

V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta
Witkowskiego w Krakowie

Miłosz Płatek

DOWÓD UOGÓLNIONEGO TWIERDZENIA
SAWAYAMY-THÉBAULT'A

Konkurs prac uczniowskich z matematyki
im. Pawła Domańskiego

Opiekun
dr Dominik Burek

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Axial circular transformation	3
2.1	Skierowane okręgi i proste	3
2.2	Dylacja	4
3	Twierdzenie Sawayamy-Thébault’a	7
3.1	Lemat Sawayamy	7
3.2	Twierdzenie Sawayamy-Thébault’a	8
4	Uogólnienie Twierdzenia Sawayamy-Thébault’a	11
4.1	Uogólnienie Lematu Sawayamy	11
4.2	Uogólnienie Twierdzenia Sawayamy-Thébault’a	18

Rozdział 1

Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiam dowód otwartego od niemal dziesięciu lat problemu: Uogólnionego Lematu Sawayamy, a także dowód Uogólnionego Twierdzenia Sawayamy–Thébaulta [2, 3].

Twierdzenie Sawayamy–Thébaulta uznawane jest za jedno z najpiękniejszych twierdzeń geometrii, w dużej mierze dzięki swojej wyjątkowej historii. Po raz pierwszy problem został opublikowany w 1938 roku w czasopiśmie *The American Mathematical Monthly* [20].

W 1963 roku wydawnictwo Uniwersytetu Oksfordzkiego umieściło ten problem na liście „Tomorrow’s Math: Unsolved Problems for the Amateur”, klasyfikując go jako otwarty problem z zakresu geometrii analitycznej [12].

Mimo to problem pozostawał nierozwiązany aż do 1983 roku, kiedy to – po 45 latach od pierwotnej publikacji — K. B. Taylor opublikował 24-stronicowy dowód obliczeniowy w *The American Mathematical Monthly* [18]. Nie zakończyło to jednak poszukiwań bardziej syntetycznego rozwiązania.

W 1988 roku Chou [1] zastosował automatyczne metody dowodzenia twierdzeń, oparte na bazach Gröbnera i resztach pseudowielomianowych, aby udowodnić to twierdzenie. Oryginalny dowód wymagał 44 godzin czasu CPU. Późniejsze usprawnienia pozwoliły znacząco skrócić czas obliczeń — Yang Lu i Zhang Jingzhong uzyskali wynik 268 sekund. Twierdzenie Sawayamy–Thébaulta jest obecnie niemal wzorcowym przypadkiem w teorii baz Gröbnera [16].

W 1991 roku H. Demir i C. Dezar opublikowali kolejną wersję dowodu w renomowanym czasopiśmie *Geometriae Dedicata* [4].

W 2001 roku na łamach *The American Mathematical Monthly* ukazał się elementarny dowód w otwartym dostępie, z wykorzystaniem współrzędnych kartezjańskich, autorstwa R. Shaila [16]. Również i w tym przypadku nie obyło się bez pomocy komputera.

W 2002 roku w *The American Mathematical Monthly* opublikowano także dowód dla przypadku okręgów zewnętrznych Twierdzenia Sawayamy–Thébaulta [7].

W 2003 roku, dopiero po 65 latach, krótki i syntetyczny dowód został opublikowany przez Jeana-Louisa Ayme’a [9]. Ayme odkrył, że Yuzaburo Sawayama, instruktor w Centralnej Szkole Wojskowej w Tokio, niezależnie sformułował i rozwiązał ten

problem już w 1905 roku. Dowód ten przedstawił w swojej pracy naukowej. Od tego czasu twierdzenie to znane jest jako Twierdzenie Sawayamy–Thébaulta, zaś lemat, którego Sawayama użył w jego dowodzie, określany jest mianem Lematu Sawayamy.

Na przestrzeni lat opublikowano dziesiątki prac poświęconych twierdzeniu Sawayamy–Thébaulta w licznych renomowanych czasopismach. Z czasem sam dowód był coraz bardziej upraszczany, a w niniejszej pracy przedstawiam jego jednostronicową, syntetyczną wersję, opartą na Twierdzeniu Pappusa, przypisywaną Y. Sawayamie.

Dao Thanh Oai przez cztery lata pracował wraz z trzema innymi matematykami z Wietnamu nad znalezieniem uogólnienia Twierdzenia Sawayamy–Thébaulta. Jak sam pisze [3]:

I have worked for four years to find a real nice generalization of the Thébault theorem and publish in here[2] since two years ago, but has no proof. So I am looking for the proof of the generalization of the Sawayama-Thébault theorem as follows:

Hipoteza ta pozostaje otwarta od niemal dziesięciu lat, co potwierdził sam Dao Thanh Oai, z którym autor niniejszej pracy pozostawał w kontakcie. Nie powinno to jednak dziwić — jak już wspomniano, klasyczne twierdzenie Sawayamy–Thébaulta czekało na dowód przez 45 lat, który był 24-stronicowym analitycznym dowodem.

W niniejszej pracy prezentuję dowody Uogólnionego Lematu Sawayamy oraz Uogólnionego Twierdzenia Sawayamy–Thébaulta, będące efektem kilkuletnich prac nad tym problemem.

Kluczowym elementem przedstawionego dowodu jest zastosowanie dylacji (ang. dilation), będącej szczególnym przypadkiem okręgowego przekształcenia osiowego (ang. axis circular transformation). Technika ta została opisana w pracy Geometric Transformations IV: Circular Transformations [8], przetłumaczonej z języka rosyjskiego na angielski około piętnastu lat temu.

Ponieważ autorowi nie są znane inne źródła — w szczególności w języku polskim — opisujące tę metodę, podstawowe informacje na jej temat zawarto w Rozdziale 2.

Podsumowując, w niniejszej pracy przedstawiam dowody dwóch otwartych problemów: Uogólnionego Twierdzenia Sawayamy–Thébaulta oraz Uogólnionego Lematu Sawayamy. Dowody te mają charakter syntetyczny, a ich szczególnym przypadkiem są klasyczne wersje obu twierdzeń, co pozwala uogólnić wszystkie wyniki przedstawione we wspomnianych publikacjach.

Miłosz Płatek

Rozdział 2

Axial circular transformation

Axial circular transformation [8] to przekształcenie zamieniające:

- prosta $\rightarrow$ prosta,
- okrąg $\rightarrow$ okrąg (gdzie punkt to okrąg o promieniu zero).

Jest to zatem dualna wersja przekształcenia typu punkt $\rightarrow$ punkt, które zachowuje okręgi (np. inwersji). W przeciwieństwie do geometrii euklidesowej, w której obiekty definiuje się jako zbiory punktów, w tej geometrii obiekty określa się poprzez zbiory prostych. Na przykład okrąg opisujemy jako zbiór prostych stycznych do niego — obwiednię, czyli obraz okręgu w przekształceniu biegunowym.

W niniejszej pracy posługiwać się będziemy jednym z takich przekształceń, mianowicie dilation. Dlatego też pokrótce je omówimy. Aby zagwarantować jednoznaczność tego przekształcenia, kluczowe okazuje się wprowadzenie pojęć skierowanego okręgu oraz skierowanej prostej.

2.1 Skierowane okręgi i proste

Definicja 2.1.1. (Skierowany okrąg) Okrąg definiujemy jako parę: środek oraz promień $r \in \mathbb{R}$ (w odróżnieniu od klasycznej definicji, gdzie $r \in \mathbb{R}_+$). Okrąg o promieniu r i środku w punkcie O to okrąg o środku w punkcie O i promieniu $|r|$ skierowany w następujący sposób:

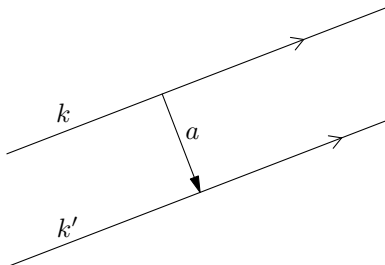
- $r > 0$ — skierowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,
- $r < 0$ — skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara,
- $r = 0$ — brak skierowania (punkt).

W tym rozdziale odwołując się do okręgu będziemy mieli na myśli skierowany okrąg.

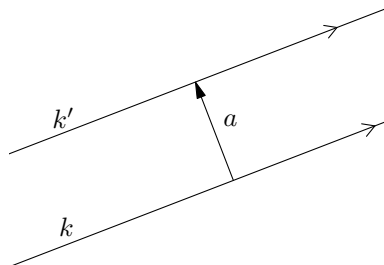
Definicja 2.1.2. (Skierowana prosta) Do klasycznej definicji prostej dodajemy jej skierowanie. W tym rozdziale odwołując się do prostej będziemy mieli na myśli skierowaną prostą.

2.2 Dylacja

Definicja 2.2.1. (Dylacja) Dylacją o parametrze $a \in \mathbf{R}$ nazywamy przekształcenie, które przesuwa każdą prostą o wartość $|a|$ w prawo (gdy $a > 0$) lub w lewo (gdy $a < 0$), patrząc wzdłuż prostej zgodnie z jej skierowaniem.

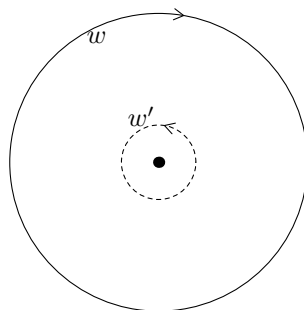
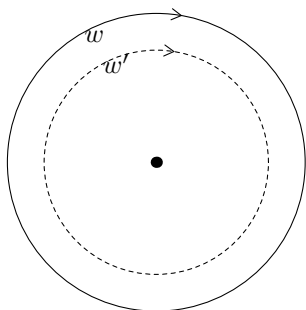


Rysunek 1 — $a > 0$



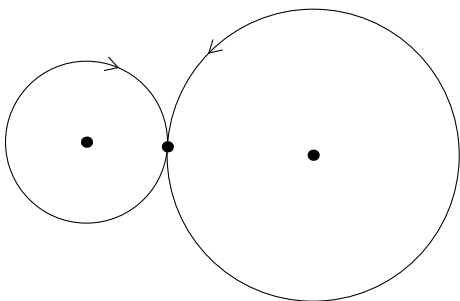
Rysunek 2 — $a < 0$

Własność 2.2.2. Każdy okrąg (rozumiany jako zbiór prostych stycznych) w wyniku dylacji o parametrze a przechodzi na okrąg o tym samym środku i promieniu $r + a$, gdzie r oznacza promień okręgu przed przekształceniem.

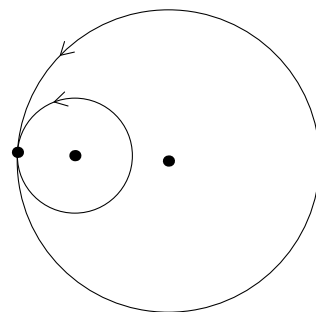


Rysunek 3 — $r = -4, a = 1 \Rightarrow r = -3$ Rysunek 4 — $r = -4, a = 5 \Rightarrow r = 1$

Definicja 2.2.3. (Styczność okręgów) Dwa okręgi nazywamy stycznymi, jeśli są styczne w klasycznym sensie geometrii euklidesowej, a ponadto są zgodnie skierowane.

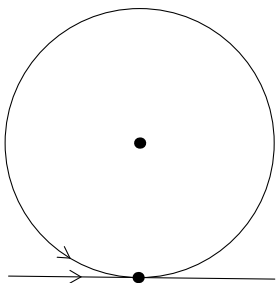


Rysunek 5 — styczność zewnętrzna

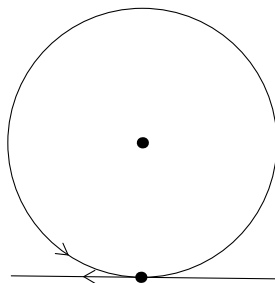


Rysunek 6 — styczność wewnętrzna

Własność 2.2.4. (Styczność prostej i okręgu) Prosta i okrąg są styczne jeżeli są styczne w klasycznym pojęciu euklidesowskim oraz są zgodnie skierowane.

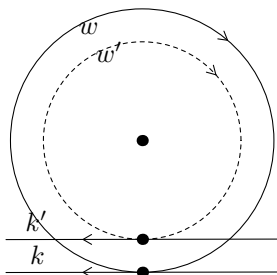


Rysunek 7 — styczność

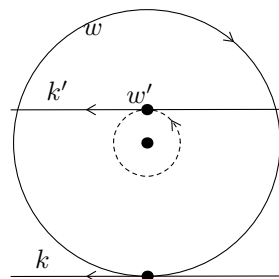


Rysunek 8 — brak styczności

Własność 2.2.5. Dylacja zachowuje styczność.



Rysunek 9 — $r = -4$, $a = 1$, styczność



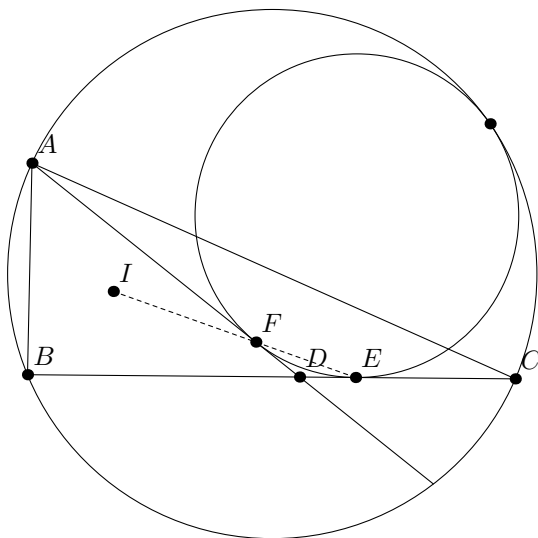
Rysunek 10 — $r = -4$, $a = 5$, styczność

Rozdział 3

Twierdzenie Sawayamy-Thébault'a

3.1 Lemat Sawayamy

Twierdzenie 3.1.1. (Lemat Sawayamy) Dany jest trójkąt ABC , oraz punkt D na boku trójkąta ABC . Niech ω będzie okręgiem stycznym do odcinka BC w punkcie E , odcinka AD w punkcie F oraz do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wówczas, niezależnie od wyboru punktu D , prosta EF przechodzi przez stały punkt I , będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .



Rysunek 11 — Lemat Sawayamy

Dowód. Niech F' to punkt przecięcia się prostej EI z okręgiem ω . Ponadto niech M to środek łuku BC niezawierającego punktu A . Wówczas, z jednokładności w

punkcie P , dostajemy, że punkty P, E, M są współliniowe oraz, że

$$\sphericalangle MAP = \sphericalangle EF'P.$$

Zatem czworokąt $AIF'P$ jest cykliczny. Ponadto mamy, że

$$ME \cdot MP = CM^2 = MI^2$$

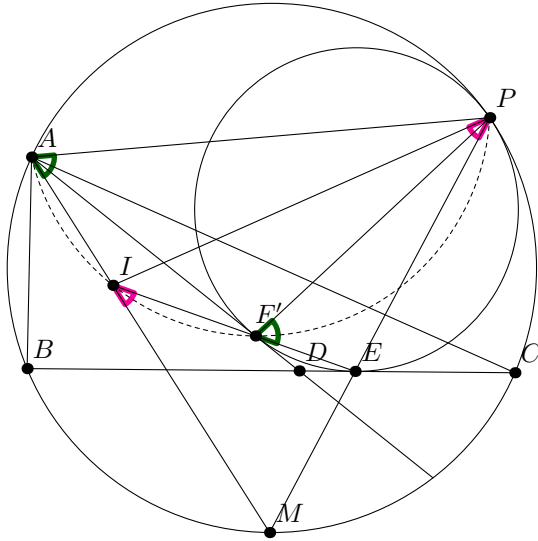
z trójkąta i faktu, że ω po inwersji względem okręgu (M, MC) przechodzi na BC .
Zatem

$$MI^2 = ME \cdot MP,$$

więc okrąg opisany na trójkącie IEP jest styczny do prostej AM . Zatem

$$\sphericalangle MIE = \sphericalangle IPE \implies \sphericalangle IAF' + \sphericalangle AF'I = \sphericalangle IPF' + \sphericalangle F'PE \implies \sphericalangle EF'D = \sphericalangle F'PE,$$

więc prosta AF' jest styczna do okręgu ω . Zatem $F = F'$, co dowodzi, że prosta EF przechodzi przez punkt I .

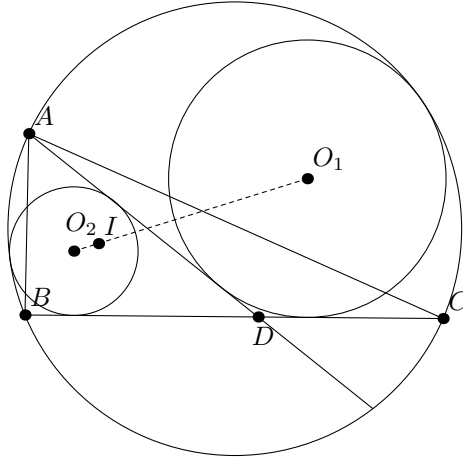


Rysunek 12 — Dowód Lematu Sawayamy

□

3.2 Twierdzenie Sawayamy-Thébault'a

Twierdzenie 3.2.1. (Twierdzenie Sawayamy-Thébaulta) Dany jest trójkąt ABC , oraz punkt D na boku trójkąta ABC . Niech O_1 i O_2 ($O_1 \neq O_2$) będą środkami okręgów stycznych do odcinka BC , odcinka AD oraz do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wówczas, niezależnie od wyboru punktu D , prosta O_1O_2 przechodzi przez stały punkt I , będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

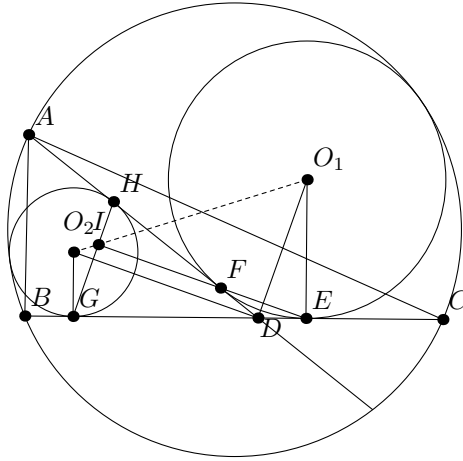


Rysunek 13 — Twierdzenie Sawayamy-Thébault'a

Dowód. Niech ω_1 i ω_2 to okręgi o środkach odpowiednio w O_1 i O_2 z treści zadania. Ponadto niech punkty E i F to punkty styczności ω_1 z bokiem BC i odcinkiem AD , odpowiednio. Analogicznie, niech punkty G i H to punkty styczności ω_2 z bokiem BC i odcinkiem AD . Zauważmy, że z lematu Sawayamy punkty E, F, I oraz punkty G, H, I są współliniowe. Zatem

$$\sphericalangle IED = \sphericalangle FED = \frac{1}{2} \sphericalangle GDH = \sphericalangle O_2 DG,$$

więc $O_2D \parallel IE$. Analogicznie pokazujemy, że $GI \parallel DO_1$. Zauważmy ponadto, że $O_2G \parallel O_1E$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pappusa dla sześciokąta O_2GIEO_1D otrzymujemy, że punkty O_2, I, O_1 są współliniowe (punkty przecięć leżą na jednej prostej — prostej w nieskończoności), co dowodzi tezy.



Rysunek 14 — Dowód Twierdzenia Sawayamy-Thébault'a

□

Rozdział 4

Uogólnienie Twierdzenia Sawayamy-Thébault'a

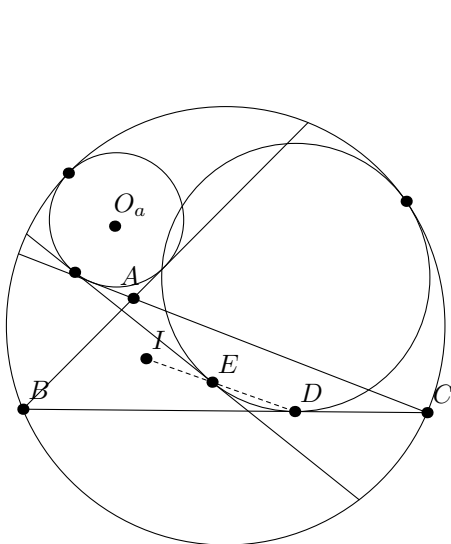
W tym rozdziale przedstawiam dowód uogólnionego Lematu Sawayamy oraz dowód uogólnionego Twierdzenia Sawayamy-Thébaulta. Autorem hipotezy jest Dao Thanh Oai z Wietnamu, który wraz z trzema innymi matematykami pracował nad nią przez cztery lata.

4.1 Uogólnienie Lematu Sawayamy

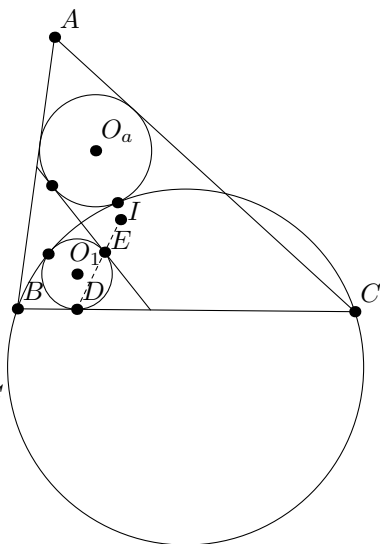
Twierdzenie 4.1.1. (*Uogólnienie Lematu Sawayamy*) Dany jest trójkąt ABC oraz okrąg ω_a styczny do prostych AC i AB . Okrąg Ω przechodzi przez punkty B i C . Ponadto, niech k będzie prostą styczną do okręgu ω_a . Okrąg ω to okrąg styczny do odcinka BC w punkcie D , do okręgu Ω oraz do prostej k w punkcie E , przy czym ω leży po tej samej stronie prostej BC , co punkt A . Ponadto

- jeśli okrąg ω_a leży po przeciwnej stronie prostej AC co punkt B to o okrąg Ω jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_a oraz okrąg ω leży po tej samej stronie prostej k co okrąg ω_a ,
- jeśli okrąg ω_a leży po tej samej stronie prostej AC co punkt B to okrąg Ω jest styczny zewnętrznie do okręgu ω_a oraz okrąg ω leży po przeciwnej stronie prostej k co okrąg ω_a .

Wówczas, niezależnie od wyboru prostej k , prosta DE przechodzi przez stały punkt I , będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .



Rysunek 15 — konfiguracja 1

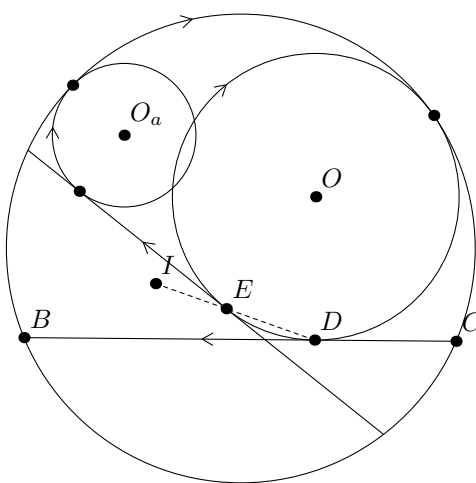


Rysunek 16 — konfiguracja 2

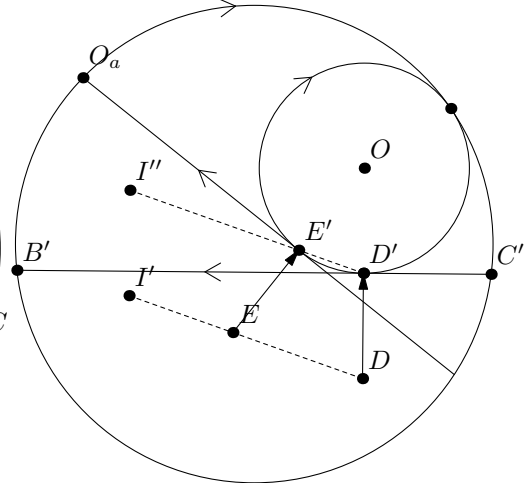
Dowód. W dowodzie, dla uproszczenia, przyjmujemy konfigurację przedstawioną na rysunku 15. W przypadku konfiguracji z rysunku 16 dowód przebiega analogicznie.

Jeśli okrąg ω_a jest punktem (tzn. jego promień wynosi zero), wówczas problem trywializuje się, ponieważ sprowadza się do klasycznego twierdzenia Sawayamy–Thébault’a. W dalszej części rozważań przyjmujemy zatem, że okrąg ten nie jest zdegenerowany.

Niech punkt A' będzie punktem styczności okręgów Ω i ω_a . Niech punkty O oraz O_a oznaczają odpowiednio środek okręgu ω oraz środek okręgu ω_a .



Rysunek 16 — przed przekształceniem



Rysunek 17 — po przekształceniu

Skierujemy okręgi i proste jak na Rysunku 16, a następnie rozpatrzmy przekształcenie płaszczyzny — dylację (osiowa transformacja kołowa) przekształcające ω_a w punkt O_a .

Naszą sytuację po przekształceniu prezentuje rysunek 17. Niech B' i C' to punkty przecięcia się okręgu Ω i prostej BC po naszym przekształceniu. Ponadto niech punkty D' i E' to punkty styczności ω_1 z odpowiednio prostymi BC i k po naszym przekształceniu. W celu klaryfikacji, warto zaznaczyć, że nie jest prawdą, że $D \rightarrow D'$ lub $E \rightarrow E'$ po naszej dylacji, ponieważ nasze przekształcenie to przekształcenie prosta $\rightarrow$ prosta, a nie punkt $\rightarrow$ punkt (w szczególności w dylacji punkt to okrąg). Z lematu Sawayamy dla trójkąta $O_a B' C'$ otrzymujemy, że prosta $E' D'$ przechodzi przez stały punkt I'' będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $O_a B' C'$. Ponadto zaznaczmy na rysunku 17 punkty D i E z przed przekształcenia (z rysunku 16). Zauważmy, że z definicji dylacji długość wektora DD' jest równy długości wektora EE' (przesuneliśmy prostą BC o tą samą wartość co prostą k). Ponadto $OE' = OD'$, co łącząc z faktem, że $EE' = DD'$ daje nam, że $E' D' \parallel ED$. Zauważmy, że niezależnie od wyboru stycznej k wektor DD' jest stały, bowiem jego kierunek jest prostopadły do BC , skierowanie stałe (bo okrąg ω i ω_a mają stałe skierowanie) i jego długość jest równa promieniowi okręgu ω_a czyli też stała. Rozpatrzmy więc przesunięcie prostych $E' D'$ o stały wektor $\overrightarrow{D' D}$ (wektor DD' o przeciwnym kierunku). Wówczas proste te przejdą na proste DE , a stały punkt I'' na pewien stały punkt I' . Zatem niezależnie od wyboru prostej k , proste DE przechodzą przez pewien stały punkt I' . Pozostało pokazać, że $I' = I$.

W dalszej części dowodu, będziemy potrzebować poniższego lematu, będącego wariacją lematu Sawayamy. Ku zaskoczeniu autora, nie został on przedstawiony w żadnym dostępnym źródle pomimo, że dowód można przeprowadzić w analogiczny sposób do dowodu lematu Sawayamy.

Lemat 4.1.2. (*Lemat Sawayamy w innej konfiguracji*) Dany jest trójkąt ABC oraz punkt D na odcinku BC . Okrąg ω jest styczny do okręgu opisanego w punkcie P , prostej BC w punkcie E i prostej AD w punkcie F tak, że punkt A i punkt P leżą po przeciwnych stronach prostej BC oraz punkty B i P leżą po tej samej stronie prostej AD . Wówczas niezależnie od wyboru punktu D , prosta EF przechodzi przez punkt J_c będący środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC na przeciwko wierzchołka C .

Dowód. Niech punkt $F' \neq E$ to punkt przecięcia się prostej $J_c E$ z okręgiem ω . Ponadto niech punkt M to środek łuku BAC . Wówczas mamy, że punkty P , E , M są współliniowe. Z jednokładności w punkcie P dostajemy więc, że

$$\sphericalangle PF'E = \sphericalangle PCM = \sphericalangle J_c AP.$$

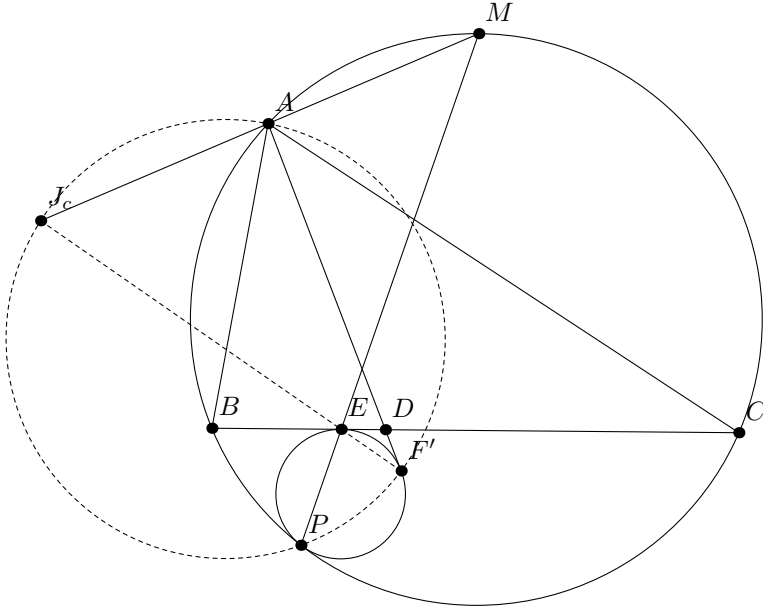
Zatem

$$\sphericalangle J_c AP = \sphericalangle J_c F' P,$$

więc czworokąt $PF'AJ_c$ jest cykliczny. Ponadto skoro $MJ_c = MB$ (wariant twierdzenia o trójlściu) to

$$ME \cdot MP = MB^2 = MJ_c^2,$$

więc prosta MJ_c jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie $J_c EP$.



Rysunek 18 — Lemat Sawayamy w innej konfiguracji

Zatem

$$\sphericalangle MJ_cE = \sphericalangle J_cPM = \sphericalangle ACM + \sphericalangle J_cF'A.$$

Wiemy jednak, że

$$\sphericalangle MJ_cE = \sphericalangle APF' = \sphericalangle ACM + \sphericalangle EPF'.$$

Łącząc powyższe równości otrzymujemy, że

$$\sphericalangle ACM + \sphericalangle EPF' = \sphericalangle ACM + \sphericalangle J_cF'A \implies \sphericalangle EPF' = \sphericalangle J_cF'A.$$

Zatem prosta AF' jest styczna do okręgu ω , więc $F = F'$, co dowodzi tezy. $\square$

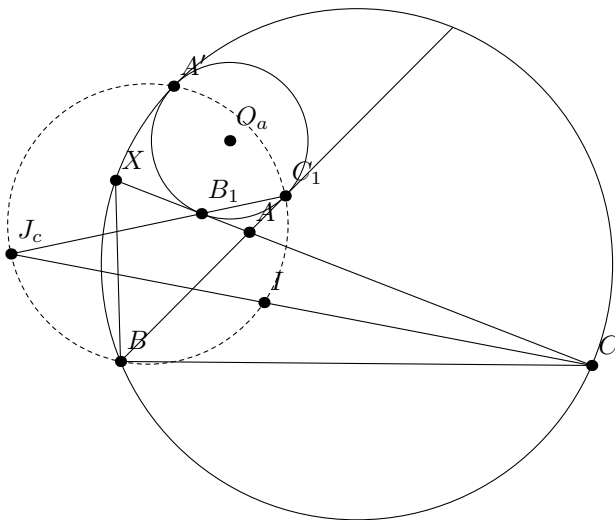
Niech punkty P i F to odpowiednio punkt styczności okręgów Ω i ω oraz punkt styczności okręgu ω_a i prostej k .

Lemat 4.1.3. *Prosta $A'I$ to dwusieczna kąta $BA'C$.*

Dowód. Niech punkty B_1 i C_1 to odpowiednio punkty styczności prostej AC i AB z okręgiem ω_a . Ponadto punkt $X \neq C$ to punkt przecięcia się prostej AC z okręgiem Ω . Niech prosta CI przecina prostą B_1C_1 w punkcie J_c . Z lematu 4.1.2 dostajemy, że punkt J_c to środek okręgu dopisanego trójkąta BCX na przeciwko wierzchołka C . Ponadto z dowodu lematu 4.1.2 otrzymujemy, że czworokąt J_cBC_1A' jest cykliczny. Zauważmy ponadto, że

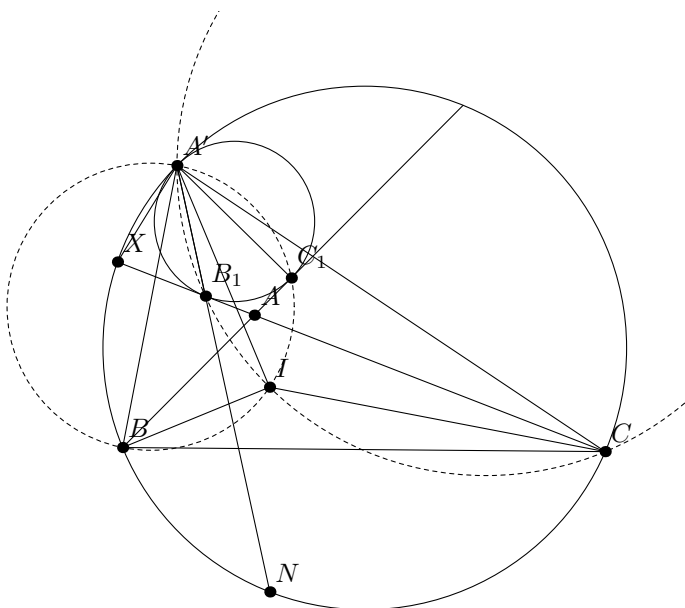
$$\sphericalangle J_cIB = \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BAC) = \sphericalangle B_1C_1A = \sphericalangle J_cC_1B.$$

Zatem $\sphericalangle J_cIB = \sphericalangle J_cC_1B$, więc czworokąt J_cBIC_1 jest cykliczny. Łącząc powyższe fakty otrzymujemy, że pięciokąt J_cBIC_1A' jest cykliczny, a w szczególności, że czworokąt $A'C_1IB$ jest cykliczny. Analogicznie pokazujemy, że czworokąt $A'B_1IC$ jest cykliczny.



Rysunek 19 — Cykliczność czworokątów $A'C_1IB$ i AB_1IC

Niech punkt N to środek łuku XBC (Rysunek 20). Wówczas punkty A' , B_1 , N są współliniowe.



Rysunek 20 — Lemat 4.1.3

Zatem otrzymujemy, że

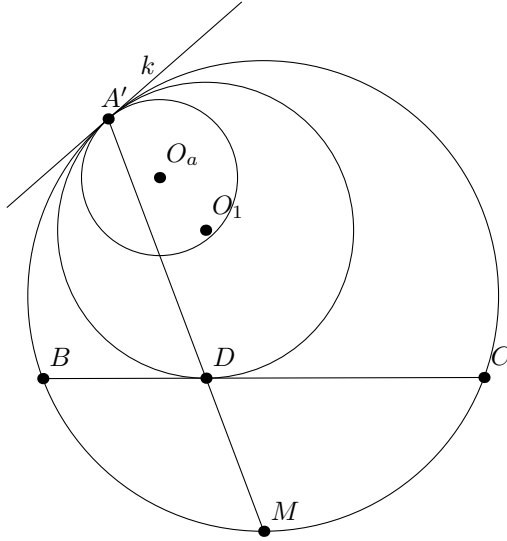
$$\begin{aligned}\sphericalangle BA'B_1 &= \frac{1}{2}\sphericalangle XA'C - \sphericalangle XA'B = \frac{1}{2}\sphericalangle XA'B + \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle XA'B = \\ &= \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \frac{1}{2}\sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle B_1CI = \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle B_1A'I.\end{aligned}$$

Zatem

$$\sphericalangle BA'I = \sphericalangle BA'B_1 + \sphericalangle B_1A'I = \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle B_1A'I + \sphericalangle B_1A'I = \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C.$$

Otrzymujemy więc że AI to dwusieczna kąta $\sphericalangle BA'C$, co chcieliśmy dowieść. $\square$

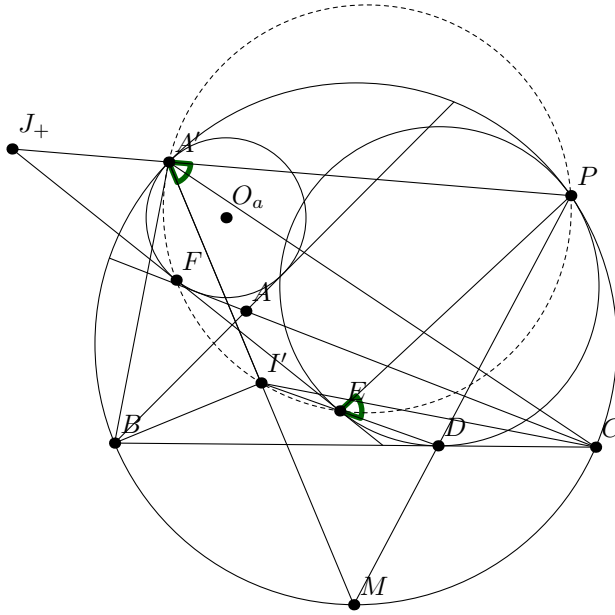
Rozpatrzmy teraz prostą k będącą styczną do okręgu ω_a w punkcie A' . Niech ponadto M oznacza środek łuku BC niezawierającego punktu A' . Wówczas punkty A' , D , M są współliniowe. Zatem punkt I' leży na dwusiecznej kąta $BA'C$.



Rysunek 21 — prosta k styczna w punkcie A'

Lemat 4.1.4. Punkty F , I' , E , P , A' leżą na jednym okręgu (Rysunek 22).

Dowód. Na początek pokażemy, że czworokąt $PEFA'$ jest cykliczny. Niech $J_+ = k \cap A'P$. Z twierdzenia Monge'a dla okręgów Ω , ω_a i ω otrzymujemy, że środek jednokładności dodatniej przekształcającej ω_a na ω leży na prostej PA' . Ponadto oczywiście ten środek jednokładności dodatniej leży na k . Zatem J_+ to środek jednokładności dodatniej przekształcającej ω_a na ω . Jest to więc także środek inwersji dodatniej przekształcającej ω na ω_a . Po takim przekształceniu $P \rightarrow A'$ i $E \rightarrow F$. Zatem z potęgi punktu czworokąt $PEFA'$ jest cykliczny.



Rysunek 22 — Współokręgowość punktów F, I', E, P, A' .

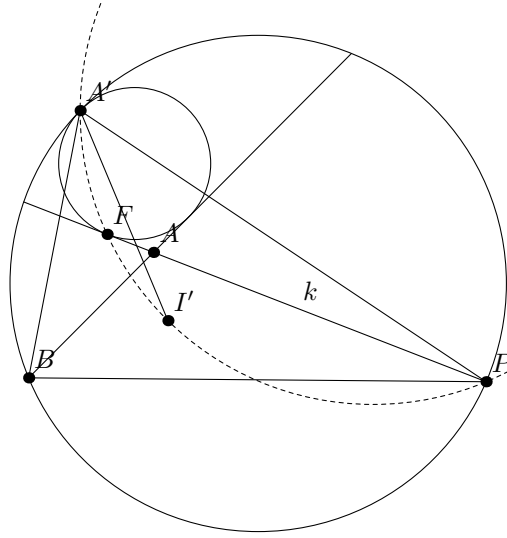
Teraz pokażemy że czworokąt $A'PEI'$ jest cykliczny. Niech punkt M to środek łuku BC okręgu Ω , niezawierającego punktu A' . Wówczas prosta DP przechodzi przez punkt M . Ponadto skoro punkt I' leży na dwusiecznej kąta $BA'C$ to punkty A', I', M są współliniowe. Rozpatrzmy jednokładność przekształcającą ω na Ω . Dostajemy, że

$$\sphericalangle DEP = \sphericalangle MA'P = \sphericalangle IA'P,$$

więc czworokąt $A'PEI'$ jest cykliczny.

Skoro punkty P, E, F, A' leżą na jednym okręgu i punkty A', P, D, I leżą na jednym okręgu to punkty P, E, I', F, A' jest cykliczny. $\square$

Zatem z lematu 4.1.4 punkty A', F, I', P leżą na jednym okręgu dla dowolnego położenia punktu P niezdegenerowanego okręgu ω . Weźmy prostą k przechodzącą przez punkt C taką, że punkty A' i B leżą po przeciwnych jej stronach. Wówczas okrąg ω jest zdegenerowany do punktu C , więc $P = C$. Z ciągłości dla cykliczności punktów A', F, I, P otrzymujemy, że punkty $A', F, I', P = C$ leżą na jednym okręgu (jeżeli tak by nie było to znaleźlibyśmy taki punkt na P na łuku $A'C$, niezawierającym punktu B , dla którego okrąg $A'F'I'P$ nie byłby cykliczny). Z dowodu lematu 4.1.3 wiemy, że punkt A' , punkt styczności AC z okręgiem ω (w tym przypadku punkt F), punkt I oraz punkt C leżą na jednym okręgu. Zatem oba punkty I oraz I' leżą na okręgu opisanym na trójkącie $A'FC$ oraz na prostej $A'I$. Skoro oba te punkty są różne od A' to $I' = I$, co dowodzi, że prosta DE przechodzi przez stały punkt będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .



Rysunek 23 — okrąg zdegenerowany $\omega = C$

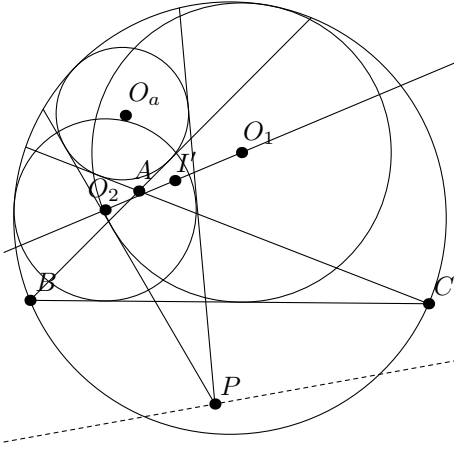
□

4.2 Uogólnienie Twierdzenia Sawayamy-Thébault'a

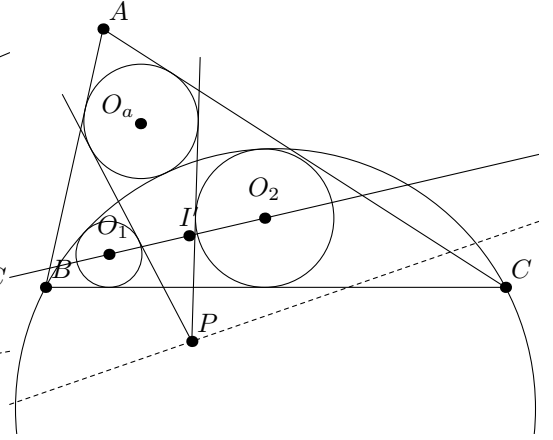
Twierdzenie 4.2.1. (Uogólnienie Twierdzenia Sawayamy-Thébault'a) Dany jest trójkąt ABC oraz okrąg ω_a o środku w punkcie O_a , styczny do prostych AC i AB . Okrąg Ω przechodzi przez punkty B i C . Niech P to dowolny punkt na płaszczyźnie, na zewnątrz okręgu ω_a . Proste k i l to styczne do okręgu ω_a poprowadzone przez punkt P , przy czym, patrząc wzdłuż półprostej PO_a , proste k i l leżą odpowiednio na lewo i na prawo od tej półprostej. Okrąg ω_1 i okrąg ω_2 to odpowiednio okrąg styczny do odcinka BC , do okręgu Ω i do prostej k , oraz okrąg styczny do odcinka BC , do okręgu Ω oraz prostej l . Okręgi ω_1 i ω_2 leżą po tej samej stronie prostej BC co punkt A . Ponadto

- jeśli okrąg ω_a leży po przeciwnej stronie prostej AC co punkt B , to okrąg Ω jest styczny wewnątrz do okręgu ω_a . Wówczas okrąg ω_1 leży po tej samej stronie prostej k co okrąg ω_a , a także okrąg ω_2 leży po tej samej stronie prostej l co okrąg ω_a ,
- jeśli okrąg ω_a leży po tej samej stronie prostej AC co punkt B , to okrąg Ω jest styczny zewnątrz do okręgu ω_a . Wówczas okrąg ω_1 leży po przeciwnej stronie prostej k co okrąg ω_a , a także okrąg ω_2 leży po przeciwnej stronie prostej l co okrąg ω_a .

Wówczas prosta O_1O_2 przechodzi przez stały punkt wtedy gdy punkt P rusza się po ustalonej prostej.



Rysunek 24 — konfiguracja 1



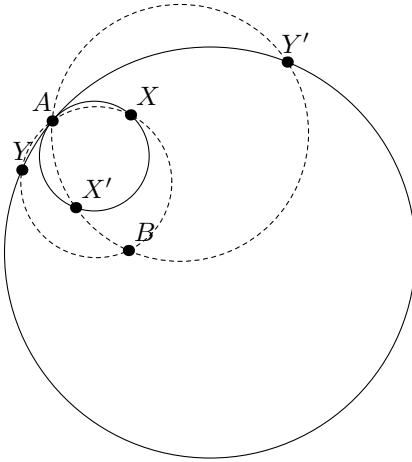
Rysunek 25 — konfiguracja 2

Dowód. Jeśli okrąg ω_a jest zdegenerowany (punkt A) to otrzymujemy Twierdzenie Sawayamy-Thébault'a. Przyjmijmy w dalszym ciągu, że okrąg ω_a nie jest zdegenerowany.

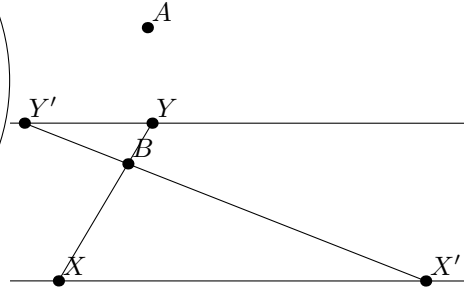
W dowodzie, w celu uproszczenia, ponadto przyjmijmy konfigurację z Rysunku 24. W przypadku konfiguracji z rysunku 25, dowód jest analogiczny.

Zanim przejdziemy do dowodu udowodnimy następujący lemat:

Lemat 4.2.2. *Dane są okręgi Ω i ω styczne wewnętrznie w punkcie A oraz punkt $B \neq A$ na płaszczyźnie. Punkt X jest punktem na okręgu ω , a f jest inwolucją na tym okręgu. Ponadto punkt $Y = (AXB) \cap \Omega$ (drugie przecięcie tych okręgów) i punkt $Y' = (Af(X)B) \cap \Omega$ (drugie przecięcie tych okręgów). Wówczas mapa $Y(\Omega) \mapsto Y'(\Omega)$ jest inwolucją.*



Rysunek 26 — przed inwersją



Rysunek 27 — po inwersji

Dowód. Rozpatrzmy inwersję w punkcie A o dowolnym niezerowym promieniu. Otrzymujemy wówczas sytuację z Rysunku 27. Przerzucając punkt X przez punkt B na

prostą Ω' otrzymujemy, że Y i Y' to para inwolucyjna na prostej Ω' . Zatem przed inwersją mapa $Y(\Omega) \mapsto Y'(\Omega)$ także była inwolucją, co chcieliśmy dowieść. $\square$

Oznaczmy odpowiednio punkty (Rysunek 25): D punkt styczności okręgu ω_1 z BC , E punkt styczności okręgu ω_1 z prostą k , F punkt styczności okręgu ω_2 z BC , G punkt styczności okręgu ω_2 z prostą l , X punkt styczności prostej k z okręgiem ω_a , X' punkt styczności prostej l z okręgiem ω_a , I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC , A' punkt styczności okręgu ω_a z Ω , Y punkt styczności Ω i ω_1 , Y' punkt styczności Ω i ω_2 , O środek okręgu opisanego na trójkącie $A'BC$.

Rozpatrzmy przekształcenie biegunowe względem okręgu ω_a . Wówczas z faktu, że punkt P leży na ustalonej prostej otrzymujemy, że mapa $X \mapsto X'$ jest inwolucją. Z dowodu twierdzenia 4.1.1 wynika, że pięciokąty $A'XEIY$ oraz $A'X'GIY'$ są cykliczne. Ponadto punkt I oraz punkt A' jest stały, niezależny od wyboru punktu P . Z lematu 4.2.2 dla którego $\Omega = \Omega$, $\omega = \omega_a$, $A = A'$, $B = I$ i inwolucji $f := X(\omega) \mapsto X'(\omega)$ otrzymujemy, że przekształcenie $Y \mapsto Y'$ jest inwolucją.

Niech prosta m to prosta równoległa do BC odległa od niej o R i leżąca po tej samej stronie prostej BC co punkt A' (gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie $A'BC$). Rozpatrzmy parabolę $\mathcal{P}$ o kierownicy m i ognisku O . Istotnie z definicji naszej paraboli dostajemy, że $B \in \mathcal{P}$ i $C \in \mathcal{P}$. Oznaczmy $D' = O_1D \cap m$. Zauważmy, że

$$O_1D' = DD' - O_1D = R - O_1Y = O_1O \implies O_1 \in \mathcal{P}.$$

Analogicznie pokazujemy, że $O_2 \in \mathcal{P}$.

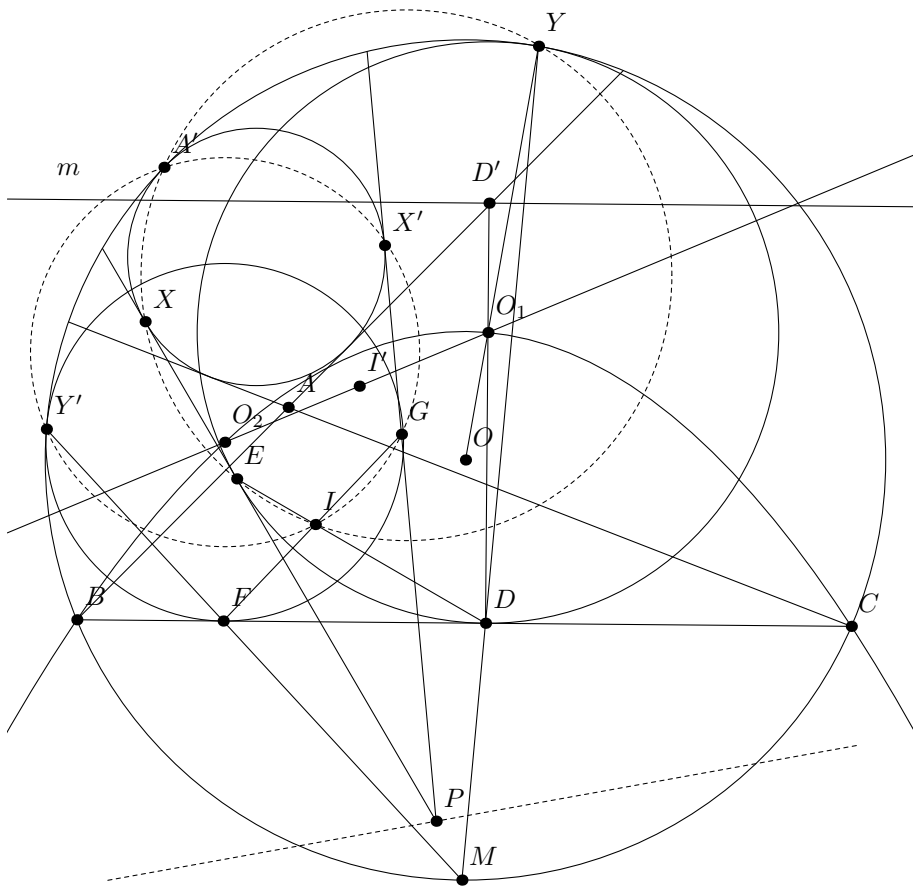
Oznaczmy przez M środek łuku BC okręgu Ω niezawierającego punktu A' oraz przez $\infty_{DD'}$ punkt w nieskończoności prostej DD' . Z prostopadłości DD' do kierownicy paraboli $\mathcal{P}$ otrzymujemy, że $\infty_{DD'} \in \mathcal{P}$. Rozpatrzmy teraz następującą mapę rzutową:

$$Y(\Omega) \mapsto MY(M) \mapsto MY \cap BC(BC') \mapsto D(BC') \mapsto \infty_{DD'}D(\infty_{DD'}) \mapsto O_1(\mathcal{P}).$$

Skoro dla tej mapy rzutowej mamy, że

$$Y(\Omega) \mapsto O_1(\mathcal{P}) \wedge Y'(\Omega) \mapsto O_2(\mathcal{P})$$

oraz mapa $Y(\Omega) \mapsto Y'(\Omega)$ jest inwolucją to mapa $O_1(\mathcal{P}) \mapsto O_2(\mathcal{P})$ także jest inwolucją. Zatem z definicji inwolucji na stożkowej otrzymujemy, że prosta O_1O_2 przechodzi przez stały punkt, co kończy dowód.



Rysunek 25 — Uogólnienie Twierdzenia Sawayamy Thébault'a

□

Uwaga 4.2.3. Punkt I' (stały punkt prostej O_1O_2) jako, że zależy od wyboru prostej na której leży punkt P nie jest szczególnym punktem. Najłatwiej wyznaczyć go poprzez rozpatrzenie dwóch zdegenrowanych przypadków: $P = AC \cap t$ i $P = AB \cap t$ (gdzie t to prosta po której rusza się punkt P).

Podziękowania

Autor pragnie podziękować Konstantemu Smolirze za cenne wskazówki redakcyjne udzielone w trakcie pisania pracy.

Bibliografia

- [1] Shang-Ching Chou, Mechanical Geometry Theorem Proving, 1987, <https://www.semanticscholar.org/paper/Mechanical-Geometry-Theorem-Proving-Chou/9d46a2ec117e7ea700e56ae2dcabab1ec3d8e247>
- [2] D.T.Oai, C.M.Doai, Q.Trung, K.Xuong, T.Binh, *Another Generalization of the Sawayama and Thébault's Theorem*, International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM), September 2016, Volume 1, No.3, pp.36-39: <https://www.journal-1.eu/2016-3/Dao-Thanh-Oai-Another-Generalization-pp.36-39.pdf>.
- [3] D.T.Oai, *A generalization of the Sawayama-Thébault theorem*, mathoverflow: <https://mathoverflow.net/questions/304300/a-generalization-of-the-sawayama-Thébault-theorem>.
- [4] Demir H., Tezer C. Reflections on a problem of V. Thébault. Geom Dedicata 39, 79–92 (1991) <https://doi.org/10.1007/BF00147305>.
- [5] D.Veljan, V.Volenec *Thébault's theorem*, Elem. Math. 63 (2008) 6 – 13.
- [6] English B.J.: Solution of Problem 3887. *It's a long story*. Amer. Math. Monthly 110, 156–158 (2003)
- [7] Gueron S., *Two Applications of the Generalized Ptolemy Theorem*, Amer. Math. Monthly. 109 (4): 362–370.
- [8] I.M.Yaglon, translated by: A. Shenitzer, *Geometric Transformations IV: Circular Transformations*, book.
- [9] Jean-Louis A. : *Sawayama and Thébault's Theorem*, Forum Geometricorum, 3: 225–229, <https://web.archive.org/web/20051109045345/http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf>.
- [10] Kodokostas D. : *A really elementary proof of Thébault's theorem*. Worcester Polytechnic Institute, USA, 2004.
- [11] Konieczny F., *Przekształcenia Rzutowe i Inwolucje*, <https://www.deltami.edu.pl/static/files/kupzm/2020/FilipKonieczny-KUPzM2020.pdf>

- [12] Ogilvy C.S. , Tomorrow's Math, Unsolved Problems for the Amateur, Oxford Univ. Press, 1962
- [13] Ostermann A. , G. Wanner: A dynamic proof of Thébault's theorem. Elem. Math. 65, 12–16 (2010).
- [14] Ostermann A. , Gerhard Wanner: *Geometry by Its History*. Springer, 2012, pp. 226–230.
- [15] Reyes W. : *An Application of Thébault's Theorem*. Forum Geometricorum 2, 183–185 (2002).
- [16] Shail R., *A proof of Thébault's theorem*, Amer. Math. Monthly 108 (2001), 319–325.
- [17] Stiirk R.: *Eine weitere Losung der ThCbault'schen Aufgabe*, Elem. Math. 44 (1989) 131–133.
- [18] Taylor, K.B.: Solution of Problem 3887. Amer. Math. Monthly 90 (1983), 487
- [19] Trunwald G. , *Über eine Vermutung von Thébault*, Elemente der Mathematik 41 (1986), 11–13.
- [20] V.Thébault, Problem 3887, *Three circles with collinear centers*, Amer. Math. Monthly, 45 (1938) 482–483.
- [21] Zvonko C., *On Thébault's Problem 3887*, Journal for Geometry and Graphics Volume 15 (2011), No. 2, 113–127.
- [22] Y.Sawayama, *A New Geometrical Proposition*, Amer. Math. Monthly, 12 (1905) 222–224.