delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ $\pi = 3{,}141592\ldots$

NR 11 (630) 2026
CENA 9 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 / NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

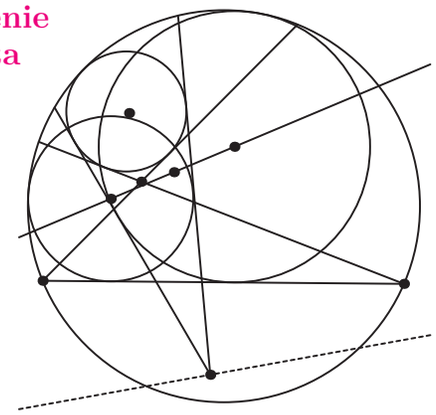
Czy o czasie coś powiedzieć da się?

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

ISSN 0137-3005

Nakład: 2700 egz.

W następnym numerze:
Uogólnione twierdzenie Sawayamy–Thébaulta



SPIS TREŚCI
NUMERU 11 (630) 2026

Liczby rzeczywiste Eudoksosa
Michał Miśkiewicz str. 1

Magnetohydrodynamika
Mariusz Mrózek str. 3

Odwracalne mieszanie płynów
Alicja Domańska str. 6

Wyznaczanie prędkości światła
Julia Tokarska str. 7

Okręgów nigdy dość!
Stanisław Majchrzak str. 8

Zadania str. 10

Rzecz o ułamkach łańcuchowych
Bartłomiej Pawlik str. 11

To zależy
Marta Fikus-Kryńska str. 12

Czy o czasie coś powiedzieć da się?
Mirosław Lachowicz str. 14

Informatyczny kącik olimpijski (141)
IKO na start – Optymalizacja mandatów, czyli zachłanność czasem popłaca
Lech Duraj str. 17

Kształt i opór, część 4/4: Czapka niewidka
Jarosław Górnicki str. 18

Aktualności
Zmarznięci, ale docenieni: Nobel z fizyki za IceCube str. 20

Klub 44 str. 21

Prosto z nieba: Trzy supermasywne czarne dziury str. 22

Niebo w listopadzie str. 23

Słynne *c*-fasolki
Bartłomiej Bzdęga str. 25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
prof. dr hab. Sławomir Dinew; dr Tomasz Greczyło, prof. UWr;
dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk;
dr Joanna Jaszuńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UWr;
prof. dr hab. Bartosz Klin;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Paweł Bieliński,
Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek,
Anna Durkalec, Małgorzata Fiejdasz – sekr. red., Jan Horubała,
Tomasz Kazana, Michał Miśkiewicz, Wiktor Matyszkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: `delta@mimuw.edu.pl` tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka www.trikigrafiki.pl.
Skład systemem LaTeX wykonała Redakcja.
Druk: Silverprint

Prenumerata:
Garmond Press: `www.garmondpress.pl` (tylko instytucje)
Kolporter: `www.kolporter.com.pl` (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
`www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p`

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 9 zł;
wcześniejsze egzemplarze 4 zł

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
`deltami.edu.pl`

Można nas też znaleźć na
`facebook.com/Delta.czasopismo`

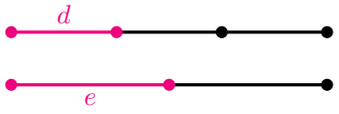
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Liczby rzeczywiste Eudoksosa

*Michał MIŚKIEWICZ**

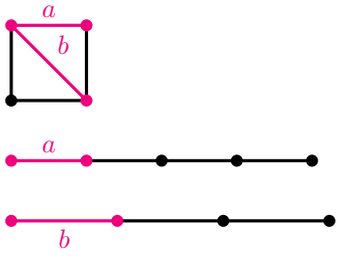
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Instytut Matematyczny PAN

Czym są liczby rzeczywiste? Istnieje wiele możliwych odpowiedzi na to pytanie. Chciałbym przedstawić jedną z nich, pochodzącą od Eudoksosa z Knidos (ok. 408–355 p.n.e.), wraz z odpowiadającą jej dużo późniejszą konstrukcją, która pozwala łatwo zbudować liczby rzeczywiste na fundamencie liczb całkowitych. Ma ona zalety, dzięki którym – mam nadzieję – zadowoli zarówno Czytelników znających konstrukcje Richarda Dedekinda (1831–1916) i Georga Cantora (1845–1918), jak i tych jedynie intuicyjne rozumiejących liczby rzeczywiste. Podejrzewam też, że zadowoliłaby samego Eudoksosa, bo stanowi bezpośrednie przedłużenie jego myśli. Z tego też powodu Stephen H. Schanuel (1933–2014), autor omawianej konstrukcji, nazwał powstałe liczby *liczbami rzeczywistymi Eudoksosa* [1].

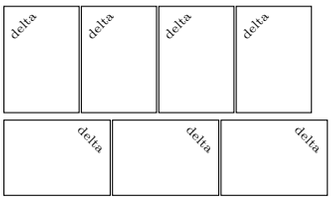


Odcinki d i e są w stosunku 2 do 3: $3 \cdot d = 2 \cdot e$.

Teoria proporcji Eudoksosa. Cofnijmy się do czasów, w których znano jedynie liczby naturalne oraz stosunki między nimi, czyli liczby wymierne. Skąd bierze się potrzeba jakichkolwiek innych liczb? Otóż właśnie z badania stosunków. Jeśli porównujemy długości odcinków d i e (patrz margines), to okazuje się, że po odłożeniu d trzy razy i e dwa razy otrzymujemy odcinki przystające, co rozpoznajemy przez nałożenie jednego na drugi. W takim przypadku użyjemy zapisu $3 \cdot d = 2 \cdot e$ (uwaga: to nie jest zapis mnożenia liczb, bo d i e liczbami nie są) i możemy z całą pewnością stwierdzić, że odcinki d i e są w stosunku 2 do 3.



Odcinki a i b nie są współmierne, np. $4 \cdot a < 3 \cdot b$. Można się o tym przekonać, układając obok siebie kartki formatu A (A4, A5 etc.):



Kartki A4 stawiane pionowo i poziomo nigdy się nie spotkają.

Nie zawsze mamy tyle szczęścia i starożytni Grecy o tym wiedzieli. Rozważmy mianowicie bok kwadratu a i jego przekątną b. Jak widać obok, czterokrotne odłożenie a daje odcinek ciut krótszy niż trzykrotne odłożenie b, co zapiszemy jako $4 \cdot a < 3 \cdot b$. Czytelnikowi wyposażonemu w ryzę papieru A4 – boki kartki A4 są w tym właśnie stosunku – polecam sprawdzić samodzielnie, że wielokrotne przedłużanie obu odcinków nie doprowadza do ich spotkania. Jak więc opisać stosunek $a : b$? I co to znaczy, że boki kartki A4 są *w tym samym stosunku*? Przypomnijmy, że rozwiązanie polegające na przypisaniu każdemu z badanych odcinków liczby rzeczywistej opisującej jego długość, a następnie porównaniu odpowiednich ilorazów, nie wchodzi w grę jako anachroniczne.

Jak już wspomnieliśmy, stosunkowi $a : b$ nie można przypisać wartości wymiernej, więc tymczasem pozostawimy pierwsze pytanie bez odpowiedzi, a skupimy się na drugim. Teoria Eudoksosa pozwala bowiem traktować same stosunki jak liczby, a przede wszystkim, porównywać je [2, księga V]. Otóż jeśli dla pewnych naturalnych n, m zachodzą jednocześnie związki $n \cdot a > m \cdot b$ i $n \cdot d < m \cdot e$, to przyjmujemy, że stosunek $a : b$ jest *większy* od stosunku $d : e$. Warto samodzielnie sprawdzić, że tak jest właśnie dla odcinków a, b, d, e z naszych dotychczasowych przykładów, wystarczy przyjąć $n = 10$ i $m = 7$. Nawiasem mówiąc, nic nie szkodzi, żeby tę samą konkluzję (stosunek a do b jest *większy* od stosunku d do e) przyjąć również wtedy, gdy jedna z powyższych nierówności jest nieostra; w naszym przypadku pozwala to zakończyć poszukiwanie na $n = 3$ i $m = 2$.

A co powiemy o przypadku, w którym nie istnieje para liczb naturalnych m, n świadcząca o nierówności między stosunkami? Otóż wówczas przyjmujemy, że dwa badane stosunki są *równe* (inaczej: *tworzą proporcję*). Z tym przypadkiem mieliśmy do czynienia, zestawiając stosunek a do b ze stosunkiem krótszego do dłuższego boku kartki A4. Geniusz Eudoksosa leży między innymi w tym, że porównywać można stosunki wielkości dowolnych rodzajów, a więc stosunek dwóch odcinków może być równy stosunkowi dwóch pól, dwóch mas albo po prostu dwóch liczb... Porównywać można wszystko. O tym aspekcie koncepcji Eudoksosa polecam przeczytać w artykule *Jak powstały wszystko opisujące liczby* z Δ^7_{18}.

Interpretacja De Morgana i konstrukcja Kołmogorowa. Dla zilustrowania tej definicji Augustus De Morgan (1806–1871) zaproponował następujący eksperyment myślowy [2, str. 122–124], tutaj nieco unowocześniony. Wyobraźmy sobie, że jedziemy drezyną po torach kolejowych, w których odcinek między kolejnymi podkładami przystaje do b. Wzdłuż torów ciągnie

Literatura:

[1] R. D. Arthan, *The Eudoxus real numbers*, arXiv:math/0405454 (2004).

[2] T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's elements with introduction and commentary*, vol. 2 (Books III–IX), Cambridge University Press (1908).

[3] M. H. Stone, *The real number system revisited*, L'Enseignement Mathématique 15 (1969).

się ogrodzenie, w którym odcinek między kolejnymi słupkami przystaje do a. Dla uproszczenia przyjmiemy, że w punkcie naszego startu słupek stoi na przedłużeniu podkładu. Wówczas jeden przejazd (nieskończonym) torem wystarczy nam, by zgromadzić pełną wiedzę o wszystkich nierównościach postaci $n \cdot a < m \cdot b$ (i $n \cdot a > m \cdot b$). Rzeczywiście, w tym celu musimy po prostu przy każdym mijanym słupku odnotować, ile podkładów mamy już za sobą. Przyjmując, że słupek i podkład startowy się nie liczą, oznaczmy przez $f_{a:b}(n)$ liczbę miniętych podkładów w chwili dotarcia do n-tego słupka (dopuszczając, że minięcie następuje dokładnie w tym momencie). Przykładowo, przy czwartym słupku przekonamy się, że $f_{a:b}(4) = 2$; oznacza to dokładnie tyle, że $4 \cdot a \geqslant 2 \cdot b$ (tym bardziej $4 \cdot a > 1 \cdot b$) oraz $4 \cdot a < 3 \cdot b$ (tym bardziej $4 \cdot a < 4 \cdot b$, $4 \cdot a < 5 \cdot b$ etc.). Językiem mniej obrazowym, definiujemy

$$f_{a:b} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_{a:b}(n) := \max\{m : n \cdot a \ \geqslant m \cdot b\}.$$

Zgodnie z teorią Eudoksosa wszystko, co potrzebne do badania stosunku $a : b$, zakodowane jest w jednej funkcji $f_{a:b}$, a więc w pewnym ciągu liczb naturalnych.

Andriej Kołmogorow (1903–1987) zapostulował więc, że można liczbę rzeczywistą odpowiadającą $a : b$ *zdefiniować* właśnie jako funkcję $f_{a:b}$ [3]. Lub inaczej: zdefiniować zbiór dodatnich liczb rzeczywistych jako zbiór funkcji $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniających warunki (1) i (2) streszczone na marginesie. O ile ta konstrukcja udziela łatwej odpowiedzi na pytanie *czym są* liczby rzeczywiste, o tyle nie wskazuje od razu, *jak działają*. Innymi słowy, jak mielibyśmy takie liczby dodawać i mnożyć? Określenie owych działań okazuje się możliwe, ale dość trudne. Pewnym wyjściem z sytuacji jest konstrukcja Shanuela, którą teraz pokrótce omówimy.

Liczby rzeczywiste jako funkcje prawie liniowe. Ujmijmy aksjomatycznie własności przysługujące funkcjom postaci $f_{a:b}$. Zauważmy, że jeśli a jest wielokrotnością b, czyli $a = k \cdot b$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to mamy po prostu $f_{a:b}(n) = nk$ dla każdego n. Taką funkcję nazywamy *liniową*, przez co rozumiemy, że $f_{a:b}(n+m) = f_{a:b}(n) + f_{a:b}(m)$ dla dowolnych n, m. W ogólnym przypadku tak nie jest (patrz wykres na marginesie), ale niewiele brakuje: różnica $f_{a:b}(n+m) - f_{a:b}(n) - f_{a:b}(m)$ może przyjmować jedynie wartości 0 i 1. Przyjmiemy więc:

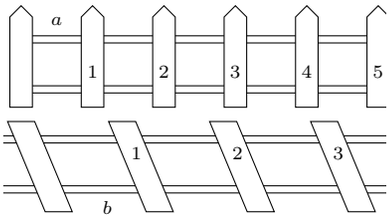
Definicja 1

- Funkcję $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nazwiemy *prawie liniową* (w skrócie p.l.), jeśli funkcja dwóch zmiennych $d_f(n,m) := f(n+m) - f(n) - f(m)$ jest ograniczona.
- Powiemy, że dwie funkcje p.l. f, f' określają tę samą liczbę rzeczywistą (piszemy $f \sim f'$), jeśli ich różnica, czyli funkcja określona wzorem $f(n) - f'(n)$, jest ograniczona.

Jak widać, rozpatrujemy tutaj nie tylko funkcje postaci $f_{a:b}$, gdyż nie wymagamy, aby funkcja d_f przyjmowała jedynie wartości $0, 1$ (choć nadal przyjmuje jedynie skończenie wiele różnych wartości). Korzyści wynikające z tego rozluźnienia wymagań pokażą się już za chwilę. W każdym razie liczymy się z tym, że jednej liczbie rzeczywistej odpowiada wiele funkcji prawie liniowych, i w rezultacie potrzebna jest też druga część definicji. Formalnie powiedzielibyśmy, że zbiór liczb rzeczywistych definiujemy jako zbiór klas abstrakcji funkcji p.l. względem relacji $\sim$.

Czytelnik Uważny zauważy też, że zbiór $\mathbb{N}$ zamieniliśmy na $\mathbb{Z}$. Ta zmiana odpowiada po prostu potrzebie rozważania liczb ujemnych, na temat których do tej pory milczeliśmy.

Obiecałem, że określenie działań na tak określonych liczbach nie jest trudne. Rzeczywiście, ilustracja De Morgana sama daje wskazówkę, jak to zrobić. Otóż jeśli połączymy odcinki a i c w jeden odcinek $a + c$, to spodziewamy się, że funkcja $f_{(a+c):b}$ jest bliska sumie funkcji $f_{a:b}$ i $f_{c:b}$. Z kolei funkcja $f_{a:c}$ nie powinna być odległa od złożenia $f_{a:b}$ i $f_{b:c}$. Intuicyjne wyjaśnienie można znaleźć na marginesie, tymczasem przekujmy tę obserwację w definicję sumy, iloczynu i porządku:



Zliczając przy każdym słupku liczbę miniętych podkładów, otrzymujemy ciąg $f_{a:b}(1) = 0$, $f_{a:b}(2) = 1$, $f_{a:b}(3) = 2$, $f_{a:b}(4) = 2$ etc.

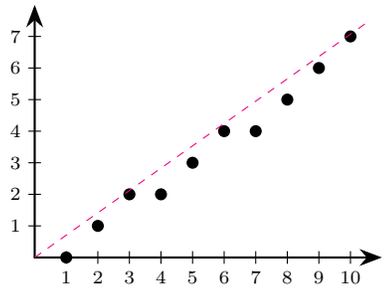
Sięgając na chwilę po dzisiejszy język, możemy stosunek $a : b$ opisać liczbą $x \in \mathbb{R}$ i wtedy $f_{a:b}(n) = \lfloor nx \rfloor$, ale nie wyprzedzajmy faktów.

Konstrukcja Kołmogorowa: dodatnią liczbą rzeczywistą nazwiemy każdą funkcję $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla której:

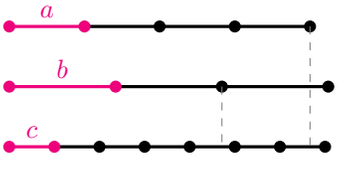
(1) jeśli $m, n \in \mathbb{N}$, to $mf(n) \leqslant f(mn) < m(f(n)+1)$;

(2) jeśli $n \in \mathbb{N}$, to istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że $mf(n) < f(mn)$.

Uwaga! Konstrukcja ta odpowiada innej konwencji zliczania podkładów: $f_{a:b}(n) = \max\{m : n \cdot a > m \cdot b\}$. Sprawdzenie, że dla takich funkcji zachodzą (1) i (2), jest niezłym ćwiczeniem.



Kropki tworzące wykres funkcji $f_{a:b}$ (dla odcinków a, b jak wcześniej) układają się blisko prostej $y = x/\sqrt{2}$, ale tylko w pewnym przybliżeniu, stąd nazwa: funkcja *prawie liniowa*.



Powyżej geometryczna interpretacja równości $f_{b:c}(f_{a:b}(4)) = f_{b:c}(2) = 4$: po minięciu 4 odcinków a mamy za sobą 2 odcinki b, a więc *na pewno* 4 odcinki c. Być może więcej, ale niewiele więcej, co sugeruje, że $f_{a:c} \approx f_{b:c} \circ f_{a:b}$.

Ilustracja dla $f_{(a+c):b} \approx f_{a:b} + f_{c:b}$ jest podobna, a nawet ciut łatwiejsza.

Definicja 2

- Sumą funkcji p.l. f, g nazywamy funkcję $f+g$ określoną wzorem $(f+g)(n) := f(n)+g(n)$.
- Iloczynem funkcji p.l. f, g nazywamy funkcję $f \cdot g$ określoną jako ich złożenie: $(f \cdot g)(n) := f(g(n))$.
- Przyjmiemy, że $f \leqslant g$, jeśli różnica $g-f$ jest ograniczona z dołu na liczbach naturalnych.

Żeby ta definicja poprawnie określała działania i porządek na liczbach rzeczywistych, należy jeszcze sprawdzić kilka własności (zad. 1, 2).

W tym miejscu warto odnotować, że nawet gdyby funkcje f i g były postaci $f_{a:b}$ i spełniały silniejszy warunek $d_f(n,m), d_g(n,m) \in \{0,1\}$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{Z}$, to funkcje $f+g$ i $f \cdot g$ już tego warunku spełniać nie muszą. Okazuje się więc, że przyjęcie słabszego założenia w definicji 1 rozwiązuje problem. Tworzy jednak kolejny: o ile nierówność między stosunkami $a:b$, $c:d$ sprowadza się do nierówności $f_{a:b}(n) \geqslant f_{c:d}(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to z funkcjami p.l. jest trudniej. Istotnie, jeśli funkcję p.l. f zaburzymy, w dowolny sposób zwiększając lub zmniejszając jej wartości o nie więcej niż (dajmy na to) tysiąc, to otrzymana funkcja nadal będzie p.l., co więcej, nadal będzie reprezentować tę samą liczbę rzeczywistą – stąd też konieczna jest ostatnia część definicji 2.

Powrót do współczesności. Wróćmy do roku 2026. Liczby rzeczywiste zostały już odkryte, więc chcielibyśmy przekonać się, że działają tak samo jak liczby skonstruowane powyżej. Nie jest to trudne. W tym celu każdej liczbie rzeczywistej $p \in \mathbb{R}$ przypisujemy stosunek liczb $p:1$, który z kolei definiuje funkcję $f_{p:1}$. Nietrudno się przekonać, że dana jest ona wzorem $f_{p:1}(n) = \lfloor np \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ to zaokrąglenie x w dół do najbliższej liczby całkowitej.

Pozostaje sprawdzić, że każda funkcja p.l. f jest w relacji $f \sim f_{p:1}$ dla *dokładnie jednej* liczby $p \in \mathbb{R}$, oraz że działania na liczbach rzeczywistych odpowiadają tym na funkcjach p.l. Problem sam w sobie okazuje się pouczający, dlatego wrócimy do niego niebawem, w osobnym artykule. Do tego czasu polecam zmierzyć się z zadaniami:

Szkice rozwiązań znajdują się na stronie 21.

Zadanie 1. *Wykazać, że jeśli funkcje f, g są prawie liniowe, to funkcje $f+g$ oraz $f \cdot g$ również.*

Zadanie 2. *Udowodnić, że jeśli $f \sim f'$ i $g \sim g'$, to $f+g \sim f'+g'$ oraz $f \cdot g \sim f' \cdot g'$, ponadto $f \leqslant g$ jest równoważne $f' \leqslant g'$.*

Zadanie 3. *Sprawdzić, że funkcje $\mathbf{0}(n) := 0$ i $\mathbf{1}(n) := n$ spełniają role zera i jedynki: $f+\mathbf{0} = \mathbf{0}+f = f$, $f \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot f = f$, $\mathbf{0} \cdot f = \mathbf{0}$, $f \cdot \mathbf{0} \sim \mathbf{0}$.*

Magnetohydrodynamika

*Mariusz MRÓZEK**

* Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński

Magnetohydrodynamika (z greckiego: magneto – pole magnetyczne, hydro – woda/płyn, dynamika – ruch, w skrócie MHD) to dziedzina fizyki zajmująca się badaniem dynamiki płynów przewodzących prąd elektryczny, na które działa pole magnetyczne. Płynami takimi mogą być plazma, ciekłe metale (np. rtęć, ciekły sód, gal), a także elektrolity, takie jak słona woda.

Zarys historyczny

Choć jako odrębna gałąź nauki została zdefiniowana znacznie później, historia badań nad magnetohydrodynamiką sięga początków XIX wieku. W 1832 roku Michael Faraday przeprowadził pierwszy znany eksperyment z zakresu MHD (magnetohydrodynamiki). Zaintrygowany zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej, opuścił dwie miedziane płyty z mostu Waterloo do Tamizy. Jego celem było zmierzenie napięcia wygenerowanego przez (lekko zasoloną) wodę w rzece, przecinającą linie ziemskiego pola magnetycznego. Ze względu na zjawiska polaryzacji elektrod oraz bardzo słabe pole magnetyczne Ziemi, eksperyment nie przyniósł jednoznacznych odczytów, jednak jego założenia teoretyczne były bezbłędne.

Fale Alfvéna to fale poprzeczne w zjonizowanym gazie (plazmie) znajdującym się w polu magnetycznym, które rozchodzą się wzdłuż tego pola. Nie powodują zmian ciśnienia ośrodka (które to zmiany są źródłem fal akustycznych), bo gęstość plazmy pozostaje stała w czasie.

Ojcem magnetohydrodynamiki jest szwedzki fizyk Hannes Alfvén. W 1942 roku opublikował on przełomową pracę, w której opisał istnienie fal elektromagnetyczno-hydrodynamicznych, znanych dziś jako fale Alfvéna. Dowiódł, że w doskonale przewodzącym płynie linie pola magnetycznego są „wmrożone" w materię i poruszają się razem z nią. Za swoje fundamentalne prace w tej dziedzinie Alfvén otrzymał w 1970 roku Nagrodę Nobla z fizyki.

Projekt U-25 był radziecką instalacją badawczą, w której wykorzystywano MHD do bezpośredniej zamiany energii cieplnej gazu na energię elektryczną.

W latach 60. i 70. XX wieku MHD zyskała ogromne zainteresowanie wojska i przemysłu. Intensywne badania nad generatorami energii elektrycznej wykorzystującymi zjawisko MHD prowadzono w Związku Radzieckim (projekt U-25) oraz w USA. Równolegle badano również ciche napędy magnetohydrodynamiczne dla okrętów podwodnych (Japonia), co później stało się inspiracją dla powieści Toma Clancy'ego „Polowanie na Czerwony Październik".

Podstawy fizyczne

Zjawiska MHD opisuje się przez łączenie mechaniki płynów (poprzez równania Naviera–Stokesa) z klasycznym elektromagnetyzmem (równania Maxwella). Elementem sprzęgającym obie dziedziny fizyki jest siła Lorentza, która działa na ładunki poruszające się w polu magnetycznym. Gęstość objętościowa tej siły f (siła na jednostkę objętości) wynosi

$$f = J \times B,$$

gdzie J to gęstość prądu elektrycznego, a B to indukcja pola magnetycznego.

Dla płynu nieściśliwego o stałej gęstości ρ i lepkości dynamicznej μ, pełne równanie ruchu (zmodyfikowane równanie Naviera–Stokesa) przybiera postać

$$\rho\left(\frac{\partial \nu}{\partial t} + (\nu \cdot \nabla)\nu\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\nu + J \times B,$$

gdzie ν to wektor prędkości płynu, a p to ciśnienie hydrodynamiczne.

Lewa strona równania opisuje zmianę prędkości płynu w czasie i przestrzeni (odpowiednio $\frac{\partial \nu}{\partial t}$ i $(\nu \cdot \nabla)\nu$). Prawa strona składa się z członu zależnego od ciśnienia $-\nabla p$, lepkości $\mu\nabla^2\nu$ i właśnie sprzężenia z siłą Lorentza $J \times B$. Innymi słowy, pole magnetyczne może przyspieszać lub hamować przepływ przewodzącego płynu tak samo jak jego lepkość i ciśnienie.

Równanie to nie wyczerpuje jednak opisu MHD. Sam ruch płynu również wpływa na pole magnetyczne. Tę zależność opisuje równanie indukcji magnetycznej, które otrzymuje się z połączenia prawa Ohma dla przewodzącego płynu z równaniami Maxwella.

Punktem wyjścia jest uogólnione prawo Ohma dla płynu w ruchu

$$J = \sigma\left(E + \nu \times B\right),$$

gdzie σ to przewodność elektryczna płynu, a E to natężenie pola elektrycznego. Człon $\nu \times B$ reprezentuje siłę elektromotoryczną indukowaną przez ruch płynu w polu magnetycznym (to ten człon odpowiada za działanie prądnic MHD).

Łącząc prawo Ohma z prawem Faradaya ($\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$) oraz prawem Ampère'a ($\nabla \times B = \mu_0 J$) otrzymujemy równanie indukcji magnetycznej

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\nu \times B) + \eta\nabla^2 B,$$

gdzie $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ nosi nazwę *dyfuzyjności magnetycznej*.

Równanie to pokazuje dwa rywalizujące ze sobą zjawiska. Pierwszy człon po prawej stronie opisuje „unoszenie" i zagęszczanie linii pola przez poruszający się płyn. Drugi człon opisuje dyfuzję (rozmywanie) pola magnetycznego na skutek oporu elektrycznego płynu.

Stosunek tych dwóch wielkości określa magnetyczna liczba Reynoldsa

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\nu L}{\eta} = \mu_0 \sigma \nu L,$$

gdzie L to wymiar charakterystyczny układu.

Jeśli $\mathrm{Re}_m \gg 1$ (np. w plazmie słonecznej), pole magnetyczne jest *zamrożone* w płynie. Jeśli natomiast $\mathrm{Re}_m \ll 1$ (np. w wodzie morskiej lub eksperymentach laboratoryjnych), pole magnetyczne swobodnie przenika przez płyn.

Generator MHD

Generator MHD przetwarza energię termiczną i kinetyczną płynu bezpośrednio w energię elektryczną, całkowicie eliminując turbiny mechaniczne i ruchome części wirnika. Gorący, zjonizowany gaz (plazma) przepływa z dużą prędkością przez dyszę do kanału, w którym panuje silne poprzeczne pole magnetyczne. Zgodnie ze wzorem na indukcję, w poprzek strumienia generowane jest pole elektryczne. Na ściankach kanału umieszcza się elektrody odbierające prąd. Moc generowana z jednostki objętości wyraża się w przybliżeniu wzorem

$$P = \rho\nu^2 B^2 K(1 - K),$$

gdzie $K = E/\nu B$ to współczynnik obciążenia. Maksymalną moc uzyskuje się dla $K = 0{,}5$.

Istnieją różne typy generatorów:

- Faradaya: z elektrodami ciągłymi lub segmentowanymi na przeciwległych ścianach generatora (rys. 1);

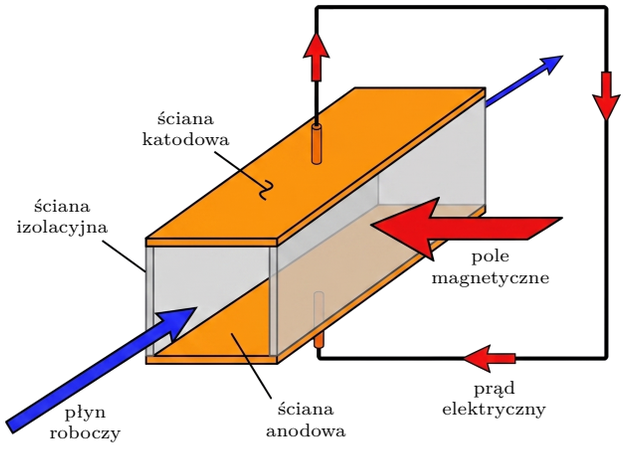
- Halla: wykorzystujące zjawisko Halla, gdzie prąd zbierany jest wzdłuż kierunku przepływu gazu;
- Dyskowe: promienisty przepływ płynu z osiowym polem magnetycznym, niezwykle wydajne w cyklach zamkniętych.

Główną zaletą generatorów MHD jest ich ogromna sprawność (powyżej 60% w układach skojarzonych z klasycznymi elektrowniami gazowymi/węglowymi) z uwagi na to, że proces produkcji energii elektrycznej zachodzi w znacznie wyższych temperaturach niż pozwalają na to tradycyjne generatory, których stalowe turbiny nie są w stanie pracować w takich warunkach. Natomiast głównym problemem generatorów MHD jest drastyczna erozja używanych w nich materiałów elektrodowych oraz niska przewodność gazów spalinowych. Przewodność poprawia się przez dodawanie jonizującej substancji, na przykład potasu, ale niestety komplikuje to i podraża pracę generatora.

Napędy MHD

Zasada działania napędu MHD jest odwrotnością prądnicy. Przewodzący płyn znajduje się wewnątrz kanału. Silne pole magnetyczne przecina się prostopadle z prądem elektrycznym dostarczanym z zewnątrz i płynącym między elektrodami. Wynikowa siła Lorentza wyrzuca płyn z dyszy, generując ciąg (na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona).

Pierwszą realizacją tego pomysłu był napęd morski. Ponieważ woda morska ($\sigma \approx 5$ S/m) jest bardzo słabym przewodnikiem w porównaniu z miedzią ($\sigma \approx 6 \times 10^7$ S/m), to napęd wymaga zastosowania prądów o natężeniach rzędu dziesiątek tysięcy amperów oraz potężnych pól magnetycznych. W 1992 roku w Japonii zbudowano *Yamato 1* – pierwszy (i jedyny) statek o napędzie MHD. Ważył 280 ton i korzystał z nadprzewodzących cewek chłodzonych ciekłym helem. Mimo sukcesu dowodzącego poprawności koncepcji, statek osiągnął prędkość zaledwie 15 km/h, a jego sprawność całkowita była skrajnie niska z powodu dużych strat mocy na elektrolizę wody.



Rys. 1. Liniowy generator magnetohydrodynamiczny typu Faradaya, w którym energia kinetyczna przewodzącego płynu (np. plazmy) jest bezpośrednio zamieniana na energię elektryczną. Działanie opiera się na trzech prostopadłych do siebie wektorach: strumień płynu wpływa do izolowanego kanału (niebieska strzałka), gdzie przecina prostopadłe, silne pole magnetyczne (czerwona strzałka), co wywołuje siłę Lorentza rozdzielającą swobodne ładunki w płynie. Dodatnie i ujemne jony są spychane w kierunku przeciwległych, przewodzących ścian (katodowej i anodowej), na których indukuje się napięcie, powodując przepływ prądu elektrycznego przez podłączony obwód zewnętrzny.

Rys. 2. Statek *Yamato 1* – jedyna znana realizacja napędu MHD. Fot. Geofrog. Źródło: Wikimedia Commons, licencja CC BY-SA 2.5.

Zastosowanie napędu MHD wydaje się niesamowicie istotne w przyszłych napędach kosmicznych: to tutaj MHD ma największy potencjał inżynieryjny. Napędy takie jak VASIMR (ang. *Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket*) jonizują gaz napędowy (np. argon lub ksenon) do postaci plazmy. Następnie pole magnetyczne przyspiesza tę plazmę do prędkości rzędu dziesiątek kilometrów na sekundę. Generuje to ogromny impuls właściwy, co czyni je idealnymi kandydatami do załogowych misji na Marsa. Brak ruchomych części oznacza brak zużycia mechanicznego podczas wielomiesięcznej pracy w próżni. Obecnie technologia pozostaje w fazie badań laboratoryjnych.

Polowanie na Czerwony Październik

Zjawisko magnetohydrodynamiki trafiło do świadomości masowej za sprawą wspomnianej powieści „Polowanie na Czerwony Październik" oraz jej znakomitej ekranizacji. Tytułowy radziecki okręt podwodny typu Tajfun został wyposażony w ściśle tajny napęd nazywany przez załogę „napędem gąsienicowym" (ang. *caterpillar drive*). W rzeczywistości ten system to opisany wcześniej napęd magnetohydrodynamiczny, wykorzystujący wodę morską zamiast plazmy. Największą zaletą taktyczną tego napędu, kluczową dla fabuły, był całkowity brak obracających się śrub napędowych. Eliminowało to zjawiska kawitacji i wibracji mechanicznych, czyniąc „Czerwony Październik" praktycznie bezgłośnym i niewidzialnym dla wrogich sonarów akustycznych.

Podsumowanie

Magnetohydrodynamika to nauka pełna inżynieryjnych wyzwań i fascynującej matematyki. Chociaż ziemskie próby zbudowania cywilnych okrętów MHD czy komercyjnych generatorów w latach 90. potknęły się o bariery materiałowe, rozwój najnowszych technologii – w szczególności nadprzewodników wysokotemperaturowych – powoli usuwa dawne przeszkody. Daje to szansę na renesans układów MHD w nadchodzących dekadach, szczególnie w kontekście podboju kosmosu i energetyki fuzyjnej.

Odwracalne mieszanie płynów

Alicja DOMAŃSKA

Opis eksperymentów *Odwracalne mieszanie płynów* i *Wyznaczanie prędkości światła* powstał w ramach Zespołowego Projektu Studenckiego na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego pod opieką Piotra Kaźmierczaka.

Wyobraź sobie, że mieszasz dwa niemal identyczne płyny, różniące się jedynie kolorem. Czy po zmieszaniu ich ze sobą możesz je z powrotem „rozmieszać"? Codzienne doświadczenie podpowiada, że nie – gdy połączymy na przykład mleko z wodą, nie jesteśmy w stanie ich łatwo rozdzielić. W dalszej części przedstawię jednak doświadczenie, w którym jest to możliwe.

Zanim jednak do tego przejdziemy, wprowadźmy nieco teorii i zastanówmy się, skąd właściwie wynika nieodwracalność procesu mieszania płynów. Ruch płynu o prędkości u i gęstości ρ opisują równania Naviera–Stokesa, które określają, w jaki sposób zmiana pędu elementów płynu zależy od ciśnienia, sił lepkości oraz gęstości sił zewnętrznych f. Więcej o tych równaniach można przeczytać na przykład w artykule Witolda Sadowskiego *Równanie Naviera–Stokesa* w Δ^{12}_{14}.

Równania Naviera–Stokesa są równaniami nieliniowymi względem u. Oznacza to, że jeśli u jest rozwiązaniem tego równania dla danej gęstości siły f, to $-u$ nie jest rozwiązaniem odpowiadającym sile $-f$. Wynika z tego, że ruch płynu nie jest kinematycznie odwracalny. Nieliniowy składnik odpowiada za konwekcję, czyli transport pędu wynikający z ruchu samego płynu.

Na nieodwracalność procesu mieszania wpływa również składnik związany z lepkością płynu μ, opisujący mikroskopowe oddziaływania w płynie oraz dyssypację energii wynikającą z lepkości i dyfuzji. Powoduje to zwiększanie entropii układu, a tym samym termodynamiczną nieodwracalność procesu.

W naszym doświadczeniu płyn będzie znajdować się pomiędzy dwoma współosiowymi walcami – wewnętrznym o promieniu R_1, którym będziemy obracać z prędkością kątową Ω, oraz nieruchomym zewnętrznym walcem o promieniu R_2. Zależność ruchu płynu od powyższych parametrów oraz wewnętrznych właściwości płynu opisuje liczba Reynoldsa $Re = \rho\Omega R_2^2/\mu$, określająca stosunek sił bezwładności do sił lepkości. Gdy $Re \ll 1$, nieliniowy człon równania Naviera–Stokesa staje się zaniedbywalnie mały w porównaniu z pozostałymi składnikami i można go pominąć. W rezultacie otrzymujemy równanie Stokesa, które jest już liniowe względem prędkości płynu.

Warunek $Re \ll 1$ odpowiada bardzo lepkim płynom, niedużym średnicom walców i małym prędkościom. Dzięki takiemu doborowi parametrów możliwe było zastosowane przybliżenie, w którym pominęliśmy problematyczny nieliniowy składnik obecny w równaniach Naviera–Stokesa. W konsekwencji ruch płynu staje się kinematycznie odwracalny.

W praktyce nie da się idealnie odwrócić procesu mieszania, co wynika z dyssypacji energii i związanej z nią dyfuzji. Efekt ten jest jednak bardzo niewielki, dzięki czemu proces można odwrócić z dużą dokładnością.

Elementy układu doświadczalnego:

- Dwa przeźroczyste naczynia w kształcie walca, jedno o znacznie mniejszej średnicy niż drugie. Mniejsze naczynie powinno być co najmniej 5 cm wyższe od większego. Po współśrodkowym włożeniu jednego naczynia w drugie, pomiędzy brzegami powinno być tyle miejsca, aby bez problemu można było włożyć strzykawkę (mogą to być np. dwa słoiki).
- Syrop cukrowy: wlej do garnka wodę i cukier w proporcjach 1 : 2 (użyłam 100 ml wody i 200 ml cukru), podgrzewaj do całkowitego rozpuszczenia cukru. Gotowy syrop odstaw do ostudzenia.
- Barwnik, na przykład spożywczy lub farba
- Strzykawka
- Kawałek kartonu
- Taśma klejąca

Przebieg doświadczenia:

1. Przelej niewielką część syropu do innego naczynia i dodaj kilka kropli barwnika. Wymieszaj, po czym wstaw do lodówki. Uważaj, aby barwnika nie było zbyt dużo, ponieważ wtedy zmieni się gęstość płynu.
2. Zbuduj komórkę, do której następnie wlejesz płyn. Z kartonu wytnij koło większe o około dwa centymetry od dużego naczynia. W kole wytnij współśrodkowy otwór na mniejsze naczynie oraz zrób mały otwór na strzykawkę. Po umieszczeniu w otworze mniejszego naczynia, powinno ono swobodnie się obracać, ale nie przesuwać się na boki. Włóż mniejsze naczynie do większego i ustaw je centralnie. Wlej syrop do większego naczynia i przymocuj karton.

3. Za pomocą strzykawki wprowadź do syropu niewielką ilość zabarwionego płynu. Postaraj się, aby utworzył on możliwie zwartą kroplę oraz aby znalazła się ona mniej więcej w połowie wysokości cieczy. Najlepiej uzyskać to poprzez zanurzenie strzykawki w płynie, z końcówką na pożądanej wysokości.
4. Powoli obracaj wewnętrzne naczynie, przytrzymując zewnętrzne tak, aby pozostawało nieruchome.
5. Gdy uznasz, że kropla barwnika została już dobrze wymieszana z resztą roztworu, przerwij obracanie. Następnie zacznij obracać wewnętrznym naczyniem w przeciwnym kierunku. Po wykonaniu mniej więcej takiej samej liczby obrotów jak wcześniej, zabarwiona smuga powinna ponownie zebrać się w kroplę o zbliżonym kształcie.

Wyznaczanie prędkości światła

Julia TOKARSKA

W doświadczeniu, pozwalającym wyznaczyć prędkość światła za pomocą domowej kuchenki mikrofalowej, wykorzystujemy właściwości fal stojących. W przypadku standardowego użytkowania urządzenia, talerz obrotowy zapewnia równomierne ogrzewanie potrawy, jednak w tym eksperymencie dążymy do uzyskania sytuacji statycznej. Fale elektromagnetyczne emitowane przez magnetron ulegają interferencji, co prowadzi do powstania obszarów o maksymalnej amplitudzie (antywęzłów) oraz punktów, w których natężenie pola wynosi zero (węzłów). Dopóki produkt umieszczony w mikrofali pozostaje nieruchomy, woda w nim zawarta ulega gwałtownemu ogrzewaniu wyłącznie w antywęzłach. Odległość d między sąsiednimi punktami stopienia odpowiada połowie długości fali mikrofalowej. Znając częstotliwość f (podaną na obudowie urządzenia), możemy wyznaczyć prędkość światła c, korzystając ze wzoru $c = 2df$, gdzie d to zmierzona odległość między środkami sąsiednich stopionych obszarów, a f – częstotliwość pracy magnetronu (najczęściej 2,45 GHz).

Elementy układu doświadczalnego:

- Dwa różne talerze
- Dwie tabliczki czekolady (najlepiej gorzkiej)
- Kuchenka mikrofalowa
- Linijka
- Wykałaczki

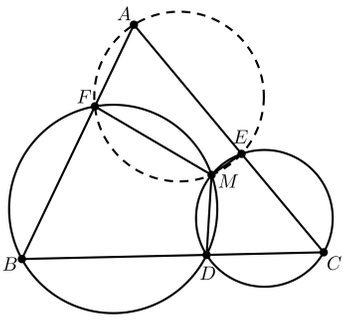
Przebieg doświadczenia:

1. Z wnętrza kuchenki mikrofalowej wyjmij pierścień obrotowy oraz szklany talerz.
2. Umieść talerz do góry dnem nad mechanizmem obrotowym, tworząc stabilną, nieruchomą platformę.
3. Na drugim talerzu ułóż tabliczki czekolady tak, aby pokrywały jak największą powierzchnię. Możesz też roztopić czekoladę, a następnie równomiernie rozprowadzić ją po talerzu i poczekać, aż zastygnie.
4. Wstaw talerz z czekoladą do kuchenki. Ustaw czas na trzydzieści sekund i włącz urządzenie.
5. Wyjmij talerz i za pomocą wykałaczek zaznacz środki obszarów, w których czekolada uległa roztopieniu.
6. Jeśli roztopione obszary są zbyt rozległe lub, przeciwnie, trudne do odnalezienia, wyciągnij wykałaczki z czekolady, poczekaj, aż ponownie zastygnie, i powtórz eksperyment, odpowiednio dostosowując czas pracy mikrofali.
7. Zmierz odległości między sąsiadującymi wykałaczkami. Wykonaj pomiary dla różnych par i oblicz średnią wartość d.
8. Odczytaj częstotliwość pracy urządzenia i wyznacz prędkość światła.

Okręgów nigdy dość!

*Stanisław MAJCHRZAK**

*Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński



Rys. 1

W artykule tym przedstawimy, jak zaskakująco dalekie konsekwencje może mieć bardzo proste twierdzenie Miquela o następującej wypowiedzi:

Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F leżące, odpowiednio, na prostych BC, CA, AB. Wówczas okręgi opisane na trójkątach AEF, BDF, CDE mają punkt wspólny.

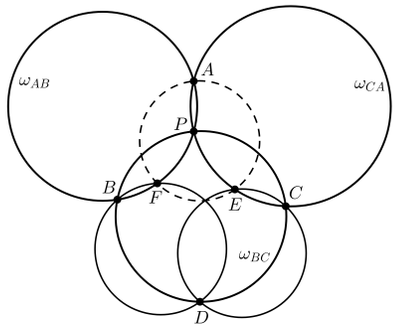
Dowód jest bardzo prosty. Załóżmy, że punkty D, E i F leżą na bokach trójkąta ABC (a nie ich przedłużeniach), jak na rysunku 1. Jeśli M jest drugim punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach BDF i CDE, to

$$\begin{aligned}\sphericalangle EMF &= 360^\circ - \sphericalangle DME - \sphericalangle FMD \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \sphericalangle ACB) - (180^\circ - \sphericalangle CBA) \\ &= \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle BAC,\end{aligned}$$

czyli M leży też na okręgu opisanym na trójkącie AEF. Dowód w pozostałych konfiguracjach jest analogiczny.

Twierdzenie to można uogólnić, rozważając inwersję o środku w dowolnie wybranym punkcie P. Przybiera ono wtedy następującą postać:

Twierdzenie A. *Jeśli okręgi ω_{AB}, ω_{BC}, ω_{CA} mają punkt wspólny P, punkty A, B, C to pozostałe punkty przecięcia par, odpowiednio, ω_{AB} i ω_{CA}, ω_{AB} i ω_{BC}, ω_{BC} i ω_{CA} oraz punkty D, E, F leżą odpowiednio na ω_{BC}, ω_{CA}, ω_{AB}, to okręgi opisane na trójkątach AEF, BDF, CDE mają punkt wspólny.*

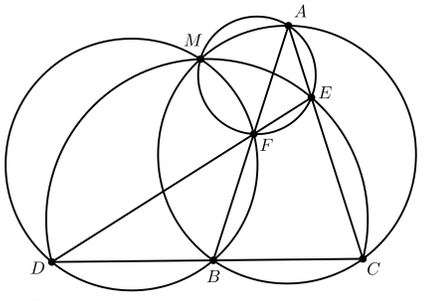


Rys. 2

Lub równoważnie:

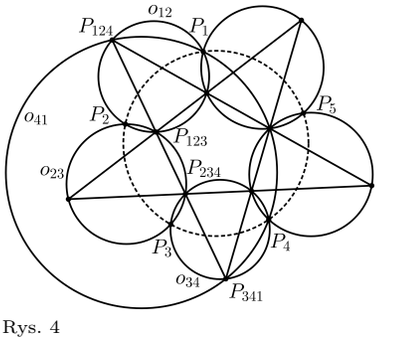
Twierdzenie B. *Jeśli istnieje okrąg przechodzący przez punkt wspólny okręgów c_1 i c_2, punkt wspólny okręgów c_2 i c_3, punkt wspólny okręgów c_3 i c_4 oraz punkt wspólny okręgów c_4 i c_1, to istnieje okrąg przechodzący przez ich pozostałe przecięcia.*

O ile fakt, że inwersja przeprowadza twierdzenie Miquela na twierdzenie A, widać natychmiastowo, to równoważność twierdzeń A i B wcale nie jest oczywista na pierwszy rzut oka. Jednak po dokładniejszym przyjrzeniu się rysunkowi 2 rozpoznajemy, że w twierdzeniu A rolę okręgów c_1, c_2, c_3, c_4 grają kolejno ω_{AB}, ω_{CA} oraz te opisane na CDE i BDF.



Rys. 3

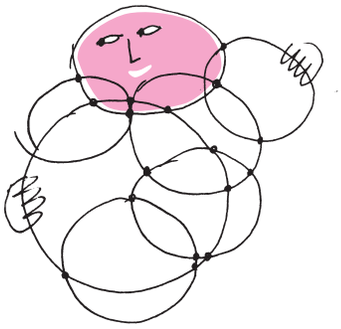
Przyjrzyjmy się jeszcze raz konfiguracji twierdzenia Miquela i zastanówmy się, co można powiedzieć w sytuacji, gdy punkty D, E, F będą leżały na jednej prostej. Wówczas cztery proste wyznaczają cztery trójkąty. Twierdzenie Miquela mówi o istnieniu punktu M wspólnego dla okręgów opisanych na AEF, BDF i CDE. To samo twierdzenie można tym razem zastosować również do trójkąta AEF i punktów D, C, B. Otrzymamy wówczas, że okręgi opisane na ABC, CDE, BDF mają punkt wspólny (rys. 3). Wniosek – okręgi opisane na wszystkich czterech trójkątach przechodzą przez punkt M! Punkt ten często nosi nazwę *punktu Miquela* dla prostych AB, BC, CA, DE.



Rys. 4

Powyższą konstrukcję można pociągnąć dalej, a ogólny rezultat nosi nazwę *łańcuchowego twierdzenia Clifforda*. Jego treść łatwiej będzie podać przez opis niż przez wypowiedź. Chodzi w nim o rzecz następującą. Jeśli weźmiemy pięć prostych, z których każde trzy wyznaczają trójkąt, i narysujemy punkt Miquela każdej czwórki z nich, to uzyskane w ten sposób punkty będą leżeć na okręgu. Jeśli wyjdziemy od szóstki prostych i dla każdej piątki z nich narysujemy uzyskany w poprzedniej konstrukcji okrąg, to okręgi te będą miały punkt wspólny, itd. W ten sposób każdej parzystej liczbie prostych można przyporządkować punkt, a każdej nieparzystej okrąg.

Zaprezentujemy indukcyjny dowód tego twierdzenia. Pomocne okażą się twierdzenia A i B. Na potrzebę dowodu przyjmijmy, że trzem prostym



przyporządkowujemy okrąg opisany na trójkącie przez nie wyznaczanym, dwóm prostym przyporządkowujemy ich punkt przecięcia, a jednej prostej tę właśnie prostą (czyli okrąg zdegenerowany).

Niech teraz danych będzie n prostych ℓ_1, ℓ_2, $\ldots \ell_n$. Dzięki powyższym założeniom możemy przyjąć, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n \leqslant 4$. Przechodzimy zatem do kroku indukcyjnego. Rozważmy dwa przypadki w zależności od parzystości n.

Jeśli n jest parzyste, to oznaczmy przez o_i okrąg skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i, przez P_{ij} punkt skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i, j itd. Zauważmy, że punkt P_{12} leży na wszystkich okręgach przyporządkowanych do prostych o indeksach różnych od 1, 2 i jeszcze pewnego trzeciego. Z kolei okrąg o_{124} przechodzi przez wszystkie punkty przyporządkowane prostym o indeksach różnych od 1, 2, 4 i jeszcze pewnego czwartego. Podobnie dla pozostałych punktów i okręgów. Wiemy stąd, że:

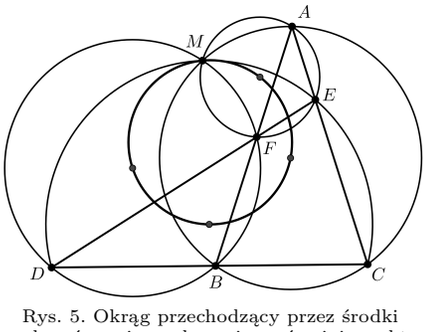
- okrąg o_{124} zawiera punkty P_{12}, P_{14}, P_{24}, P_{1234};
- okrąg o_{234} zawiera punkty P_{23}, P_{34}, P_{24}, P_{1234};
- okrąg o_{134} zawiera punkty P_{13}, P_{14}, P_{34}, P_{1234}.

Po zastosowaniu twierdzenia A dla okręgów o_{124}, o_{234}, o_{134} przechodzących przez P_{1234} dostajemy, że okręgi: o_1 opisany na $P_{12}P_{13}P_{14}$, o_2 opisany na $P_{12}P_{23}P_{24}$ oraz o_3 opisany na $P_{13}P_{23}P_{34}$ mają punkt wspólny. Wynika stąd, że wszystkie okręgi o_i przechodzą przez jeden punkt.

Jeśli n jest nieparzyste, to oznaczmy przez P_i punkt skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i, przez o_{ij} okrąg skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i, j itd. Tak samo jak poprzednio, wnioskujemy, że:

- okręgi o_{12} i o_{23} przecinają się w P_2 i P_{123};
- okręgi o_{23} i o_{34} przecinają się w P_3 i P_{234};
- okręgi o_{34} i o_{41} przecinają się w P_4 i P_{341};
- okręgi o_{41} i o_{12} przecinają się w P_1 i P_{124}.

Ponadto punkty P_{123}, P_{234}, P_{341}, P_{124} leżą na okręgu o_{1234}. Zatem z twierdzenia B punkty P_1, P_2, P_3, P_4 leżą na jednym okręgu. Stąd wszystkie punkty P_i są współokręgowe.



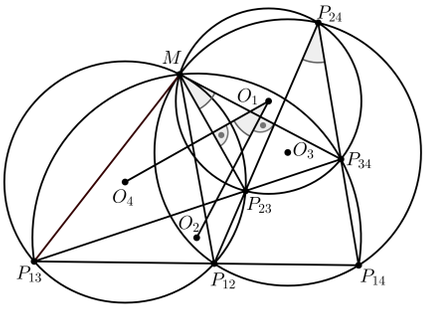
Rys. 5. Okrąg przechodzący przez środki okręgów opisanych zawiera również punkt Miquela tych prostych.

W konfiguracji twierdzenia Miquela można dopatrzyć się jeszcze jednej ciekawej własności. Okazuje się, że środki okręgów opisanych na czterech trójkątach wyznaczanych przez cztery proste leżą na jednym okręgu (rys. 5). Rezultat ten stanowi punkt wyjścia do kolejnego łańcuchowego twierdzenia. Mianowicie: mając pięć prostych, jeśli dla każdych czterech z nich narysujemy wspomniany przed chwilą okrąg, to okręgi te będą przechodzić przez jeden punkt, a ich środki będą leżeć na jednym okręgu, który przyporządkujemy tym pięciu prostym. Dalej, startując z szóstką prostych, jeśli narysujemy okręgi przyporządkowane tak jak poprzednio każdej piątce, to okręgi te będą również przechodzić przez jeden punkt, a ich środki będą leżeć na jednym okręgu itd. Twierdzenie to, tak samo jak poprzednie, udowodnimy indukcyjnie.

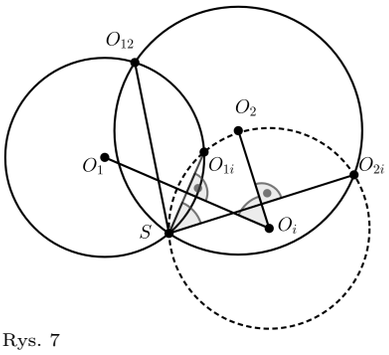
Kąt skierowany między prostymi k i l (oznaczany jako $\sphericalangle kl$) to kąt z przedziału $[0, \pi)$, o jaki trzeba obrócić przeciwnie do ruchu wskazówek zegara prostą k, aby otrzymać prostą równoległą do prostej l. Często w tym duchu zapis $\sphericalangle XYZ$ interpretuje się jako kąt skierowany między prostymi YX oraz YZ. To bardzo wygodna konwencja; pozwala na przykład stwierdzić, że punkty X, Y, Z, W leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle XWZ$.

Przyjmujemy następujące oznaczenia: ℓ_1, ℓ_2, $\ldots$, ℓ_n są danymi prostymi, o_i jest okręgiem przyporządkowanym prostym o indeksach różnych od i, O_i jego środkiem, a O_{ij} środkiem okręgu przyporządkowanego prostym o indeksach różnych od i i j. Wzmocnimy też tezę indukcyjną o stwierdzenie, że kąt wpisany w uzyskiwany w tezie okrąg i oparty na łuku O_iO_j jest równy kątowi między prostymi ℓ_j oraz ℓ_i. Aby nadać następującym rozważaniom pełną ogólność, najlepiej byłoby traktować wymienione dalej kąty jako *kąty skierowane między prostymi* (patrz margines). Można jednak śmiało kontynuować lekturę bez znajomości tego pojęcia.

Przyjrzyjmy się bazie indukcji, czyli przypadkowi czterech prostych. Oznaczmy przez P_{ij} przecięcie prostych o indeksach i i j oraz niech M będzie punktem Miquela prostych ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4.



Rys. 6



Rys. 7

Ponieważ odcinek O_1O_2 jest prostopadły do odcinka MP_{14}, zaś odcinek O_1O_4 do odcinka MP_{23}, otrzymujemy

$$\sphericalangle O_4O_1O_2 = \sphericalangle P_{23}MP_{34} = P_{23}P_{24}P_{34} = \sphericalangle \ell_2\ell_4.$$

Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle O_4O_3O_2 = \sphericalangle \ell_2\ell_4$, co dowodzi, że punkty O_1, O_2, O_3 i O_4 leżą na jednym okręgu. Jednocześnie dowiedliśmy, że kąt wpisany w ten okrąg, oparty na łuku O_2O_4, jest kątem między prostymi ℓ_2 i ℓ_1; prawdziwości wzmocnionej tezy dla pozostałych łuków O_iO_j dowodzimy tak samo.

Niech teraz $n \geqslant 5$. Oznaczmy przez S drugi obok O_{12} punkt wspólny okręgów o_1 i o_2. Wiemy, że

- o_1 przechodzi przez O_{12}, O_{1i}, S,
- o_2 przechodzi przez O_{12}, O_{2i}, S.

Teraz z założenia indukcyjnego o równości kątów wiemy, że

$$\sphericalangle O_{1i}SO_{12} = \sphericalangle \ell_2\ell_i \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle O_{12}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_i\ell_1,$$

zatem $\sphericalangle O_{1i}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_2\ell_1$. Wynika stąd, że S leży na o_i. Na koniec wystarczy zauważyć, że ze względu na prostopadłość par odcinków O_1O_i i SO_{1i} oraz O_2O_i i SO_{2i} mamy

$$\sphericalangle O_1O_iO_2 = \sphericalangle O_{1i}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_2\ell_1,$$

czyli wszystkie O_i leżą na okręgu, a przy okazji sprawdziliśmy warunek kątowy dla łuku O_1O_2. Pozostałe kąty sprawdzamy analogicznie – kończąc w ten sposób dowód naszego „łańcuchowego” twierdzenia, jak również cały artykuł.

Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

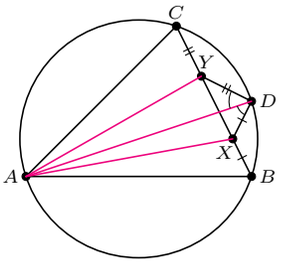
F 1155. Pierścienie Saturna zostały odkryte i opisane w 1658 roku przez Christiaana Huygensa. Do czasu wysłania sond kosmicznych w XX wieku teleskopy nie pozwalały ustalić obserwacyjnie, czy pierścienie są litymi skałami, czy zbiorem skalnych „okruchów”. Jednak jeszcze w XIX wieku zagadnienie to zostało rozstrzygnięte. Jak tego dokonano?
Wskazówka: W XIX wieku w badaniach astronomicznych zaczęto wykorzystywać fotografię i spektroskopię.

Rozwiązania na str. 24

F 1156. Podczas „spaceru” poza stacją kosmiczną astronauta „zgubił” kartkę białego papieru. Jaka temperatura T kartki ustali się po osiągnięciu stanu równowagi? Promień orbity Ziemi (i stacji, a później także kartki) $R_{ZS} \approx 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m, promień Słońca $R_S \approx 6{,}96 \cdot 10^8$ m, temperatura Słońca $T_S \approx 5{,}77 \cdot 10^3$ K, a albedo kartki (współczynnik odbicia i rozpraszania padającego na nią światła) $a = 0{,}8$. Powierzchnia kartki jest prostopadła do kierunku w stronę Słońca.

Przygotował Dominik BUREK

M 1870. Czy można ponumerować wierzchołki i krawędzie ośmiościanu foremnego liczbami $1, 2, 3, \ldots, 18$, tak żeby numer każdego wierzchołka był równy sumie numerów wychodzących z niego krawędzi?



M 1871. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na okręgu opisanym na tym trójkącie zaznaczono punkt D antypodalny do punktu A (rysunek obok). Punkty X i Y leżą na boku BC i spełniają

$$BX = XD, \qquad CY = YD,$$

przy czym punkt X leży na odcinku BY. Udowodnić, że prosta DA jest dwusieczną kąta XDY.

M 1872. Niech $f, g\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ będą funkcjami takimi, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą równości

$$f(f(n)) = 2f(n), \qquad g(g(n)) = 2g(n), \qquad f(n) + g(n) = 4n + 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi

$$|f(n) - g(n)| = 1.$$

*Bartłomiej PAWLIK**

*Politechnika Śląska

Arytmetycznym ułamkiem łańcuchowym nazywamy wyrażenie

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

w którym a_0 jest liczbą całkowitą, a pozostałe a_i są liczbami całkowitymi dodatnimi. Liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy *mianownikami częściowymi* ułamka łańcuchowego, a sam ułamek łańcuchowy często skrótowo zapisuje się jako $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Prosty algorytm – polegający na naprzemiennym odwracaniu i wyciąganiu części całkowitej – pozwala zapisać dowolną liczbę wymierną w postaci takiego ułamka. Zaprezentujmy to na przykładzie liczby 11/14:

Czytelnik Wnikliwy zapewne zauważy, że omawiamy tak naprawdę dobrze znany *algorytm Euklidesa*.

$$\frac{11}{14} = \frac{1}{\frac{14}{11}} = \frac{1}{1+\frac{3}{11}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Zatem ciąg mianowników częściowych rozważanej liczby to $(0, 1, 3, 1, 2)$. W poniższej tabeli prezentujemy wszystkie właściwe ułamki nieskracalne z mianownikiem 14 wraz z ich ciągami mianowników częściowych:

1/14	3/14	5/14	9/14	11/14	13/14
$(0, 14)$	$(0, 4, 1, 2)$	$(0, 2, 1, 4)$	$(0, 1, 1, 1, 4)$	$(0, 1, 3, 1, 2)$	$(0, 1, 13)$

Zauważmy, że ciąg liczby 11/14 wyróżnia się na tle pozostałych pięciu tym, że zawiera „najmniejsze” liczby – w tym sensie, że największy mianownik częściowy w jej ciągu (liczba 3) jest nie większy od największych mianowników częściowych w ciągach pozostałych liczb (którymi są odpowiednio: $14, 4, 4, 4, 13$). Skupmy się na poruszonym wątku „najmniejszego z największych”, konkretyzując rozpatrywane zagadnienie w następującym problemie:

> *Dla danej liczby całkowitej $q > 1$ rozpatrujemy wszystkie nieskracalne ułamki właściwe postaci p/q i z takiego ułamka bierzemy największy z jego mianowników częściowych. Niech $m(q)$ będzie najmniejszą z tych wartości maksymalnych. Jakie wartości może przyjąć $m(q)$?*

Już wiemy, że $m(14) = 3$. Są znane liczby o wartościach większych, przykładowo nietrudno sprawdzić, że $m(6) = 5$ i $m(20) = 4$. Co ciekawe, nie znamy żadnej liczby q, dla której $m(q) > 5$ i nie wiemy nawet, czy taka liczba w ogóle istnieje! W 1971 roku polski matematyk Stanisław Zaremba postawił hipotezę, że dla każdej liczby całkowitej $q > 1$ zachodzi $m(q) \leqslant 5$.

Data sformułowania hipotezy słusznie sugeruje, że jej autorem jest młodszy z Zarembów – Stanisław Krystyn, który był nie tylko matematykiem, ale i znanym górołazem. Jego działalność taternicza doczekała się nietypowego upamiętnienia w postaci wrocławskiego krasnala Zarembka – jednego z trzech Alpinków, których można podziwiać na ulicy Strzegomskiej.

Pamiętasz, Czytelniku, jak w Kącie 14° (Δ_{26}^4) rozważaliśmy ciągi w OEIS, które – wbrew przyjętym normom i zwyczajom – mają mniej niż 4 elementy? Jednym z nich jest A195901, złożony z liczb 6, 54 i 150.

Heurystyczne przesłanki sugerują, że $m(q) > 5$ faktycznie może nie mieć rozwiązań. Jedynymi znanymi wartościami q, dla których $m(q) = 5$ są 6, 54 i 150. Znanych jest 35 liczb, dla których uzyskujemy wartość 4 (A141823) – największa z nich to 6234. Pozostałe sprawdzone liczby przyjmują wartości 2 lub 3. W 1976 roku Itshak Borosh zbadał wszystkie wartości $m(q)$ dla $q \leqslant 10\,000$, a kilka lat później informował, że Donald Knuth wykonał obliczenia aż do $3{,}2 \cdot 10^6$, nie znajdując żadnego mianownika z $m(q) > 3$. Na wszelki wypadek razem z Mariuszem Pleszczyńskim niezależnie sprawdziliśmy wszystkie mianowniki do 10^7 – także bez nowych wyjątków.

Hipoteza Zaremby ma również „słabą” wersję: *istnieje stała A* taka, że dla każdej liczby całkowitej $q > 1$ zachodzi $m(q) \leqslant A$. W 2014 roku Jean Bourgain i Alex Kontorovich udowodnili prawdziwość słabej wersji dla *prawie* wszystkich mianowników q (w tym sensie, że prawdopodobieństwo wylosowania „dobrego” mianownika ze zbioru wszystkich liczb naturalnych nie większych niż n dąży do 1 przy $n \to \infty$). W takim sformułowaniu autorom udało się uzyskać stałą $A = 50$, która rok później została poprawiona do $A = 5$ przez ShinnYih Huanga. W maju 2026 roku Xin Zhang na arXiv zamieścił artykuł, w którym postuluje dowód słabej wersji hipotezy Zaremby. Do dziś jednak nie wiemy, czy istnieje choć jedna liczba, dla której $m(q) > 5$.

Strona arXiv.org to bezpłatne internetowe repozytorium preprintów naukowych, czyli prac udostępnianych publicznie zwykle przed formalną publikacją w czasopiśmie naukowym. Wyniki z arXiv należy traktować z pewną dozą ostrożności, choć często są poprawne.

Na koniec pozwolę sobie na postawienie innej zuchwałej hipotezy: liczba mianowników, dla których $m(q) > 2$ jest skończona.

takie jest życie

To zależy

Mój dobry znajomy, fizyk, mówi: „Ja w twoje biologiczne sprawy nie zagłębiam się, bo tam wszystko jest zbyt zagmatwane”. Faktycznie, proste historie w biologii są już za nami. Wielcy świata mieli albo niebywałe szczęście, albo na tyle duże ego, żeby głosić swoje prawdy bez cienia wątpliwości. Albo i to, i to. Teraz od badaczy wciąż słyszymy „to zależy”, czego, niestety, wiele osób nie lubi.

Mendlowi, na przykład, dopisywało szczęście. Trafił do klasztoru, który miał własne zaplecze edukacyjne i ogród eksperymentalny, a przełożeni wspierali jego zainteresowania. Zadbali o wykształcenie matematyczne i przyrodnicze naukowca, a później pozwolili mu przez długie lata prowadzić badania, dzięki czemu przebadał tysiące roślin grochu. Krzyżował je, liczył, porównywał. Nie znał pojęcia genu, nic nie wiedział ani o DNA, ani o chromosomach. Opisał matematyczne prawidłowości dziedziczenia, zanim poznano ich fizyczne podłoże. Miał szczęście, bo cechy, które badał u grochu, były łatwe do opisania (m.in. kolor kwiatów) i są dziedziczone w prosty sposób.

Mendel sformułował fundamentalne dla rozwoju genetyki prawa na podstawie ponad dziesięciu lat eksperymentów. Musiał mieć do tego osobowość. Cierpliwość, sumienność, skłonność do refleksji i umiejętność znoszenia życia zakonnego. Była w nim jednak także ciekawość świata, która dała mu motywację do wyjścia poza mury klasztoru, aby ogłosić swoje prawa.

Dziś to właśnie osobowość staje się tematem badań genetycznych. Sytuacja jest bardziej złożona od dziedziczenia koloru kwiatów grochu: tysiące wariantów DNA, z których każdy może mieć niewielki wkład, plus środowisko i błąd wpisany w metodykę. Do tego samo definiowanie, czym osobowość jest i – tocząca się od lat dyskusja – od czego zależy. Przeciąganie liny ze skrajnych pozycji: od hipotezy „białej karty”, którą dzięki odpowiedniemu wychowaniu i środowisku zapisuje się w dowolny sposób, do badań pokazujących, że rozdzielone od siebie identyczne bliźniaki mają wspólne cechy mimo życia w innych warunkach.

Natura czy wychowanie? W „Nature” z sierpnia 2026 roku znajdujemy pracę, której autorzy tłumaczą, że dyskusję należy porzucić, bo osobowość kształtują i geny, i środowisko. Ten układ jest tak złożony, że odpowiedzi, jak i na ile, można szukać dopiero teraz, dzięki rosnącej liczbie danych i wsparciu zaawansowanych metod ich analizy. Im więcej jednak wiadomo, tym bardziej o dostępnych informacjach należy mówić ostrożnie. Bo, oczywiście, to zależy...

Pracę „Robust inference and correlates from genetic associations with personality” opublikowało konsorcjum Revived Genomics of Personality (ReGPC), grupa naukowców, którzy od około 2010 roku łączą siły i zasoby, aby rozgryźć, co sprawia, że jesteśmy sobą. Cechy osobowości opisują stabilne i nawykowe różnice w sposobie myślenia, odczuwania i działania ludzi. Konsorcjum w badaniach posłużyło się teorią Wielkiej Piątki (The Big Five). Według niej osobowość można opisać w pięciu wymiarach, niezależnie od płci, pochodzenia etnicznego i wieku. Są to:

– ekstrawersja (mierzy się tu m.in., jak jesteśmy towarzyscy, asertywni i pełni energii);
– ugodowość (empatia, szacunek i zaufanie, które pokładamy w innych);
– sumienność (opisująca zorganizowanie, produktywność w realizacji zamierzeń i odpowiedzialność);
– neurotyczność (mierząca poziom lęku, skłonność do depresji i stabilność emocjonalną);
– otwartość na doświadczenia (która wynika z wyobraźni, ciekawości świata, wrażliwości na sztukę i naturę).

Model Wielkiej Piątki nie jest „jedyną słuszną” metodą opisywania cech osobowości. Tu każdy z elementów mierzy się gradientowo, co jest bliższe naturalnej zmienności żywych organizmów niż podział na typy, używany w innych teoriach. Analizowano 46 badań, w których przeprowadzono ten sam standardowy kwestionariusz Wielkiej Piątki do określenia osobowości. Osoby wypełniające test oddawały także z wnętrza jamy ustnej wymaz, z którego wyizolowano DNA i poddano analizie. W ten sposób uzyskano wyniki dla ponad miliona osób. Osoby, których genom był analizowany, wypełniały jednocześnie ankietę, badającą ich osobowość.

Dzięki danym zgromadzonym przez wiele lat wiemy, że jeśli porównuje się sekwencje DNA dwóch losowych osób, to są miejsca, tzw. pozycje, w których jest zmienność, tj. występują różne nukleotydy. Na przykład w pozycji o numerze rs1801253 w sekwencji GCTGTGCTC**G**TGCCTGTG u części ludzi jako 10. nukleotyd będzie występował A zamiast G: GCTGTGCTC**A**TGCCTGTG. Takich miejsc w naszym genomie istnieje bardzo dużo, w przypadku opisywanej pracy analizowano ich około 10 milionów. Zjawisko nazywane jest polimorfizmem pojedynczych nukleotydów (ang. Single Nucleotide Polymorphism, inaczej SNP wymawiany przez genetyków „snip”).

Naukowcy z publikacji z *Nature* wykorzystali istnienie SNP w metodzie analizy GWAS, czyli *Genome-Wide Association Study*. Szukali współzależności między konkretnymi wariantami genetycznymi (właśnie snipami) a występowaniem danej cechy. GWAS nie identyfikuje bezpośrednio genów odpowiedzialnych za tę cechę. Identyfikuje regiony genomu, w których występuje statystycznie istotne powiązanie między snipem a zmiennością branej pod uwagę cechy.

GWAS opiera się na biologicznym zjawisku nierównowagi sprzężeń (linkage disequilibrium – LD). Oznacza to, że fragmenty DNA położone blisko siebie na chromosomie są dziedziczone razem, jako jeden blok (nie są rozdzielane przez mejotyczną rekombinację na przestrzeni pokoleń). Snipy są jedynie markerami, że dany rejon DNA jest związany z danym wariantem cechy (tzw. fenotypem). Jest to fundament badań nad chorobami wieloczynnikowymi oraz kierunkiem zmian w medycynie – chodzi o to, aby leczenie pacjentów było spersonalizowane.

W przypadku omawianego badania uzyskano (w sumie) 1260 niezależnych pozycji dla pięciu cech osobowości, z czego 824 było nowych, dotąd nieopisanych. W ten sposób otrzymano mapę interesujących regionów genomu, co jeszcze nie jest wskazaniem konkretnych genów odpowiedzialnych za daną cechę, a co za tym idzie nie oznacza to identyfikacji mechanizmu biologicznego u podłoża osobowości.

Teraz badacze będą myśleć nad tym, co sprawiło, że pojawiła się asocjacja. Sprawdzać sąsiedztwo, zapisane w tym rejonie geny, być może poziom ich aktywności, rodzaj komórek, w których są odczytywane, funkcje białek lub potencjalną regulację aktywności innych miejsc w genomie.

W pracy z *Nature* już znaleziono niektóre powiązania: z genami wpływającymi na działanie mózgu – na przykład FOXP2, które koduje białko regulacyjne związane z rozwojem określonych obwodów neuronalnych. Zaburzenia jego aktywności prowadzą do poważnych problemów z rozwojem mowy i języka. Inny gen to SEMA6D, który koduje białko uczestniczące w odnajdywaniu przez migrujące nowopowstałe neurony właściwych miejsc w mózgu i tworzenie połączeń z innymi komórkami. Inne miejsca powiązane były z genami, o których wiadomo, że są aktywne w neuronach kory mózgowej, a zarazem związane z molekularnym mechanizmem rytmu dobowego, dojrzewaniem neuronów i rozwojem połączeń między nimi.

Naukowcy – świadomi, że odbiór tych badań może być istotny społecznie – zadbali o to, by trudny artykuł naukowy uzupełnić tekstem, w którym odpowiadają na najczęstsze pytania dotyczące ich pracy. To rys czasów – za publikacją w prestiżowym piśmie naukowym stoją już nie tylko długie strony „suplementary data", materiałów dodatkowych, bez których całkowite zrozumienie metod i wyników dla specjalisty jest niemożliwe. Treść i intencje tłumaczone są szerzej, aby były dostępne dla naukowców z innych dziedzin i każdego, kto chciałby wiedzieć więcej.

A sprawa faktycznie jest ważna. Gdybym tak mogła za pomocą „magicznego suwaczka" poprawiać (modyfikować) osobowość, to co i w którym kierunku bym zmieniła? Gdzie jest ta „lepsza" Marta? Czy ktoś może mieć dostęp do informacji genów przyszłych pokoleń, przewidując, jakimi ludźmi będą? I jaki użytek zrobi z tą wiedzą?

Jak dobrze, że w komentarzach autorzy odnoszą się do tego stanowczo i jasno. „Różnorodność osobowości jest niezwykle cenna. Społeczeństwo czerpie korzyści z obecności osób osiągających wysokie, niskie i średnie wyniki w zakresie każdej cechy osobowości, a osoby o dowolnych kombinacjach cech mogą znaleźć sposoby na osiągnięcie sukcesu (...) zdrowe społeczeństwo potrzebuje zarówno przedsiębiorców (stwierdziliśmy, że warianty genetyczne związane z edukacją biznesową korelują z niższą otwartością na doświadczenia), jak i artystów (stwierdziliśmy, że warianty genetyczne związane z edukacją artystyczną i humanistyczną korelują z wyższą otwartością na doświadczenia). (...) każda cecha osobowości ma zarówno zalety, jak i wady. Na przykład nasze wyniki sugerują, że dziedziczenie wariantów genetycznych związanych z wysoką ekstrawersją może być korzystne, ponieważ wiążą się one z mniejszą liczbą pobytów w szpitalu i wyższym poziomem dobrostanu – a są to skutki, które większość ludzi ceni. Z drugiej strony, odziedziczenie wariantów genetycznych związanych z ekstrawersją może być również problematyczne, ponieważ stwierdziliśmy, że są one powiązane z ryzykiem choroby afektywnej dwubiegunowej oraz rozpoczęciem palenia papierosów – a to skutki, których większość ludzi pragnie uniknąć".

Według ankiety Wielka Piątka jestem ekstrawertyczką na poziomie 53%. Czy to dobrze? Zależy. I zostanę już przy tym.

Kwestionariusz użyty do badań można wypełnić nieodpłatnie pod tym linkiem: `https://www.personalitylab.org/tests/bfi2_self_pol.htm`

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Korzystałam z:

Schwaba T. i wsp. *Robust inference and correlates from genetic associations with personality*, Nature (2026).

Frequently Asked Questions for Robust inference and widespread genetic correlates from a large-scale genetic association study of human personality, ReGPC steering committee: `https://osf.io/hgnsm/files/osfstorage/698e1853e15af5d402c72da8`.

Czy o czasie coś powiedzieć da się?

*Mirosław LACHOWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wśród tysięcy wypowiedzi przypisywanych Albertowi Einsteinowi prawdziwość wielu jest co najmniej dyskusyjna, jednak tę dobrze udokumentowano. W liście z 21 marca 1955 roku do rodziny zmarłego przyjaciela Michelego Angela Besso, inżyniera szwajcarskiego, noblista pisał: „*Michele odszedł z tego dziwnego świata wcześniej niż ja. Ale to nie ma znaczenia. Dla nas, wierzących w fizykę, rozróżnienie między przyszłością, teraźniejszością a przyszłością jest tylko uparcie podtrzymywaną iluzją*”. List powstał niespełna miesiąc przed jego śmiercią – Einstein zmarł 18 kwietnia 1955.

Znane jest zdanie św. Augustyna z Hippony (354–430): *Czymże jest czas? Jeśli nikt mnie o to nie pyta, wiem. Jeśli pytającemu usiłuję wytłumaczyć, nie wiem*. Skądinąd częsta wymówka studentów.

Przykłady i cytaty z książek P. Coveney, R. Highfield, *Strzałka czasu*, Zysk i S–ka (1990) oraz J. Gleick, *Podróże w czasie*, Zysk i S–ka (2018).

Problemem jest to, że podstawowe teorie w fizyce, w tym te, które tworzyły naszą cywilizację, są „odwracalne w czasie”. Czyli „kierunek czasu” nie jest w nich określony.

Jedną z tych podstawowych teorii fizycznych, które niewątpliwie tworzyły naszą cywilizację i ustalały sposób rozumienia Świata, jest klasyczna mechanika newtonowska. Istotna jej cecha to właśnie „odwracalność w czasie”, co oznacza, że żaden „kierunek upływu czasu” nie jest wyróżniony. Wynika to z faktu, iż transformacja $t \longrightarrow -t$ nie zmienia postaci równań. Można to wyrazić następująco: obserwuj układ od chwili początkowej 0 do chwili $t > 0$, następnie zmień znaki ($\pm \to \mp$) prędkości wszystkich cząsteczek – spowodujesz powrót do stanu początkowego.

Przyjrzyjmy się temu dokładniej. Równanie dynamiki Newtona, bez uwzględnienia oporów otoczenia (np. tarcia), ma postać

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

gdzie m to masa obiektu, F to działająca nań siła, zaś a – jego przyspieszenie. W języku pochodnych (przyjmując, dla uproszczenia, że $m = 1$),

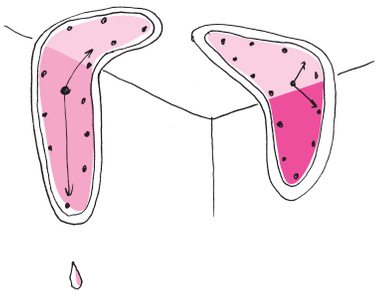
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_0,$$

gdzie x_0 jest początkowym położeniem, a v_0 – początkową prędkością. Transformacja $t \to 2t_0 - t$ nie zmienia postaci równania, zamienia tylko znak początkowej prędkości v_0:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}t}(t_0) = -v_0.$$

Co z tym począć? Jak żyć w świecie, w którym nie ma kryterium, określającego, „w którą stronę” płynie czas?

Istnieje jednakże w fizyce teoria, która bezpośrednio mówi o nieodwracalności w czasie. Jest to termodynamika, a precyzyjniej, II zasada termodynamiki, sformułowana w 1852 roku przez Williama Thomsona (Lorda Kelvina). Określa ona kierunek czasu, czyli odróżnia przeszłe od przyszłego. Jedno z możliwych sformułowań II zasady termodynamiki (dzięki wprowadzonemu w 1865 roku przez Clausiusa pojęciu entropii) mówi, że entropia układu izolowanego rośnie w czasie.



Ale jak połączyć odwracalną w czasie mechanikę Newtona z nieodwracalną termodynamiką?

Ludwig Boltzmann (1844–1906) podjął próbę „wyprowadzenia” nieodwracalności z odwracalnej dynamiki newtonowskiej dla rozrzedzonego gazu. W roku 1872 sformułował równanie, dzisiaj nazywane równaniem Boltzmanna, w oparciu o tzw. hipotezę o molekularnym chaosie, będącą założeniem probabilistycznej niezależności stanów cząsteczek. Przyjęcie tej hipotezy nadało opisowi charakter losowy i nieodwracalny w czasie, przynajmniej zdaniem Boltzmanna.

Własność nieodwracalności w czasie wyraża „twierdzenie H Boltzmanna”, mówiące o istnieniu pewnego funkcjonału, który „na” rozwiązaniu równania Boltzmanna maleje w czasie, a więc ma charakter entropii ze znakiem „$-$”. Niech $f = f(t,x,v)$ będzie rozwiązaniem równania Boltzmanna, czyli po scałkowaniu po zbiorze $\mathcal{X}$ względem x i zbiorze $\mathcal{V}$ względem v wyraża liczbę cząsteczek o położeniu w zbiorze $\mathcal{X}$ i pędzie w zbiorze $\mathcal{V}$ w chwili t (oczywiście zbiory $\mathcal{X}$ i $\mathcal{V}$ są mierzalnymi podzbiorami $\mathbb{R}^3$). Wówczas funkcja

$$H[f](t) = \int\int f(t,x,v)\log f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

maleje w czasie (to sformułowanie wymaga dużej uważności matematycznej, by rzeczywiście stało się twierdzeniem).

To, co Boltzmann uważał za największy sukces swojej teorii, było najzacieklej atakowane przez jej przeciwników. Paradoks odwracalności, sformułowany przez Lorda Kelvina w 1874 roku oraz Josefa Loschmidta w 1876 roku, został wyrażony następująco: nieodwracalność zawarta w teorii Boltzmanna nie może być konsekwencją mechaniki newtonowskiej. Paradoks powracalności, opisany w 1896 roku przez Ernsta Zermelo (tego „od aksjomatu wyboru”), opiera się na twierdzeniu Poincarégo: *każdy zachowawczy i zamknięty układ mechaniczny powraca, po dostatecznie długim czasie, do dowolnie małego otoczenia prawie każdego stanu początkowego* (patrz K. Turzyński i H. Żołądek, *Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej*, Δ^8_{15} i Δ^9_{15}). Warto zaznaczyć, że idee okresowości, lub też quasi-okresowości, jak w twierdzeniu Poincarégo, były i są obecne w historii ludzkości i są nierozłącznie związane ze sposobami pomiaru czasu. Więcej o tym przeczytać można w dodatku do elektronicznej wersji niniejszego tekstu.

Między Boltzmannem a jego krytykami dochodziło do ostrych polemik (patrz tekst *Paradoksy symetrii czasowej*, Δ^7_{93}). Te burzliwe ataki były dotkliwe dla Boltzmanna. Jak wiele wybitnych osób płacił za swój geniusz bardzo dużą cenę...

David Goodstein, „States of Matter”: „*Ludwig Boltzmann, który poświęcił znaczną część swojego życia na badanie mechaniki statystycznej, zmarł w 1906 roku śmiercią samobójczą. Paul Ehrenfest, który kontynuował jego pracę, zmarł podobnie w 1933. Teraz nasza kolej ... zapewne jest rzeczą rozsądną zachować ostrożność w badaniach*”.

Oczywiście nic nie jest takie proste, jak przedstawia się, by ubarwić rozważania.

Czy można matematycznie opisać związek prawdopodobieństwa i nieodwracalność w czasie? Rozważmy $(X,\mathfrak{M},\mu)$ – przestrzeń z miarą probabilistyczną, tzn. $\mu(X)=1$.

Rodzaj analogu twierdzenia H Boltzmanna występuje w teorii procesów Markowa. Są to procesy stochastyczne (tzn. losowe) o tej własności, że ich ewolucja zależy tylko od stanu w danej chwili, a nie od przeszłego przebiegu. Taki proces stochastyczny opisuje funkcja $P(t,x,A)$. Określa ona prawdopodobieństwo tego, że startując w chwili $t_0=0$ ze stanu x, proces po czasie t znajdzie się w stanie ze zbioru A. To prawdopodobieństwo można wyrazić poprzez chwile wcześniejsze s, czyli $0<s<t$, za pomocą równania Chapmana–Kołmogorowa

$$P(t,x,A) = \int_X P(s,x,\mathrm{d}y)P(t-s,y,A).$$

Niech miara μ będzie miarą niezmienniczą, czyli

$$\int_X P(t,x,A)\mu(\mathrm{d}x) = \mu(A),$$

dla zbiorów mierzalnych $A\subseteq X$, $t\geqslant 0$.

Rozważmy teraz dowolną funkcję f określoną na X i niech $(T_tf)(x)$ będzie wartością oczekiwaną $f(Y_t)$, gdzie Y_t jest wartością po czasie t procesu startującego z $x\in X$, czyli

$$(T_tf)(x) = \int_X P(t,x,\mathrm{d}y)f(y)$$

dla funkcji całkowalnej f.

Zauważmy, że $(T_0f)(x)=f(x)$. Ponadto z równania Chapmana–Kołmogorowa wynika, że

$$(T_{t+s}f)(x) = \big(T_t(T_sf)\big)(x) \text{ dla dowolnych } t,s>0.$$

Prawdziwe jest twierdzenie Yosidy (Kôsaku Yosida, 1909–1990). Dotyczy ono funkcji *klasy Zygmunda* (Antoni Zygmund, 1900–1992), czyli klasy funkcji $f\geqslant 0$ takich, że

$$\int_X f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)<\infty, \qquad \int_X f(x)\,\log^+ f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)<\infty,$$

gdzie $\log^+ x = \log x$, gdy $x\geqslant 1$ oraz $\log^+ x = 0$, gdy $x<1$.

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją klasy Zygmunda. Wówczas*

$$H[f](t_1)\geqslant H[f](t_2) \qquad \text{dla} \quad t_1<t_2,$$

gdzie

$$H[f](t) = \int_X (T_tf)(x)\,\log(T_tf)(x)\,\mu(\mathrm{d}x).$$

Dowód. Funkcja $h(x)=x\log x$ spełnia $h''(x)=\frac{1}{x}$ dla każdego $x>0$, a więc jest wypukła dla $x>0$. Z nierówności Jensena dla dowolnego „uśredniania” zachodzi

$$\text{średnia wartość } h\big(f(x)\big) \;\geqslant\; h\Big(\text{średnia wartość } f(x)\Big),$$

w szczególności

$$\int_X P(t,x,\,\mathrm{d}y)h\big(f(y)\big) \geqslant h\Big(\int_X P(t,x,\,\mathrm{d}y)f(y)\Big) = h\big(T_tf(x)\big).$$

Całkując obie strony względem $\mu(\mathrm{d}x)$ po całej przestrzeni X, korzystając z niezmienniczości tej miary oraz zamieniając kolejność całkowania, dostajemy

$$\int\limits_X h\big(f(y)\big)\mu(\mathrm{d}y) \geqslant \int\limits_X h\big(T_t f(x)\big)\mu(\mathrm{d}x).$$

Wstawiając $T_s f$ w miejsce f, oraz korzystając z zależności $T_{t+s} = T_t \circ T_s$, mamy

$$\int\limits_X h\big(T_s f(y)\big)\mu(\mathrm{d}y) \geqslant \int\limits_X h\big(T_{t+s} f(x)\big)\mu(\mathrm{d}x).$$

Czyli

$$H[f](s) \geqslant H[f](t+s), \qquad s,t>0,$$

co jest równoważne tezie. □

K. Yosida, *The Markoff process with a stable distribution*, Proceedings of the Imperial Academy 16 (1940), 49–54; również K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1995).

Czy twierdzenie to rozwiązuje problem? Raczej rozpoczyna dyskusję! Można jednak uznać, że powyższe twierdzenie precyzuje intuicyjne podejście jakoby „losowość prowadziła do nieodwracalności w czasie", o czym wspomniałem powyżej.

Gary Miller i Marvin Shinbrot podali prosty przykład układu równania typu Newtona

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}(x,y) = (x,y),$$

$$(x,y)\Big|_{t=0} = (x_0,y_0),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x,y)\Big|_{t=0} = (x_0,-y_0),$$

gdzie $(x,y) = \big(x(t),y(t)\big) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Jedynym rozwiązaniem jest funkcja $(x,y) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t})$. Po transformacji $t \mapsto -t$ funkcja $(x,y) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^t)$ jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia z prędkością z przeciwnymi znakami

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x,y)\Big|_{t=0} = (-x_0,y_0),$$

czyli zagadnienie jest odwracalne w czasie, w wyżej wymienionym sensie. Rozważmy rodzinę przekształceń

$$T_t(x,y) = (xe^t, ye^{-t}).$$

Podobnie jak wcześniej, zachodzi $T_t \circ T_s = T_{t+s}$. Niech $f_0 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie początkową funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Niech

$$f(t,x,y) = f_0\big(T_{-t}(x,y)\big),$$

ponieważ przekształcenia T_t nie zmieniają pola prostokątów, więc zachowują miarę. Oznacza to, że dla każdego t funkcja $f(t,x,y)$ również jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Oznaczmy $\bar{f}(t,x) = \int f(t,x,y)\,\mathrm{d}y$. Definiujemy

$$H[f](t) = \int \bar{f}(t,x)\log\big(\bar{f}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Mamy

$$\bar{f}(t,x) = \int f_0\big(xe^{-t}, ye^t\big)\,\mathrm{d}y = e^{-t}\bar{f}_0\big(xe^{-t}\big),$$

gdzie $\bar{f}_0(x) := \int f_0(x,y)\,\mathrm{d}y = \int e^{-t} f_0(x,ye^t)\,\mathrm{d}y$ (druga równość wynika z liniowej zamiany zmiennej, względem której całkujemy). Zatem (ponownie wykorzystując zamianę zmiennych)

$$\begin{aligned} H[f](t) &= \int \bar{f}_0(x)\log\big(e^{-t}\,\bar{f}_0(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= -t\int \bar{f}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int \bar{f}_0(x)\log\bar{f}_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -t + \mathrm{const}. \end{aligned}$$

Zaproponowany funkcjonał $H[f]$ jest monotonicznie malejący względem zmiennej t, czyli zachowuje się jak funkcja H Boltzmanna. A zagadnienie jest odwracalne w czasie!

G. Miller, M. Shinbrot, *The H-theorem and reversibility*, Transport Theory and Statistical Physics 12 (1983), 195.

Wielu fizyków, podobnie jak Einstein, wyraża opinię – zapewne w odniesieniu do mechaniki kwantowej lub ogólnej teorii względności – że czas jest iluzją.

Julian Barbour napisał: *Czas, tak jak go postrzegamy, nie istnieje jako coś innego niż iluzja. Wiele problemów w fizyce wynika z założenia, że istnieje. Nie mamy żadnych dowodów przeszłości poza naszą pamięcią o niej i żadnych dowodów na przyszłość poza naszą wiarą w nią.*

Julian Barbour, *The end of time: the next revolution in our understanding of the universe* (1999).

Podobnie twierdził filozof brytyjski John M.E. McTaggart (1866–1925): *Nasza koncepcja czasu zawiera sprzeczność, a zatem rzeczywistość nie może być czasowa. Nasze postrzeganie czasu jest iluzją, a sam czas jest po prostu ideałem.*

J.M.E. McTaggart, *The unreality of time*, Mind 17 (1908), 457–474.

Sformułowany na poparcie tej tezy argument jest znany jako *paradoks McTaggarta.*

Moim zdaniem bardzo trafną uwagę sformułował Lee Smolin: *Czas jest realny – niektórzy fizycy błędnie odrzucają realność czasu, ponieważ mylą swoje abstrakcyjne modele z rzeczywistością.*

Lee Smolin, *Time reborn: from the crisis in physics to the future of the universe*, Houghton Mifflin Harcourt (2013).

Zgadzam się z tym zdaniem. Każda – nawet, jak się wydaje, najszersza teoria fizyczna – jest pewnym przybliżeniem rzeczywistości, i to w nieznanym zakresie. Żadna więc nie może przesądzić o tym, „czym jest czas". Nasza wiedza pozostanie tylko częściowa. Twierdzenia Tarskiego, Gödla, Turinga, zasada Heisenberga, twierdzenie Arrowa, wyraźnie wskazują na to, że jest rzeczą rozsądną wykazać ostrożność.

K. Wójtowicz, *O nadużywaniu twierdzenia Gödla w sporach filozoficznych*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce XIX (1996), 24–45.

Dodatkowo, pamiętając o możliwych nadużyciach, środowisko naukowe powinno zachować czujność.

A. Sokol, J. Bricmont, *Modne bzdury. O nadużywaniu pojęć z zakresu nauk ścisłych przez postmodernistycznych intelektualistów*, Prószyński i S-ka (2004).

IKO na start – Optymalizacja mandatów, czyli zachłanność czasem popłaca

W tym odcinku omówimy zadanie **Optymalizacja mandatów** z pierwszego etapu XV Olimpiady Informatycznej Juniorów.

O co tu chodzi?

Zadanie *Optymalizacja mandatów* ma dość skomplikowaną treść, którą można podsumować w następujący sposób: dane są dwa ciągi po N liczb, ciąg $K = (K_1, K_2, \ldots, K_N)$ oraz $R = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$. Liczby dobieramy w pary, po jednej z K oraz po jednej z R, po czym każdą parę „sklejamy" – dopisujemy liczbę z R na koniec liczby z K. Potem te wszystkie uzyskane sklejenia sumujemy. Na przykład, jeśli mamy ciągi $K = (13, 9, 37)$ oraz $R = (100, 21, 5)$ i sparujemy 13 ze 100, 9 z 21, a 37 z 5, wtedy wynik to $13100 + 921 + 375 = 14396$. Możemy też skleić 13 z 5, 9 ze 100, a 37 z 21, osiągając $135 + 9100 + 3721 = 12956$. Celem jest takie sparowanie, żeby powstała suma była jak najmniejsza.

Pełną treść zadania z przykładami można znaleźć na stronie https://sio2.mimuw.edu.pl/c/oij15-1/p/opt/.

Dwie pary

Zobaczmy, co się dzieje, jeśli $N = 2$, czyli do utworzenia są tylko dwie pary liczb. Spójrzmy na kilka przykładów, zaczynając od $K = (14, 9)$ oraz $R = (15, 33)$. Z pewnym zaskoczeniem możemy się przekonać, że tutaj nasz wybór nie ma żadnego znaczenia! Możliwe sparowania to $1415 + 933 = 2348$ albo $1433 + 915 = 2348$. Dzieje się tak dlatego, że obie liczby z R są takiej samej długości. Zatem do liczby 14 możemy dokleić 15 lub 33, otrzymując 1415 lub 1433, ale w obu wypadkach początkowa liczba 14 powiększy swoją wartość do 1400, czyli 100 razy większej. Podobnie liczba 9 będzie miała wartość 900 przy obu sparowaniach.

Mówiąc formalnie, liczba k sparowana z liczbą r zamienia się w liczbę $10^{d(r)} \cdot k + r$, gdzie $d(r)$ jest liczbą cyfr r. Jeśli zatem $K = (K_1, K_2)$, a $R = (R_1, R_2)$ i obie liczby z R mają tę samą długość, czyli $d(r_1) = d(r_2) = d$, to wynik będzie równy

$$10^d \cdot K_1 + R_1 + 10^d \cdot K_2 + R_2 = 10^d(K_1 + K_2) + R_1 + R_2$$

niezależnie od sparowania.

Co jednak, gdy długości liczb z R są różne? Weźmy na przykład $K = (16, 8)$ i $R = (23, 9)$. Do jednej z liczb z K doklei się dwucyfrowa liczba 23, zwiększając jej wartość 100 razy, do drugiej – jednocyfrowa liczba 9 i powiększy wartość dziesięciokrotnie. Aby więc otrzymać najmniejszą możliwą wartość, opłacalne jest bardziej zwiększyć mniejszą liczbę. Rzeczywiście, sparowanie $169 + 823 = 992$ jest lepsze niż $1623 + 89 = 1712$. Znów, przechodząc na zapis formalny, mamy ciąg (K_1, K_2), gdzie $K_1 > K_2$; ciąg (R_1, R_2), w którym długości liczb z R są odpowiednio d_1 i d_2; oraz niech $d_1 > d_2$, czyli liczba R_1 jest dłuższa. Wynik wynosi $10^{d_1} \cdot K_1 + R_1 + 10^{d_2} \cdot K_2 + R_2$ w jednym sparowaniu i $10^{d_2} \cdot K_1 + R_2 + 10^{d_1} \cdot K_2 + R_1$ w drugim. Różnica między tymi wynikami to:

$$10^{d_1} \cdot K_1 + R_1 + 10^{d_2} \cdot K_2 - 10^{d_2} \cdot K_1 + R_1 - 10^{d_1} \cdot K_2 = (10^{d_1} - 10^{d_2})(K_1 - K_2),$$

czyli zawsze jest dodatnia, jeśli tylko $K_1 > K_2$ i $d_1 > d_2$.

Mniejszy jest więc drugi rezultat, co potwierdza to, co zauważyliśmy – mniejszą liczbę K_2 trzeba skleić z dłuższą R_1.

Pełne rozwiązanie, czyli algorytm zachłanny

Mogłoby się wydawać, że do rozwiązania dla ciągów N-liczbowych jeszcze daleko, ale tak naprawdę wykonaliśmy już większość (koncepcyjnej) pracy. Jeśli dane są ciągi $K = (K_1, \ldots, K_N)$ i $R = (R_1, \ldots, R_N)$, to zastanówmy się, jak przypisać liczby z R do liczb z K. Intuicja (z poprzedniego akapitu) sugeruje, że i teraz najdłuższe liczby z R powinniśmy skleić z najmniejszymi liczbami z K, i odwrotnie. Spróbujmy potwierdzić ten pomysł: ustawmy liczby z K w kolejności niemalejącej, czyli załóżmy, że $K_1 \leqslant K_2 \leqslant \ldots \leqslant K_N$. W jakiej kolejności dobrać do nich liczby z ciągu R? Popatrzmy najpierw na K_1 i K_2: zauważmy, że jeśli do K_1 dokleimy jakąś liczbę R_i, a do K_2 inną liczbę R_j, to R_i powinna być krótsza, a w każdym razie nie dłuższa niż R_j. Inaczej bowiem moglibyśmy zamienić liczby miejscami, łącząc $K_1 \leftrightarrow R_j$ i $K_2 \leftrightarrow R_i$. A na podstawie tego, co mówiliśmy poprzednio o dwóch liczbach, to dałoby lepsze rozwiązanie! Zatem do K_2 powinna być doklejona dłuższa liczba niż do K_1. Ale to samo rozumowanie możemy powtórzyć teraz dla K_2 i K_3, a potem dla każdej pary kolejnych liczb z ciągu K i R – gdyby gdziekolwiek krótsza liczba z R stała przed dłuższą, to opłacałoby się zamienić je miejscami. Potwierdza to naszą intuicję, że do liczb z K ustawionych w kolejności rosnącej powinniśmy doklejać liczby z R w kolejności malejących długości. Jako że przy równych długościach każda kolejność jest dobra, najłatwiej po prostu posortować ciąg R malejąco (wtedy na pewno dłuższe liczby będą przed krótszymi) i skleić po kolei liczby z K, biorąc je od najmniejszych, z liczbami z R branymi od największych.

Kiedy już znamy strategię, implementacja jest prosta: ciągi K i R trzymamy w tablicach, sortujemy obydwie (np. funkcją `sort()` w C++), a następnie przechodzimy je pętlą – pierwszą tablicę od początku, drugą od końca – i sumujemy iloczyny.

Algorytmy, w których rozwiązanie konstruujemy od tego, co wydaje się najlepsze w danej chwili (takie jak użyte przed chwilą „posortuj i połącz największą z najmniejszą") nazywamy *algorytmami zachłannymi*. Czasem taka strategia działa i daje najlepsze możliwe rozwiązanie, czasem nie. W tym wypadku udowodniliśmy, że jak najbardziej działa. Zastosowaliśmy przy tym coś, co nazywa się *exchange argument*, czyli „dowód przez zamianę": pokazaliśmy, że każde ustawienie ciągów inne niż rosnące/malejące dałoby się poprawić, zamieniając miejscami dwa sąsiednie elementy. To jedna z typowych technik dowodzenia, że strategia zachłanna działa.

A Czytelnicy i Czytelniczki obeznani z technikami z olimpiad matematycznych z pewnością zauważą w tym dowodzie znajomy fakt zwany „twierdzeniem o ciągach jednomonotonicznych" – to jest właśnie informatyczna wersja tego twierdzenia.

Lech DURAJ

Kształt i opór, część 4/4: Czapka niewidka

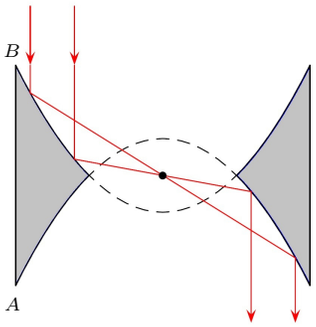
*Jarosław GÓRNICKI**

* Kontakt:gornicki59@gmail.com

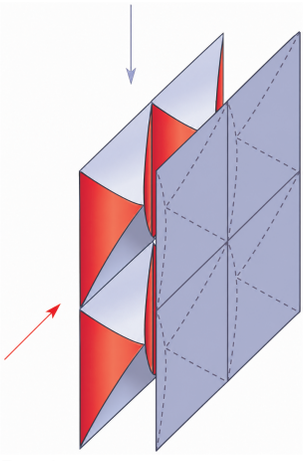
Obiekt uznamy za niewidzialny, jeśli każdy promień światła dociera do oka wzdłuż tej samej linii, po której biegł przed spotkaniem z obiektem. W poprzednim odcinku (Δ^{10}_{26}) rozważaliśmy bryły stawiające zerowy opór; wśród nich niewidzialnymi (z jednego kierunku) są te z rysunków 10, 11, 13c, ale bryły z rysunków 9, 13a już nie. Zatem niewidzialność to własność silniejsza niż brak oporu!

Stworzymy teraz bryłę niewidzialną w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. W tym celu rozważmy dowolną parabolę; odbijając ją symetrycznie względem ogniska, otrzymamy dwie parabole o wspólnym ognisku i wspólnej osi (rys. 1). Zaznaczone trójkąty krzywoliniowe przesuwamy prostopadle do płaszczyzny rysunku o długość odcinka AB. Otrzymujemy bryłę (rys. 2a, dwie symetryczne granie o podstawie kwadratowej) o zerowym oporze w kierunku północ-południe. Gdy obrócimy ją o 90°, to otrzymamy bryłę (rys. 2b) o zerowym oporze w kierunku wschód-zachód. Część wspólna tych brył (rys. 2c), para krzywoliniowych piramid, ma zerowy opór w dwóch kierunkach równoległych do boków podstaw piramid. Teraz, aby uzyskać ciało niewidoczne w dwóch (wzajemnie prostopadłych) kierunkach, wystarczy poczwórnie zwiększyć tę strukturę (rys. 3) i pokryć ją powłoką lustrzaną.

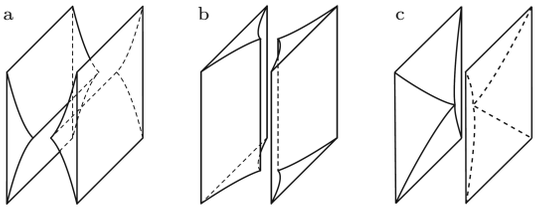
Przypominamy niezwykłą własność optyczną paraboli. Promienie światła, wychodzące z ogniska paraboli i odbijające się od powierzchni paraboli (gdzie kąt padania jest równy kątowi odbicia), wędrują dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii paraboli (rys. 1). Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii paraboli, po odbiciu od „wewnętrznej strony" powierzchni paraboli, skupia się w jej ognisku.



Rys. 1



Rys. 3

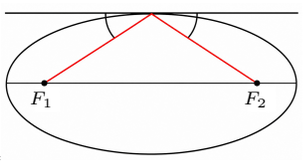


Rys. 2

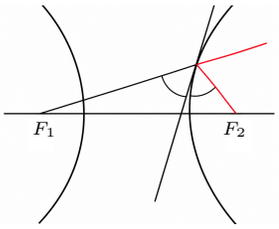
Rozwiązania te łatwo skrytykować. Stworzyliśmy powierzchnie niewidzialne dla równoległej wiązki światła, a nasz sposób widzenia jest bardziej skomplikowany, bo przecież mamy dwoje oczu. Jednym widzimy, gdy wszystkie promienie zbiegają się w punkcie – źrenicy oka. Zatem problem jest trochę inny – czy istnieją powierzchnie niewidzialne (dla nas) choćby z jednego punktu? Tak!

Przed ich stworzeniem przypomnimy niezwykłe własności optyczne pozostałych krzywych stożkowych – elipsy oraz hiperboli. Każdy promień światła wychodzący z jednego ogniska elipsy, po odbiciu od „wewnętrznej" powierzchni elipsy, przejdzie przez drugie ognisko. Innymi słowy, wszystkie promienie wychodzące z jednego ogniska elipsy skupią się w jej drugim ognisku (rys. 4). Tak samo będzie dla wewnętrznej powierzchni elipsoidy obrotowej, gdy osią obrotu jest prosta F_1F_2. Podobnie każdy promień światła wychodzący z jednego ogniska hiperboli po odbiciu od hiperboli przekształca się w promień, którego przedłużenie przechodzi przez drugie ognisko. W innym wypadku wszystkie promienie wychodzące z jednego ogniska hiperboli będą się rozchodzić z drugiego (rys. 5). Ta sama własność przysługuje bryle otrzymanej w wyniku obrotu hiperboli wokół prostej F_1F_2.

Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty F_1, F_2 zwane *ogniskami*. Zbiór punktów płaszczyzny, których suma odległości od punktów F_1 i F_2 jest stała (i większa od odległości ognisk), nazywamy *elipsą*. Zbiór punktów płaszczyzny, których moduł różnicy odległości od punktów F_1 i F_2 jest stały (i mniejszy od odległości ognisk), nazywamy *hiperbolą*.



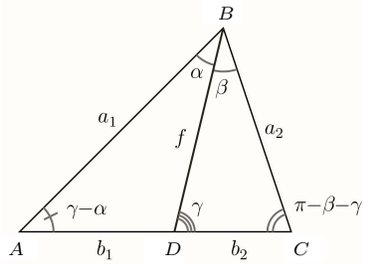
Rys. 4



Rys. 5

Skorzystamy jeszcze z następującego lematu:

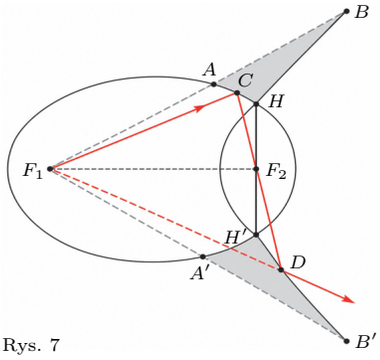
Lemat. *W trójkącie $\triangle ABC$ (rys. 6) odcinek BD jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_1+b_1)(a_2-b_2)=f^2$*



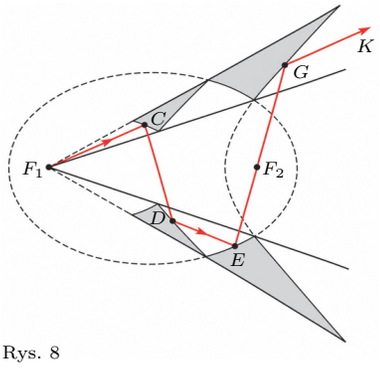
Rys. 6

Twierdzenie Stewarta (1746), zob. S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, Wyd. Aksjomat (2020).

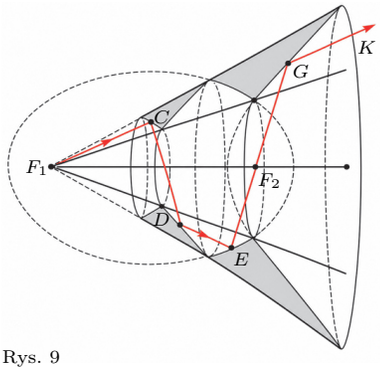
Szkic dowodu: należy wyznaczyć a_1^2 oraz a_2^2 z twierdzenia cosinusów w trójkątach $\triangle ABD$ oraz $\triangle BDC$, a następnie odpowiednio połączyć uzyskane równości.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Dowód. Przywołajmy twierdzenie M. Stewarta (patrz margines), które mówi, że

$$a_1^2 b_2 + a_2^2 b_1 = (b_1 + b_2)(f^2 + b_1 b_2).$$

Jeśli zachodzi równość z lematu, to we wzorze wyżej możemy podstawić $f^2 = (a_1 + b_1)(a_2 - b_2)$, co po pewnych przekształceniach daje

$$(b_1 + b_2 + a_1 - a_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

Pierwszy czynnik wynosi $AC + AB - BC$, a więc jest dodatni na mocy nierówności trójkąta. Stąd wnioskujemy równość $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ lub inaczej $a_1/b_1 = a_2/b_2$, co z twierdzenia o dwusiecznej oznacza, że AD musi być dwusieczną.

W istocie rozumowanie to pokazuje również przeciwną implikację. Mianowicie, jeśli AD jest dwusieczną, to $a_1/b_1 = a_2/b_2$, co po powtórzeniu tych samych przekształceń algebraicznych (w odwrotnej kolejności) prowadzi nas do równości $a_1^2 b_2 + a_2^2 b_1 = (b_1 + b_2)(g^2 + b_1 b_2)$ spełnianej przez wielkość $g^2 = (a_1 + b_1)(a_2 - b_2)$. W połączeniu z twierdzeniem Stewarta daje to $f^2 = g^2$, czyli równość z lematu. □

Tak przygotowani możemy przystąpić do konstrukcji rzeczywiście niewidzialnego dla nas obiektu, choć tylko z jednego punktu. Rysujemy współogniskowe elipsę i hiperbolę tak, aby odcinek HH' (łączący dwa punkty ich przecięcia) zawierał ognisko F_2 (rys. 7) i był prostopadły do odcinka F_1F_2. Następnie z ogniska F_1 prowadzimy półprostą przechodzącą powyżej punktu H, która przecina elipsę i hiperbolę w punktach A, B, odpowiednio. Odcinek F_1B odbijamy symetrycznie względem prostej łączącej ogniska F_1F_2; odbity odcinek przecina teraz elipsę i hiperbolę odpowiednio w punktach A', B'. Otrzymujemy w ten sposób dwa symetrycznie położone krzywoliniowe trójkąty ABH oraz $A'B'H'$. Rozważmy teraz promień wychodzący z ogniska F_1 i odbijający się od pary wskazanych trójkątów. Promień odbija się w punkcie C od łuku elipsy, przechodzi przez ognisko F_2, po czym odbija się od łuku hiperboli w punkcie D i biegnie dalej wzdłuż prostej F_1D. Popatrzmy na trójkąt $\triangle F_1CD$ (rys. 7). Ponieważ $F_1C + F_2C = F_1H + F_2H$ (z określenia elipsy), $F_1D - F_2D = F_1H - F_2H$ (z określenia hiperboli), więc

$$\begin{aligned}(F_1C + F_2C)(F_1D - DF_2) &= (F_1H + F_2H)(F_1H - F_2H)\\ &= F_1H^2 - F_2H^2 = F_1F_2^2,\end{aligned}$$

bo trójkąt $\triangle F_1F_2H$ jest prostokątny. Zatem na podstawie lematu prosta F_1F_2 jest dwusieczną kąta $\sphericalangle CF_1D$ w trójkącie $\triangle F_1CD$. Gwarantuje to, że promień po odbiciu w punkcie D porusza się wzdłuż linii F_1D, która jest symetryczna do linii F_1C względem prostej F_1F_2.

Jest tylko jeden problem: kierunek odbicia promienia w punkcie D nie pokrywa się z kierunkiem promienia, który wyszedł z punktu F_1. Aby temu zaradzić, wystarczy zaznaczone trójkąty krzywoliniowe przekształcić jednokładnie względem punktu F_1, jak pokazuje to rysunek 8. Wówczas promień F_1C po czterech odbiciach porusza się wzdłuż promienia GK, który jest przedłużeniem promienia F_1C. Zapewnia to niewidzialność punktu F_1. Oczywiście ruch promieni światła odbywa się w przeciwną stronę – promień porusza się w kierunku, w którym znajduje się oko (punkt F_1), dokonując czterech odbić od czterech krzywoliniowych trójkątów, by ostatecznie dotrzeć do oka wzdłuż tej samej prostej, po której początkowo się poruszał.

Obracając powstałą konstrukcję wokół półprostej F_1F_2 (rys. 9) i pokrywając ją powłoką lustrzaną, otrzymujemy powierzchnię, która jest niewidoczna, jeśli spojrzymy na nią jednym okiem z danego punktu F_1 w przestrzeni. Obiekty ukryte w „szarej strefie" są niewidoczne. Istnieją też inne, bardziej złożone powierzchnie, które są niewidoczne, gdy patrzymy obojgiem oczu lub gdy obiekt ma być niewidoczny w skończonej liczbie kierunków.

I nie chodzi tu o półprzepuszczalne lustra (powierzchnie), iluzjonistyczne sztuczki, o ciemny strój w nocy, a o możliwości drzemiące w najstarszej gałęzi matematyki – w geometrii.

Problem jest trudny, bo załamywanie światła wynika z anatomii oka. Jednak niewidzialność jest możliwa! Może kiedyś powstanie materiał, który nam na to pozwoli...

Literatura

[1] D. Bucur, G. Buttazzo, *Variational methods in shape optimization problems*, Birkhäuser (2005).

[2] I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, Copernicus Center Press (2011).

[3] A. Plakhov, *Exterior billiards. Systems with impacts outside bounded domains*, Springer Science & Business Media (2012).

Zmarznięci, ale docenieni: Nobel z fizyki za IceCube

Jak co roku, w dniu ogłoszenia laureatów Nagrody Nobla z fizyki, na Wydziale Fizyki odbywa się wspólne śledzenie transmisji przez zgromadzoną publiczność, poprzedzone typowaniem faworytów (o tej tradycji pisałem już w Δ^{11}_{24}). Tym razem wśród zapisanych na tablicy kilkunastu nazwisk znalazł się Francis Halzen. Wytypował go nie kto inny jak wielce zasłużony były członek zespołu naszej redakcji i autor niezliczonej liczby odcinków tego kącika, Krzysztof Turzyński.

Tegorocznym (jedynym) laureatem jest urodzony i wykształcony w Belgii, ale od 1972 pracujący w USA na University of Wisconsin-Madison, Francis Halzen. To nietypowe, bo ostatnia „pojedyncza" nagroda była przyznana ponad 30 lat temu. Warto jednak podkreślić, że noblista nie jest samotnym odkrywcą, a szefem kilkusetosobowego zespołu detektora IceCube, złożonego z naukowców z 58 instytucji z całego świata.

Główną częścią IceCube jest $1\,\mathrm{km}^3$ lodu i właśnie gigantyczna objętość czyni go największym detektorem na świecie. Ta wielka kostka lodu jest kawałkiem naturalnego lądolodu pokrywającego Antarktydę i znajduje się w pobliżu bieguna południowego na głębokości od 1450 m do 2450 m. Tym, co wyróżnia tę konkretną kostkę spośród otaczającego ją lodu, jest 86 odwiertów, jakie wykonał w niej zespół Francisa Halzena. Do każdego odwiertu opuszczono kabel – z nanizanymi co 17 metrów fotopowielaczami – i pozostawiono do ponownego zamarznięcia. W ten sposób kostka została wypełniona pięcioma tysiącami sensorów czułych na światło. A wszystko po to, żeby rejestrować neutrina. Więcej o budowie i działaniu IceCube można przeczytać w Δ^{3}_{16}.

Istnienie neutrina zapostulował Wolfgang Pauli w 1930 roku, żeby ratować zasadę zachowania energii w rozpadach nietrwałych jąder (typu β). Sam Pauli miał podobno powiedzieć: „Zrobiłem straszną rzecz — zapostulowałem cząstkę, której nie da się wykryć".

Dlaczego neutrina są tak nieuchwytne? Bo spośród oddziaływań czterech elementarnych podlegają tylko słabym i grawitacyjnym. Warto sobie uświadomić, że za strukturę materii, z której jesteśmy zbudowani my i nasze otoczenie, odpowiadają oddziaływania elektromagnetyczne. To one wiążą elektrony wokół jąder atomowych, atomy w struktury krystaliczne, itp. Przy tym rozmiary jąder są bardzo małe w porównaniu z rozmiarami atomów. Większość objętości atomu, a co za tym idzie całej atomowej materii, to praktycznie próżnia. Tak właśnie nas „widzą" neutrina, które nie mają ładunku i nie oddziałują elektromagnetycznie. Przelatują ich przez nas w każdej sekundzie, jak przez próżnię, miliardy. My ich nie czujemy, a one nie czują nas.

Sytuacja nie jest jednak tak beznadziejna, jak prorokował Pauli. Kiedy neutrino przelatuje blisko jakiegoś jądra atomowego, to istnieje bardzo małe, ale jednak niezerowe prawdopodobieństwo, że dojdzie – za pośrednictwem oddziaływań słabych – do reakcji, w wyniku której neutrino zostanie pochłonięte i powstaną inne cząstki, które już dają się obserwować. Pierwsza taka detekcja neutrina miała miejsce w roku 1956 (Nagrodę Nobla otrzymali za to Frederick Reines i Clyde L. Cowan). Rozpoczęła się długa i ciekawa historia badania własności neutrin, budowy kolejnych generacji detektorów, przełomowych odkryć, następnych Nagród Nobla, itp., o czym więcej można przeczytać w Δ^{5}_{16}, Δ^{10}_{24} i Δ^{3}_{25}.

Zasada działania detektora IceCube jest taka sama jak innych detektorów neutrin. Jeżeli dojdzie do reakcji jednego z niezliczonych przelatujących przez antarktyczny lód neutrin z jądrem jednego z atomów, to może powstać naładowana cząstka (elektron lub mion), a nawet cała kaskada cząstek. Cząstki te, przelatując przez lód, oddziałują z cząsteczkami wody. Fotopowielacze rejestrują błysk. Na podstawie czasów dotarcia sygnału do poszczególnych elementów trójwymiarowej sieci detektorów i natężenia rejestrowanego światła badacze są w stanie odtworzyć przebieg reakcji, rozróżniać rodzaje neutrin, określić kierunek, z jakiego nadleciały, i ich energię. Im większa objętość detektora, tym większe prawdopodobieństwo, że jakaś cząstka się w nim złapie. Duża objętość pozwala też dokładniej śledzić tor szybko przelatujących cząstek i określić kierunek, z którego przybyły.

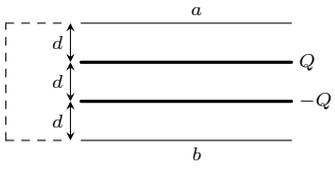
To, co wyróżnia detektor IceCube spośród innych, to cel prowadzenia obserwacji. Nie jest nim badanie własności samych neutrin, a zbieranie danych o ich źródłach. Neutrina mają być wykorzystywane jako nośniki informacji o zachodzących w odległym kosmosie zjawiskach, które prowadzą do ich powstania. Zadanie jest o tyle trudne, że zdecydowana większość rejestrowanych neutrin to tzw. tło, czyli neutrina pochodzące z reakcji zachodzących w atmosferze, a także ogromna liczba neutrin pochodzących ze Słońca. Przez kilkanaście lat obserwacji zespół wykonał ogromną pracę, żeby metodami statystycznymi wyłowić w tym morzu „nieciekawych" detekcji perełki pochodzące spoza Układu Słonecznego i dalej, spoza naszej Galaktyki. Udało się w szczególności złapać neutrina o ogromnych energiach rzędu PeV (czyli $10^{15}\,\mathrm{eV}$, 1000 razy większej, niż uzyskują protony w LHC). Komitet Noblowski w uzasadnieniu podaje dwa najlepiej zidentyfikowane pozagalaktyczne źródła: TXS 0506+056 (tzw. blazar) i NGC 1068 (znana też jako M77, aktywna galaktyka typu Seyferta). Są to przełomowe przykłady tzw. *astronomii wieloaspektowej*, czyli rejestracji sygnałów całkowicie różnej natury. Tutaj mamy neutrina z IceCube i fale elektromagnetyczne zbierane przez różnego rodzaju teleskopy.

Stosunkowo niedawno miała miejsce pierwsza detekcja fal grawitacyjnych Δ^{4}_{16} i pierwsza (jak na razie jedyna) jednoczesna detekcja fal grawitacyjnych i fotonów Δ^{12}_{17}. Kolejne generacje detektorów grawitacyjnych i neutrinowych są w budowie lub planowaniu. Pozostaje więc czekać na jednoczesną detekcję z tego samego źródła fal grawitacyjnych, elektromagnetycznych i neutrin. Co ujrzymy przez te nowo otwierające się okna na Wszechświat?

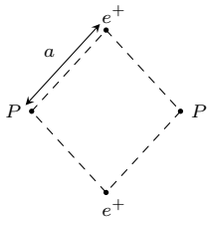
Szymon CHARZYŃSKI

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Klub 44 F



Rys. 1



Rys. 2

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2027

Zadania z fizyki nr 826, 827

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

826. Kondensator płaski o pojemności c_0 naładowano ładunkiem Q. Równolegle do okładek umieszczono z dwóch stron przewodzące płytki a i b o takich samych rozmiarach jak okładki kondensatora (rys. 1). Przerwy między sąsiednimi płytkami są jednakowe i małe w porównaniu z rozmiarami płytek. Płytki a i b połączono przewodnikiem. Jakie są ładunki na płytkach a i b? Jaka jest pojemność powstałego układu?

827. W chwili początkowej dwa protony i dwa pozytony spoczywają w rogach kwadratu o boku a (rys. 2), a następnie rozlatują się. Znaleźć stosunek prędkości protonu i pozytonu w nieskończoności. Przyjąć, że stosunek ich mas $M/m = 2000$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
818 ($WT = 2{,}68$), 819 ($WT = 1{,}12$)
z numeru 5/2026

Tomasz Wietecha	Tarnów	19–44+0,74
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–38,16
Paweł Kubit	Kraków	26,76
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3–26,04

Zadania z matematyki nr 929, 930

Redaguje Marcin E. KUCZMA

929. Niech D będzie ustaloną liczbą dodatnią. Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 0$, dla których istnieje funkcja f (o wartościach rzeczywistych), określona na przedziale $[0, D]$, mająca w tym przedziale dokładnie n miejsc zerowych oraz mająca w tym przedziale ciągłą pochodną (na końcach jednostronną), spełniającą równanie $\big(f(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^2 = 1$ dla $x \in [0, D]$.

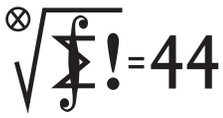
930. Niech $d(n)$ oznacza liczbę (dodatnich) dzielników liczby n. Wyznaczyć największą wartość wyrażenia $\dfrac{d(n)^3}{n}$ gdy n przebiega zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
919 ($WT = 1{,}90$) i 920 ($WT = 1{,}09$)
z numeru 4/2026

Jędrzej Biedrzycki	Wrocław	46,53
Roksana Słowik		43,23
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,45
Marian Łupieżowiec	Gliwice	40,52
Janusz Fiett	Warszawa	39,70
Paweł Najman	Kraków	37,10
Paweł Kubit	Kraków	37,02
Piotr Kumor	Olsztyn	34,75
Piotr Wiśniewski	Warszawa	34,10
Marek Spychała	Warszawa	33,42
Łukasz Merta	Kraków	33,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	31,74
Bartek Knapik	Warszawa	31,49

Do Klubu 44 dołączył pan Jędrzej Biedrzycki. Witamy!

Klub 44 M



Zadanie 930 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

W e-wydaniu numeru zadanie **921**: komentarz redaktora Ligi oraz wzorcowe rozwiązania.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

Szkice rozwiązań zadań (str. 3) z artykułu *Liczby rzeczywiste Eudoksosa*

Zad. 1. Jeśli $|d_f| \leqslant F$ oraz $|d_g| \leqslant G$, to $|d_{f+g}| \leqslant F + G$ oraz $|d_{f\cdot g}| \leqslant 2F + \max_{|k|\leqslant G} |f(k)|$. Uzasadnijmy to drugie oszacowanie:

$$\begin{aligned} f(g(n+m)) &= f(g(n) + g(m) + d_g(n,m)) \\ &= f(g(n) + g(m)) + f(d_g(n,m)) + d_f(d_g(n,m)). \end{aligned}$$

Pierwszy człon różni się od $f(g(n)) + f(g(m))$ o najwyżej F, drugi człon jest ograniczony przez $\max_{|k|\leqslant G} |f(k)|$, a trzeci przez F.

Zad. 2. Jeśli $|d_f| \leqslant F$, $|f - f'| \leqslant A$, $|g_1 - g'| \leqslant B$, to

$$|(f + g_1) - (f' + g')| \leqslant A + B \quad \text{oraz}$$
$$|f \cdot g_1 - f' \cdot g'| \leqslant F + A + \max_{|k|\leqslant B} |f(k)|.$$

Uzasadnijmy to drugie oszacowanie:

$$f(g(n)) = f(g'(n)) + f(g(n) - g'(n)) + d_f(g'(n), g(n) - g'(n)).$$

Pierwszy człon różni się od $f'(g'(n))$ o najwyżej A, drugi człon jest ograniczony przez $\max_{|k|\leqslant B} |f(k)|$, a trzeci przez F.

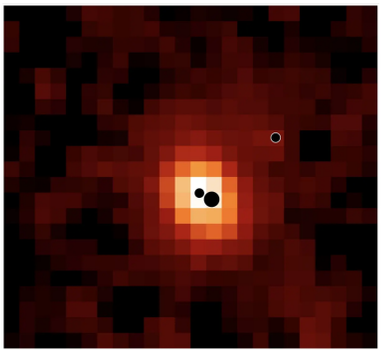
Równoważność $f \leqslant g$ i $f' \leqslant g'$ wynika z obserwacji, że funkcje $g - f$, $g' - f'$ różnią się najwyżej o $A + B$ – w konsekwencji jedna jest ograniczona z góry wtedy i tylko wtedy, gdy druga.

Zad. 3. Podane równości wynikają wprost z definicji. Dla uzasadnienia $f \cdot \mathbf{0} \sim 0$ zauważmy, że funkcja $f \cdot \mathbf{0}$ jest stale równa $f(0)$, a więc ograniczona.

Supermasywne czarne dziury to monstrualnie duże obiekty astronomiczne. Można je znaleźć w centrum prawie każdej dużej galaktyki (także w Drodze Mlecznej). Mają masy od kilkuset tysięcy do setek miliardów mas Słońca. Stanowią ogromną zagadkę i temat zawziętych dyskusji wśród astronomów, ponieważ tak naprawdę nie wiemy, jak powstały i jak urosły do swoich gigantycznych rozmiarów. Nic więc dziwnego, że odkrycie galaktyki posiadającej nie jedną, ale aż trzy supermasywne czarne dziury, wywołało niemałą sensację.

Najmasywniejsza znana supermasywna czarna dziura to Phoenix A. Pomiary wskazują, że może mieć nawet 100 miliardów mas Słońca. Dla dociekliwych: to około 2×10^{41}kg.

Galaktyka, o której mowa, to J0148-4214, a jej obserwacje wykonano (jakżeby inaczej) przy pomocy Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba. J0148-4214 znajduje się 12,5 miliarda lat świetlnych od nas, czyli obserwujemy ją taką, jaka była zaledwie 1,2 miliarda lat po Wielkim Wybuchu. Posiada trzy masywne czarne dziury o masach 80, 0,6 i 2 miliony mas Słońca. Dwie pierwsze znajdują się blisko siebie w centrum galaktyki, a trzecia na obrzeżach (rysunek obok). Wszystkie trzy zostały wykryte, ponieważ bardzo aktywnie wchłaniają otaczającą je materię. Nigdy wcześniej nie zaobserwowano galaktyki z trzema masywnymi czarnymi dziurami naraz, choć obserwowano przypadki trzech oddziałujących ze sobą galaktyk, z których każda zawierała po jednej supermasywnej czarnej dziurze.



Mapa zjonizowanego wodoru (Hα) w galaktyce J0148-4214. Położenie trzech masywnych czarnych dziur jest zaznaczone czarnymi punktami (rozmiary nie są w skali). Źródło: Hannah Übler.

No dobrze, ale dlaczego to odkrycie jest takie ważne?

W sprawie supermasywnych czarnych dziur astronomowie mają do rozwiązania dwa powiązane ze sobą problemy: określenie sposobu, w jaki powstały pierwsze czarne dziury (od tego będzie zależała ich początkowa masa), a także określenie, jakie procesy odpowiadają za wzrost masy czarnych dziur w czasie od ich powstania do teraz. Dominujące teorie mówią, że czarne dziury mogą przybierać na masie poprzez akrecję (wchłanianie) okolicznego gazu oraz w wyniku zderzeń i łączenia się z innymi czarnymi dziurami. Pozostaje jednak otwartym pytanie, jak wydajne były te procesy w różnych momentach istnienia Wszechświata, oraz który z tych procesów jest dominujący w rozwoju najmasywniejszych czarnych dziur. To bardzo ważne pytanie, ponieważ jedna z możliwych odpowiedzi może stanąć w sprzeczności ze standardowym modelem kosmologicznym.

Pytanie o pochodzenie i masę pierwszych czarnych dziur to temat na osobny artykuł. Zasadniczo, we współczesnym nam Wszechświecie, nowo powstające czarne dziury, tzw. czarne dziury gwiazdowe, mają masy zaledwie od kilku do kilkuset mas Słońca. Prawie na pewno masy młodych czarnych dziur we wczesnym Wszechświecie były dużo większe. Musimy pamiętać, że warunki, jakie panowały we Wszechświecie miliardy lat temu, były drastycznie różne od obecnych. Dlatego procesy, w wyniku których powstawały wówczas czarne dziury, mogły być również diametralnie różne.

Tempo akrecji materii na czarną dziurę ma swój teoretyczny limit. Oznacza to, że w czasie istnienia Wszechświata czarne dziury mogą wchłonąć tylko określoną ilość okolicznej materii. W zależności od początkowych mas czarnych dziur może być ona zbyt mała, żeby wytłumaczyć masy supermasywnych czarnych dziur, które obserwujemy we współczesnym nam Wszechświecie. Innymi słowy, jeżeli nie znajdziemy dowodów na liczne zderzenia czarnych dziur powodujące gwałtowny wzrost ich masy, mógłby to być dowód na nieprawidłowości w oszacowaniach wieku Wszechświata wynikających z modelu kosmologicznego.

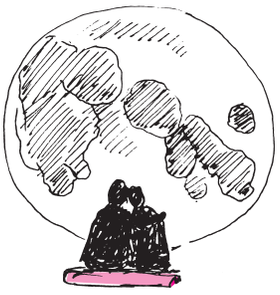
Tutaj wkracza odkrycie J0148-4214 ze swoimi trzema masywnymi czarnymi dziurami. Naukowcy szacują, że dwie centralne czarne dziury zderzą się „zaledwie” w ciągu 700 milionów lat. Trzecia czarna dziura, znajdująca się poza jądrem galaktyki, może być pozostałością po wcześniejszym połączeniu się czarnych dziur i mogła zostać wypchnięta z centrum w wyniku odrzutu grawitacyjnego. Może też obecnie migrować w kierunku centrum. W tym drugim scenariuszu prawdopodobnie zderzy się z czarną dziurą powstałą w wyniku połączenia się pierwszych dwóch, jeszcze bardziej zwiększając jej masę.

Wyniki te, razem z licznymi innymi nowymi odkryciami układów podwójnych czarnych dziur we wczesnym Wszechświecie, pokazują, że – jak podejrzewało wielu badaczy – łączenie się czarnych dziur mogło być częstsze niż początkowo sadziliśmy, a galaktyki z układami zawierającymi wiele masywnych czarnych dziur nie były wówczas rzadkością. Ich zderzenia i łączenie się odegrały istotną rolę w powstawaniu supermasywnych czarnych dziur, które obserwujemy dzisiaj.

Napisane na podstawie Hannah Übler i inni, *BlackTHUNDER: Evidence of three massive black holes in a z∼5 galaxy*, arxiv.org/abs/2509.21575 (2026)

*Anna DURKALEC**

*Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Listopad zacznie się dobrą widocznością Księżyca przed świtem, który pięknie ukaże swoje światło popielate. Pierwszego dnia miesiąca przed północą naszego czasu Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę, wschodząc 7° i 12° na północny zachód od, odpowiednio, Marsa i Jowisza, podążając ku nowiu 9 XI. Kolejne 6° od Jowisza w tym samym kierunku znajdzie się Regulus, najjaśniejsza gwiazda Lwa. Dobę później Księżyc w fazie 37% wzejdzie 1,5° pod Jowiszem i 4,5° od Regulusa, zmniejszając do rana dystans doń o 2°.

Czerwona Planeta do końca miesiąca pokona 13° wzdłuż ekliptyki, przechodząc 16 XI 75′ na północ od Jowisza, który w tym samym czasie przesunie się o 2,5°. Dziesięć dni później Mars spotka się z gwiazdą α Lwa, mijając ją w odległości 100′. W listopadzie Mars pojaśnieje do $+0{,}5^m$, zwiększając średnicę tarczy do 8″ przy wyraźnej fazie poniżej 90%. Jowisz w tym czasie pojaśnieje do $-2{,}2^m$, a jego tarcza przekroczy średnicę 39″.

Planety ułatwią odnalezienie jasnej wciąż mirydy R Leo. W połowie listopada Jowisz przejdzie 2,5° na północ od niej. Sama gwiazda znajduje się 5° na zachód od Regulusa, niedaleko gwiazd 18 i 19 Leonis, z którymi można porównywać jej blask.

7 XI Srebrny Glob wzejdzie w towarzystwie Wenus i Spiki, czyli najjaśniejszej gwiazdy Panny, prezentując tarczą w fazie zaledwie 4%. Wszystkie trzy ciała niebieskie o świcie zajmą pozycję na wysokości około 6° nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu. Tego ranka Wenus znajdzie się 100′ od Spiki. Księżycowi zaś zabraknie do tej pary 3°.

Wenus wchodzi na niebo poranne po koniunkcji dolnej ze Słońcem 24 X. Dzięki korzystnemu porannemu nachyleniu ekliptyki do widnokręgu da się ją dostrzec mniej niż dwa tygodnie po koniunkcji. Planeta w listopadzie zakreśli łuk wokół Spiki, zbliżając się do niej 10 XI na około 70′. Warto zapolować wtedy na Wenus, gdyż początkowo ma ona dużą tarczę i małą fazę. W dniu spotkania z Księżycem jest to odpowiednio 56″ i 6%. Do końca miesiąca Wenus zmniejszy tarczę do 40″, zwiększając fazę do 27%. Jasność planety urośnie od $-4{,}2^m$ do $-4{,}7^m$ i można próbować dostrzec ją w dzień, zwłaszcza podczas kolejnego spotkania z Księżycem 5 XII.

W drugiej połowie miesiąca niedaleko Wenus pojawi się Merkury. Pierwsza planeta od Słońca 21 XI osiągnie maksymalną elongację zachodnią niecałe 20°. Najwyżej na niebie Merkury wzniesie się o świcie 18 XI, przekraczając wysokość 7° i zbliżając się do pary Wenus-Spica na 13°. Osiem dni później planeta przejdzie 100′ od Zuben Elgenubi w Wadze i zniknie w zorzy porannej na początku grudnia, jeszcze zanim zbliży się doń sierp Księżyca. Jak zawsze przy widoczności porannej, Merkury oddala się od nas, dążąc do koniunkcji górnej, stąd zmniejszy on średnicę kątową do 5″ i zwiększy fazę do 90%, jaśniejąc przy tym od 0 do $-0{,}5^m$.

Na niebie wieczornym naturalny satelita Ziemi wyłoni się z blasku Słońca 13 XI, gdy w fazie 17% dotrze na 4° do Nunki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca. Cztery dni później zaś Księżyc przejdzie przez I kwadrę w Koziorożcu.

20 XI faza księżycowej tarczy przekroczy 80%, zajmując pozycję po około 6° od Saturna i Neptuna. Obie planety niedawno przeszły przez opozycję względem Słońca i są widoczne przez większą część nocy. Do końca miesiąca Saturn zmniejszy blask do $+0{,}7^m$ przy średnicy tarczy 19″. Neptun natomiast świeci blaskiem $+7{,}8^m$ i do jego dostrzeżenia potrzebna jest lornetka lub teleskop. Ostatnia planeta Układu Słonecznego kreśli swoją pętlę na niebie 2,5° na północny wschód od gwiazdy 5. wielkości 29 Psc, tworzącej wraz z innymi gwiazdami podobnej jasności układ, który przypomina miniaturowy Mały Wóz na pograniczu Ryb, Wieloryba i Wodnika.

24 XI Księżyc w pełni wzejdzie 3° na wschód od Plejad i jednocześnie 5° na północ od Urana, by do świtu zwiększyć dystans do tej gromady gwiazd do ponad 10°. Dzień później Uran przejdzie przez opozycję względem Słońca, jaśniejąc do $+5{,}6^m$. Planeta porusza się ruchem wstecznym z maksymalną prędkością, pokonując przez miesiąc dystans ponad 1°. Pod koniec listopada przejdzie ona 1,5° na południe od gwiazdy 4. wielkości 37 Tau, która znacznie ułatwi jej odszukanie.

Na ostatni tydzień miesiąca Srebrny Glob przeniesie się na niebo poranne, dążąc do ostatniej kwadry 1 XII. W tym czasie 28 XI w fazie 84% zbliży się na 4,5° do Polluksa w Bliźniętach, kolejnej nocy natomiast zakryje południową część jasnej gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. Zjawisko potrwa od godziny około 23 do 1. Obserwacje utrudni jednak duża faza księżycowej tarczy, przekraczająca 75%. W nocy z 29 na 30 XI Księżyc utworzy dość ciasny układ z Jowiszem, Marsem i Regulusem, zbliżając się do jaśniejszej z planet na 3°. W tym czasie Mars zajmie pozycję nieco ponad 2° od najjaśniejszej gwiazdy Lwa.

17 XI maksimum aktywności osiągną meteory z roju Leonidów. Ich radiant znajduje się w zachodniej części Lwa i wschodzi po godz. 22, a Księżyc do tego czasu zniknie za horyzontem. Są to bardzo szybkie meteory, osiągają prędkość 71 km/s. W tym roku prognozuje się niezbyt wysoką ich aktywność na poziomie 15 zjawisk na godzinę.

Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 10

Rozwiązanie zadania M 1870.
Odpowiedź: Nie.

Przypuśćmy, że takie rozmieszczenie istnieje. Rozważmy dwa przeciwległe wierzchołki ośmiościanu. Suma liczb stojących w tych wierzchołkach jest równa sumie liczb stojących w środkach ośmiu krawędzi wychodzących z tych dwóch wierzchołków.

Ponieważ wszystkie liczby są różne, suma tych ośmiu liczb jest równa co najmniej

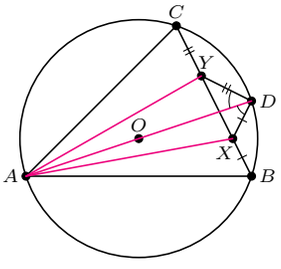
$$1 + 2 + \ldots + 8 = 36.$$

Z drugiej strony w dwóch wierzchołkach stoją dwie różne liczby nie większe niż 18, więc ich suma jest równa co najwyżej

$$17 + 18 = 35.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1871.



Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy punkty A, O, D leżą na jednej prostej. Rozważmy trójkąty BOX i DOX. Mamy

$$OB = OD,\ BX = DX,\ OX = OX,$$

więc trójkąty te są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ODX = \sphericalangle OBX.$$

Analogicznie trójkąty COY i DOY są przystające, więc

$$\sphericalangle ODY = \sphericalangle OCY.$$

Trójkąt OBC jest równoramienny, bo $OB = OC$, zatem

$$\sphericalangle OBX = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OCY.$$

Wobec tego

$$\sphericalangle ODX = \sphericalangle ODY,$$

co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1872.
Udowodnimy przez indukcję zupełną, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi

$$\{f(n), g(n)\} = \{2n, 2n+1\}.$$

Wtedy teza będzie oczywista.

Rozważmy bazę indukcji, czyli przypadek $n = 1$. Ponieważ

$$f(1) + g(1) = 5,$$

wystarczy pokazać, że ani $f(1)$, ani $g(1)$ nie jest równe 1. Gdyby $f(1) = 1$, to z warunku $f(f(1)) = 2f(1)$ dostalibyśmy $1 = 2$, sprzeczność. Analogicznie $g(1) \neq 1$. Zatem

$$\{f(1), g(1)\} = \{2, 3\}.$$

Załóżmy teraz, że teza indukcyjna jest prawdziwa dla wszystkich liczb $1 \leqslant k < n$. Niech

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Wtedy $n \in \{2k, 2k+1\}$, a z założenia indukcyjnego

$$\{f(k), g(k)\} = \{2k, 2k+1\}.$$

Zatem $n = f(k)$ albo $n = g(k)$.

Jeśli $n = f(k)$, to

$$f(n) = f(f(k)) = 2f(k) = 2n.$$

Jeśli zaś $n = g(k)$, to korzystając z równości $f(x) + g(x) = 4x + 1$ oraz $g(g(k)) = 2g(k)$, dostajemy

$$\begin{aligned} f(n) &= f(g(k)) = 4g(k) + 1 - g(g(k)) \\ &= 2g(k) + 1 = 2n + 1. \end{aligned}$$

W obu przypadkach $f(n) \in \{2n, 2n+1\}$. Ponieważ

$$f(n) + g(n) = 4n + 1,$$

otrzymujemy

$$\{f(n), g(n)\} = \{2n, 2n+1\}.$$

Indukcja jest zakończona, a więc $|f(n) - g(n)| = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Rozwiązanie zadania F 1155.
Zagadnienie struktury pierścieni Saturna rozstrzygnięto, korzystając ze zjawiska Dopplera. Zjawisko to pozwalało mierzyć różnicę prędkości wewnętrznego (bliższego planecie) i zewnętrznego brzegu pierścienia. Gdyby był on sztywną, litą strukturą, to jego zewnętrzny brzeg poruszałby się szybciej niż wewnętrzny: prędkość ruchu orbitalnego byłaby proporcjonalna do promienia R orbity badanego fragmentu: $v(R) = \omega R$, ze stałą wartością prędkości kątowej ω dla całego pierścienia (tzn. niezależną od R). Dla struktury złożonej z wielu niewielkich okruchów skalnych jej zewnętrzne części poruszają się wolniej od wewnętrznych. Mamy bowiem (G jest stałą grawitacji, a M masą Saturna)

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Stwierdzono, że pierścienie Saturna są gęstym zbiorem – w ogromnej większości – drobnych okruchów skalnych.

Rozwiązanie zadania F 1156.
Przyjmijmy, że kartka ma powierzchnię A. Moc promieniowania przez Słońce (σ oznacza stałą Stefana–Boltzmanna) wynosi $W = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$. Na powierzchnię kartki pada część tej mocy równa $W \cdot A/(4\pi R_{ZS}^2)$. Część a tej mocy jest odbijania, a tylko część $1 - a$ absorbowana. Obie strony kartki o temperaturze T emitują promieniowanie termiczne, a więc emitowana moc wynosi $2A\sigma T^4$. Po osiągnięciu równowagi (ustaleniu końcowej temperatury T) moc promieniowana przez kartkę równa jest mocy absorbowanej. Mamy zatem:

$$(1-a)\frac{4\pi\sigma R_S^2 T^4}{4\pi R_{ZS}^2} = 2A\sigma T^4.$$

Po skróceniu czynników występujących po obu stronach równania otrzymujemy

$$T^4 = T_S^4 \frac{R_S^2(1-a)}{2R_{ZS}^2},$$

czyli

$$T = T_S \left(\frac{R_S\sqrt{1-a}}{R_{ZS}\sqrt{2}} \right)^{1/2}.$$

Liczbowo, dla danych w treści zadania, $T \approx 221$ K $\approx -52{,}1$°C.

Słynne c-fasolki

*Bartłomiej BZDĘGA**

*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Oto ostatni z cyklu kącików poświęconych teorii gier. Rozważymy tu jedno – ale za to jakie! – zadanie dwunaste z zawodów I stopnia LXI Olimpiady Matematycznej. Jego autorem jest Jakub Onufry Wojtaszczyk. Na potrzeby kącika nieznacznie zmodyfikowałem i ograniczyłem treść do „trudniejszej połowy", choć „łatwiejsza połowa", obejmująca przypadek $c \geqslant 2$, wcale do łatwych nie należy. Zadanie rozwiązało tylko trzech uczestników spośród 1517 startujących z całej Polski.

Zadanie. *Ustalmy liczbę dodatnią $c < 2$. Gracze K i F grają w c–fasolki, a reguły gry są następujące. Mamy $n \geqslant 2$ kubków, na początku wszystkie są puste. W każdej rundzie gracz K wskazuje dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków, a gracz F wybiera jeden ze wskazanych zbiorów i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Celem gracza K jest doprowadzenie w co najwyżej $\lfloor cn \rfloor$ rundach do tego, by w każdym kubku była inna liczba fasolek. Udowodnić, że dla wystarczająco dużych n gracz F ma strategię wygrywającą.*

Rozważmy najpierw dowolną grę i niech σ będzie funkcją, która każdej pozycji przypisuje pewną liczbę. Taką funkcję nazywamy *funkcją oceny pozycji*, a jej wartości – *ocenami*. Strategię gracza (I lub II) nazwiemy *minimalizującą funkcję* σ, jeśli zawsze nakazuje wykonać ruch do takiej pozycji, której ocena jest najniższa. Metoda, którą zastosujemy, polega na znalezieniu odpowiedniej funkcji, a następnie uzasadnieniu, że minimalizująca ją strategia jest wygrywająca. Przykład takiego rozumowania jest w poprzednim kąciku – stosowaliśmy strategię minimalizującą potencjał.

Przewodnik po rozwiązaniu zadania.

Krok 1 – strategia. Kubkowi, w którym jest k fasolek, przypiszemy nieujemną wagę $w(k)$, która rośnie wraz z k. Jako ocenę $\sigma(T)$ pozycji T przyjmiemy sumę wag wszystkich kubków. Celem gracza F jest utrzymanie, jak długo się da, nierówności

$$\sigma(T) < w(n-1),$$

bo jeśli ona zachodzi, to w każdym kubku jest co najwyżej $n-1$ ziaren fasoli, co oznacza, że pewne dwa kubki mają ich tyle samo. Dalej zakładamy, że gracz F stosuje strategię minimalizującą funkcję σ.

Krok 2 – kontrola oceny pozycji. Załóżmy, że w pewnej pozycji T gracz K wskazał zbiory Z_1 i Z_2, a ich wybór przez gracza F prowadzi do pozycji, odpowiednio, T_1 i T_2. Niech T^+ będzie pozycją powstałą z pozycji T przez dodanie po jednej fasolce do każdego kubka. Zbiory Z_1 i Z_2 są rozłączne, więc

$$\big(\sigma(T_1) - \sigma(T)\big) + \big(\sigma(T_2) - \sigma(T)\big) \leqslant \sigma(T^+) - \sigma(T),$$

równoważnie $\sigma(T_1) + \sigma(T_2) \leqslant \sigma(T) + \sigma(T^+)$. W takim razie po rundzie ocena pozycji nie przekroczy $\frac{\sigma(T)+\sigma(T^+)}{2}$, niezależnie od Z_1 i Z_2.

W tym miejscu wypadałoby spróbować dwóch podejść – w pierwszym *o ile*, a w drugim *ile razy* zwiększy się ocena pozycji po rundzie? Pozostawiam Czytelnikowi samodzielne przekonanie się, że pierwsze z nich nie prowadzi do żadnego ciekawego wniosku. Zajmiemy się zatem drugim.

Krok 3 – funkcja oceny. Wiemy już, że jeśli T' jest pozycją po jednej rundzie od pozycji T, to

$$\sigma(T') \leqslant \sigma(T) \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{\sigma(T^+)}{\sigma(T)}\right).$$

Wygodnie by było, gdyby czynnik z prawej był niezależny od T. W tym celu można wziąć $w(k) = a^k$ dla pewnego $a > 1$. Wtedy $\sigma(T^+) = a\sigma(T)$ oraz $\sigma(T') \leqslant \sigma(T) \cdot \frac{a+1}{2}$. Ocena pozycji początkowej jest równa n, więc po t rundach nie przekroczy ona $n\left(\frac{a+1}{2}\right)^t$.

Wykażemy, że funkcja σ z wagami jak wyżej i odpowiednim a jest tym, czego nam trzeba. Chcemy, żeby po $\lfloor cn \rfloor$ rundach ocena pozycji była mniejsza niż $w(n-1)$, do czego wystarczy, by zachodziła nierówność

$$n\left(\tfrac{a+1}{2}\right)^{cn} < a^{n-1}. \tag{1}$$

Wykażemy, że jest ona prawdziwa dla wszystkich dostatecznie dużych n.

Krok 4 – technikalia. Po przekształceniach i podstawieniu $a = 1 + 2\varepsilon$ nierówność (1) przybiera postać

$$\sqrt[n]{an}(1+\varepsilon)^c < 1 + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Zauważmy, że

$$(1+\varepsilon)^c < 1 + 2\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{(1+\varepsilon)^c - 1^c}{\varepsilon} < 2.$$

W granicy $\varepsilon \to 0$ lewa strona drugiej nierówności jest pochodną funkcji $x \mapsto x^c$ w punkcie $x = 1$, która jest równa c, a pamiętamy, że $c < 2$. Wobec tego można tak dobrać stałe $\varepsilon, \delta > 0$, by zachodziła równość

$$(1+\delta)(1+\varepsilon)^c = (1 + 2\varepsilon).$$

Po podstawieniu tego do nierówności (2) otrzymamy

$$\sqrt[n]{an} < 1 + \delta.$$

Prawa strona jest niezależna od n, a lewa ma granicę 1 przy $n \to \infty$, a więc ta nierówność – a tym samym nierówność (1) – jest prawdziwa przy odpowiednio ustalonym a dla wszystkich wystarczająco dużych n.

Udowodniliśmy zatem, że dla dużych n strategia minimalizująca funkcję σ, z odpowiednio dobraną stałą a, pozwala graczowi F przetrwać co najmniej $\lfloor cn \rfloor$ rund.