

Sprężenia izogonalne i kilka własności punktu X_{25}

Radosław Żak

Streszczenie

W pracy definiuję habilsak punktu w trójkącie i badam jego własności. Dowodzę przy tym także pewnych właściwości punktu X_{25} będącego szczególnym przypadkiem habilsaku oraz wykazuję, że punktu stałego tej operacji nie da się skonstruować w klasyczny sposób.

1 Wprowadzenie

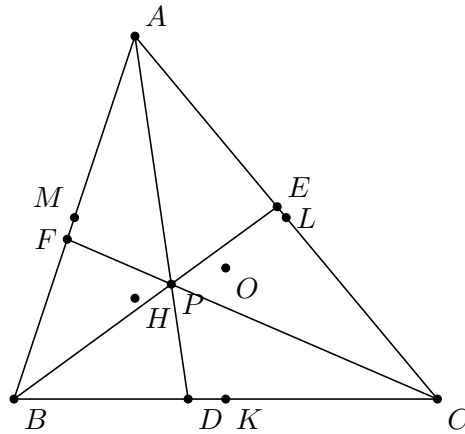
Izogonalne sprężenie prostej jest krzywą stożkową – ten fakt leży u podstaw niniejszej pracy. Na jego podstawie definiuję habilsak¹ punktu dla ustalonego trójkąta. Rozdział trzeci zawiera dowód jego istnienia. Następnie badam jego własności w szczególnych przypadkach. Rozważając naszą konstrukcję dla linii środkowych trójkąta otrzymamy punkt X_{25} , którego niektóre inne własności przedstawiam w rozdziale czwartym. Habilsakiem punktów na okręgu opisanym okazuje się być środek ciężkości trójkąta. Na koniec dowodzę, że istnieje punkt, który jest swoim własnym habilsakiem, a także, że nie da się go skonstruować za pomocą standardowych metod, tj. cyrkla i linijki bez podziałki.

¹Skorzystałem ze znanej w fizyce strategii by, gdy potrzebuje się nieużywanego słowa, zajrzeć do Joyce'a²

²„Na czasce ma przekoniczny habilsak, śmiało confunieco niczym hiaronimowy hajerbajtel”, *Finneganów Tren*, James Joyce, strona 132

2 Pojęcia

2.1 Oznaczenia



Ustalmy trójkąt ABC . Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- K, L, M – środki boków
- P – dowolny punkt
- D, E, F – przecięcia prostych AP, BP, CP z przeciwległymi bokami trójkąta
- O – środek okręgu opisanego na ABC
- H – ortocentrum ABC

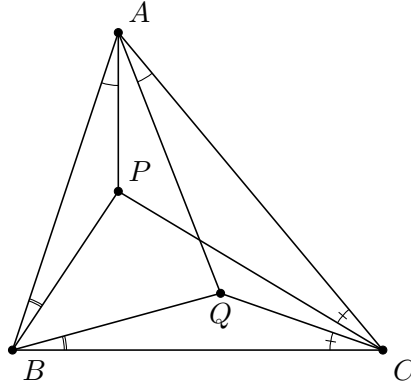
Będziemy przyjmować konwencję, w której $\sphericalangle XYZ$ oznacza skierowany kąt między półprostą YX a YZ .

Uwaga. W rozdziale czwartym niektóre punkty będą miały inne znaczenie, odpowiednie oznaczenia podamy we wstępie do tego rozdziału.

Dla danego trójkąta możemy zdefiniować jego różne punkty środkowe (na przykład środek ciężkości czy ortocentrum). Takie punkty są zebrane w Encyklopedii Środków Trójkąta [2]; będziemy oznaczali n -ty z tamtejszych środków przez X_n .

2.2 Izogonalne sprzężenie

Powiemy, że punkty P i Q są *izogonalnie sprzężone* w trójkącie ABC , jeśli $\sphericalangle BAP = \sphericalangle QAC$, $\sphericalangle CBP = \sphericalangle QBA$ oraz $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$. Oczywiście jest to relacja symetryczna.



Twierdzenie 2.1. Jeśli P nie leży na prostych zawierających boki trójkąta, istnieje punkt izogonalnie doń sprzężony.

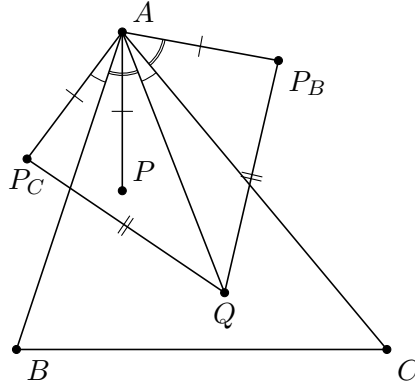
Dowód. Niech P_A, P_B, P_C będą odbiciami P względem odpowiednich boków trójkąta. Oznaczmy przez Q środek okręgu opisanego na trójkącie $P_AP_BP_C$. Wtedy $P_CA = P_BA (= PA)$ i $QP_C = QP_B$, więc trójkąty P_CAQ i QAP_B są przystające. W szczególności $\sphericalangle P_CAQ = \sphericalangle QAP_B$. Ponieważ

$$2\sphericalangle BAP + \sphericalangle PAQ = \sphericalangle P_CAB + \sphericalangle BAP + \sphericalangle PAQ = \sphericalangle P_CAQ$$

oraz

$$2\sphericalangle QAC + \sphericalangle PAQ = \sphericalangle QAC + \sphericalangle PAC = \sphericalangle QAC + \sphericalangle CAP_B = \sphericalangle QAP_B$$

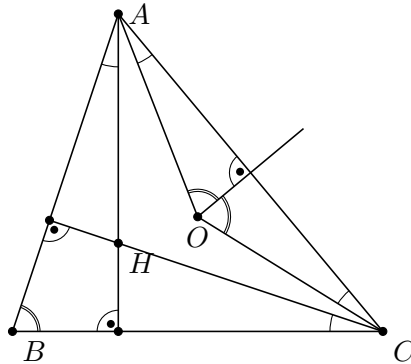
to $\sphericalangle BAP = \sphericalangle QAC$. Analogicznie dowodzimy pozostałych dwóch równości. \square



Uwaga. Jeśli punkty P_A, P_B, P_C leżą na jednej prostej (co dzieje się dokładnie wtedy, gdy P leży na okręgu opisanym na ABC ³), punktem Q będzie kierunek prostopadły do przechodzącej przez nie prostej. Wtedy zarówno A jak i Q leżą na symetralnej $P_B P_C$, więc równość $\sphericalangle P_C A Q = \sphericalangle Q A P_B$ jest prawdziwa. Pozostała część rozumowania pozostaje bez zmian.

Punkt izogonalnie sprzężony do P będziemy oznaczać przez P^* .

Przykład. $\sphericalangle B A H = 90^\circ - \sphericalangle C B A = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle C O A = \sphericalangle O A C$, więc H i O są izogonalnie sprzężone.

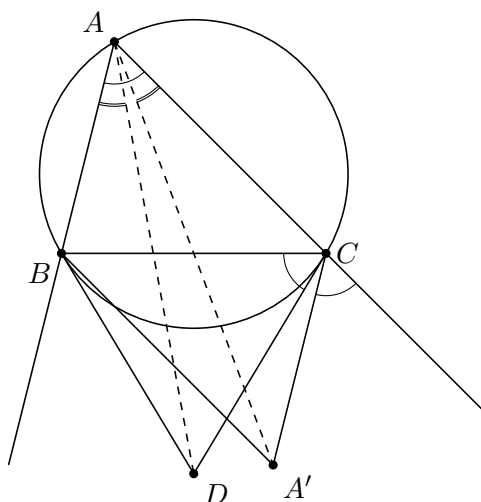


Przykład. Niech M będzie środkiem boku BC . Odbijmy A względem M otrzymując A' . Ponadto niech styczne do okręgu opisanego w B i C przecinały się w D . Wtedy

$$-\sphericalangle A' C A = \sphericalangle B A C = \sphericalangle B C D$$

³Będzie to obraz prostej Simsona punktu P w jednokładności o środku P i skali 2

i analogicznie dla kątów o wierzchołki B , zatem A' i D są izogonalnie sprzężone. W szczególności AD jest symedianą (tj. prostą izogonalnie sprzężoną do środkowej) w kącie BAC .



2.3 Współrzędne barycentryczne

Jeśli dla pewnego punktu P oraz liczb rzeczywistych p_A, p_B, p_C (nie wszystkich równych zero) zachodzi

$$p_A \overrightarrow{PA} + p_B \overrightarrow{PB} + p_C \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

powiemy, że $[p_A : p_B : p_C]$ są współzrędnymi barycentrycznymi punktu P w ABC . Oczywiście dla dowolnej niezerowej stałej λ jeśli $[p_A : p_B : p_C]$ są współzrędnymi barycentrycznymi punktu P , to $[\lambda p_A : \lambda p_B : \lambda p_C]$ także. Każdy punkt P ma jakieś współzrędnne barycentryczne, i to dokładnie jedno z dokładnością do stałej, gdyż $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ rozpinają przestrzeń wymiaru dokładnie dwa, więc jądro odwzorowania z $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ w $u\overrightarrow{PA} + v\overrightarrow{PB} + w\overrightarrow{PC}$ ma wymiar jeden. Współzrędnne barycentryczne można interpretować jako takie masy p_A, p_B, p_C , że po umieszczeniu ich odpowiednio w A, B, C otrzymamy układ o środku ciężkości w P ; to pokazuje, że współzrędnne te jednoznacznie definiują punkt, będziemy więc oznaczać $P \sim [p_A : p_B : p_C]$, jeśli $[p_A : p_B : p_C]$ są współzrędnymi barycentrycznymi P . To oznacza

też, że współrzędne dowolnego punktu prostej PQ są kombinacją liniową współrzędnych P i Q .

W tych interpretacjach przyjmowaliśmy $p_A + p_B + p_C \neq 0$, gdyż tylko wtedy odpowiedni układ będzie miał środek masy. Okazuje się, że punkty dla których suma współrzędnych jest równa zero, są dokładnie punktami w nieskończoności.

Współrzędne barycentryczne są szczególnie przydatne w zagadnieniach dotyczących geometrii trójkąta, gdyż pozwalają na proste zapisanie obiektów z nim związanych. Dla przykładu, oczywiście $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ są współrzędnymi wierzchołków A , B , C , zaś $[1 : 1 : 1]$ to środek ciężkości ABC .

Lemat 2.1. Niech $P \sim [p_A : p_B : p_C]$, zaś proste AP , BC przecinają się w D . Wtedy

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{p_C}{p_B}$$

Dowód. Zauważmy, że $D \sim [0 : p_B : p_C]$ – istotnie, te współrzędne są zarówno kombinacją liniową współrzędnych A i D , jak również B i C . Z definicji

$$p_B \overrightarrow{DB} + p_C \overrightarrow{DC} = 0$$

co jest równoważne tezie. □

Ta obserwacja pozwala udowodnić zarówno twierdzenie Cevy, jak i twierdzenie Menelaosa. Daje ona równoważność współrzędnych barycentrycznych i stosunków, z której będziemy wielokrotnie korzystać.

Lemat 2.2. Izogonalne sprzężenie punktu $P \sim [p_A : p_B : p_C]$ ma współrzędne barycentryczne

$$\left[\frac{a^2}{p_A} : \frac{b^2}{p_B} : \frac{c^2}{p_C} \right]$$

Dowód. Niech $Q = P^*$ i AP , AQ przecinają BC odpowiednio w D , E . Będziemy chcieli udowodnić, że

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{c^2}{b^2}$$

Niech $\theta = \sphericalangle BAD$. Z twierdzenia sinusów dla trójkątów BAD oraz DAC mamy

$$\frac{BD}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \sphericalangle ADB}$$

oraz

$$\frac{CD}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{b}{\sin \sphericalangle CDA}$$

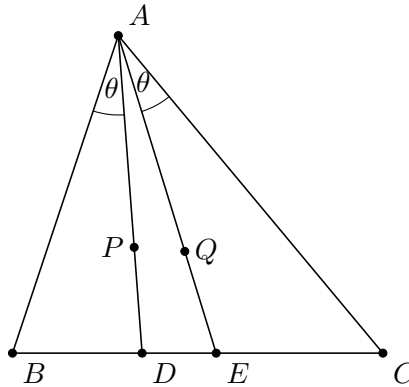
Oczywiście $\sin \sphericalangle ADB = \sin \sphericalangle CDA$, więc dzieląc stronami, dostajemy

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta} = \frac{c}{b}$$

Analogicznie

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{c}{b}$$

Mnożąc stronami otrzymujemy tezę. □



Zatem jeśli mamy pewną prostą o równaniu $\kappa x_A + \lambda x_B + \mu x_C = 0$, to jej izogonalne sprzężenie ma równanie

$$\frac{\kappa a^2}{x_A} + \frac{\lambda b^2}{x_B} + \frac{\mu c^2}{x_C} = 0$$

więc po pomnożeniu przez $x_A x_B x_C$

$$\kappa' x_B x_C + \lambda' x_C x_A + \mu' x_A x_B = 0$$

dla pewnych κ', λ', μ' . Zatem izogonalne sprzężenie prostej jest krzywą stopnia dwa – dla współrzędnych barycentrycznych, i aby stwierdzić, że będzie to stożkowa, musimy udowodnić jeszcze poniższy lemat:

Lemat 2.3. Stopień krzywej algebraicznej jest taki sam we współrzędnych kartezjańskich i barycentrycznych.

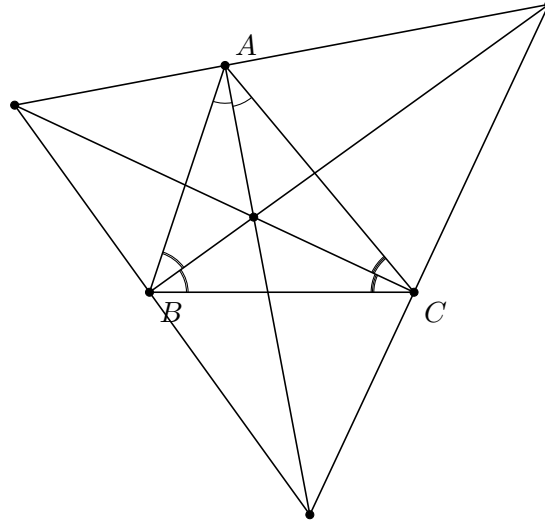
Dowód. Weźmy $A' = (1, 0)$, $B' = (0, 1)$, $C' = (0, 0)$. Zauważmy, że punkt $P = (x, y)$ we współrzędnych kartezjańskich ma w trójkącie $A'B'C'$ współrzędne barycentryczne $(x, y, 1 - x - y)$, gdyż

$$\overrightarrow{AP} \cdot x + \overrightarrow{BP} \cdot y + \overrightarrow{CP} \cdot (1 - x - y) = \overrightarrow{(x-1, y)} \cdot x + \overrightarrow{(x, y-1)} \cdot y + \overrightarrow{(x, y)} \cdot (1 - x - y) = 0$$

Niech $f(x, y)$ będzie równaniem krzywej we współrzędnych kartezjańskich, zaś $G(x, y, z)$ w barycentrycznych. Wtedy istnieje taki jednorodny wielomian $F(x, y, z)$, że $F(x, y, 1 - x - y) = f(x, y)$ (każdy jednomian niższego stopnia w f domnamy przez $x + y + z$), i przekształcenie afiniczne, w którym obrazem $A'B'C'$ jest ABC , przekształca F w G , a ponieważ przekształcenia afiniczne są liniowe, w szczególności $\deg G = \deg F = \deg f$. \square

Zatem izogonalne sprzężenie prostej jest stożkową, która przechodzi przez wierzchołki trójkąta.

Przykład. Wiemy, że środek okręgu wpisanego jest izogonalnie sprzężony do samego siebie. Stąd dla niego musi zachodzić $x_A = \frac{a^2}{x_A}$, czyli $x_A = a$ i współrzędne tego punktu to $[a : b : c]$. Środki okręgów dopisanych także spełniają tę własność (natomiast nie leżą we wnętrzu trójkąta), więc będą miały na odpowiedniej współrzędnej dodatkowo minus.



Przykład. Izogonalne sprzężenie prostej w nieskończoności to okrąg opisany. Skoro równanie tej prostej to $x_A + x_B + x_C = 0$, to równaniem okręgu opisanego na ABC jest

$$a^2x_Bx_C + b^2x_Cx_A + c^2x_Ax_B = 0$$

Przykład. Udowodnimy, że dowolna hiperbola przechodząca przez A, B, C, H jest prostokątna (tj. jej asymptoty są prostopadłe).

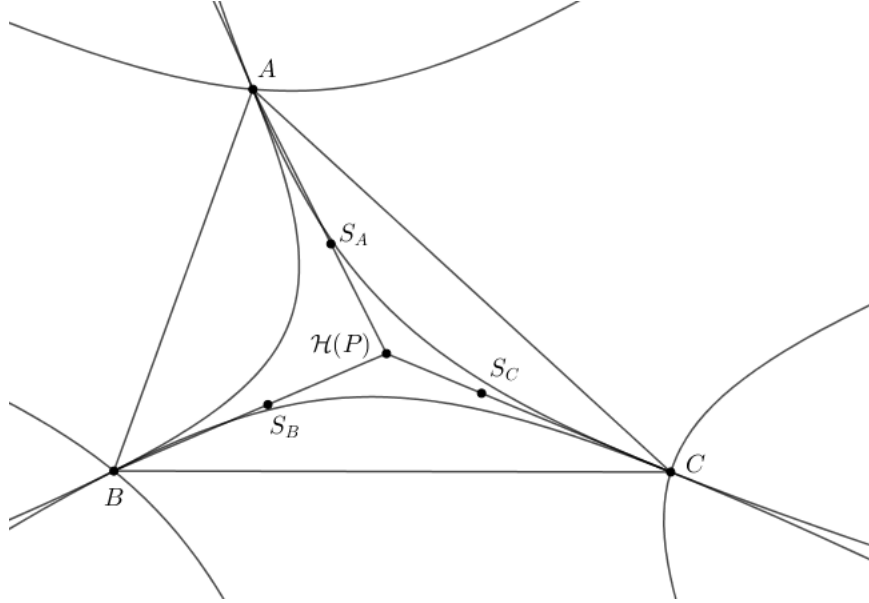
Jej izogonalne sprzężenie jest prostą przechodzącą przez O . Niech przecina ona okrąg opisany w X i Y . Wtedy X^* oraz Y^* są kierunkami asymptot hiperboli. Ponadto $\sphericalangle XAY$ jest prosty, jako oparty na średnicy. Zatem $\sphericalangle XAY = \sphericalangle X^*AY^* = 90^\circ$, i ta hiperbola jest prostokątna.

3 Główna konstrukcja

Wybermy punkt P . Niech AP, BP, CP przecinają przeciwległe boki w D, E, F . Izogonalne sprzężenie prostej EF jest pewną stożkową; niech S_A będzie jej środkiem. Analogicznie definiujemy S_B oraz S_C .

Twierdzenie 3.1. Proste AS_A, BS_B, CS_C przecinają się w jednym punkcie.

Definicja. Ten punkt przecięcia nazwiemy *habilsakiem* punktu P i będziemy oznaczali przez $\mathcal{H}(P)$.



Dowód twierdzenia podzielimy na kilka kroków:

Lemat 3.1. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D , przy czym D leży we wnętrzu trójkąta ABC (w szczególności żadne trzy punkty nie są współliniowe). Wtedy istnieje przekształcenie afiniczne f , takie, że $f(D)$ jest ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $f(A), f(B), f(C)$.

Dowód. Niech D ma współrzędne barycentryczne $[d_A : d_B : d_C]$ w ABC . Te współrzędne są niezmiennicze przy przekształceniu, gdyż przekształcenia afiniczne zachowują stosunki. Chcemy zatem przekształcić ABC na trójkąt o takich kątach α, β, γ , że

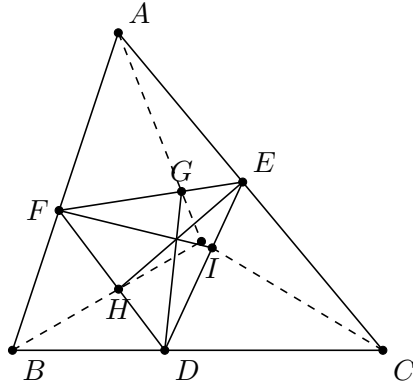
$$[d_A : d_B : d_C] = [\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma],$$

gdyż to są właśnie współrzędne barycentryczne ortocentrum. Zatem chcemy, by dla pewnego λ

$$\begin{cases} \alpha = \arctan \lambda d_A \\ \beta = \arctan \lambda d_B \\ \gamma = \arctan \lambda d_C \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi \end{cases}$$

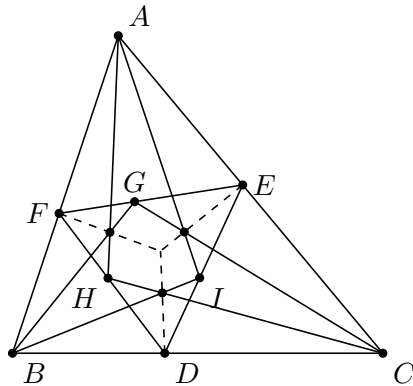
Zauważmy, że dla $\lambda = 0$ także $\alpha + \beta + \gamma = 0$, zaś dla $\lambda \rightarrow \infty$ ta suma zmierza do $\frac{3}{2}\pi$. Stąd dla pewnego λ otrzymamy dokładnie π . \square

Lemat 3.2 (Ceva Nest). Niech punkty D, E, F leżą na odpowiednich bokach trójkąta ABC , zaś G, H, I na bokach DEF w ten sposób, że AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie, tak samo jak DG, EH i FI . Wtedy także trójka prostych AG, BH, CI przecina się w jednym punkcie.



Dowód. Dowód można znaleźć w [3]. □

Lemat 3.3. Niech punkty od A do I będą położone tak, jak w założeniach poprzedniego lematu. Niech CH przecina się z BI w X , AI z CG w Y , zaś BG z AH w Z . Wtedy proste DX, EY i FZ przecinają się w jednym punkcie.



Dowód. Z lematu 3.2 AG, BH i CI się przecinają, nazwijmy ich punkt przecięcia P . Wtedy $(P, X), (H, I), (B, C)$ to przeciwne pary wierzchołków

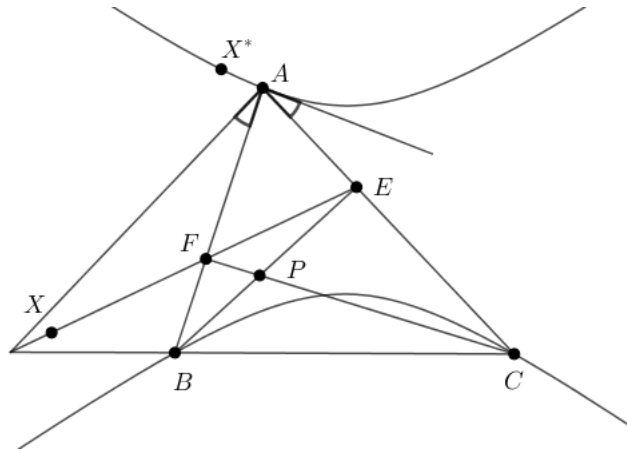
czworoboku zupełnego, zatem z Dualnego Inwolucyjnego Twierdzenia Desarguesa ([4]) dla punktu D istnieje inwolucja przekształcająca $DP \rightarrow DX$, $DH \rightarrow DI$, $DB \rightarrow DC$.

Oznaczmy przecięcie AD , BE , CF przez Q . Ponieważ założenia i teza zachowują się w przekształceniach rzutowych, można założyć bez straty ogólności, że Q leży we wnętrzu ABC , i z lematu 3.1 po zastosowaniu odpowiedniego przekształcenia afinicznego, Q możemy uznać za ortocentrum ABC . Wtedy z własności trójkąta ortycznego prosta DB jest dwusieczną zewnętrzną $\sphericalangle FDE$, więc inwolucja z poprzedniego akapitu musi być izogonalnym sprzężeniem w $\sphericalangle FDE$ (gdyż przekształcenie rzutowe jest wyznaczone jednoznacznie przez swoje cztery (a nawet trzy) wartości, zaś wiemy, że pary (DH, DI) , (DB, DC) są izogonalnie sprzężone w tym kącie). Stąd także DP i DX są izogonalnie sprzężone. Zatem DX , EY , FZ przechodzą przez izogonalne sprzężenie P w DEF (jeśli P leży na którymś z boków, teza się trywializuje). \square

Lemat 3.4. Dla pewnych punktów Q_A, Q_B, Q_C takich, że punkty A, B, C leżą na bokach trójkąta $Q_A Q_B Q_C$, mamy $S_A = Q_B M \cap Q_C L$ (oraz symetryczne do niej równości).

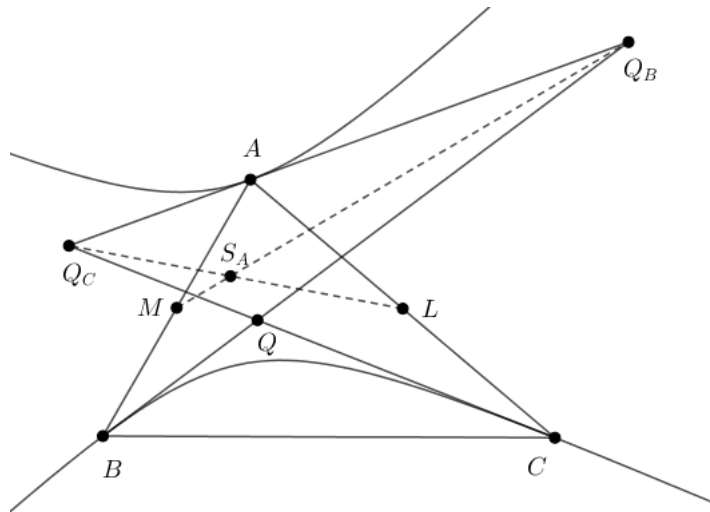
Dowód. Oznaczmy izogonalne sprzężenie EF przez S_A . Niech P_A (analogicznie P_B, P_C) będzie takim punktem, że $(P, P_A; A, D) = -1$, i niech Q, Q_A, Q_B, Q_C będą izogonalnymi sprzężeniami odpowiednich punktów P . Będziemy chcieli udowodnić, że $P_B P_C, EF$ oraz BC przecinają się w jednym punkcie: niech T będzie przecięciem EF z BC , wtedy $(T, D; B, C) = -1$ więc rzutując przez A na CP mamy, że P_C leży na AT , analogicznie dla P_B .

Niech punkt X zmierza po prostej EF do T . Wtedy punkt X^* porusza się po S_A w stronę A , przy czym prosta AX dąży do $P_B P_C$, więc AX^* do $Q_B Q_C$. Zatem $Q_B Q_C$ jest styczną w A do S_A . Podobnie są nimi BQ i CQ . To oznacza, że biegunowymi punktów Q, Q_B, Q_C są odpowiednio BC, AB, AC .



Rozważmy punkt w nieskończoności prostej AC i oznaczmy go jako W . Jego biegunowa z jednej strony musi przechodzić przez L , gdyż $(W, L; A, C) = -1$, z drugiej zaś strony musi przechodzić przez biegun prostej AC , czyli Q_C . Ponadto biegunem prostej w nieskończoności jest środek stożkowej, czyli S_A . Korzystając z analogicznego rozumowania dla prostej AB , dostajemy, że S_A jest przecięciem $Q_B M$ z $Q_C L$. Skorzystanie z Lematu 3.3 kończy dowód twierdzenia.

□



Możemy także opisać współrzędne barycentryczne $\mathcal{H}(P)$ w zależności od P .

3.1 Współrzędne barycentryczne habilsaku

Niech $P \sim [p_A : p_B : p_C]$, $Q \sim [q_A : q_B : q_C]$. Wtedy $Q_A \sim [-q_A : q_B : q_C]$, analogicznie Q_B i Q_C . Oznaczmy $s = q_A + q_B + q_C$ i weźmy $S'_A \sim [q_A s : q_B(s - 2q_C) : q_C(s - 2q_B)]$. Zauważmy, że zapisując L jako $2q_C \cdot [q_A : 0 : q_A]$ i Q_C jako $(s - 2q_C)[q_A : q_B : -q_C]$, a następnie sumując otrzymane współrzędne, dostaniemy

$$\begin{cases} (2q_C + s - 2q_C)q_A = sq_A \\ (s - 2q_C)q_B \\ 2q_Aq_C - (s - 2q_C)q_C = q_C(2q_A + 2q_C - s) = q_C(s - 2q_B) \end{cases}$$

czyli dokładnie współrzędne S'_A . Zatem S'_A leży na prostej $Q_C L$ oraz analogicznie na $Q_B M$, więc $S'_A = S_A$. Wtedy punkt

$$\mathcal{H}(P) := \left[\frac{q_A}{s - 2q_A} : \frac{q_B}{s - 2q_B} : \frac{q_C}{s - 2q_C} \right]$$

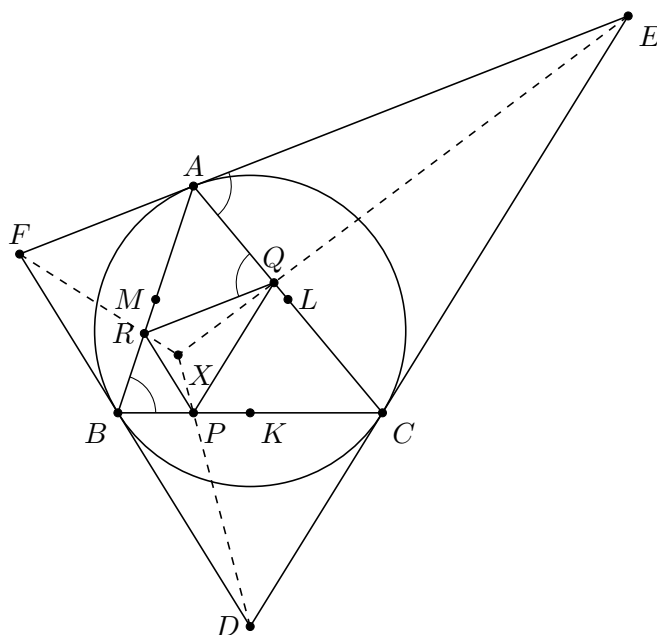
leży na prostych AS_A , BS_B , CS_C , zatem jest to $\mathcal{H}(P)$. Równoważnie można go zapisać jako

$$\left[\frac{a^2 p_B p_C}{b^2 p_C p_A + c^2 p_A p_B - a^2 p_B p_C} : \frac{b^2 p_C p_A}{c^2 p_A p_B + a^2 p_B p_C - b^2 p_C p_A} : \frac{c^2 p_C p_A}{c^2 p_A p_B + a^2 p_B p_C - b^2 p_C p_A} \right]$$

4 Środek X_{25}

Ten rozdział poświęcony jest punktowi, który otrzymamy wychodząc od linii środkowych trójkąta, tj. $\mathcal{H}(X_2)$. Twierdzenie 4.1 dowodzi tej i innych jego własności.

Niech K , L , M będą środkami boków, P , Q , R spodkami wysokości, zaś D , E , F przecięciami stycznych w wierzchołkach do okręgu opisanego. Wtedy $\sphericalangle AQR = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CAE$, więc $RQ \parallel EF$. Zatem trójkąty DEF i PQR mają odpowiednie boki równoległe, więc istnieje jednokładność przekształcająca jeden z nich na drugi.



Definicja. Środek tej jednokładności, a więc przecięcie prostych DP , EQ i FR , jest środkiem trójkąta X_{25} (w tym rozdziale dla uproszczenia notacji będziemy go oznaczać przez X).

4.1 Własności

Oznaczmy środek okręgu opisanego przez O , zaś przecięcie stycznej w A do okręgu opisanego (tj. DE) z BC przez T .

Twierdzenie 4.1. Następujące własności zachodzą:

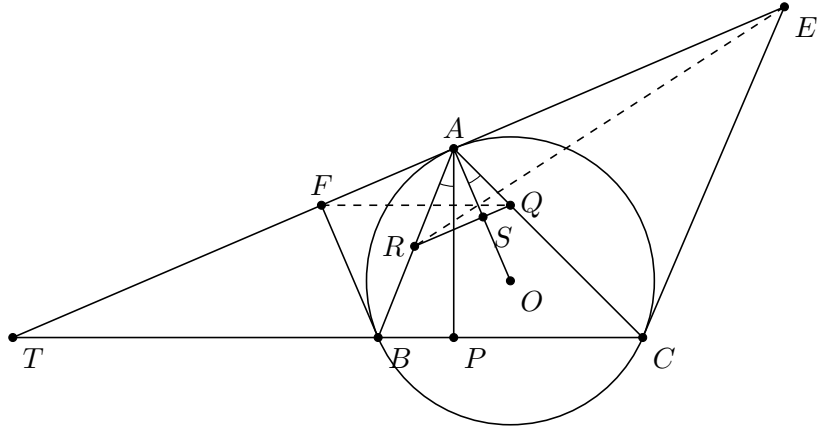
1. FQ , RE , AO przecinają się w jednym punkcie.
2. FL , EM , AX przecinają się w jednym punkcie.
3. Czworokąt $ELMF$ da się wpisać w okrąg, którego środek leży na AX .
4. Rzut T na AX leży na okręgu opisanym.
5. Punkt izogonalnie sprzężony do X jest izotomicznie sprzężony do H .
6. X leży na prostej Eulera.

Dowód. 1. Niech S będzie przecięciem AO z RQ . Skoro $RQ \parallel EF$, wystarczy udowodnić, że $\frac{FA}{EA} = \frac{QS}{RS}$. $AO \perp EF$, więc także $AO \perp RQ$ i S jest spodkiem wysokości w trójkącie RAQ . Ponieważ trójkąty CAB i RAQ są podobne, $\frac{QS}{RS} = \frac{BP}{CP}$. Jeśli udowodnimy, że trójkąty FPB i EPC są podobne, dostaniemy

$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{CE} = \frac{BP}{CP} = \frac{QS}{RS},$$

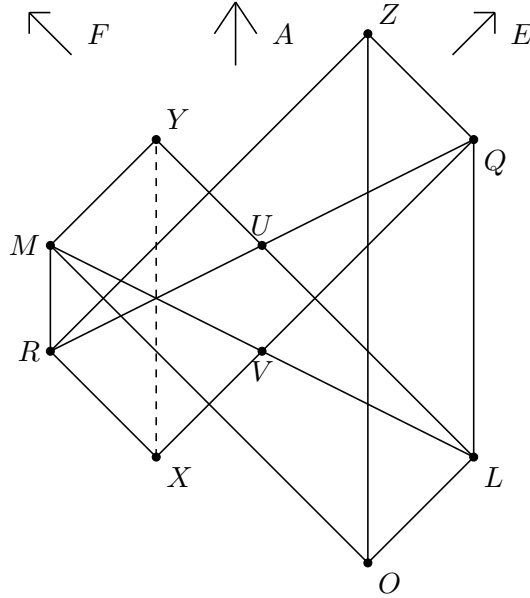
co chcieliśmy udowodnić.

Zauważmy, że $\sphericalangle PBF = 180^\circ - \sphericalangle DBC = 180^\circ - \sphericalangle BCD = \sphericalangle ECP$. Wystarczy zatem pokazać, że PT jest dwusieczną zewnętrzną kąta EPF . Tak jest w istocie – miejscem geometrycznym takich punktów Z , że ZT jest dwusieczną zewnętrzną EZF , jest okrąg Apoloniusza dla punktów E, F przechodzący przez T . Jako iż $(A, T; E, F) = -1$, musi on mieć średnicę AT , zaś $\sphericalangle APT = 90^\circ$, więc P na nim leży.



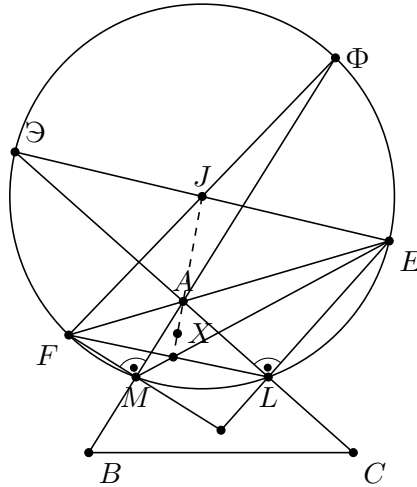
2. Oznaczmy przecięcie FL i EM jako Y , zaś FQ z ER jako Z . Zauważmy, że definiując O jako przecięcie EL z FM , możemy zignorować całą informację jaką posiadamy poza współliniowościami wynikającymi z definicji i podpunktu 1 twierdzenia. Można wtedy przyjąć bez straty ogólności, że EF jest prostą w nieskończoności. Wtedy czworokąty $MOLY$ i $RXQZ$ są równoległobokami, a proste RM, LQ, OZ są równoległe. Niech U będzie środkiem RQ , zaś V środkiem LM . Jeśli $U = V$, to odcinek XY jest odbiciem ZO względem V , więc jest do

niego równoległy, co chcieliśmy udowodnić. Jeśli tak nie jest, to UV jest linią środkową w trapezie $RQLM$, więc jest równoległa do jego boków, a skoro jest też „linią środkową” w $XZOY$, a jest równoległa do OZ , to musi być także równoległa do XY .⁴

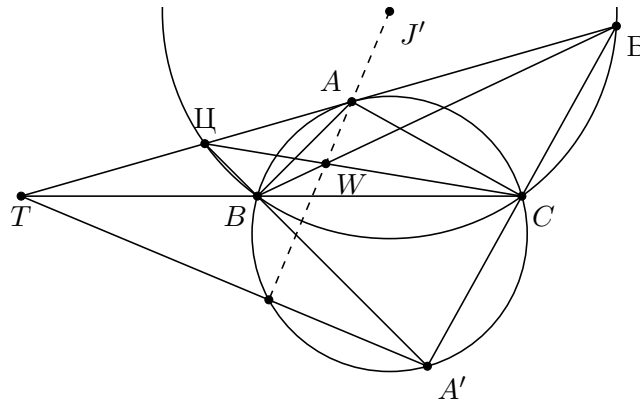


3. W inwersji względem okręgu opisanego F przechodzi na M , a E na L , więc $OF \cdot OM = OE \cdot OL = R^2$ i z twierdzenia o potędze punktu $EFML$ da się wpisać w okrąg. Niech J będzie jego środkiem. Odbijmy E i F względem J otrzymując Θ i Φ . Skoro $\sphericalangle AMF = 90^\circ$, punkty M, A, Φ są współliniowe. Zatem z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $FL\Theta EM\Phi$ proste AJ, FL, EM przecinają się w jednym punkcie. Ale z podpunktu 2 także AX, FL, EM przecinają się w jednym punkcie. Zatem J leży na AX .

⁴Alternatywny dowód: korzystając z Dualnego Inwolucyjnego Desarguesa dla czworoboków utworzonych z prostych (EQ, ER, FQ, FR) oraz (EL, EM, FL, FM) dla punktu A odpowiednie inwolucje będą identyczne, a korzystając z punktu 1 AO przechodzi w niej na AX .

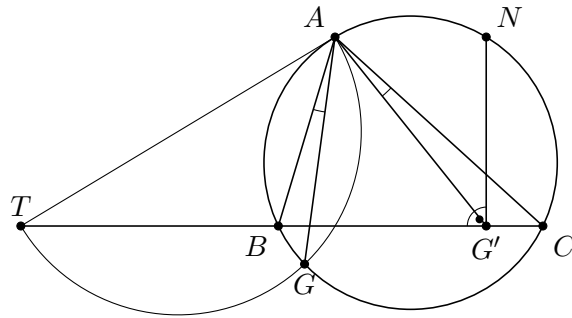


4. Odbijmy A względem E i F , otrzymując B i Π . Niech $C\Pi$ przecina BB w W . Czworokąt $BCB\Pi$ jest obrazem $MLEF$ w jednokładności o środku w A i skali 2, zatem W leży na AX z podpunktu 2, ponadto na tym czworokącie można opisać okrąg Ω , którego środek J' leży na AX (z podpunktu 3), a dodatkowo $\sphericalangle A B \Pi = \sphericalangle B C A = 90^\circ$. Niech A' będzie odbiciem A względem O . Wtedy $B\Pi$ przecina $C'B$ w A' , więc z Twierdzenia 1.10 z [1] $A'T$ jest biegunową W względem Ω . Zatem $J'W \perp A'T$, ale J', A, W i X są współliniowe, więc $AX \perp A'T$. To oznacza, że przecięcie tych prostych jest jednocześnie rzutem T na AX , i leży na okręgu opisanym na ABC (gdyż AA' jest jego średnicą).

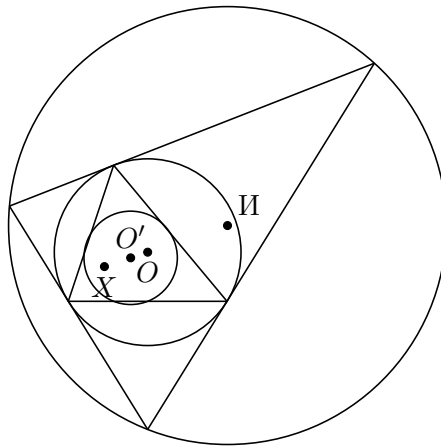


5. Niech N będzie takim punktem, że $ABCN$ jest trapezem równoramiennym z podstawą BC , zaś G rzutem T na AX . Rozważmy przekształcenie

f będące złożeniem inwersji o środku w A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ z odbiciem względem dwusiecznej kąta BAC . Wtedy $f(B) = C$, $f(C) = B$, prosta BC przejdzie na okrąg opisany i *vice versa*. Ponadto $\sphericalangle TAB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAN$, więc $f(T) = N$, a okrąg o średnicy AT przejdzie na prostą przez N prostopadłą do BC . Niech $G' = f(G)$ i $X' = f(X)$. G' jest rzutem N na BC , więc $BP = G'C$. Zatem $AG' = AX'$ jest izotomicznie sprzężona do AH , i izogonalnie sprzężona do AX .



6. Oznaczmy środek okręgu Feuerbacha przez O' , a środek okręgu opisanego na DEF przez \mathbb{H} . Skoro X jest środkiem jednokładności, w której PQR przechodzi na DEF , to O' musi w niej przejść na \mathbb{H} , więc te trzy punkty są współliniowe. Ponadto obrazem KLM w inwersji względem okręgu opisanego jest DEF , więc także O, O', \mathbb{H} są współliniowe. To oznacza, że X leży na $O'O$, która jest prostą Eulera ABC .



□

W szczególności z punktu 2 oraz dowodu Twierdzenia 3.1 wynika, że $\mathcal{H}(X_2) = X_{25}$, gdyż EF jest izogonalnie sprzężona do prostej równoległej do BC przechodzącej przez A .

5 Inne szczególne przypadki

5.1 $P = X_1$

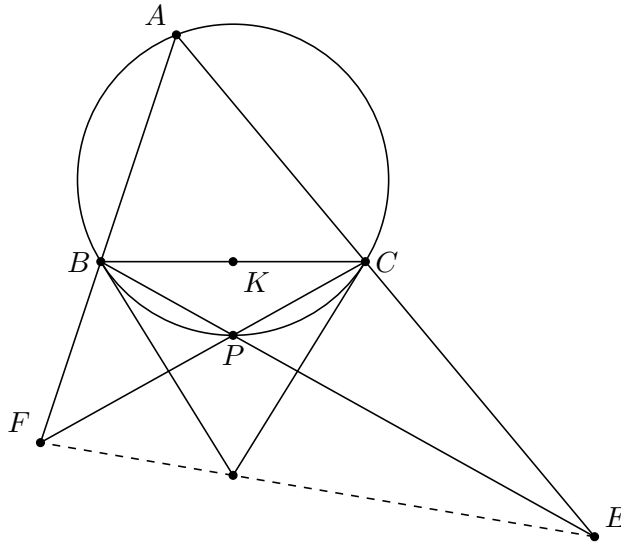
Szczególny przypadek, gdy P jest środkiem okręgu wpisanego, *de facto* rozważyliśmy w samym dowodzie twierdzenia 3.1, gdyż przekształcaliśmy w nim założenia do sytuacji, w której Q jest środkiem okręgu wpisanego w ABC . Jak dowodziliśmy wtedy, $\mathcal{H}(X_1)$ to izogonalne sprzężenie przecięcia prostych I_AK , I_BL oraz ICM . Podobieństwo $\triangle BI_AC \sim \triangle I_BI_AI_C$ pokazuje, że przecięcie to jest punktem Lemoine'a trójkąta $I_AI_BI_C$, czyli punktem X_9 , zaś jego izogonalnym sprzężeniem jest X_{57} , zatem $\mathcal{H}(X_1) = X_{57}$.

5.2 P na okręgu opisanym

Ponieważ, jak zauważyliśmy w rozdziale 2, równanie okręgu opisanego to $a^2x_Bx_C + b^2x_Cx_A + c^2x_Ax_B = 0$, to jeśli P leży na okręgu opisanym, $\mathcal{H}(P)$ to X_2 . Można to uzasadnić także geometrycznie – jeśli $Q = P^*$, to styczne w B i C do izogonalnego sprzężenia EF przechodzą przez Q , zatem są równoległe – toteż środek tej stożkowej to K .

To oznacza także, że odbicie A względem K leży na niej, a zatem przecięcie stycznych z B i C do okręgu opisanego leży na EF . W szczególności oznacza to, że biegun EF leży na prostej BC . Ponieważ punkt P nie jest w żaden sposób wyróżniony w tej własności, możemy także stwierdzić, że biegun EF leży na AP , co daje alternatywny dowód Twierdzenia 1.10 z [1] bez użycia dwustosunku⁵.

⁵Nie skorzystaliśmy w tym podrozdziale z twierdzenia 3.1 (w którym dwustosunek był użyty), a jedynie z własności, że izogonalne sprzężenie prostej jest stożkową.



5.3 $P = X_n$

Porównując współrzędne barycentryczne pierwszych pięćdziesięciu środków trójkąta podanych w ETC oraz otrzymanych w programie Geogebra, można otrzymać rezultaty jak w poniższej tabeli:

X_n	$\mathcal{H}(X_n)$
1	57
2	25
3	459
4	394
6	2
9	1422
19	6513
25	6340
31	6384

Zastanawiający jest w szczególności brak $\mathcal{H}(X_7)$, gdyż w tym przypadku proste DE , EF , FD mają naturalniejszą interpretację niż na przykład dla $P = X_3$.

5.4 Punkt stały jest niekonstruowalny

Naturalnym jest pytanie: czy i ile istnieje takich punktów P , że $\mathcal{H}(P) = P$? Odpowiada na nie poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. Dla każdego trójkąta istnieje dokładnie jeden taki punkt P , że $\mathcal{H}(P) = P$; nie da się go skonstruować za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki.

Dowód. Niech $P \sim [\frac{a^2}{x_A} : \frac{b^2}{x_B} : \frac{c^2}{x_C}]$. Chcemy, by $P \sim [\frac{x_A}{x_B+x_C-x_A} : \frac{x_B}{x_C+x_A-x_B} : \frac{x_C}{x_A+x_B-x_C}]$, zatem

$$\frac{x_A^2}{a^2(x_B + x_C - x_A)} = \frac{x_B^2}{b^2(x_C + x_A - x_B)} = \frac{x_C^2}{c^2(x_A + x_B - x_C)}.$$

Zauważmy, że te wyrażenia są jednorodnie i mają niezerowy stopień, więc skalując odpowiednio współrzędne P możemy przyjąć, że wszystkie są równe 1. Oznaczmy $y_A = \frac{x_A}{a}$, $y_B = \frac{x_B}{b}$, $y_C = \frac{x_C}{c}$. Wtedy $y_A^2 = x_B + x_C - x_A$ i $y_B^2 = x_C + x_A - x_B$, więc $y_A^2 + y_B^2 = 2x_C = 2cy_C$. Oznaczmy $t = y_A^2 + y_B^2 + y_C^2$. Wtedy

$$t + a^2 = y_A^2 + (y_B^2 + y_C^2) + a^2 = y_A^2 + 2ay_A + a^2 = (y_A + a)^2$$

zatem

$$\begin{cases} y_A = \sqrt{t + a^2} - a \\ y_B = \sqrt{t + b^2} - b \\ y_C = \sqrt{t + c^2} - c \\ t = y_A^2 + y_B^2 + y_C^2 = 3t + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a\sqrt{t + a^2} - 2b\sqrt{t + b^2} - 2c\sqrt{t + c^2} \end{cases}$$

Przy czym ostatnie z tych równań po skróceniu daje

$$t + a^2 + b^2 + c^2 = a\sqrt{t + a^2} + b\sqrt{t + b^2} + c\sqrt{t + c^2}$$

Oczywiście t jako suma kwadratów trzech liczb, z których nie wszystkie są zerami, musi być dodatnie, stąd rozwiązanie $t = 0$ nie daje odpowiedniego punktu.

Zauważmy, że pochodna $a\sqrt{t + a^2}$ to $\frac{a}{2\sqrt{t + a^2}} \leq \frac{1}{2}$. Zatem jeśli któryś z tych pierwiastków byłby ujemny (co jest równoważne temu, że P leży poza trójkątem), to lewa strona ma pochodną równą 1, zaś prawa ściśle mniejszą od 1. To oznacza, że lewa strona będzie większa od prawej dla wszystkich t dodatnich. Jeśli zaś wszystkie pierwiastki będą dodatnie, to prawa strona jest funkcją wklęsłą, przy czym jej pochodna w zerze jest większa od 1, więc prosta przetnie ją w dokładnie jednym punkcie (przy czym ten punkt istnieje, gdyż dla dużych t lewa strona jest dużo większa niż prawa).

Pozostaje uzasadnić niekonstruowalność. Dla dowolnych a, b konstruowalnych liczby $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$ także są (pierwsze dwa przypadki są oczywiste, w pozostałych można na przykład użyć twierdzenia o potędze punktu). Jeśli P byłby konstruowalny, to byłyby także pewne jego współrzędne barycentryczne, na przykład

$$[p_A : p_B : p_C] = \left[1 : \frac{AF}{FB} : \frac{AE}{EC} \right]$$

(z Lematu 2.1 faktycznie są one poprawne). Zatem także współrzędne $Q = P^*$ są konstruowalne, oznaczmy je przez $[q_A : q_B : q_C]$. Jak udowodniliśmy wcześniej, wartość

$$\frac{q_A^2}{a^2(q_B + q_C - q_A)}$$

nie zależy od permutacji wierzchołków, więc możemy podzielić współrzędne przez tę wartość (także konstruowalną), otrzymując x_A – w szczególności x_A, x_B, x_C są konstruowalne. Stąd można już prosto skonstruować y_A, y_B, y_C , a ostatecznie t .

Jeśli rzekoma konstrukcja miałaby działać, to można ją w szczególności wykonać dla trójkąta o bokach długości $a = b = 2, c = 1$ (który jest prosty w konstrukcji, gdy posiada się odcinek jednostkowy). Wtedy t spełnia równanie

$$t + 9 = 4\sqrt{t + 4} + \sqrt{t + 1}$$

Podnosząc do kwadratu

$$t^2 + 18t + 81 = 17t + 65 + 8\sqrt{(t + 4)(t + 1)}$$

Przenosząc $17t + 65$ na lewą stronę, a następnie podnosząc do kwadratu

$$t^4 + 2t^3 + 33t^2 + 32t + 256 = 64t^2 + 320t + 256$$

Przenosząc na jedną stronę i korzystając z $t \neq 0$

$$t^3 + 2t^2 - 31t - 288 = 0$$

Jeśli t jest liczbą konstruowalną, z twierdzenia Wantzela jego wielomian minimalny musi mieć stopień będący potęgą dwójki. W szczególności powyższy wielomian nie może być tym wielomianem minimalnym, musi więc

być rozkładalny. Oczywiście któryś z czynników takiego rozkładu musi być liniowy, więc wielomian musi mieć pierwiastek wymierny. Z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych pierwiastek ten musi być całkowitym dzielnikiem 288. Ponadto ciąg Sturma dla tego wielomianu to $P_0(x) = x^3 + 2x^2 - 31x - 288$, $P_1(x) = P_0'(x) = 3x^2 + 4x - 31$, $P_2(x) = \frac{1}{9}(194x + 2530)$, $P_3(x) = -\frac{4018176}{9409}$, więc z twierdzenia Sturma dla przedziału $(-\infty, \infty)$ ma on dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Ponieważ jego wartość w 6 to -186 , a w 8 to 104, to ten pierwiastek musi leżeć w przedziale $(6, 8)$, w szczególności nie może być całkowitym dzielnikiem 288. To daje sprzeczność z założeniem o konstruowalności P .

□

O ile wiadomo autorowi, punkt ten nie został jeszcze opisany w ETC.

6 Podziękowania

Chciałbym podziękować opiekunowi naukowemu pracy mgr Dominikowi Burkowi; Piotrowi Pawlakowi, który zasugerował mi użycie biegunowych w dowodzie Twierdzenia 3.1; oraz Tomaszowi Ślusarczykowi za pomoc techniczną przy tworzeniu rysunków.

Literatura

- [1] Dominik Burek, *Dwustosunek i biegunowe*, <http://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/dwustosunek.pdf>
- [2] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [3] <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CevaNest.shtml>
- [4] <https://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/63.pdf>