

**XX Liceum Ogólnokształcące im. Leopolda Staffa
w Krakowie**

Grzegorz Lis

Nietypowe transformacje geometryczne

**XLVII Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki
im. Pawła Domańskiego**

Opiekun pracy
Dr Bronisław Pabich

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
2	„Nakładanie”.....	3
2.1	Nakładanie jednoosiowe.....	3
2.2	Nakładanie dwuosiowe w $\mathbb{R}^2$	9
2.3	Nakładanie dwuosiowe w $\mathbb{R}^3$	12
3	Inwersje.....	14
3.1	Modyfikacja inwersji	14
3.2	Inwersja względem elipsy	14
3.3	Inwersja względem trójkąta.....	16
3.4	Inwersja względem kwadratu	17
3.5	Inwersja względem sześciokąta	18
4	Obroty względem krzywych stożkowych	19
4.1	Względem okręgu i hiperboli	19
4.2	Standardowy obrót eliptyczny	19
4.3	Inna wersja obrotu eliptycznego	21
4.4	Obrót paraboliczny.....	23
5	Dalsze kierunki badań	25
	Podziękowanie	25
	Bibliografia	25

1 Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie pomysłów autora na nietypowe transformacje geometryczne w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, od strony analizy matematycznej.

Dowiemy się w niej między innymi jak w transformacji „nakładania” wykreślić sinusoidę dosłownie na innej sinusoidzie, oraz jak oblec dowolną krzywą w helisę.

Ponadto poznamy nietypowe inwersje oraz obroty względem wszystkich krzywych stożkowych.

W celu wizualizacji otrzymanych rezultatów posłużyłem się w pracy ogólnodostępnym kalkulatorem graficznym Desmos. Umożliwił mi on eksplorację obiektów analizy matematycznej i geometrii analitycznej poprzez zmianę parametrów tych obiektów i ich konstrukcji, co w moim odczuciu nadaje tej pracy charakter badawczy i odkrywczy.

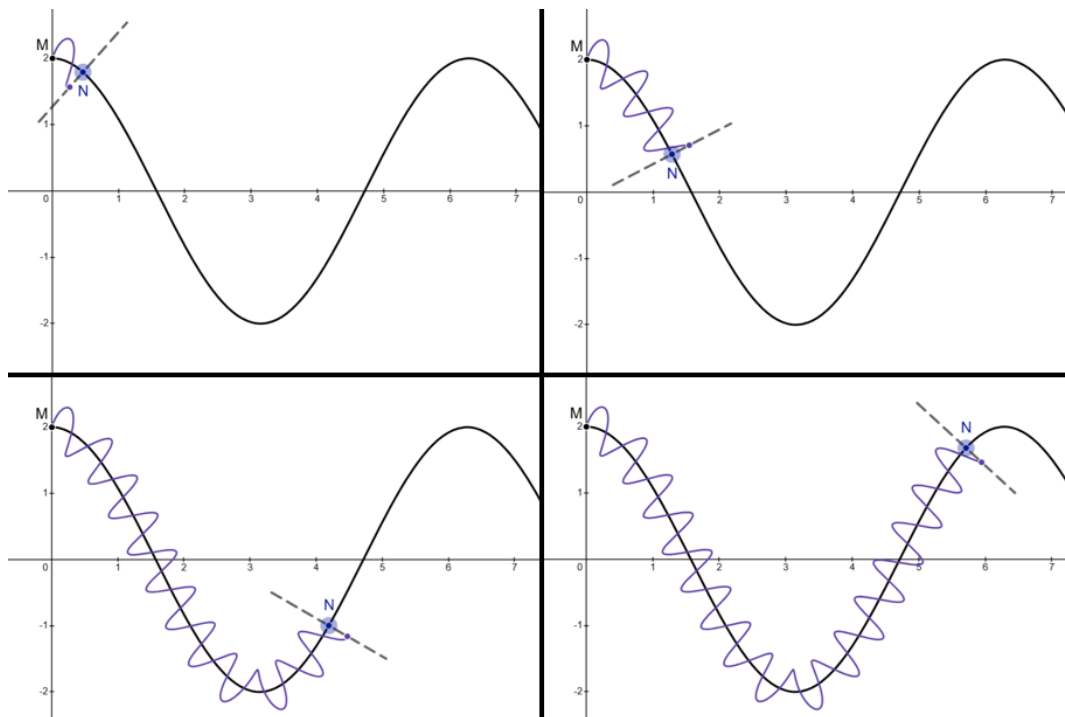
2 „Nakładanie”

2.1 Nakładanie jednoosiowe

Aby wprowadzić pojęcie transformacji „nakładania”, wprowadźmy pewną krzywą m i funkcję $f(x)$.

Transformacja „nakładania” polega na umieszczeniu lokalnego układu współrzędnych, na początku umownego punktu M wybranej krzywej m (np. półokręgu) i przemieszczaniu go wzdłuż tej krzywej tworząc punkt N tak, aby Ox był styczną do tej krzywej w tym punkcie, a Oy prostopadła do niej w orientacji dodatniej. Argumentem tworzonej funkcji staje się wówczas długość łuku przebytego przez ten punkt N od jej początku M , a wartością funkcji wartość funkcji $f(x)$.

W nakładaniu jednoosiowym wartość funkcji $f(x)$ jest zawsze mapowana na oś Oy , która jest prostopadła do stycznej do krzywej m w danym punkcie, dlatego na obrazku poniżej przedstawiona jest tylko niepodpisana oś Oy .



rys 1 – proces mapowania wartości funkcji na oś prostopadłą do stycznej

Wzory na tą transformację utworzyłem w następujący sposób:

Dla krzywej m zdefiniowanej w następujący sposób: $m: \begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$

Długość krzywej MN :
$$L(s) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1(t)}{dt}\right)^2} dt$$

Styczna w punkcie $N = (x_1(t), y_1(t))$:
$$k: y = \frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}}(x - x_1(t)) + y_1(t)$$

Zatem prostopadła będzie wyrażona jako:
$$p: y = -\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}(x - x_1(t)) + y_1(t)$$

Funkcja nałożona będzie postaci:
$$\begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

Wtedy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do stycznej:

$$-\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}} = \frac{y_2(t) - y_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}$$

$$y_2(t) - y_1(t) = -\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}(x_2(t) - x_1(t)) \quad \wedge \quad x_2(t) - x_1(t) = -\frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}}(y_2(t) - y_1(t))$$

Z tw. Pitagorasa:
$$f(L(t)) = \sqrt{(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2}$$

Po podstawieniu:
$$f(L(t)) = \sqrt{(x_2(t) - x_1(t))^2 \left(1 + \left(\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}\right)^2\right)}$$

$$f(L(t)) = (x_2(t) - x_1(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}\right)^2}$$

$$x_2(t) = \frac{f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}\right)^2}} + x_1(t)$$

$$f(L(t)) = (y_2(t) - y_1(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}}\right)^2}$$

$$y_2(t) = \frac{f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d y_1(t)}{dt}}{\frac{d x_1(t)}{dt}}\right)^2}} + y_1(t)$$

Ze względu na utraconą przez podniesienie do kwadratu informację o znaku współczynnika kierunkowego należy dokonać korekty uwzględniając ten znak, a wtedy otrzymujemy finalnie:

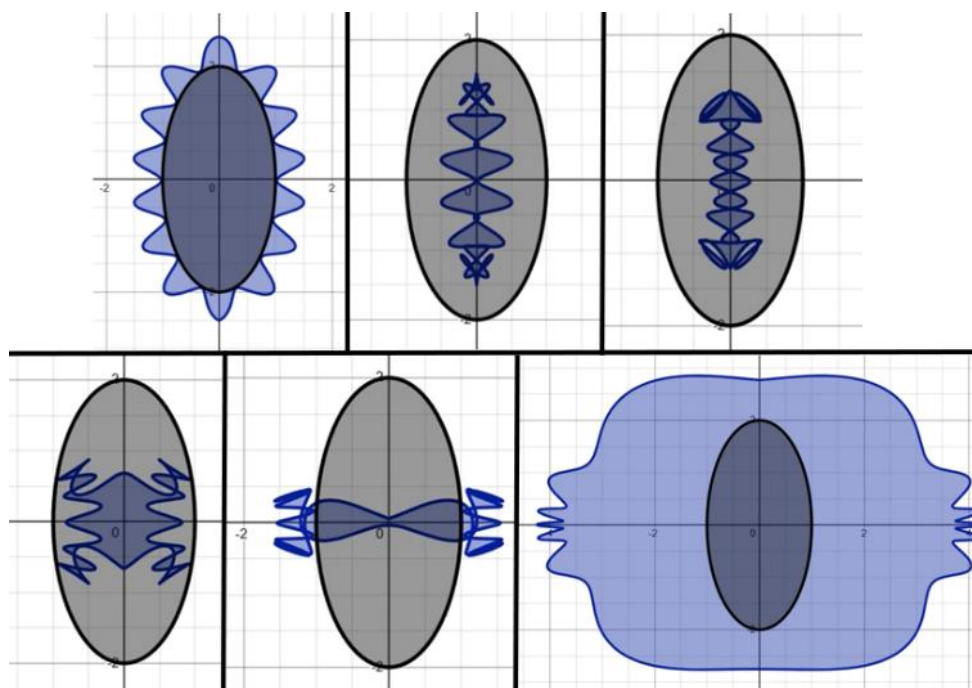
$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \frac{-\operatorname{sign}\left(\frac{\frac{d x_1(t)}{dt}}{\frac{d y_1(t)}{dt}}\right) \frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d x_1(t)}{dt}}{\frac{d y_1(t)}{dt}}\right)^2}} + x_1(t) \\ y_2(t) = \frac{\frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d y_1(t)}{dt}}{\frac{d x_1(t)}{dt}}\right)^2}} + y_1(t) \end{array} \right.$$

Ponieważ wzory na funkcję nałożoną są wyrażone w postaci parametrycznej tak samo jak wzory na krzywą na której funkcję tą nakładaliśmy, proces ten można iterować. Ciekawym pomysłem z tego wynikającym jest tworzenie w ten sposób fraktali, jednakże przez ograniczenia software'owe nie byłem w stanie zgłębić tego pomysłu.

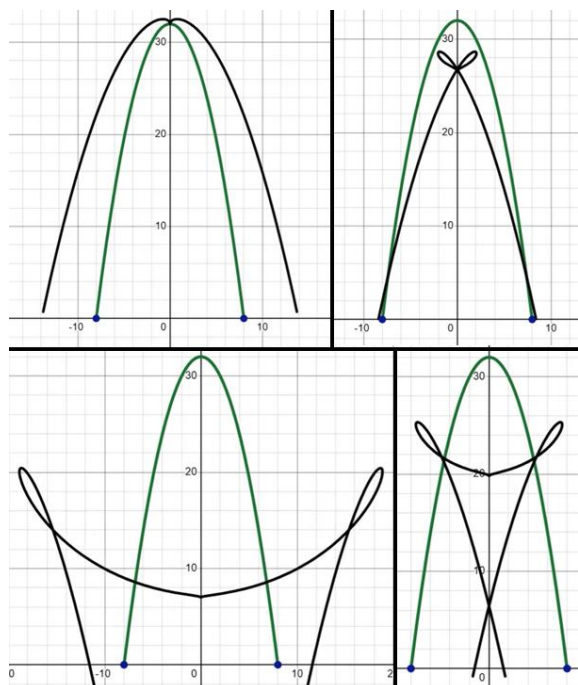
Ciekawą modyfikacją jest dodanie wybranego „odsunięcia” c do nakładanej funkcji, tak jak poniżej:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \frac{-\operatorname{sign}\left(\frac{\frac{d x_1(t)}{dt}}{\frac{d y_1(t)}{dt}}\right) \frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} (f(L(t)) + c)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d x_1(t)}{dt}}{\frac{d y_1(t)}{dt}}\right)^2}} + x_1(t) \\ y_2(t) = \frac{\frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} (f(L(t)) + c)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d y_1(t)}{dt}}{\frac{d x_1(t)}{dt}}\right)^2}} + y_1(t) \end{array} \right.$$

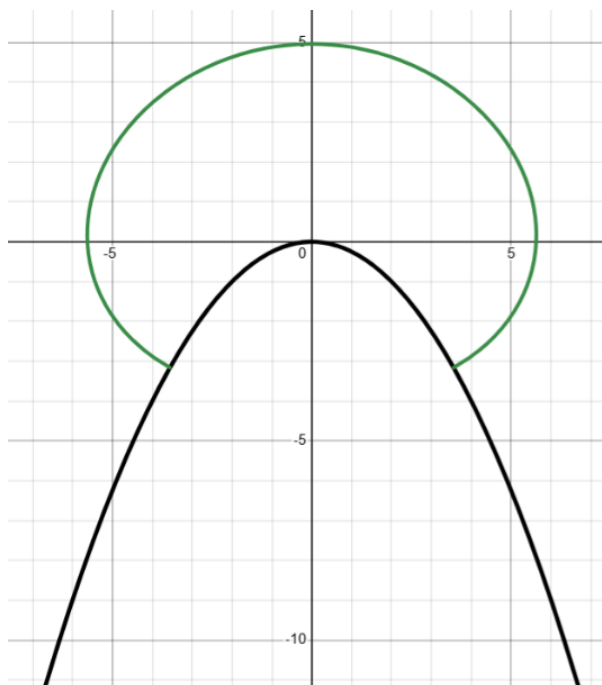
Zmieniając dynamicznie wartość tego odsunięcia można otrzymać ciekawe rezultaty, jak widać na poniższych kolażach.



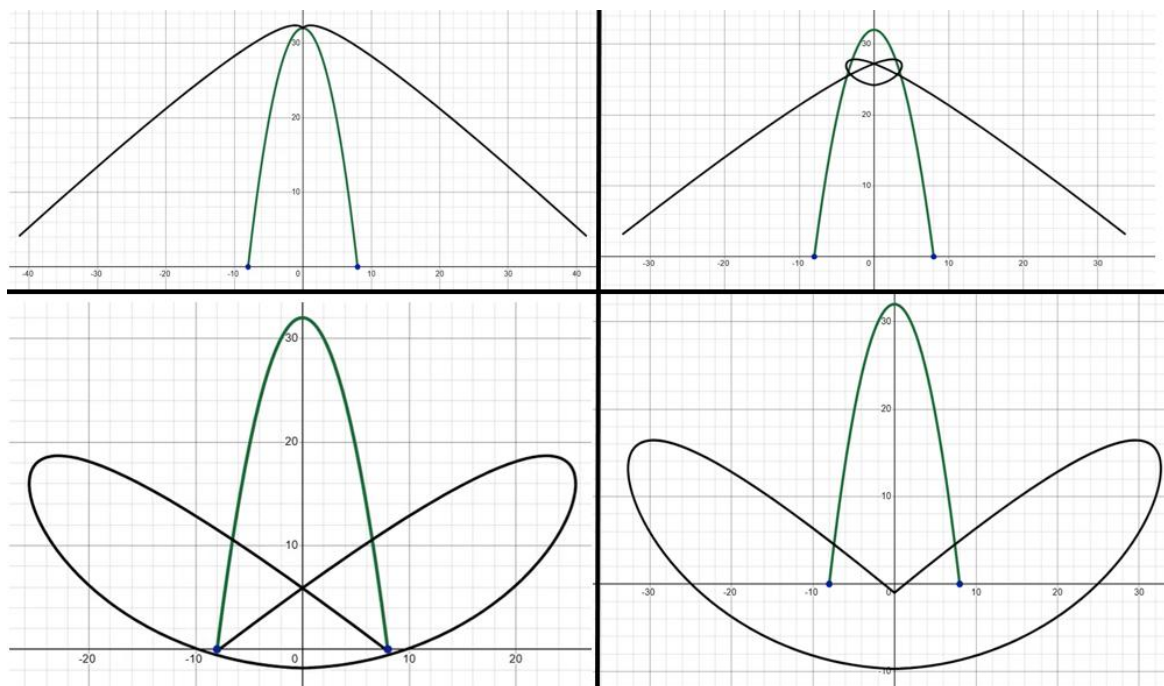
rys 2 – sinusoida nałożona z różnymi odsunięciami na elipsę



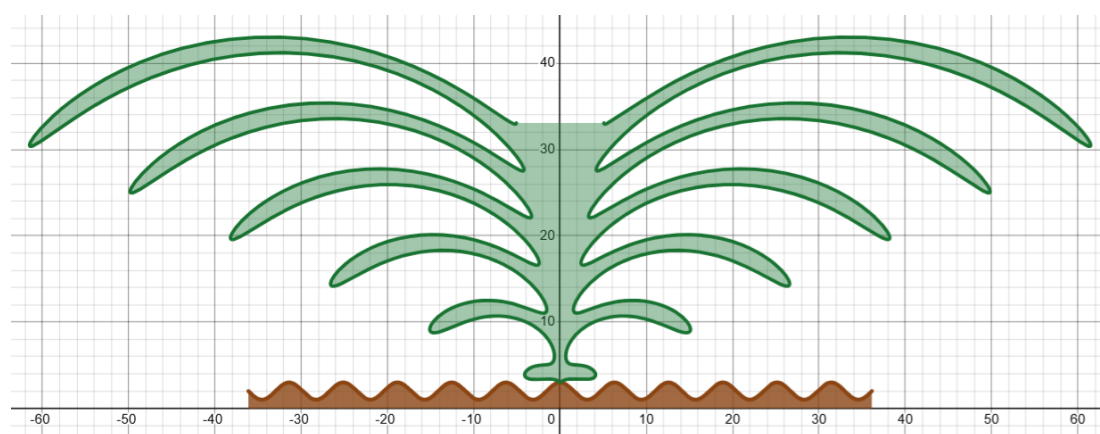
rys 3 – pierwiastek nałożony z różnymi odsunięciami na parabolę



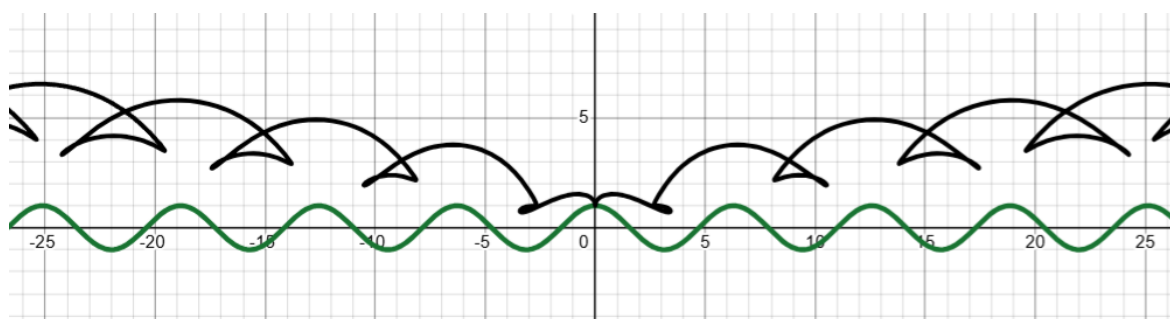
rys 4 – półokrąg nałożony na parabolę



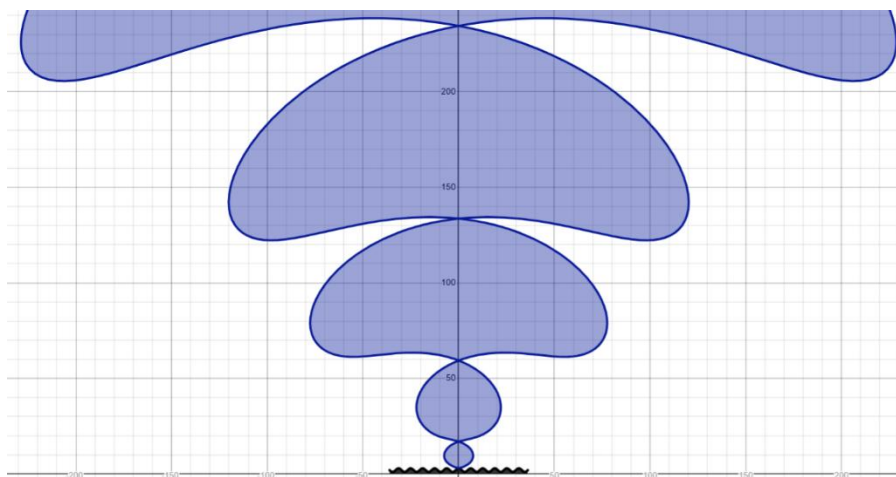
rys 5 – moduł z x nałożony z różnymi odsunięciami na parabolę



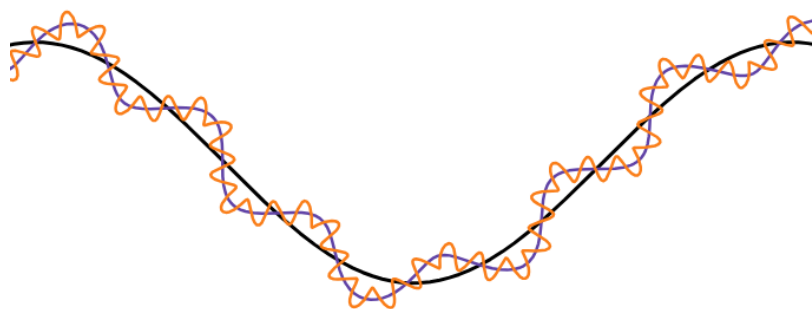
rys 6 - moduł z x nałożony na sinusoidę



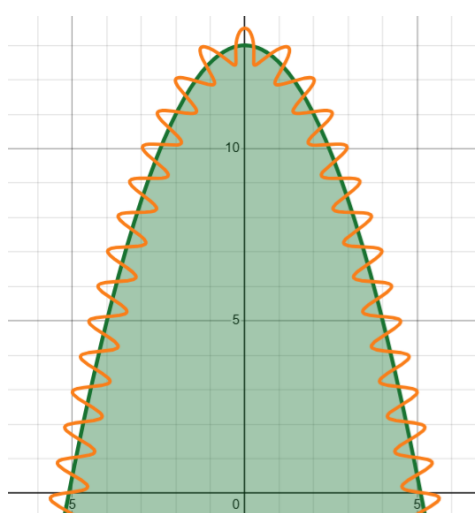
rys 7 – pierwiastek z x nałożony na sinusoidę



rys 8 – parabola nałożona na sinusoidę



rys 9 - największa ilość iteracji jaką udało mi się uzyskać.



rys 10 - Światelka sinusoidalne nałożone na choinkę paraboliczną

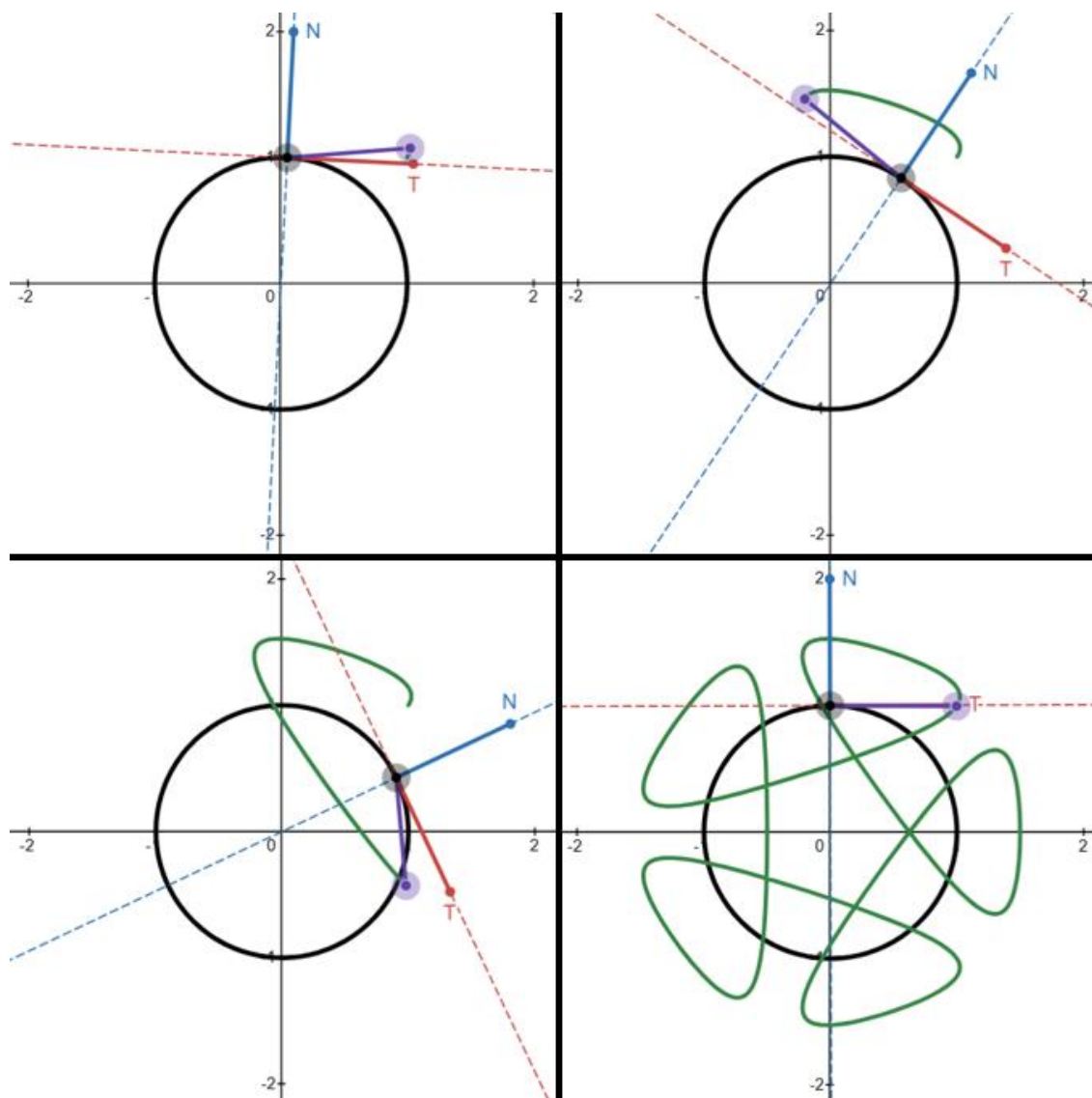
2.2 Nakładanie dwuosiove w $\mathbb{R}^2$

Nakładanie dwuosiove pozwala w pełni wykorzystać koncepcje lokalnego układu współrzędnych umieszczonego na wybranej krzywej, gdyż umożliwia nakładanie całych krzywych parametrycznych na inne krzywe.

W nakładaniu dwuosiowym długość przebytej krzywej staje się teraz wartością parametru nakładanej krzywej, a w związku z tym otrzymujemy dwie wartości odpowiadające położeniu w nowych lokalnych osiach Ox i Oy definiowanych ze stycznej do krzywej i prostopadłej do niej, co stanowi główną różnicę między nakładaniem jednoosiowym a dwuosiowym.

Na kolażu poniżej na okrąg nakładana jest dwuosiowo elipsa o równaniu $\begin{cases} x = \cos 5t \\ y = \frac{1}{2} \sin 5t \end{cases}$,

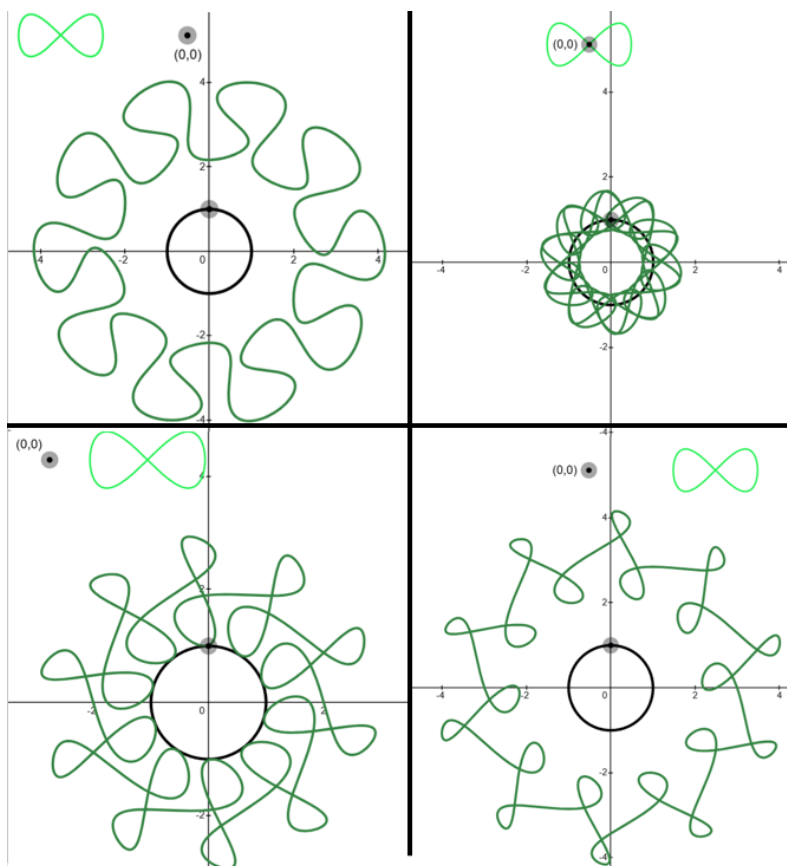
a wektory $\vec{T}$ i $\vec{N}$ odpowiadają nowym wektorom bazowym, wedle których wykreslana jest elipsa.



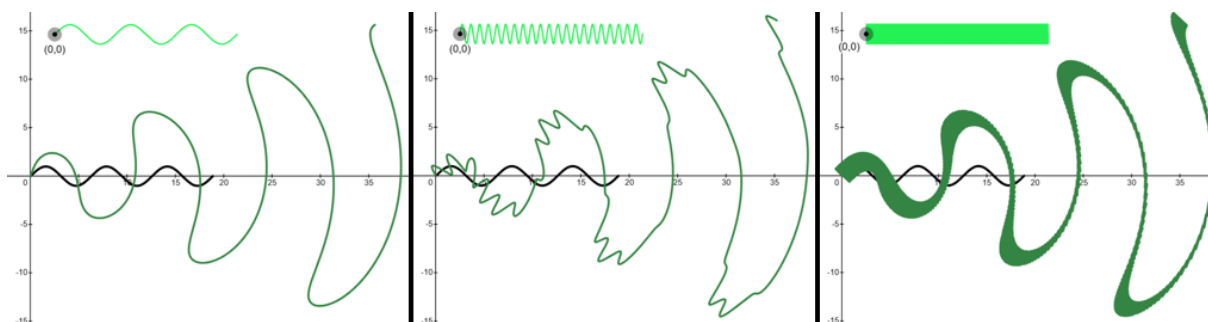
rys 11 - elipsa nakładana dwuosiowo na okrąg

Na kolejnych kolażach przedstawiona jest kolorem jasno-zielonym krzywa, która jest nakładana wraz z czarnym punktem oznaczonym „(0, 0)” będącym punktem odniesienia, jak

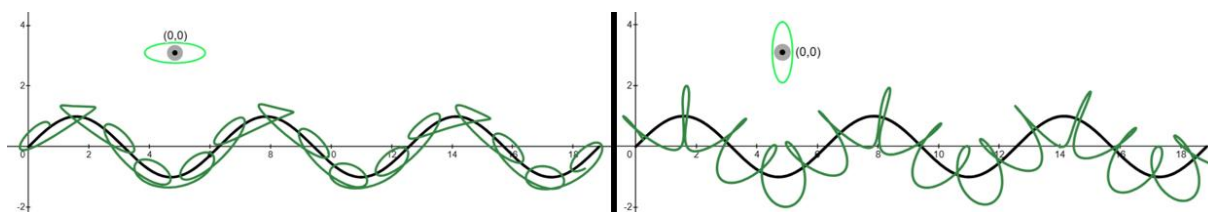
normalnie by wyglądała. W celu jej klarownego przedstawienia została dokonana translacja, która nie wpływa na rezultat po nałożeniu. Natomiast kolorem ciemno-zielonym wykreślona jest krzywa po nałożeniu dwuosiowym.



rys 12 – $(\cos 10t + c, \frac{1}{2} \sin 20t)$, gdzie $c \in \{1.7; -3; 0; 3\}$ nałożona dwuosiowo na okrąg: $(\sin t, \cos t)$



rys 13 -Sinusoidy: $\sin t$, $\sin 7t$ i $\sin 100t$ nałożone dwuosiowo na zwykłą sinusoidę



rys 14 -Elipsy $(\cos 4t, \frac{1}{3} \sin 4t)$ i $(\frac{1}{3} \cos 4t, \sin 4t)$ nałożone dwuosiowo na zwykłą sinusoidę

Wzory na tą transformację uzyskałem w następujący sposób:

Dla krzywej wektorowej $\vec{m} = x_0(t)\hat{i} + y_0(t)\hat{j}$ i nakładanej $\vec{f}(t) = x_1(t)\hat{i} + y_1(t)\hat{j}$, krzywa nałożona dwuosiowo będzie postaci: $\vec{g}(t) = x_0(t)\hat{i} + y_0(t)\hat{j} + x_1(L(t))\vec{T} + y_1(L(t))\vec{N}$, gdzie $L(t)$ to długość krzywej $\mathbf{m}$, zaś $\vec{T}$ i $\vec{N}$ to wektor styczny i normalny znormalizowany.

Niech $\vec{T} = [x_T - x_0, y_T - y_0]$ i $\vec{N} = [x_N - x_0, y_N - y_0]$, oraz $a = \frac{\frac{dy_0}{dt}}{\frac{dx_0}{dt}}$, wtedy styczna do krzywej $\mathbf{m}$ w punkcie (x_0, y_0) na której leży wektor $\vec{T}$ to: $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Wiedząc że wektor $\vec{T}$ jest znormalizowany oraz wykorzystując tw. Pitagorasa:

$$(x_T - x_0)^2 + (y_T - y_0)^2 = 1$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_T - y_0 = a(x_T - x_0) \\ (x_T - x_0)^2 + (y_T - y_0)^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując go i uwzględniając potrzebną korektę znaku otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_T = \frac{\frac{\frac{d}{dt}x_0}{\left|\frac{d}{dt}x_0\right|}}{\sqrt{1 + a(t)^2}} + x_0 \\ y_T = \frac{\frac{\frac{d}{dt}y_0}{\left|\frac{d}{dt}y_0\right|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{a(t)^2}}} + y_0 \end{cases}$$

Wektor $\vec{N}$ jest prostopadły do $\vec{T}$, zatem:

$$\begin{cases} y_N - y_0 = \frac{1}{a}(x_N - x_0) \\ (x_N - x_0)^2 + (y_N - y_0)^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując go analogicznie:

$$\begin{cases} x_N = \frac{\frac{\frac{d}{dt}x_0}{\left|\frac{d}{dt}x_0\right|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{a(t)^2}}} + x_0 \\ y_N = \frac{\frac{\frac{d}{dt}y_0}{\left|\frac{d}{dt}y_0\right|}}{\sqrt{1 + a(t)^2}} + y_0 \end{cases}$$

Podstawiając poznane współrzędne otrzymujemy:

$$\vec{g}(t) = \left(x_0(t) + x_1(L(t))(x_T - x_0) + y_1(L(t))(x_N - x_0) \right) \hat{i} \\ + \left(y_0(t) + x_1(L(t))(y_T - y_0) + y_1(L(t))(y_N - y_0) \right) \hat{j}$$

Natomiast w postaci parametrycznej:

$$\vec{g}: \begin{cases} x = x_0(t) + x_1(L(t))(x_T - x_0) + y_1(L(t))(x_N - x_0) \\ y = y_0(t) + x_1(L(t))(y_T - y_0) + y_1(L(t))(y_N - y_0) \end{cases}$$

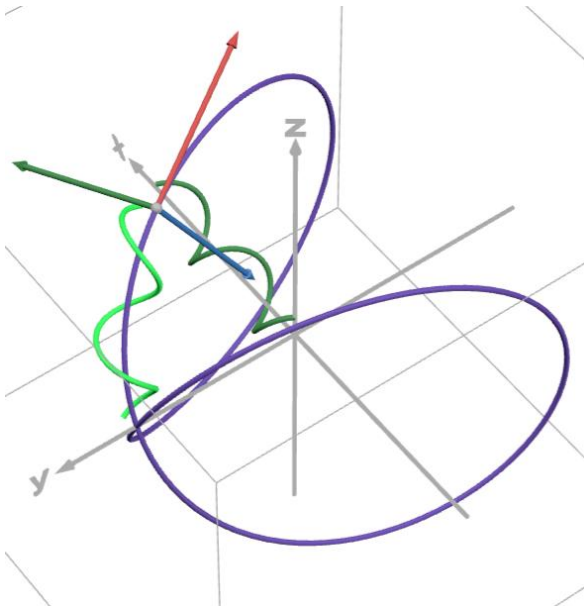
2.3 Nakładanie dwuosiowe w $\mathbb{R}^3$

Transformacja ta ponownie polega na umieszczeniu lokalnego układu współrzędnych. Aby takowy wyznaczyć w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ posłużyłem się trójszczaniem Freneta [2], w taki sposób, że gdy funkcja wektorowa postaci $\vec{f}(t) = t\hat{i} + y_1(t)\hat{j} + z_1(t)\hat{k}$ zostaje nałożona, to jej wartości zostają zmapowane na płaszczyznę utworzoną przez wektory $\vec{N}$ i $\vec{B}$, w związku z tym zamieniają one dotychczasowe wektory bazowe $\hat{j}$ i $\hat{k}$. Do tego należy jeszcze dokonać translacji o współrzędne na których położony jest dla danego parametru t trójszczan Freneta.

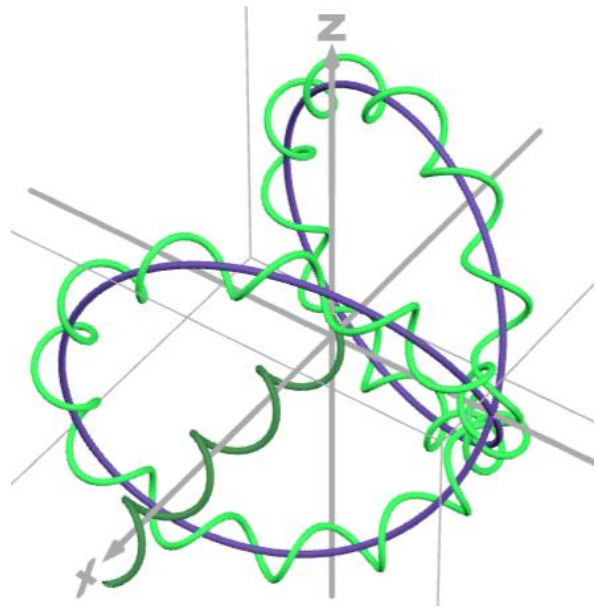
W związku z powyższym, dla krzywej wektorowej $\vec{m} = x_0(t)\hat{i} + y_0(t)\hat{j} + z_0(t)\hat{k}$ funkcja $f(t) = t\hat{i} + y_1(t)\hat{j} + z_1(t)\hat{k}$ nałożona dwuosiowo przyjmie postać:

$$\vec{g}(t) = x_0(t)\hat{i} + y_0(t)\hat{j} + z_0(t)\hat{k} + y_1(L(t))\vec{N} + z_1(L(t))\vec{B}$$

gdzie $L(t)$ to ponownie długość przebytej krzywej m .



rys 15 – trójszczan Freneta tworzący płaszczyznę na której nakładana jest ciemno-zielona helisa



rys 16 – w pełni nałożona helisa na krzywą trójwymiarową

(W celu zwiększenia klarowności obliczeń przerzuciłem się na notacje Lagrange'a w której wszystkie pochodne są względem parametru t)

Do wyznaczenia wzorów na $\vec{g}(t)$ wystarczy wyliczyć wektory $\vec{N}$ i $\vec{B}$, zatem:

$$\vec{T} = m'(t) = x_0'(t)\hat{i} + y_0'(t)\hat{j} + z_0'(t)\hat{k}$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{m''}(t) = \vec{T} \times \vec{B} = \frac{\overrightarrow{m'}(t) \times (\overrightarrow{m''}(t) \times \overrightarrow{m'}(t))}{|\overrightarrow{m'}(t)| |\overrightarrow{m''}(t) \times \overrightarrow{m'}(t)|}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

Ze względu na napotkane problemy z $\vec{N}$ wyliczyłem go z iloczynu wektorowego $\vec{T}$ i $\vec{B}$:

$$\begin{aligned} \vec{N} = \frac{1}{N_N} & [(y_0'^2 x_0'' - x_0' y_0' y_0'' - x_0' z_0' z_0'' + z_0'^2 x_0'' \hat{i} + (z_0'^2 y_0'' - y_0' z_0' z_0'' - y_0' x_0' x_0'' + x_0'^2 y_0'') \hat{j} \\ & + (x_0'^2 z_0'' - z_0' x_0' x_0'' - z_0' y_0' y_0'' + y_0'^2 z_0'') \hat{k}] = \frac{1}{N_N} (x_N \hat{i} + y_N \hat{j} + z_N \hat{k}) \end{aligned}$$

gdzie $N_N = \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2}$

Wektor $\vec{B}$ wyliczyłem natomiast z iloczynu wektorowego $\vec{T}$ i $\vec{N}$:

$$\vec{B} = \frac{1}{N_B} [(y_0' z_N - z_0' y_N) \hat{i} + (z_0' x_N - x_0' z_N) \hat{j} + (x_0' y_N - y_0' x_N) \hat{k}]$$

gdzie $N_B = \sqrt{(y_0' z_N - z_0' y_N)^2 + (z_0' x_N - x_0' z_N)^2 + (x_0' y_N - y_0' x_N)^2}$

3 Inwersje

3.1 Modyfikacja inwersji

Tradycyjną inwersję względem kola można zmodyfikować na kilka sposobów np. zmieniając jej definicję $|SP||SP'| = r^2$ na $|SP||SP'| = r^3$. Można też okrąg inwersyjny zastąpić krzywą o innym kształcie. Interesującym jest jak zmieni się obraz obiektu geometrycznego w takich inwersjach.

Do tego celu potrzebna jest znajomość środka tego kształtu i odległości do jego brzegu, a w związku z tym dla uniknięcia problematycznych sytuacji, kształt ten powinien być wypukły. Środek wypukłego kształtu możemy wyznaczyć jako globalne minimum funkcji sumującej odległości do każdego punktu na brzegu danego kształtu w zależności od położenia w układzie współrzędnych.

Do tego celu należy zastosować pochodne cząstkowe, gdyż funkcja ta jest dana wzorem:

$$d(x, y) = \int_0^z \sqrt{(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2} dt$$

Następnie znając środek S inwersji i punkt P należy wyznaczyć punkt Q , czyli przecięcie półprostej SP z brzegiem danego kształtu, aby poznać stosunek odległości $\frac{PQ}{SQ}$.

W tym celu należy wyznaczyć wartość parametru m z równania:

$$\frac{y_p - y_s}{x_p - x_s} x(m) - y(m) = \frac{y_p - y_s}{x_p - x_s} x_p - y_p$$

otrzymanego z równania prostej zawierającej półprostą $\vec{SP}$, w którym $x(m)$ i $y(m)$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi tworzącymi równanie parametryczne krzywej będącej brzegiem danego kształtu i których wartości dla wyliczonego parametru m stanowią współrzędne punktu Q . Jednakże w tak uogólnionej postaci problem ten okazał się dla mnie nierozwiązywalny.

3.2 Inwersja względem elipsy

Ze względu na napotkany problem przy próbie wyprowadzenia wzorów na inwersję względem dowolnej wypukłej krzywej, ograniczyłem się do wyliczenia wzorów tylko dla kilku popularnych kształtów, zaczynając od elipsy danej równaniem parametrycznym:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{b} \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

W następujący sposób:

$$a x(m) - y(m) - a x_s + y_s = 0 \quad \text{gdzie } a = \frac{y_p - y_s}{x_p - x_s}$$

Dla uproszczenia obliczeń możemy dokonać translacji rozpatrywanej elipsy o środku S o wektor $\vec{v} = [-x_s, -y_s]$, a wtedy do rozwiązywania mamy $a x(m) - y(m) = 0$

Następnie podstawiamy i rozwiązujemy dla parametru m .

$$\frac{a}{b} \cos(m) - b \sin(m) = 0 \quad / \quad \frac{1}{b \cos(m)}$$

$$\frac{a}{b^2} - \operatorname{tg}(m) = 0 \quad \therefore \quad m = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b^2}\right)$$

Problem niepełnej dziedziny tangensa odwrotnego rozwiązujemy poprzez przemnożenie otrzymanego wyniku przez $p = \frac{|x_p - x_s|}{x_p - x_s}$ co pozwala nam ustalić, w której połowce (lewej czy prawej) znajduje się punkt P.

Otrzymujemy wtedy $Q = (p x(m), p y(m))$, a po uwzględnieniu translacji początkowej i przeciwnej do niej otrzymujemy:

$$Q = (p(x(m) - x_s) + x_s, p(y(m) - y_s))$$

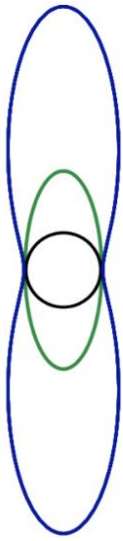
Po zmodyfikowaniu definicji inwersji z $|SP||SP'| = r^2$ na $|SP||SP'| = d^2$, gdzie d jest odległością od środka do krawędzi kształtu względem którego zachodzi inwersja, oraz wiedząc, że punkty S, P, Q, P' są współliniowe możemy otrzymać współrzędne punktu P' w następujący sposób: $x_q^2 = x_p \cdot x_{p'}$ $x_{p'} = \frac{x_q^2}{x_p}$ $y_{p'} = \frac{y_p}{x_p} \cdot \frac{x_q^2}{x_p} = \frac{y_p x_q^2}{x_p^2}$

Po uwzględnieniu translacji początkowej o wektor $\vec{v} = [-x_s, -y_s]$ i translacji końcowej przywracającej punkt S na swoje miejsce otrzymujemy:

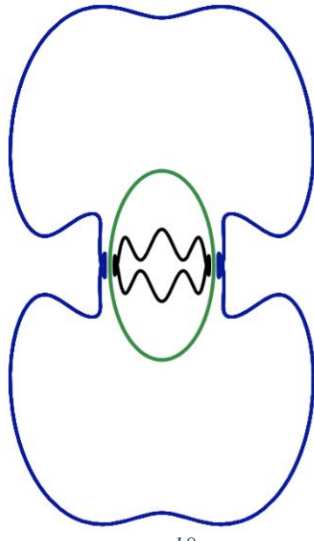
$$\begin{cases} x_{p'} = \frac{(x_q - x_s)^2}{x_p - x_s} + x_s \\ y_{p'} = a \left(\frac{(x_q - x_s)^2}{x_p - x_s} - x_s \right) + y_s \end{cases}$$

gdzie a i x_q zostały wcześniej wyliczone.

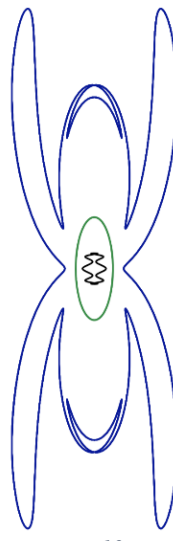
Zachowanie takiej inwersji można zobaczyć na zdjęciach poniżej.



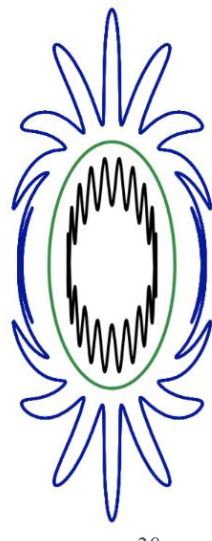
rys 17



rys 18



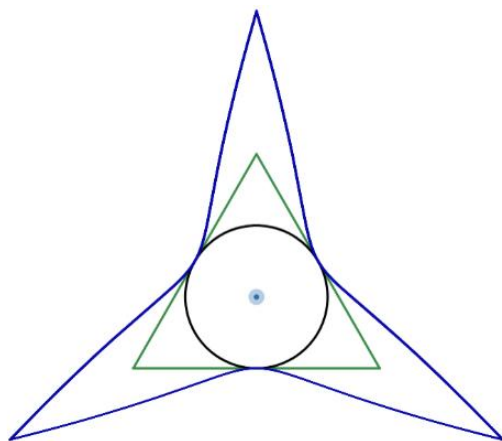
rys 19



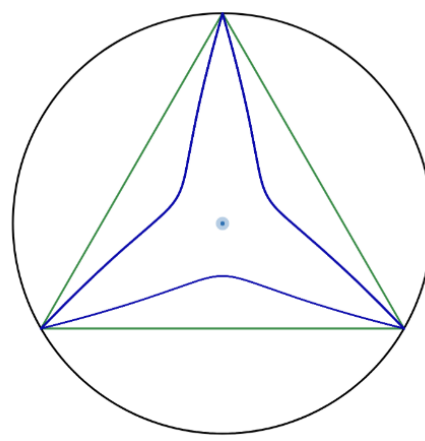
rys 20

3.3 Inwersja względem trójkąta

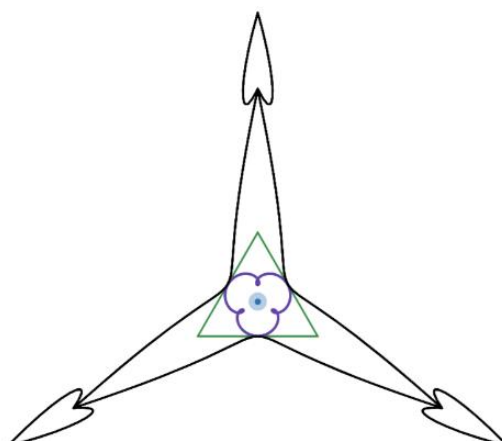
Dla inwersji względem trójkąta obliczenia są bardzo podobne a nawet prostsze, natomiast jeśli tworzymy ten trójkąt z trzech ograniczonych prostych, to musimy wyliczyć współrzędne punktu Q osobno dla każdego boku.



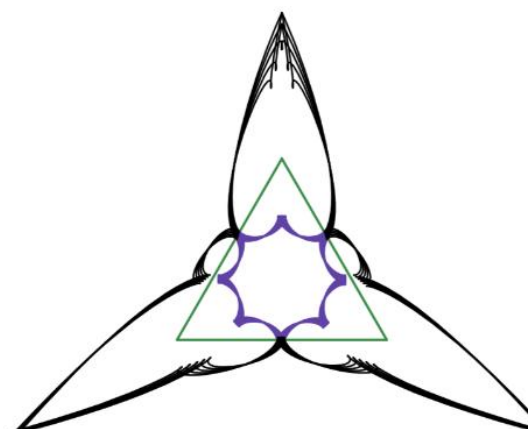
rys 21



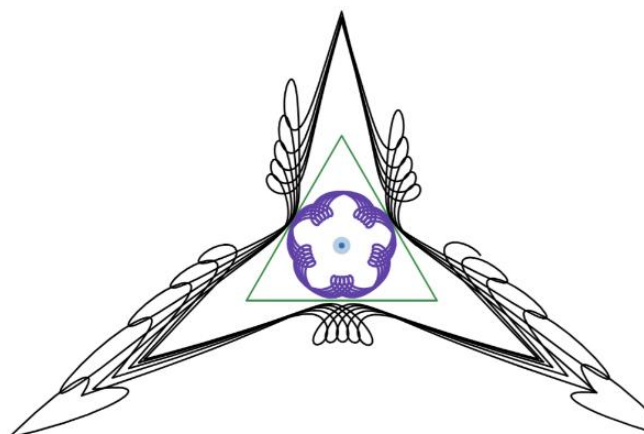
rys 22



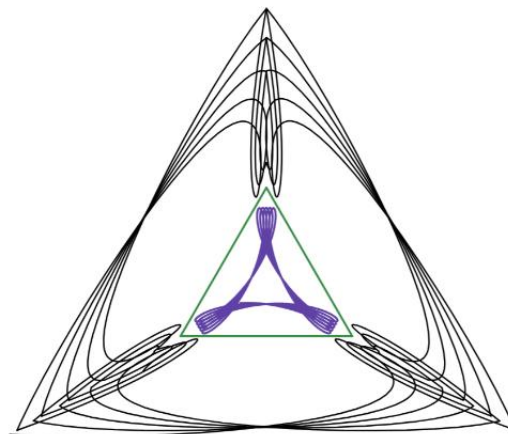
rys 23



rys 24



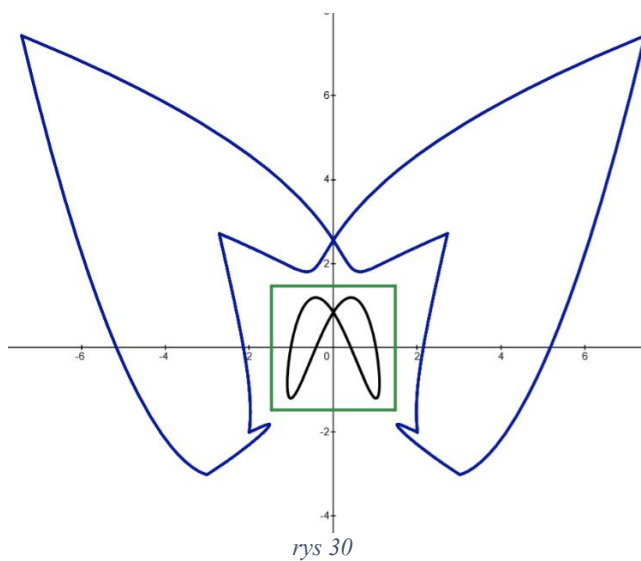
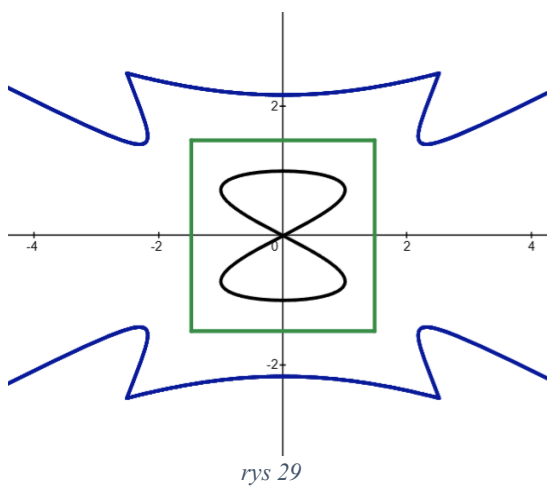
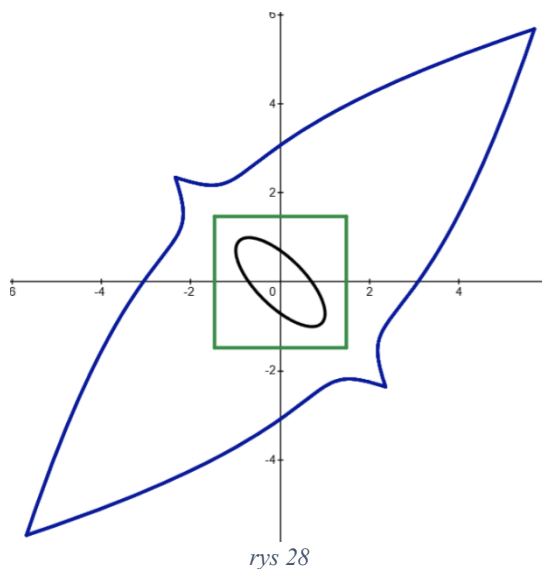
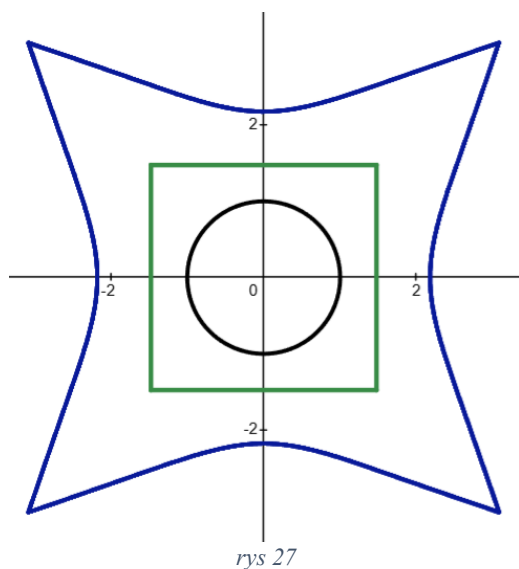
rys 25



rys 26

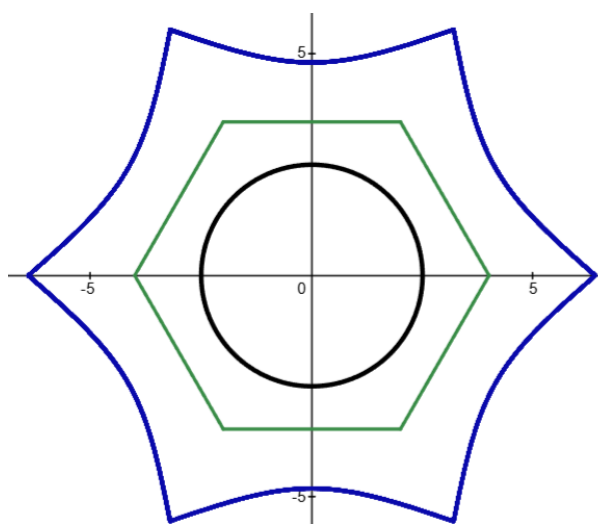
3.4 Inwersja względem kwadratu

Postępując analogicznie otrzymujemy równania na inwersję względem kwadratu, oraz obrazy kilku obiektów po przekształceniu w tej inwersji, której kilka przykładów ilustrują poniższe rysunki.

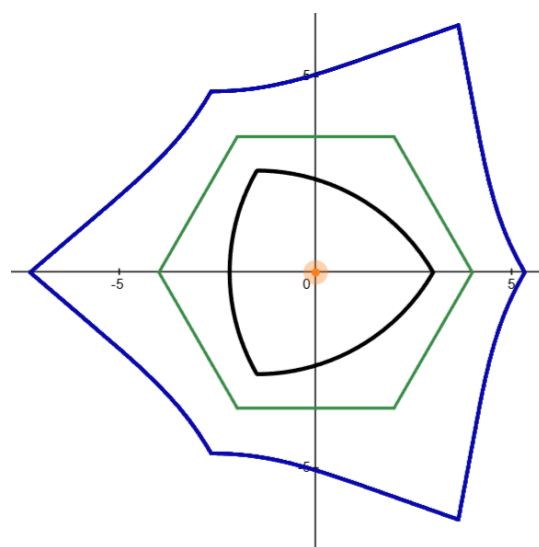


3.5 Inwersja względem sześciokąta

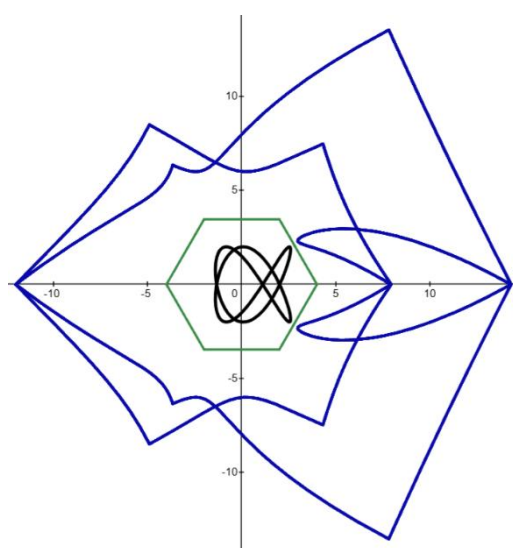
Postępując podobnie z sześciokątem otrzymujemy wzory na inwersje względem niego, której kilka przykładów zamieściłem poniżej.



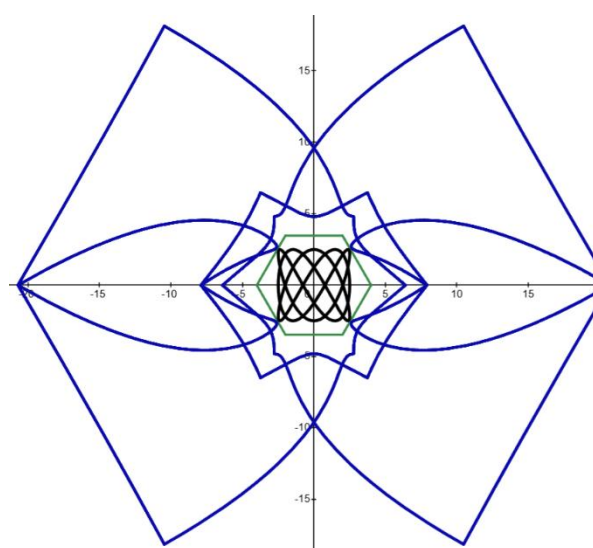
rys 31



rys 32



rys 33



rys 34

4 Obroty względem krzywych stożkowych

4.1 Względem okręgu i hiperboli

Obroty te są solidnie zdefiniowane w powszechnej literaturze naukowej, dlatego w tej pracy ograniczę się do przedstawienia wzorów na nie, w celu wyczerpania obrotów względem istniejących krzywych stożkowych.

Zwykły obrót względem okręgu:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

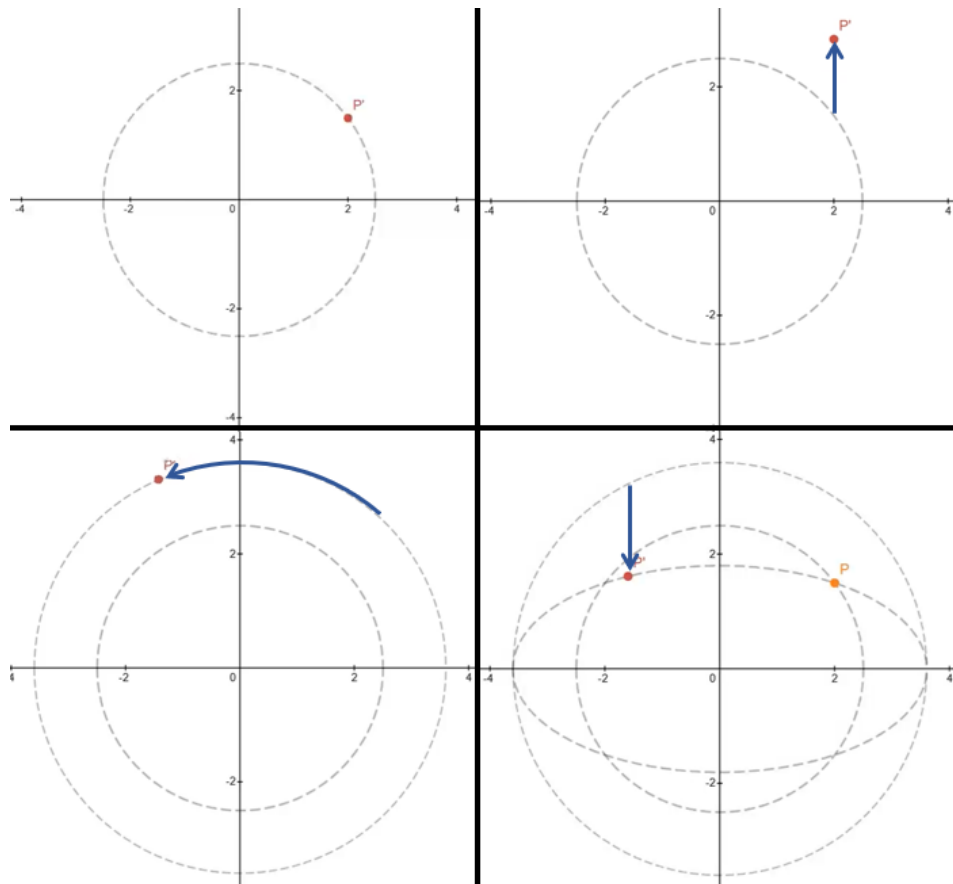
Obrót względem hiperboli:

$$\begin{cases} x' = x \cosh \alpha + y \sinh \alpha \\ y' = x \sinh \alpha + y \cosh \alpha \end{cases}$$

4.2 Standardowy obrót eliptyczny

W książce pt. „Przekształcenia geometryczne” z 1967r. [4] P.S. Modienow, A.S.

Parchomienko definiują obrót eliptyczny jako złożenie kolejno powinowactwa prostokątnego, obrotu i powinowactwa prostokątnego o odwrotnej skali do początkowego, tak jak na zdjęciu poniżej.

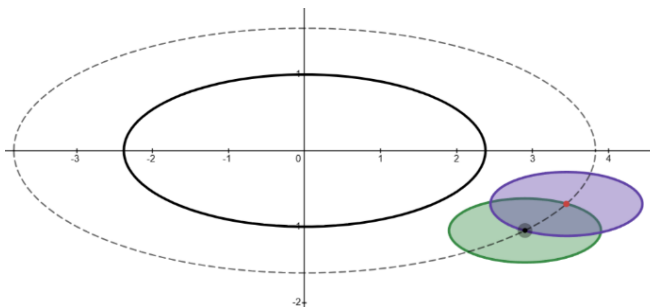


rys 35

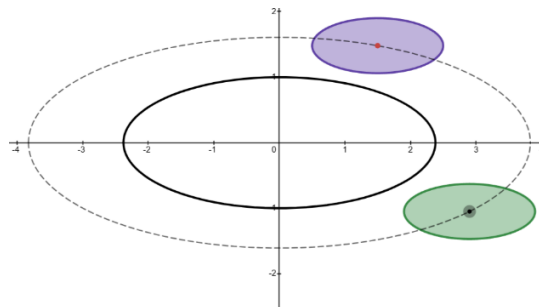
Obrót eliptyczny wyraża się wzorem:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - ky \sin \alpha \\ y' = \frac{1}{k} x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

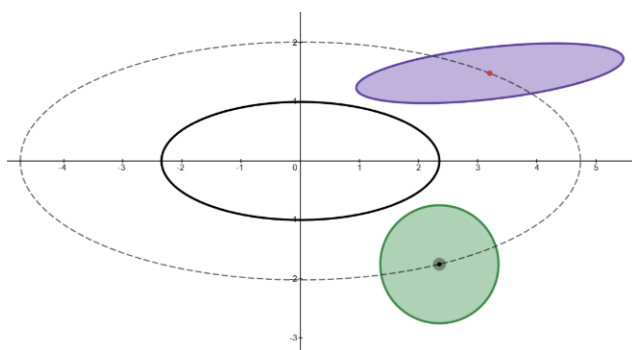
A jego efekty można zaobserwować na kolejnych zdjęciach.



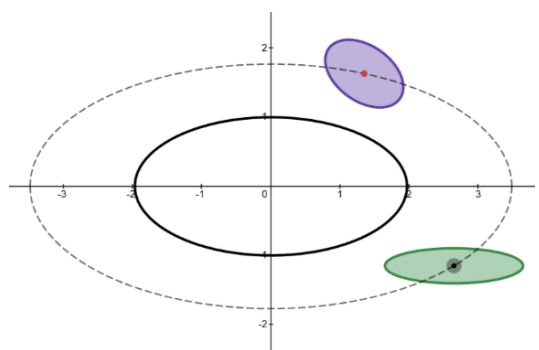
rys 36 – obrót eliptyczny elipsy o tej samej ekscentryczności



rys 37



rys 38- obrót eliptyczny okręgu



rys 39 – obrót eliptyczny elipsy o różnej ekscentryczności

Co ciekawe, elipsa o stosunku swoich osi równym skali obrotu eliptycznego, obracana względem swojego środka, przechodzi po obrocie eliptycznym w samą siebie, niezależnie od kąta owego obrotu. Okręgi natomiast przechodzą w elipsy, zatem jak widać tak zdefiniowany obrót eliptyczny z pewnością ma liczne powiązania z elipsami, aczkolwiek fundamentalnie obrót nadal zachodzi wokół okręgu co tworzy pewne nieintuicyjne rezultaty, np. punkty są obracane o różne kąty względem środka elipsy.

4.3 Inna wersja obrotu eliptycznego

Nie usatysfakcjonowany definicją obrotu eliptycznego podaną przez Modienowa i Parchomienko w książce pt. „Przekształcenia geometryczne” z 1967r. wymyśliłem swoją wersję: „czym obrót eliptyczny powinien być”.

W definicji podanej przez Modienowa i Parchomienko mamy do czynienia z imitacją obrotu względem elipsy, gdyż opiera się ona fundamentalnie na obrocie względem zwykłego okręgu, przez co punkty figury po obrocie pokonują różne kąty licząc względem elipsy. W mojej wersji natomiast kąty te są takie same, gdyż tak też jest podczas zwykłego obrotu. Dodatkowo podczas zwykłego obrotu każdy punkt porusza się po swoim okręgu, którego promień jest stały, jednakże w wersji M.-P. tak się nie dzieje, co stanowi kolejną różnicę względem mojej wersji, w której każdy punkt porusza się po swojej elipsie o stałym rozmiarze i tej samej ekscentryczności co elipsa, względem której zachodzi obrót.

Wzory na moją wersję obrotu eliptycznego otrzymałem w następujący sposób:

$$P = (x, y), \quad P' = (x', y'), \quad \theta$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad \beta = \alpha + \theta \quad \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} \beta$$

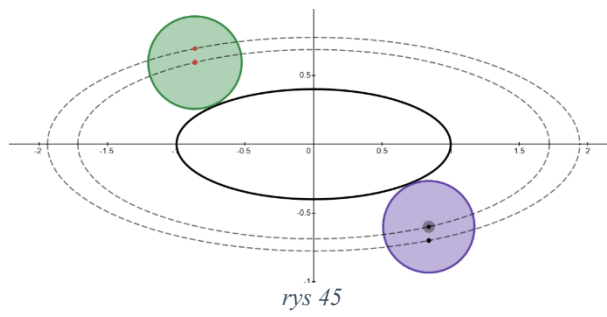
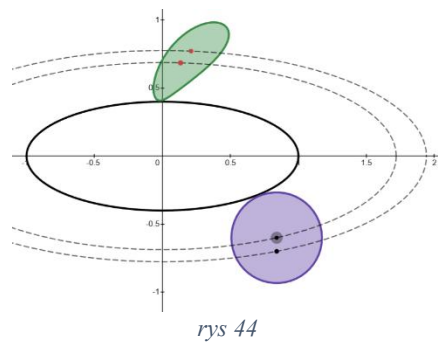
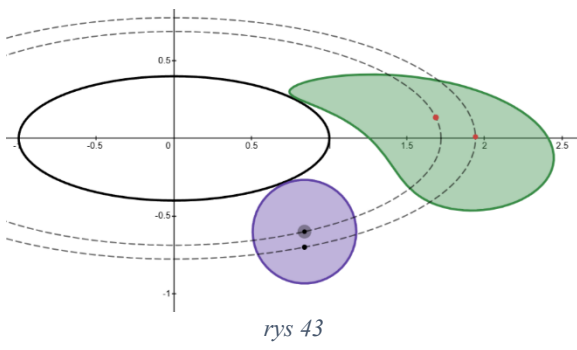
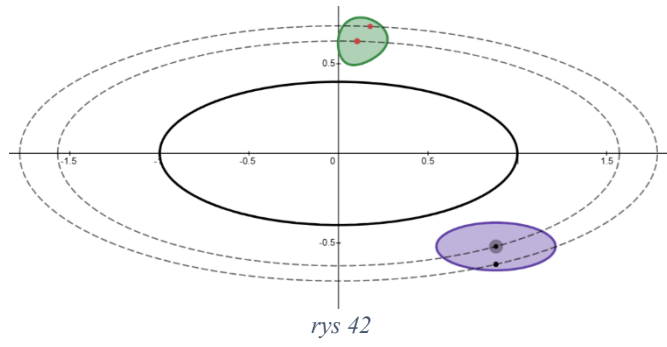
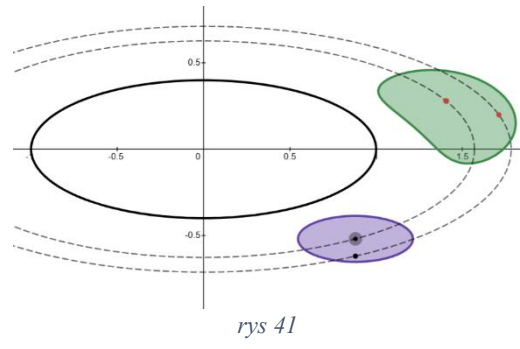
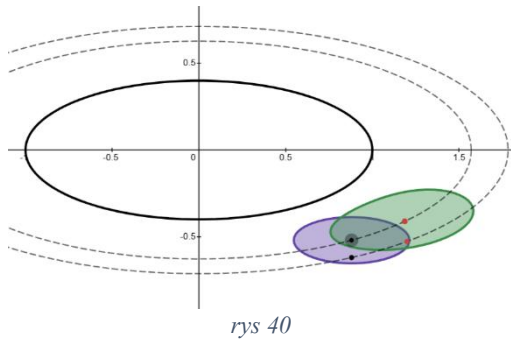
Ponieważ punkty P i P' leżą na tej samej elipsie danej równaniem $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$, to:

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = x'^2 + \frac{y'^2}{b^2} \quad x^2 + \frac{y^2}{b^2} = x'^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{b^2} \right)$$

$$x' = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{b^2}}} = \sqrt{\frac{b^2 x^2 + y^2}{b^2 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \quad y' = x' \operatorname{tg} \beta$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{b^2 x^2 + y^2}{b^2 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ y' = \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{b^2 x^2 + y^2}{b^2 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \end{cases}$$

Jak można zaobserwować na zdjęciach na kolejnej stronie, wszystkie punkty podczas takiego przekształcenia pokonują tę samą miarę kąta względem środka elipsy i zostają na swojej elipsie, która jest podobna do elipsy, względem której zachodzi obrót.

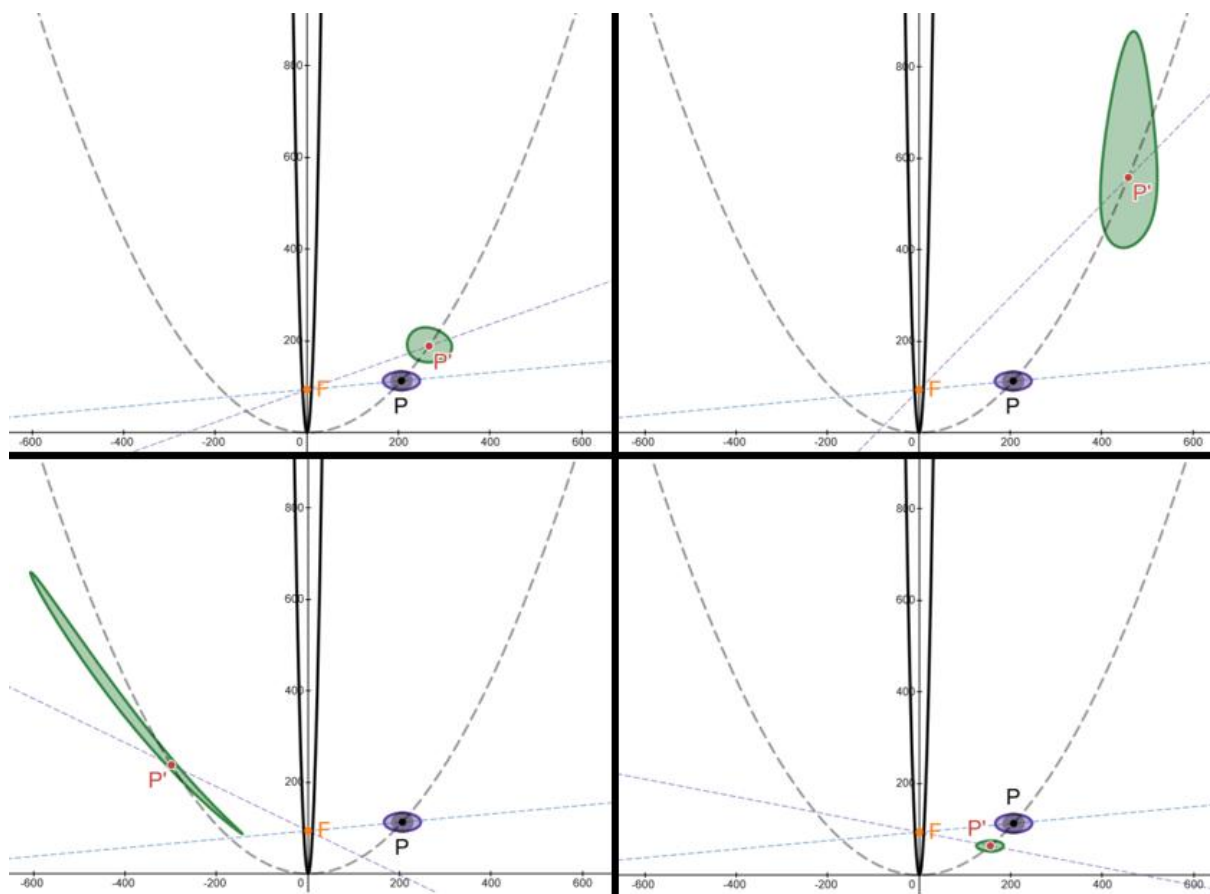


4.4 Obrót paraboliczny

Aby dokonać obrotu niezbędne jest wyznaczenie środka względem którego będziemy dokonywać obrotu. Naturalnym wyborem takiego punktu na paraboli jest jej ognisko, zatem wokół niego zachodzić będzie wersja mojego obrotu parabolicznego.

Podobnie jak w przypadku mojej wersji obrotu eliptycznego, każdy punkt porusza się podczas takiego obrotu po swojej paraboli będącej przeskalowaną z powinowactwo prostokątnego parabolą daną równaniem $y = x^2$, o ustalony kąt liczony z ogniska przeskalowanej paraboli.

Położenie ogniska zmienia się wraz z przeskalowywaniem paraboli, w związku z czym, gdy obrotowi o ten sam kąt podlega więcej niż jeden punkt, to punkty te niekoniecznie będą się obracać względem tego samego ogniska.



rys 46 - obrót paraboliczny elipsy

Wzory na tą transformację uzyskałem w poniższy sposób:

Obracamy punkt $P = (x, y)$ leżący na paraboli danej równaniem $y = ax^2$, zatem $a = \frac{y}{x^2}$

Ognisko paraboli F ma współrzędne $(0, \frac{1}{4a})$, zatem $F = (0, \frac{x^2}{4y})$.

Niech α oznacza kąt między prostą równoległą do osi Ox i przechodzącą przez punkt F , a półprostą FP , natomiast β kąt między półprostą FP' będącym obrazem punktu P po obrocie parabolicznym o kąt θ . Wtedy:

$$tg \alpha = \frac{y - \frac{x^2}{4y}}{x} = \frac{4y^2 - x^2}{4xy}$$

$$tg \beta = tg(\alpha + \theta) = \frac{tg \alpha + tg \theta}{1 - tg \alpha tg \theta} = \frac{\frac{4y^2 - x^2}{4xy} + tg \theta}{1 - \frac{4y^2 - x^2}{4xy} tg \theta} = \frac{4y^2 - x^2 + 4xy tg \theta}{4xy - (4y^2 - x^2) tg \theta}$$

Wiedząc, że punkt P' leży na tej samej paraboli co punkt P i tworzy kąt β względem poziomu a półprostą FP' , otrzymujemy i rozwiązujemy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} x'^2 \\ y' = x' tg \beta + \frac{x^2}{4y} \end{cases}$$

$$\frac{y}{x^2} x'^2 = x' tg \beta + \frac{x^2}{4y} \quad \frac{y}{x^2} x'^2 - x' tg \beta - \frac{x^2}{4y} = 1$$

$$x' = \frac{x^2 (tg \beta \pm \sqrt{tg^2 \beta + 1})}{2y}$$

Ze względu na istnienie dwóch rozwiązań dla x' (poza przypadkami, gdy $y = 0$ lub $tg \beta \rightarrow \infty$) niezbędne jest zastosowanie korekty $k \in \{-1; 1\}$ za znak „ $\pm$ ”.

Wtedy finalnie punkt $P' = (x', y')$ dany jest jako:

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 (tg \beta + k \sqrt{tg^2 \beta + 1})}{2y} \\ y' = \frac{x^2 (tg \beta + k \sqrt{tg^2 \beta + 1})^2}{4y} \end{cases}$$

gdzie:

$$k = \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \left(\left(1 - \frac{\frac{\theta_0 - \pi + \alpha}{|\theta_0 - \pi + \alpha|} + 1}{2} \right) \frac{tg \beta}{|tg \beta|} + \left(\frac{\frac{\theta_0 - \pi + \alpha}{|\theta_0 - \pi + \alpha|} + 1}{2} - \frac{\frac{\theta_0 - 2\pi + \alpha}{|\theta_0 - 2\pi + \alpha|} + 1}{2} \right) \frac{-tg \beta}{|tg \beta|} \right. \\ \left. + \frac{\frac{\theta_0 - 2\pi + \alpha}{|\theta_0 - 2\pi + \alpha|} + 1}{2} \frac{tg \beta}{|tg \beta|} + \left(1 - \frac{\frac{\theta_0 + \alpha}{|\theta_0 + \alpha|} + 1}{2} \right) \left(1 - \frac{\frac{\alpha}{|\alpha|} + 1}{2} \right)^2 \right)$$

Korekta ta polega głównie na złożeniu „if’ów matematycznych” mego pomysłu.

5 Dalsze kierunki badań

- Tworzenie fraktali z iterowania transformacji nakładania.
- Rozszerzenie nietypowych inwersji do trójwymiaru.
- Obroty o dwóch kątach względem elipsoidy i paraboloidy w $\mathbb{R}^3$.

Podziękowanie

Pragnę szczególnie podziękować dr Bronisławowi Pabichowi za cenne wsparcie podczas pisania pracy.

Bibliografia

- [1] Kalkulator graficzny Desmos <https://www.desmos.com/?lang=pl>
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Frenet%E2%80%93Serret_formulas#Other_expressions_of_the_frame
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_angle
- [4] P.S. Modienow, A.S. Parchomienko: „Przekształcenia geometryczne”. 1967