wynika z (1). Skrajne nierówności można łatwo uzasadnić:

$$a_n = \frac{2a_nb_n}{b_n+b_n} < \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},$$
$$\frac{1}{2}(a_n + b_n) < \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n.$$

Kontynuując przykład, w przypadku (a) liczby $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ oraz $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ mieszczą się w przedziale $(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$.

Twierdzenie (G. Cantor, 1880). *Jeżeli $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots$ jest ciągiem niepustych domkniętych przedziałów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$, których długości dążą do zera, to przecięcie $[a, b] \cap [a_1, b_1] \cap \dots$ zawiera dokładnie jeden punkt.*

Jarosław GÓRNICKI*

Procedurę, która wymaga wywołania samej siebie, nazywamy *rekurencją*. Tego typu sytuacje występują w informatyce i matematyce dość często, klasycznym przykładem jest rekurencyjna definicja ciągu Fibonacciego. W tym artykule przyglądamy się zbieżności kilku ciągów rekurencyjnych generowanych przez klasyczne średnie dwóch liczb dodatnich. Będziemy się przyglądać temu zagadnieniu od strony czysto analitycznej, warto jednak zaznaczyć, że poruszone tu kwestie mają pewne odzwierciedlenie w metodach numerycznych.

Ustalmy $0 < a < b$. Jak wiadomo, zachodzą wówczas nierówności

$$(1) \quad a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

(przypadku $a = b$ nie będziemy dyskutować, bo wtedy wszystkie te wielkości są równe). Niech $a_0 = a, b_0 = b$. Ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ określamy wzorami ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$(a) \quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$
$$(b) \quad a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$
$$(c) \quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n},$$
$$(d) \quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{\frac{a_n+b_n}{2} \cdot b_n}.$$

Problem. *Czy ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, a jeśli tak, to jakie są ich granice?*

Najpierw pokażemy, że w każdym z tych przypadków ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne oraz $\lim a_n = \lim b_n$. Zrobimy to niejako „za jednym zamachem”, mając na uwadze nierówności (1). W jasny sposób wynika z nich, że w każdym z przypadków (a)–(d) dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$(2) \quad a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n,$$

Udowodnimy, że w każdym z przypadków (a)–(d) zachodzi ponadto

$$(3) \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| < \frac{1}{2}|a_n - b_n|.$$

Istotnie, w przypadkach (a)–(c) liczby a_{n+1} i b_{n+1} leżą w przedziale $(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ o długości $\frac{1}{2}|a_n - b_n|$. W przypadku (d) liczby te leżą w przedziale $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n)$ o tej samej długości.

Oczywiście warunek (2) gwarantuje zbieżność występujących tam ciągów, ale nas interesuje wynikająca z niego zależność $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Z warunku (3) wynika, że długości tych przedziałów dążą do zera. Zatem w każdym przypadku twierdzenie Cantora zapewnia, że przecięcie $[a, b] \cap [a_1, b_1] \cap \dots$ zawiera dokładnie jeden punkt, który jest wspólną granicą ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$.

Pozostał problem wyznaczenia tych granic, jeśli jest to możliwe.

W sytuacji (a) mamy $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \dots = a_1b_1 = ab$. Zatem jeśli $\alpha = \lim a_n = \lim b_n$, to

$$\alpha^2 = \lim a_n \cdot \lim b_n = \lim(a_nb_n) = ab$$

i $\alpha = \sqrt{ab}$. Niestety pozostałe przypadki są bardziej wymagające.

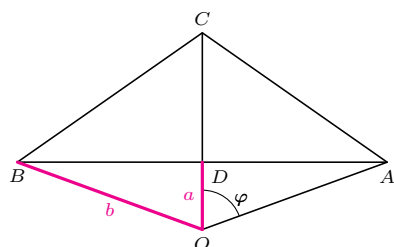
W przypadku (b) wspólną granicę ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ oznaczamy symbolem $M(a, b)$, a w przypadku (c) symbolem $N(a, b)$. Ponieważ w przypadku (c)

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right), \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{b_n}},$$

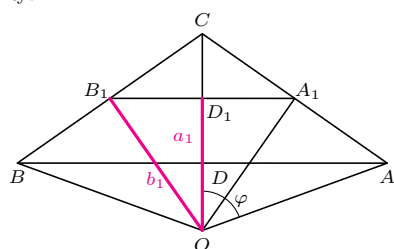
wiec granice $M(\cdot, \cdot)$ i $N(\cdot, \cdot)$ wiąże zależność $M(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = \frac{1}{N(a, b)}$. Niestety dokładnej wartości tych granic nie potrafimy wyznaczyć! W 1800 roku Carl Gauss zauważył, że ciągi opisane wzorami (b) są bardzo szybko zbieżne, i pokazał,

O odkryciu Gaussa można przeczytać w artykule Jarosława Górnickiego w Δ_{22}^6 .

Na temat zbieżności ciągów postaci (d) Gauss prowadził korespondencję z Johannem Pfaffem.



Rys. 1



Rys. 2.

W ten sposób liczby a_1 i b_1 otrzymujemy z liczb a i b przy pomocy prostej konstrukcji geometrycznej (rys. 2). Jednocześnie w tej konstrukcji przeszliśmy od trójkąta OAB (gdzie $|OA| = |OB| = b$, $|OD| = a$) do trójkąta OA_1B_1 (gdzie $|OA_1| = |OB_1| = b_1$, $|OD_1| = a_1$), w którym

$$\sphericalangle A_1OB_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \varphi \text{ i } |A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Powtarzając tę konstrukcję n razy, otrzymamy „wąski” trójkąt OA_nB_n , w którym

$$|OA_n| = |OB_n| = b_n, \quad |OD_n| = a_n,$$

$$(4) \quad \sphericalangle A_nOB_n = \frac{1}{2^n} \sphericalangle AOB, \quad |A_nB_n| = \frac{1}{2^n}|AB|.$$

Kreślimy teraz łuk okręgu o promieniu b_n , o środku w punkcie O i kącie środkowym $\sphericalangle A_nOB_n = 2\varphi$. Dzieląc ten łuk na 2^n przystających łuków, łącząc kolejno punkty podziału cięciwami, otrzymamy „wachlarz” złożony z 2^n przystających kopii trójkąta A_nOB_n .

Dostajemy w ten sposób „wycinek wielokąta foremnego” mający 2^n boków (o kącie środkowym $\sphericalangle A_nOB_n$), których łączna długość jest równa $|AB|$. Okręgi, o środku w punkcie O , opisane na tym wielokącie i wpisane w ten wielokąt mają promienie b_n i a_n , odpowiednio. Ponieważ długość łamanej (równa $|AB|$) zawiera się między długościami łuków okręgów wpisanego i opisanego, więc

$$2\varphi \cdot a_n < |AB| < 2\varphi \cdot b_n.$$

jak można je wykorzystać do obliczania przybliżonej wartości pewnych całek eliptycznych, których dokładnej wartości (na ogół) nie znamy. Gauss, mając 23 lata, wykazał równość

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \frac{1}{M(a, b)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

W latach 1799–1800 Gauss podał, że w przypadku (d) wspólna granica ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jest równa $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}$. Wykażemy to na drodze elementarnych rozważań geometrycznych, korzystając z rozważań inspirowanych obserwacją Jacques’a Schwaba z 1813 roku (J. Schwab, *Éléments de Géométrie*, Première Partie, Géométrie Plane, Nancy, 1813):

Niech P będzie n -kątem foremnym i niech P_1 będzie $2n$ -kątem foremnym, oba o tych samych obwodach. Jeżeli a i b są promieniami okręgów wpisanego i opisanego na wielokącie P , a a_1 i b_1 oznaczają analogiczne wielkości dla wielokąta P_1 , to $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{a_1 b}$.

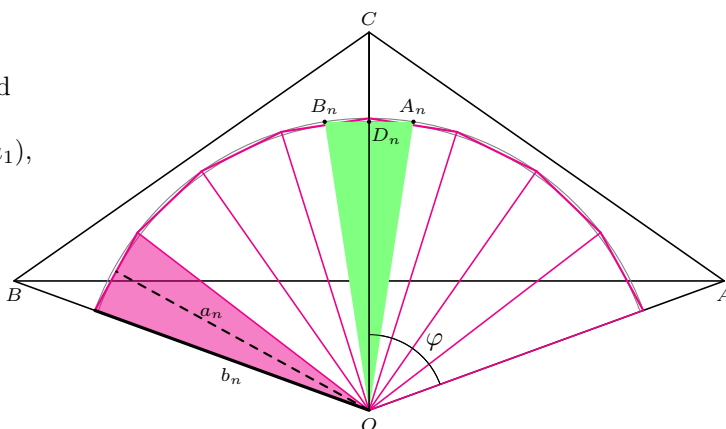
Kreślimy trójkąt równoramienny OAB , w którym $|OA| = |OB| = b$ i wysokość $|OD|$ jest równa a (rys. 1). Niech $\sphericalangle AOB = 2\varphi$. Na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu b (opartym na kącie środkowym $\sphericalangle AOB$) wyznaczamy punkt C taki, że $|AC| = |CB|$.

Niech A_1 i B_1 będą środkami odcinków AC i CB , odpowiednio. Niech D_1 będzie punktem przecięcia odcinka A_1B_1 z odcinkiem OC . Ponieważ D_1 jest środkiem odcinka DC , więc

$$|OD_1| = \frac{1}{2}(|OC| + |OD|) = \frac{1}{2}(b + a) = a_1.$$

Trójkąt OA_1C jest prostokątny, a A_1D_1 jest jego wysokością, w związku z tym $\frac{|OA_1|}{|OC|} = \frac{|OD_1|}{|OA_1|}$, a zatem

$$|OA_1| = \sqrt{|OD_1| \cdot |OC|} = \sqrt{a_1 b} = b_1.$$



Przy $n \rightarrow \infty$ mamy $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$, zatem

$$|AB| = 2\varphi \cdot \alpha, \text{ skąd } \alpha = \frac{|AB|}{2\varphi} = \frac{|AD|}{\varphi}.$$

Ponieważ trójkąt OAD jest prostokątny, więc

$$|AD| = \sqrt{b^2 - a^2} \text{ oraz } \cos \varphi = \frac{|OD|}{b} = \frac{a}{b},$$

dlatego ostatecznie

$$\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}.$$

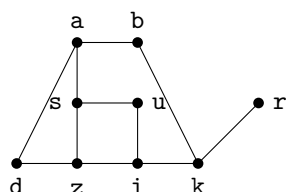
Zauważmy jeszcze, że dla $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ otrzymujemy $\alpha = \frac{2}{\pi}$, więc ciągi (d) pozwalają nam obliczać przybliżoną wartość π .

Czasem potrafimy coś obliczyć... i to bez komputera!



Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska



Oczywiście możemy przyjąć, że początkowa lista kolorów jest nieskończona, ale wystarczy się ograniczyć do liczby kolorów nie większej niż liczba wierzchołków danego grafu – poza pewnymi szczególnymi przypadkami nie użyjemy ich wszystkich!

Grafem nazywamy obiekt złożony z wierzchołków (punktów) i – łączących niektóre z nich – krawędzi (linii). Zakładamy, że dowolne dwa wierzchołki mogą być połączone co najwyżej jedną krawędzią i że żaden wierzchołek nie jest połączony krawędzią z samym sobą. Dwa wierzchołki nazywamy *sąsiednimi*, jeżeli są połączone krawędzią. Na marginesie widzicie rysunek przykładowego grafu, którego zbiorem wierzchołków jest $\{a, b, d, i, k, r, s, u, z\}$.

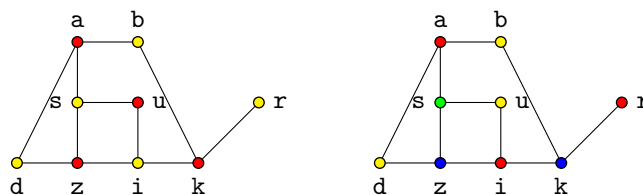
Rozważmy zadanie polegające na pokolorowaniu każdego wierzchołka grafu tak, aby żadne dwa sąsiednie nie miały tego samego koloru. Tak postawiony problem jest trywialny – aby spełnić przedstawiony warunek, wystarczy każdemu wierzchołkowi nadać unikatowy kolor. Co jednak, gdy chcemy użyć mniej kolorów niż mamy wierzchołków, a wręcz: możliwie jak najmniej? To zadanie jest już znacznie trudniejsze i jednym z pomocnych narzędzi jest algorytm *first-fit*:

1. Ustawmy zbiór kolorów w ciąg $(c_1, c_2, \dots)$ – dzięki temu będziemy mogli mówić o kolorze *pierwszym*, *drugim* itd.
2. Ustawmy zbiór wierzchołków $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ w ciąg $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$.
3. Dla $1 \leq i \leq n$ kolorujemy wierzchołek $v_{\pi(i)}$ najmniejszym **dostępnym** kolorem.

Zauważmy, że liczba kolorów użytych przy *first-fit* może zależeć od wyboru ciągu wierzchołków! Zobrazujmy to na naszym przykładowym grafie. Dany niech będzie ciąg kolorów

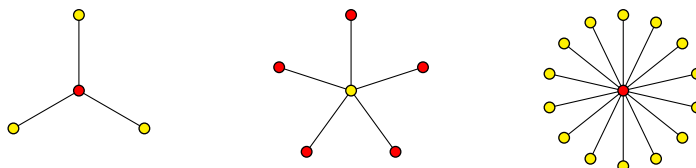
(●, ●, ●, ●, ●, ●, ●, ●, ○).

Przy kolejności $(a, b, s, d, u, z, k, r, i)$ używamy tylko dwóch kolorów, a przy $(a, i, u, d, z, s, b, k, r)$ – czterech!



Gwiazdą nazywamy graf, w którym jedynymi krawędziami są te, które łączą jeden wyróżniony wierzchołek z pozostałymi.

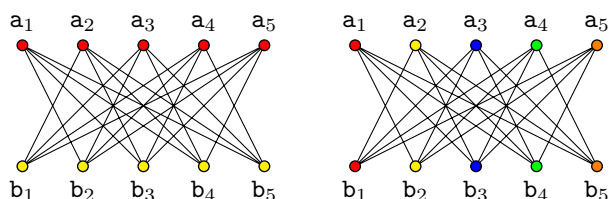
Oczywiście istnieją takie grafy, w których niezależnie od kolejności wierzchołków, użyjemy takiej samej liczby kolorów – poświadczyć o tym mogą chociażby *gwiazdy*:



A czy różnica pomiędzy najmniejszą a największą liczbą kolorów względem algorytmu *first-fit* może być dowolnie duża? Aby uzasadnić odpowiedź twierdzącą, posłużymy się następującą konstrukcją.

Niech $n \geq 3$. Rozważmy graf, którego zbiór wierzchołków składa się z dwóch równolicznych i rozłącznych podzbiorów: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ oraz $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Każdy wierzchołek a_i łączymy krawędzią z każdym wierzchołkiem b_j , o ile $i \neq j$.

Zauważmy, że dla takiego grafu najmniejsza liczba kolorów użytych przez *first-fit* to 2, a największa to n . Na marginesie prezentujemy to dla $n = 5$.



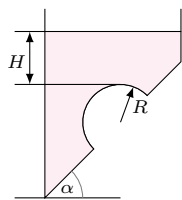
Czytelnikowi pozostawiam opisanie doboru kolejności kolorowania wierzchołków w obu przedstawionych przypadkach.

Najmniejsza możliwa liczba kolorów uzyskana dzięki algorytmowi *first-fit* to tzw. *liczba chromatyczna*, a największa – *liczba Grundy'ego* danego grafu. Zachęcam do samodzielnego poszukiwania zależności między tymi dwiema wartościami!

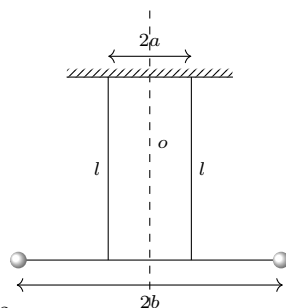
Klub 44 F



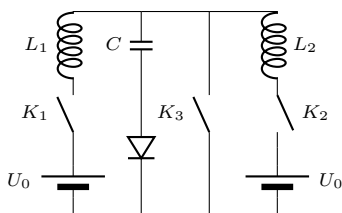
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2026



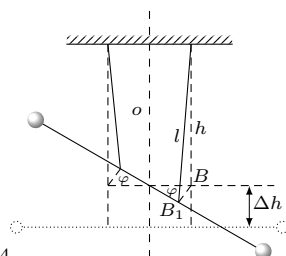
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 814, 815

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

814. Dno naczynia nachylone jest pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. W dnie znajduje się półsferyczna wypukłość o promieniu R (rys. 1). Wysokość słupa cieczy nad wypukłością wynosi H . Jaką siłą działa ciecz w kierunku pionowym na wypukłą część dna? Gęstość cieczy jest równa ρ .

815. Należy przeprowadzić gaz doskonały ze stanu 1 o temperaturze T_1 do stanu 2 o temperaturze $T_2 > T_1$ w taki sposób, aby temperatura w ciągu całego procesu odwracalnego $1 \rightarrow 2$ nie malała, a gaz nie oddawał ciepła. Minimalna ilość ciepła, jaką może pobrać gaz w opisanym procesie, wynosi Q_1 . Jaka może być maksymalna ilość tego ciepła?

Rozwiązania zadań z numeru 11/2025

Przypominamy treść zadań:

806. Hantla składa się z dwóch jednakowych małych kulek o masach m , zaczepionych na końcach lekkiego pręta i jest zawieszona w położeniu poziomym na dwóch nierozciągliwych niciach o długości l , oddalonych od siebie o $2a$ (rys. 2). Odległość między kulkami wynosi $2b$. Znaleźć okres małych drgań skrętnych tej hantli.

807. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 klucz K_3 jest na początku zamknięty, a klucze K_1 i K_2 otwarte. W pewnej chwili zamknięto klucz K_1 , a po czasie $t_1 = 0,1$ s zamknięto klucz K_2 . Po kolejnym czasie $t_2 = 0,2$ s otwarto klucz K_3 . Znaleźć: 1) natężenie prądu przez cewkę L_1 po długim czasie od zamknięcia klucza K_1 ; 2) maksymalne napięcie na kondensatorze. Opory omowe zanedbujemy, dioda jest idealna. Przyjmujemy $L_1 = 1$ H, $L_2 = 0,5$ H, $C = 10$ μ F, $U_0 = 10$ V.

806. Podczas drgań skrętnych hantla obraca się wokół osi o . Kąt obrotu oznaczmy przez φ (rys. 4). Podczas obrotu środek ciężkości hantli podnosi się o h względem położenia równowagi. Z rysunku 4: $\Delta h = l - h$, gdzie $h = \sqrt{l^2 - |BB_1|^2}$. $|BB_1| = a\varphi$, ponieważ kąt φ jest mały, więc $l^2 - h^2 = a^2\varphi^2 \Rightarrow a^2\varphi^2 = \Delta h(l + h)$, $\Delta h = a^2\varphi^2/(l + h) \cong a^2\varphi^2/2l$. Energia potencjalna hantli (mierzona od położenia równowagi) zależy od kąta obrotu zgodnie z wzorem:

$$(1) \quad E_p(\varphi) = 2mg\Delta h = mga^2\varphi^2/l.$$

Przy małych drganiach możemy zanedbać składowe pionowe prędkości kulek i przyjąć, że wektory prędkości leżą w płaszczyźnie poziomej i mają jednakowe wartości:

$v = b\omega(\varphi) = bd\varphi/dt$, gdzie $\omega(\varphi)$ to prędkość kątowa obrotu kulki. Energia kinetyczna hantli zależy od kąta obrotu zgodnie z wzorem:

$$(2) \quad E_k(\varphi) = 2mv^2/2 = mb^2(d\varphi/dt)^2.$$

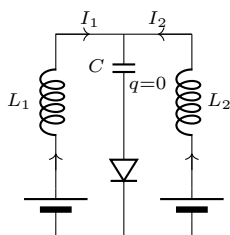
Wzory (1) i (2) są analogiczne do wzorów opisujących energię potencjalną i kinetyczną ciężarka o masie M , drgającego na sprężynie o współczynniku sprężystości k :

$E_p(x) = kx^2/2$, $E_k(x) = M(dx/dt)^2/2$, gdzie x jest wychyleniem ciężarka z położenia równowagi. Korzystając z tej analogii, możemy zapisać wzory (1), (2) w postaci:

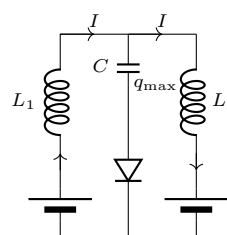
$E_p(x) = mga^2x^2/lb^2$, gdzie $x = b\varphi$, stąd $k = 2mga/lb^2$. $E_k(x) = m(dx/dt)^2/2$, gdzie

$M = 2m$. Okres małych drgań skrętnych hantli wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

807. Po zamknięciu klucza K_1 w cewce L_1 zaczyna płynąć prąd, który rośnie liniowo z czasem: $L_1 dI_1/dt = U_0$, $I_1 = U_0 t/L_1$. Podobnie jest w cewce L_2 po zamknięciu klucza K_2 . W chwili otwarcia klucza K_3 (rys. 5) $I_1 = U_0(t_1 + t_2)/L_1 = 3$ A, $I_2 = U_0 t_2/L_2 = 4$ A. Gdy ładunek kondensatora osiągnie wartość maksymalną (która pozostanie stała, ze względu na diodę) przez obie cewki będzie płynął taki sam prąd I (rys. 6). Napięcie baterijek kompensuje się, nie ma oporów omowych, dlatego strumień pola magnetycznego w obwodzie nie zmienia się: $L_1 I_1 - L_2 I_2 = L_1 I + L_2 I$, stąd szukane natężenie prądu płynącego przez cewkę L_1 wynosi $I = (L_1 I_1 - L_2 I_2)/(L_1 + L_2) = 2/3$ A. Od chwili zamknięcia klucza do ustalenia się maksymalnego ładunku na kondensatorze baterijki wykonały pracę $W = q_{\max} U_0$. Z zasady zachowania energii: $L_1 I_1^2/2 + L_2 I_2^2/2 + W = (L_1 + L_2)I^2/2 + q_{\max}^2/2C$, stąd $q_{\max} \cong 1,3 \cdot 10^{-2}$ C. Maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $U_{\max} = q_{\max}/C = 1300$ V.

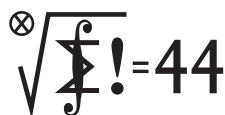


Rys. 5



Rys. 6

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2026

Zadania z matematyki nr 917, 918

Redaguje Marcin E. KUCZMA

917. Znaleźć największą liczbę c , mającą tę własność, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n oraz dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $|x^n - 1| \geq c|x - 1|$.

918. W trójkącie ABC punkty D, E, F są spodkami wysokości AD, BE, CF . Proste DE i CF przecinają się w punkcie G . Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie ABG przechodzi przez środek odcinka DE .

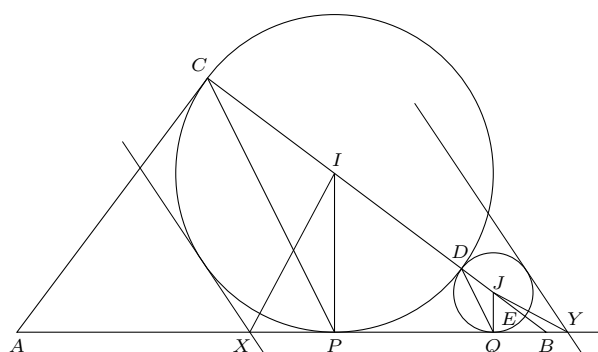
Zadanie 918 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2025

Przypominamy treść zadań:

909. Trójkąt prostokątny ABC ma boki $AB = 5a, BC = 4a, CA = 3a$ ($a =$ jednostka długości). Na boku BC leżą punkty D, E takie, że okręgi o średnicach CD i DE są styczne do boku AB odpowiednio w punktach P i Q . Przez dowolnie wybrany punkt X na odcinku AP prowadzimy prostą (różną od AP) styczną do okręgu CPD . Równoległa do niej prosta styczna do okręgu DQE przecina półprostą QB w punkcie Y . Wyznaczyć minimalną długość odcinka XY , gdy punkt X zmienia swoje położenie na odcinku AP .

910. Rozważamy graf skierowany o nieskończenie wielu wierzchołkach ponumerowanych wszystkimi liczbami całkowitymi nieujemnymi. Krawędź zorientowana od wierzchołka ℓ do wierzchołka m prowadzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < m - \ell \leq 3$ oraz dokładnie jedna z liczb $m - \ell, m\ell$ jest podzielna przez 3. Dla każdej liczby naturalnej n obliczyć, ile jest ścieżek prowadzących od wierzchołka 0 do wierzchołka $3n$.



909. Oznaczmy środki okręgów CPD, DQE odpowiednio przez I, J . Kąt BCA jest prosty, zatem okrąg CPD jest styczny do prostej AC , skąd wniosek, że $AP = AC = 3a, BP = 2a$. Z podobieństwa $\triangle BIP \sim \triangle BAC$ wynikają proporcje $\frac{IP}{BP} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$, wobec czego $IP = \frac{3}{2}a$. To promień okręgu CPD ; tę samą długość mają promienie IC, ID , skąd $CD = 3a$ i $BD = a$.

Równoramienne trójkąty CIP, DJQ , o równoległych bokach IP, JQ , też są podobne. Zatem $CP \parallel DQ$ i na mocy twierdzenia Talesa $\frac{BQ}{BP} = \frac{BD}{BC} = \frac{JQ}{IP} = \frac{1}{4}$. Uzyskujemy równości $PQ = \frac{3}{2}a$ oraz $JQ = \frac{3}{8}a$.

Półproste XI i YJ to dwusieczne kątów (ostrego i rozwartego), jakie tworzy prosta AB z kierunkiem dwóch prostych równoległych (stycznych do danych okręgów, zgodnie z treścią zadania). Zatem $XI \perp YJ$ i dlatego $\triangle IPX \sim \triangle YQJ$ (trójkąty o bokach odpowiednio prostopadłych). Stąd $\frac{PX}{QJ} = \frac{IP}{YQ}$, czyli $PX \cdot QY = IP \cdot QJ = \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{8}a$. W takim razie

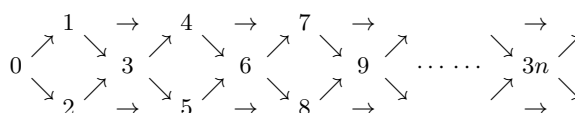
$$PX + QY \geq 2\sqrt{PX \cdot QY} = \frac{3}{2}a$$

(średnia arytmetyczna i geometryczna) i ostatecznie (skoro $PQ = \frac{3}{2}a$):

$$XY = XP + PQ + QY \geq 3a.$$

Równość jest osiągnięta, gdy $PX = QY = \frac{3}{4}a$, czyli gdy $\angle IXP = 2$. Tak więc $3a$ to szukane minimum.

910. Oznaczmy przez x_n, y_n, z_n (dla $n \geq 1$) liczbę ścieżek (odpowiednio) od wierzchołka 0 do wierzchołka z etykietą $3n-2, 3n-1, 3n$; zadanie pyta o wartość z_n . Do każdego z wierzchołków 1 i 2 wchodzi jedna krawędź od punktu 0, więc $x_1 = y_1 = 1$. Ogólnie, z warunków zadania wynika (dla $n \geq 2$), że do punktu $3n-2$ wchodzi krawędzie z punktów $3n-5$ i $3n-3$, zaś do punktu $3n-1$ wchodzi krawędzie z punktów $3n-4$ i $3n-3$; natomiast (dla $n \geq 1$) do punktu $3n$ wchodzi krawędzie z punktów $3n-2$ i $3n-1$.



To daje zależności rekurencyjne

$$x_n = x_{n-1} + z_{n-1}, \quad y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 2);$$

$$z_n = x_n + y_n \quad (\text{dla } n \geq 1).$$

W ostatnim z tych wzorów możemy cofnąć numerek i uzyskaną równość $z_{n-1} = x_{n-1} + y_{n-1}$ (dla $n \geq 2$) wstawić do dwóch poprzednich wzorów, otrzymując:

$$x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 2).$$

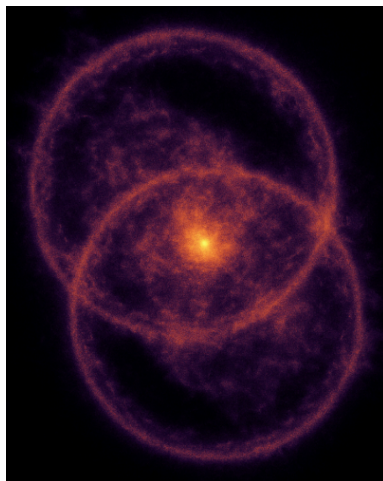
Przez oczywistą indukcję (z bazą $x_1 = y_1 = 1$):

$x_n = y_n = 3x_{n-1} = 3^{n-1}$. Stąd odpowiedź na postawione pytanie: $z_n = x_n + y_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Skrypt regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Wizualizacja oparta na obserwacjach radiowych dziwnego kręgu radiowego RAD J131346.9+500320, ukazująca dwa przecinające się pierścienie fali radiowych. Ten niezwykły obiekt odkryto dzięki danym LOFAR w ramach inicjatywy nauki obywatelskiej RAD@home. Źródło: Pratik Dabhade, RAD@home

Astronomowie to jednak specyficzna grupa ludzi, a przynajmniej o specyficznym poczuciu humoru. Wyobraźcie sobie poważne konferencje z poważnymi profesorami astronomii rozmawiającymi zupełnie poważnie o dziwnych kręgach. Bowiem tytułowy „dziwny krąg radiowy” (ang. *odd radio circle*) to oficjalna, poważna, naukowa nazwa grupy obiektów astronomicznych.

Dziwne kręgi radiowe są jednak intrygujące nie tylko ze względu na nazwę, ale głównie dlatego, że są ogromne (10–50 razy większe od naszej Galaktyki) i obserwujemy je od bardzo niedawna. Pierwszy taki obiekt został zaobserwowany zaledwie 6 lat temu. Do tej pory potwierdzono istnienie tylko ośmiu innych. Obiekty te są bardzo jasne w zakresie fal radiowych, lecz nie są widoczne w świetle widzialnym, podczerwieni ani w promieniowaniu rentgenowskim. Czasami okręgi są pojedyncze, a czasami podwójne. Tylko w trzech przypadkach wewnątrz kręgu(-ów) potwierdzono istnienie galaktyki. Wliczając w to ostatni, odkryty w październiku 2025 roku, podwójny dziwny krąg radiowy – obiekt o nazwie katalogowej RAD J131346.9+500320. Jest on jednocześnie najodleglejszy i emituje najsilniejszy sygnał ze wszystkich dotychczas zaobserwowanych.

Co ciekawe, odkrycia RAD J131346.9+500320 nie dokonał zawodowy astronom, ale grupa ludzi skupionych wokół obywatelskiego projektu naukowego RAD@home Astronomy Co laboratory. Projekt ten działa bez stałego finansowania i bez własnej infrastruktury badawczej! Łączy zawodowych astronomów z przeszkolonymi wolontariuszami z całych Indii, którzy analizują publicznie dostępne dane. Uczestnikami projektu są zarówno studenci studiów licencjackich i magisterskich kierunków ścisłych lub inżynierskich, jak i zmotywowani pasjonaci posiadający wykształcenie uniwersyteckie w dowolnej dziedzinie nauk ścisłych. W tym wypadku badania grupy opierały się na danych z teleskopu radiowego LOFAR (ang. *Low-Frequency Array for radio astronomy*) – najbardziej czułego urządzenia do pomiaru fal radiowych niskich częstotliwości na świecie.

O tajemniczym RAD J131346.9+500320 wiadomo bardzo niewiele. Składa się z dwóch symetrycznych pierścieni i zaobserwowano go na przesunięciu ku czerwieni $z \sim 0,94$, co oznacza, że widziany obraz pochodzi sprzed 7 miliardów lat (co odpowiada około połowie wieku Wszechświata). Oba widoczne na rysunku pierścienie są prawie identyczne i każdy ma średnicę 300 kpc ($1,62 \times 10^{17}$ km). Centralny jasny punkt widoczny wewnątrz okręgów pokrywa się ze słabą galaktyką będącą na tym samym przesunięciu ku czerwieni, co sugeruje, że może ona być w jakiś sposób powiązana z pierścieniami. Co ciekawe, galaktyka ta jest częścią małej grupy galaktyk znajdujących się wewnątrz pierścieni, ale niewidocznych w promieniowaniu radiowym. Na obręczach pierścieni nie zaobserwowano żadnych galaktyk ani w ogóle żadnych obiektów astronomicznych. Ponadto rodzaj emitowanego promieniowania, a w szczególności fakt, że promieniowanie ma szeroki zakres częstotliwości, sugerują, że pierścienie mogą być zbudowane ze „stygnałej” plazmy.

Pochodzenie kręgów wciąż pozostaje niewyjaśnioną zagadką. Jak na razie zaobserwowaliśmy zbyt małą ilość tych dziwnych obiektów, aby móc z całą pewnością stwierdzić, jak powstały. Wstępne badania sugerują jednak, że pierścienie mogą być wynikiem działania potężnych fal uderzeniowych wywołanych przez łączenie się supermasywnych czarnych dziur lub nawet całych galaktyk. Czyli w rzeczywistości dziwne kręgi mogą być dziwnymi sferami.

Napisane na podstawie artykułu: Ananda Hota, Pratik Dabhade, Prasun Machado et al., “RAD@home discovery of extragalactic radio rings and odd radio circles: clues to their origins”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 543, Issue 2, October 2025.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych,
Narodowe Centrum Badań Jądrowych



W marcu Słońce wędruje szybko na północ. Przez cały miesiąc wzniesie się ono o ponad 12° , pociągając za sobą wzrost długości dnia o ponad 2 godziny. 20 marca Słońce przetnie równik niebieski. Tym samym na północ od równika zacznie się astronomiczna wiosna. Tydzień później, w nocy z 27 na 28 marca, nastąpi zmiana czasu na letni, czyli przesunięcie zegarów o godzinę do przodu.

Początek marca oznacza pożegnanie z Saturnem. Szóstą planetę od Słońca można dostrzec tylko w pierwszej dekadzie miesiąca. 8 marca dojdzie do spotkania Saturna z Wenus, gdy dystans między planetami spadnie do $56'$. Oczywiście ich rozpoznanie nie jest trudne, ponieważ blask Wenus wynosi $-3,9^m$, Saturn natomiast świeci o 5^m słabiej. Obie planety znikają z nieboskłonu mniej więcej godzinę po Słońcu.

W przeciwieństwie do Saturna widoczność Wenus się poprawia. W marcu planeta przemierzy cały gwiazdozbiór Ryb. Do końca miesiąca jej wysokość nad horyzontem godzinę po zachodzie Słońca zwiększy się do 8° . Wygląd tarczy Wenus w teleskopach nieznacznie się zmieni. Jej średnica wynosi $11''$, faza zaś przekracza 93%.

Marzec jest nadal dobrym miesiącem na obserwacje Urana i Jowisza. Ze względu jednak na coraz później zapadający zmierzch i zbliżanie się obu planet do Słońca ich widoczność wyraźnie się pogarsza. Szczególnie w przypadku Urana. Na początku miesiąca dwie godziny po zachodzie Słońca planeta zajmuje pozycję na wysokości 45° nad południowo-zachodnią częścią nieboskłonu. Pod koniec miesiąca o tej samej porze jest to już tylko 20° .

Uran kreśli swoją pętlę na niebie jakieś 5° na południowy zachód od Plejad. Do końca miesiąca planeta minie świecące z jasnością, odpowiednio, $+5,6$ oraz $+6,1^m$ gwiazdy 13 i 14 Tauri. 18 marca Uran przejdzie $18'$ na południe od pierwszej z nich, 8 dni później natomiast – zaledwie $5'$ od drugiej. Jego jasność wynosi $+5,8^m$, stąd może on się mylić z obiema gwiazdami. Warto zatem pamiętać, że planeta wędruje na południe od nich.

11 marca Jowisz zmieni kierunek ruchu ze wstecznego na prosty. Planeta kreśli swoją pętlę na niebie w centrum gwiazdozbioru Bliźniąt. W pierwszej części miesiąca początek nocy astronomicznej zastaje Jowisza jeszcze przed górowaniem. Pod koniec miesiąca o tej samej porze jest on już po zachodniej stronie południka lokalnego, ale nadal przekracza wtedy wysokość 50° . W marcu blask planety spadnie do $-2,2^m$, jej tarcza zmniejszy zaś średnicę do $39''$.

Księżyc utrudni obserwacje innych ciał niebieskich na początku i na końcu miesiąca. 3 marca przypada pełnia Srebrnego Globu, który w tym czasie wejdzie również w cień Ziemi. Niestety okazję do obserwacji tego przejścia będą mieli tylko mieszkańcy basenu Oceanu Spokojnego. Dzień wcześniej Księżyc spotka się z Regulusem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa, wschodząc $3,5^\circ$ od niego. 6 dnia miesiąca Srebrny Glob w fazie zmniejszonej do 87% pokaże się $4,5^\circ$ pod Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny. 10 marca zaś faza księżycowej tarczy spadnie do 60%, a tę noc spędzi ona

w towarzystwie Antaresa i innych gwiazd konstelacji Skorpiona.

11 marca nastąpi ostatnia kwadra Księżyca. A z uwagi na niekorzystne nachylenie ekliptyki na niebie porannym szybko zginie on w zorzy porannej. 13 marca jego sierp w fazie 33% przejdzie 2° od Nunki, jasnej gwiazdy Strzelca.

19 marca o godzinie 2:24 naszego czasu wypada nów Księżyca i jeśli stan atmosfery na to pozwoli, to już 16 godzin później przy pomocy lornetki można spróbować odnaleźć jego wąziutki sierp w fazie zaledwie 0,5% na wieczornym niebie. Pomoże tutaj planeta Wenus. Srebrny Glob pokaże się w odległości 10° na godzinie 5 względem niej. Dobę później dostrzeżenie Księżyca stanie się łatwe. Jego tarcza w fazie 4% pokaże się w odległości 5° na godzinie 1 względem Wenus.

23 marca Srebrny Glob w fazie 27% dotrze do gwiazdozbioru Byka, a zapadający zmierzch zastanie go 5° na wschód od Plejad. Kolejnej nocy, około godziny 0:30 księżycowa tarcza w fazie 40% zbliży się na 1° do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka. 20 godzin później nastąpi I kwadra Księżyca, następnej nocy natomiast przejdzie on w połowie drogi między Jowiszem a Polluksem, najjaśniejszą gwiazdą Bliźniąt.

Najciekawszym wydarzeniem marca w naszej części świata związanym z Księżycem jest jednak zakrycie Regulusa 29 dnia miesiąca. α Lwa leży bardzo blisko ekliptyki, co sprawia, że sezon jej zakryć trwa niecałe 2 lata, ale za to powtarza się częściej. Raz, gdy Księżyc przecina ekliptykę w okolicach Regulusa z północy na południe i drugi raz, gdy powraca na północ od niej. W trakcie sezonu dochodzi do około 20 zjawisk i z danego miejsca na Ziemi można dostrzec maksymalnie 2 z nich, a czasami żadnego. 29 marca zdarzy się właśnie jedyne zakrycie Regulusa przez Księżyc w sezonie 2025–2026 widoczne z terenu Polski. Zjawisko zacznie się około godziny 18:40 i skończy mniej więcej godzinę później (w południowo-zachodniej Polsce nieco wcześniej, w północno-wschodniej – nieco później). A zatem początek zakrycia przy ciemniejącym dopiero niebie. Obserwację utrudni wysoka faza księżycowej tarczy, przekraczająca 89%.

Ariel MAJCHER

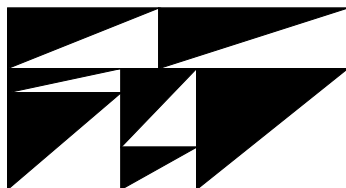
Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania M 1846.

Odpowiedź: Tak, jest to możliwe.

W każdym z prostokątów poprowadźmy przekątną z lewego dolnego rogu do prawego górnego. Następnie wszystkie trójkąty przylegające do lewego górnego wierzchołka prostokąta pokolorujmy na czarno, a pozostałe – na białło.



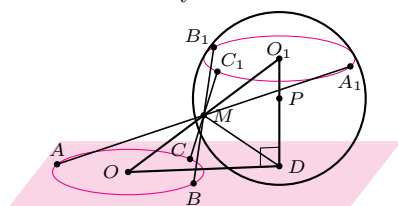
Pokażemy, że takie kolorowanie spełnia warunki zadania. Rozważmy wspólny odcinek brzegu dwóch trójkątów. Jeżeli jest to odcinek przekątnej, to z jednej strony przylega do niego trójkąt czarny, a z drugiej biały. Jeżeli odcinek jest poziomy, to nad nim znajduje się trójkąt biały, a pod nim czarny; analogicznie w przypadku odcinka pionowego.

W każdym przypadku dwa trójkąty mające wspólny odcinek brzegu są różnego koloru, co kończy dowód.



Rozwiązanie zadania M 1847.

Oznaczmy przez O_1 środek okręgu opisanego na trójkącie $A_1B_1C_1$, a przez P środek sfery ω .



Symetria środkowa względem punktu M przekształca trójkąt ABC na trójkąt $A_1B_1C_1$. W szczególności punkty O i O_1 są symetryczne względem punktu M , a więc M jest środkiem odcinka OO_1 . Ponadto płaszczyzny ABC i $A_1B_1C_1$ są równoległe.

Prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do tych płaszczyzn przecina płaszczyznę ABC w punkcie D oraz płaszczyznę $A_1B_1C_1$ w punkcie O_1 . Stąd $\angle O_1DO = 90^\circ$.

W trójkącie prostokątnym O_1DO punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej OO_1 , a więc $MO = MD$, co kończy dowód.



Rozwiązanie zadania M 1848.

Położmy $n = 2026$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \leq b \leq c$. Z warunku zadania wynika, że

$$a^n + b^n > c^n.$$

Zmniejszmy liczbę a n razy, kładąc

$$a' = \frac{a}{n}, \quad b' = b, \quad c' = c.$$

Ponieważ $a' \leq b' \leq c'$, to wystarczy udowodnić nierówność trójkąta: $a' + b' > c'$. Mamy

$$a' + b' = b + \frac{a}{n}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi n i stosując wzór dwumianowy, otrzymujemy

$$(a' + b')^n = \left(b + \frac{a}{n}\right)^n = b^n + nb^{n-1}\frac{a}{n} + \dots,$$

gdzie wielokropek oznacza sumę dodatnich składników.

Stąd

$$(a' + b')^n > b^n + b^{n-1}a \geq b^n + a^n > c^n.$$

Ostatecznie

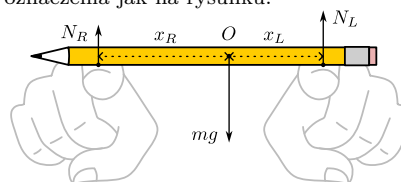
$$(a' + b')^n > c^n = (c')^n,$$

a zatem $a' + b' > c'$.



Rozwiązanie zadania F 1139.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Przed rozpoczęciem ruchu palców na ołówek oprócz siły ciężkości mg przyłożonej w środku masy O działają jedynie siły reakcji N_L i N_R . Rozkład masy ołówka wzdłuż jego osi jest niesymetryczny, zatem możemy przyjąć $x_L < x_R$. Momenty sił względem punktu O muszą się równoważyć:

$$x_L N_L = x_R N_R.$$

Wynika stąd $N_L > N_R$, więc aby wprawić palce w jednostajny ruch, należy przewyciszyć jedynie siłę tarcia statycznego działającą na prawy palec. Ołówek pozostanie w bezruchu względem lewego palca i zacznie przesuwac się po prawym. Warunek równowagi momentów sił względem punktu O nie zmienia swej postaci, dopóki siły tarcia działające na ołówek będą się znosić. Oznacza to, że stosunek sił reakcji N_L/N_R będzie malał, dopóki będzie spełniona nierówność:

$$\mu_s N_L \geq \mu N_R.$$

Dla $N_R > (\mu_s/\mu)N_L$, czyli $x_R < (\mu/\mu_s)x_L$, ołówek zacznie przesuwać się również względem lewego palca. Teraz warunek równowagi momentów sił względem punktu O przyjmie postać:

$$x_L N_L + r\mu N_R = x_R N_R + r\mu N_L.$$

Przekształcając równoważnie, otrzymujemy:

$$\frac{N_L}{N_R} = \frac{x_R - r\mu}{x_L - r\mu}.$$

Jeżeli palce zbliżają się dostatecznie powoli, rosnąca wypadkowa sił tarcia kinetycznego działająca na ołówek wyhamuje go względem prawego palca, zanim licznik ułamka po prawej stronie powyższego równania osiągnie wartość zero. Ołówek pozostanie w bezruchu względem prawego palca i będzie dalej przesuwać się po lewym. Opisany proces będzie przebiegał na przemian w jedną i w drugą stronę, dopóki palce się nie zetkną. Przez cały czas punkt O będzie znajdował się pomiędzy palcami, czyli ołówek nie straci równowagi.

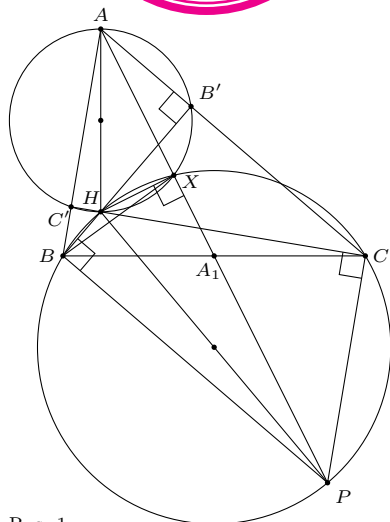


Rozwiązanie zadania F 1140.

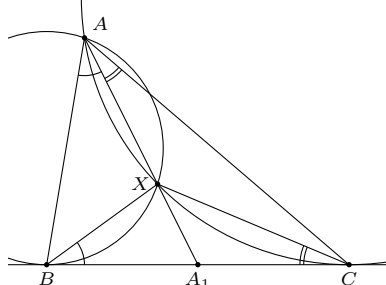
Siła tarcia kinetycznego ma zawsze kierunek ruchu ciała i zwrot przeciwny do zwrotu wektora prędkości. Gdy korek wprawiany jest w ruch obrotowy, siła nacisku na ścianki butelki nie zmienia się, więc wartość siły tarcia na jednostkę powierzchni f pozostaje taka sama we wszystkich punktach styczności. Zmienia się jednak kierunek działania tej siły. Stosunek wartości składowej pionowej $f_\downarrow$ do całkowitej wartości siły musi być taki sam jak stosunek prędkości v do wypadkowej prędkości powierzchni korka w każdym punkcie styczności:

$$f_\downarrow/f = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}}.$$

Podstawiając $f_\downarrow = f/2$ do powyższego wzoru, otrzymujemy $\omega = \sqrt{3}v/r$. Warto zauważyć, że wypadkowy moment siły pochodzący od poziomej składowej siły tarcia na jednostkę powierzchni można łatwo pokonać, zwiększając ramię siły zewnętrznej, którą przykładamy do korka. Na przykład zamiast łapać korek dłonią, można użyć kombinerek.



Rys. 1



Rys. 2

Humpty...

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ten i następny odcinek powstały na podstawie notatek mojej uczennicy, Aleksandry Żyniewicz, której bardzo dziękuję za ich udostępnienie. Głównym bohaterem jest punkt zwany pieszczotliwie *Humptym*.

Kilka oznaczeń czyniących życie przyjemniejszym. Okrąg o średnicy XY będziemy oznaczać $\odot(XY)$, zaś przez $\odot(XYZ)$ będziemy rozumieć okrąg opisany na trójkącie XYZ . W trójkącie ABC punkty G, O, H oznaczają, odpowiednio, środek ciężkości, środek okręgu opisanego i ortocentrum; ponadto przez A', B', C' będziemy oznaczać spodki wysokości poprowadzonych z odpowiednich wierzchołków, a przez A_1, B_1, C_1 – środki boków naprzeciw tych wierzchołków.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku trójkąta ostrokątnego. W rozwartokątnym sytuacja wygląda podobnie, jeżeli dobrze rozumieć odpowiednie kąty.

Twierdzenie. Każda z poniższych definicji określa jednoznacznie ten sam punkt X :

- (1) rzut prostokątny punktu H na prostą AA_1 ;
- (2) różny od H punkt przecięcia $\odot(AH)$ i $\odot(BCH)$ (lub punkt H , gdy te okręgi są styczne);
- (3) punkt X spełniający równości $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle CBX|$ i $|\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle BCX|$;
- (4) punkt X , dla którego $\odot(ABX)$ i $\odot(ACX)$ są styczne do prostej BC .

Dowód. Niech P będzie punktem symetrycznym do A względem A_1 . Czworokąt $ABPC$ jest równoległobokiem, więc $BP \perp BH$ oraz $CP \perp CH$, a zatem punkt P należy do $\odot(BCH)$ oraz $\odot(BCH) = \odot(PH)$ (rys. 1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Wystarczy zauważyć, że rzut punktu H na prostą AA_1 jest drugim punktem wspólnym okręgów $\odot(AH)$ i $\odot(PH)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Mamy $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle CHX| = |\sphericalangle CBX|$ – pierwsza równość wynika z własności kąta zewnętrznego H czworokąta $AXHC'$ wpisanego w okrąg (ma taką samą miarę co przeciwległy kąt wewnętrzny); druga ze wspólnego łuku CX . Analogicznie dowodzimy równości $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle XCB|$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Ponieważ

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CPB| &= |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAX| + |\sphericalangle XAC| \\ &= |\sphericalangle CBX| + |\sphericalangle XCB| = 180^\circ - |\sphericalangle BXC|, \end{aligned}$$

widzimy, że $X \in \odot(PH)$, zatem $|\sphericalangle HXP| = 90^\circ$.

Z równości $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle XPB|$ wynika, że punkt X leży na prostej AP (czyli na AA_1). Stąd X jest rzutem prostokątnym punktu H na prostą AA_1 .

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Równoważność wynika natychmiast z (obustronnego!) twierdzenia o stycznej i cięciwie (rys. 2).

Punkt X spełniający którąkolwiek (a zatem i wszystkie) spośród definicji (1)–(4) nazywamy punktem *A-Humpty* trójkąta ABC . Będziemy go oznaczać H_A , analogicznie definiujemy punkty H_B i H_C .

Zadania

1. Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym ABC punkty G, H, H_A, H_B, H_C leżą na jednym okręgu.
2. Symediana poprowadzona z wierzchołka A trójkąta ostrokątnego ABC przecina $\odot(ABC)$ w punkcie $K \neq A$. Punkt K' jest symetryczny do K względem prostej BC . Wykazać, że punkt K' leży na prostej AA_1 (symediany to proste izogonalnie sprzężone do środkowych – zob. kącik nr 86 w Δ_{26}^1).
3. Rozważmy trójkąt ostrokątny ABC . Niech B, C, R, S będą czterema różnymi punktami na prostej BC . Dowieść, że punkty A, H_A, R, S leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki BC i RS są sprzężone harmonicznie (zob. kącik nr 81 w Δ_{25}^9).
4. Dany jest trójkąt ostrokątny, różnoboczny ABC . Punkt K_A jest spodem dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku A , a punkt L_A – zewnętrznego. Okrąg opisany na trójkącie AK_AL_A przecina prostą AA_1 w punkcie $X_A \neq A$. Punkty X_B i X_C są określone analogicznie. Wykazać, że środek $\odot(X_AX_BX_C)$ leży na prostej Eulera trójkąta ABC (zob. kącik nr 22 w Δ_{20}^{10}).

Wskaźniki do zadań

1. Jest to okrąg o średnicy HG .
2. Z pomocą (3) można wykazać, że $K' = H_A$.
3. Zgodnie z własnością (4) zachodzą równości: $|A_1B|^2 = |A_1A| \cdot |A_1H_A| = |A_1R| \cdot |A_1S|$ (por. kącik nr 11 w Δ_{16}^{10}). Pozostaje skorzystać z zadania 1(c) z przytoczonego (por. kącik nr 81 w Δ_{25}^9).
4. Odcinki BC i K_AL_A są harmonicznie sprzężone (dla czego? – można skorzystać z poprzedniego zadania).

nie tylko zdobędziesz wiedzę, poćwiczysz abstrakcyjne myślenie, ale też rozwiniesz kompetencje społeczne, uczestnicząc w zespołowych projektach studenckich.

„TARKA - Tubowy Amatorski Radioteleskop Koła Astronomów”
„Eksperyment Cavendisha”
„Druk 3D modeli reaktorów jądrowych”
„Transport kwantowy w grafenie: modelowanie pofałdowań i efektów krawędziowych”
„Estymowanie energii cząstek w kalorymetrii z użyciem sieci neuronowych”
„Developing a comprehensive guide to microcontroller programming in Rust and Python”

to przykłady projektów zrealizowanych przez naszych studentów.

ZAPRASZAMY NA STUDIA!

FIZYKA , I i II st.
cztery ścieżki kształcenia na I st.:

standardowa

indywidualna - dostępna dla studentów, którzy uzyskali co najmniej 90 punktów rekrutacyjnych

fizyka medyczna

neuroinformatyka

9 specjalności do wyboru na II st.

NAUCZANIE FIZYKI, I st.

ASTRONOMIA , I i II st.

BIOFIZYKA , I i II st.

NANOINŻYNIERIA, I i II st.

ENERGETYKA JĄDROWA, I st.

OPTOMETRIA I OPTYKA OKULAROWA
jednolite 5-letnie studia magisterskie

PHYSICS (STUDIES IN ENGLISH), II st.
5 specjalności do wyboru

**QUANTUM PHYSICS AND CHEMISTRY -
INDIVIDUAL RESEARCH STUDIES**, II st.

