

MATEMATYKA WYBORU

PATRYCJA LAMPARSKA

WSTĘP

Praca, którą tu przedstawiam, poświęcona jest różnym rodzajom metod głosowania, w których głosujący ustawiają kandydatów w określonym porządku, od najlepszego do najgorszego. Dla przykładu, członkowie zespołu przyjmującego do pracy nowych kandydatów ustawiają ich w takiej kolejności, od tego, którego by przyjęli najchętniej, do tego, którego najbardziej nie chcą przyjąć.

Celem mojej pracy było przede wszystkim wprowadzenie pewnego porządku do dużej liczby metod głosowania, przez ich podział na kilka różnych rodzajów. Podaję też trzy własne metody, żeby pokazać, że istniejące metody w żaden sposób nie wyczerpują wszystkich możliwości. Poza samymi metodami głosowania ważne jest też, jakie naturalne kryteria takie metody spełniają, dlatego dość duża część rozprawy poświęcona jest opisowi kryteriów i sprawdzeniom, czy są one spełnione przez poszczególne metody lub rodzaje metod.

Praca ta nie ma na celu przedstawienia znanych twierdzeń o różnych "niemożliwościach", na przykład twierdzenia Arrowa, mówiącego o tym, że przy braku dyktatora metoda nie może spełniać jednocześnie kryterium Pareto i kryterium niezależności (od nieistotnych wyborców). Podobnie, nie zajmuję się tutaj technikami manipulacji, czyli wykorzystywania słabości używanej metody do zmiany wyniku wyborów.

Ważną częścią mojej pracy było opanowanie zapisywania faktów matematycznych w sposób formalny. Dziękuję swojemu opiekunowi, prof. Stanisławowi Goldsteinowi, za pomoc w opanowaniu takich zapisów. Przy opracowaniu metod i głosowania posługiwałam się dwiema książkami poleconymi mi przez mojego opiekuna: "The mathematics of politics", autorzy E. Arthur Robinson, Jr i Daniel H. Ullman oraz "Social Choice and the Mathematics of Manipulation", autor Alan D. Taylor.

1. OKREŚLENIE PROBLEMU

W tej rozprawce będę się zajmowała *wyborami*, dlatego będę miała do czynienia z n -elementowym zbiorem *wyborców* N (będą to liczby od jednego do n) oraz z k -elementowym zbiorem *kandydatów* K .

Wybory, o których opowiadam w dalszym ciągu, różnią się od tych, z jakimi najczęściej mamy do czynienia. Wybór przez i -tego wyborcę polega tu na ustawieniu wszystkich kandydatów w kolejności *od najlepszego do najgorszego*. Kompletne wybory będą reprezentowane przez *profil*, w którym każdy z głosujących ustawia kandydatów w wybranej przez siebie kolejności.

Pokażę, że tego typu wybory są bardzo ciekawe, a część z nich ma zastosowanie praktyczne. Zacznę od wstępu matematycznego (rozdział 2), który pozwoli na zdefiniowanie podstawowych pojęć i policzenie, z jak dużymi zbiorami będziemy mieć

do czynienia. W rozdziale 3 przedstawię, jak będę opisywać metody głosowania, a następnie, w rozdziale 4, opiszę słowami kilka najpopularniejszych metod i pokażę, jak je stosować.

Kolejne dwa rozdziały (numer 5 i 6) poświęcone są kryteriom, jakich wymagamy od metod głosowania, by uznać je za rozsądne, interesujące lub sprawiedliwe. W rozdziałach 7 i 8 opiszę specjalne metody głosowania – najpierw niedemokratyczne, potem głosowania na dwóch kandydatów.

Najważniejszy, 9 rozdział mojej pracy poświęcony jest klasyfikacji metod głosowania. Ta klasyfikacja pozwala zaliczyć większość znanych metod do jednej z opisanych przeze mnie kategorii. Tutaj staram się opisywać wszystkie metody w sposób formalny.

W ostatnim rozdziale 10 opisuję trzy metody, które wymyśliłam, a w ostatnim rozdziale 10 sprawdzam, które typy metod spełniają określone kryteria. Te wyniki trzeba traktować jako nie do końca precyzyjne,

2. WSTĘP MATEMATYCZNY

Definicja 1. *Relacja binarna* R na zbiorze X to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times X$. To, że para $(x, y) \in X \times X$ należy do relacji R zapisujemy na ogół tak: xRy . *Ostry liniowy porządek* $\succ$ na zbiorze X to relacja $\succ$ na X spełniająca następujące warunki:

- (1) antyzwrotność: $\forall x \in X \neg(x \succ x)$
- (2) przechodniość: $\forall x, y, z \in X ((x \succ y \wedge y \succ z) \Rightarrow x \succ z)$
- (3) spójność: $\forall x, y \in X (x \succ y \vee y \succ x \vee x = y)$

Z ostrym porządkiem liniowym $\succ$ zwiążę (nieostry) porządek liniowy $\succeq$:

$$x \succeq y := x \succ y \vee x = y.$$

Zauważmy, że $\succeq$ jest rzeczywiście *liniowym porządkiem*, to znaczy spełnia następujące warunki:

- (1) zwrotność: $\forall x \in X x \succeq x$;
- (2) antysymetria: $\forall x, y \in X ((x \succeq y \wedge y \succeq x) \Rightarrow x = y)$;
- (3) przechodniość: $\forall x, y, z \in X ((x \succeq y \wedge y \succeq z) \Rightarrow x \succeq z)$;
- (4) spójność: $\forall x, y \in X (x \succeq y \vee y \succeq x)$.

Ostry porządek liniowy $\succ$ na skończonym k -elementowym zbiorze

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

utożsamiam z ciągiem

$$(x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ gdzie } x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3, \dots, x_{k-1} \succ x_k$$

(prościej: $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_k$).

Definicja 2. Dla porządku $\succ = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, x_1 jest *pierwszym* albo *najlepszym* elementem tego porządku, zaś x_k *ostatnim* albo *najgorszym* jego elementem.

Notacja 3. Dla dowolnego zbioru skończonego X oznaczam przez $\#X$ liczbę elementów tego zbioru. Zbiór funkcji określonych na zbiorze X i przyjmujących wartości w zbiorze Y oznaczamy przez Y^X . Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X można utożsamiać ze zbiorem 2^X , jeśli przyjąć, że $2 = \{0, 1\}$, a podzbiór zbioru $Z \subseteq X$ utożsamiać z funkcją, która elementom zbioru X przyporządkowuje 1, jeśli elementy te należą do Z i 0, gdy nie należą (to znaczy z funkcją charakterystyczną zbioru Z).

Stwierdzenie 4. *Jeśli zbiory X i Y są skończone, to $\#(Y^X) = \#Y^{\#X}$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że każdemu z $\#X$ elementów zbioru X można, niezależnie od siebie, przypisać jeden z $\#Y$ elementów zbioru Y , czyli pierwszemu dowolny z $\#Y$ elementów, drugiemu dowolny z $\#Y$ elementów, i tak dalej, aż do ostatniego elementu zbioru X . Razem takich możliwości jest $\#Y \cdot \#Y \cdot \dots \cdot \#Y$, liczba czynników w tym iloczynie jest równa $\#X$, stąd wynik. $\square$

Definicja 5. Niech $N := \{1, 2, \dots, n\}$, gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną. Zbiór N będę nazywać *zbiorem wyborców*. Przez $\mathbf{K}$ oznaczam dowolny skończony niepusty zbiór, zwany dalej *zbiorem kandydatów*. Przez k oznaczamy liczbę elementów w zbiorze $\mathbf{K}$, zaś przez K zbiór $\{1, 2, \dots, k\}$. Jego elementy oznaczam przez $A_1, \dots, A_k$, natomiast gdy jest ich kilku, często również przez $A, B, C, \dots$. Wybór i -tego wyborcy to (ostrzy liniowy) porządek $\succ_i$ na zbiorze $\mathbf{K}$. Nazywam go często *rankingiem*. Skończony ciąg $\mathbf{P} := (\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_n)$ nazywamy *profilem* lub dokładniej *$(\mathbf{K}, n)$ -profilem*. Profil reprezentuje konkretne zakończone wybory. Zbiór wszystkich $(\mathbf{K}, n)$ -profilu oznaczam przez $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{K}, n)$.

Niech $\succ_i = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ będzie rankingiem i -tego wyborcy w profilu $\mathbf{P}$. Mówimy, że kandydat A_ℓ jest ℓ -tym wyborem i -tego wyborcy i jest na pozycji ℓ w rankingu $\succ_i$ profilu $\mathbf{P}$. W tej sytuacji piszemy $\ell = \text{poz}_i(A; \mathbf{P})$.

Pierwszy i ostatni element rankingu $\succ_i$ profilu $\mathbf{P}$ oznaczam przez $\text{top}_i(\mathbf{P})$, $\text{bottom}_i(\mathbf{P})$. Jest to *najlepszy* i *najgorszy* (lub *pierwszy* i *ostatni*) wybór (kandydat) i -tego wyborcy. Zauważmy, że $\text{poz}_i(\text{top}_i(\mathbf{P}); \mathbf{P}) = 1$ i $\text{poz}_i(\text{bottom}_i(\mathbf{P}); \mathbf{P}) = n$.

Liczbę pierwszych (ostatnich) wyborów dla kandydata A w profilu $\mathbf{P}$ oznaczamy przez $\text{Top}(A; \mathbf{P})$ i $\text{Bottom}(A; \mathbf{P})$. Innymi słowy,

$$\text{Top}(A; \mathbf{P}) = \#\{i \in N : \text{top}_i(\mathbf{P}) = A\},$$

natomiast

$$\text{Bottom}(A; \mathbf{P}) = \#\{i \in N : \text{bottom}_i(\mathbf{P}) = A\}.$$

W dalszym ciągu będę oznaczać przez $\succeq_i$ nieostre porządki liniowe odpowiadające ostrym porządkom $\succ_i$.

Przy zbiorze k kandydatów możemy ich ustawić w rankingu na $k!$ sposobów. Dlatego liczba $(\mathbf{K}, n)$ -profilu wynosi $(k!)^n$.

Ważnym przekształceniem, którego będę używała, jest *obcięcie profilu*, w którym $(\mathbf{K}, n)$ -profil $\mathbf{P}_{(\mathbf{K}, n)}$ będzie zmieniany w $(\mathbf{K}', n)$ -profil $\mathbf{P}_{(\mathbf{K}', n)}$, gdzie $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$. Zmiana polega na tym, że rankingi $\succ_i$ poszczególnych wyborców będą ograniczane do zbioru $\mathbf{K}'$, a nowy profil $\mathbf{P}_{(\mathbf{K}', n)}$ nazwę *obcięciem* profilu $\mathbf{P}_{(\mathbf{K}, n)}$ do zbioru $\mathbf{K}'$.

Wiele metod używa *pojedynków jeden na jeden*, dlatego wygodnie jest mieć oznaczenie dla liczby takich wygranych pojedynków:

Przez $W(A, B; \mathbf{P})$ oznaczamy liczbę zwycięstw kandydata A nad kandydatem B w pojedynkach *jeden na jeden*:

$$W(A, B; \mathbf{P}) = \#\{i \in N : A \succ_i B\}.$$

Definicja 6. Funkcją wyboru $\mathbf{V}$ (dla pary $(\mathbf{K}, n)$) nazywamy dowolną funkcję ze zbioru profilu $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{K}, n)$ w zbiór wszystkich podzbiorów $2^{\mathbf{K}}$ zbioru kandydatów $\mathbf{K}$. Funkcję wyboru nazywamy też *funkcją wyboru społecznego* lub *metodą głosowania*. Jeśli $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ jest zbiorem jednoelementowym dla każdego profilu $\mathbf{P}$, to metodę $\mathbf{V}$ będę nazywać *rozstrzygającą*. Jeśli $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ ma dla każdego profilu jeden element lub jest zbiorem pustym, to funkcję wyboru nazwę *rozstrzygającą z możliwością porażki*.

Wartość $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ interpretujemy jako wynik wyborów, to znaczy zbiór kandydatów, którzy są zwycięzcami tych wyborów. Jeśli $\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \emptyset$, to znaczy, że wybory były nieudane i nie doprowadziły do wyboru żadnego kandydata. Jeśli $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ jest zbiorem jednoelementowym, to znaczy, że jest jedyny zwycięzca wyborów. Jeśli funkcja wyboru jest rozstrzygająca, to każde głosowanie wybiera jednego *zwycięzcę*. Jeśli jest rozstrzygająca z możliwością porażki, to albo wybieramy jedynego zwycięzcę, albo nie wybieramy nikogo. Jeśli $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ ma więcej niż jeden element, to mówimy o *remisie*, i każdy element $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ jest zwycięzcą.

Zgodnie ze Stwierdzeniem 4, metod głosowania dla $(\mathbf{K}, n)$ -profilu jest $(2^k)^{(k!)^n} = 2^{k(k!)^n}$. Na przykład, dla 4 głosujących i 3 kandydatów, będzie ich

2538768736352482899271884166616737579456509122944293940088445539941097
5673758471507852827704683748697860400616560009623555386030542015925676
2958750635780095241275642796457272617904078383639428503594875277412832
4529953373647299045775899643111109014518398403901989615021425588287720
8804137720305991907985902091717709882437503935234949063705835781895905
1000402586098314992538707818907467757691675257613583313676393171440754
2990342953994253598862909937913170904220955920490722751759930684735762
2329649892549453083136154100419744942008393296373390629857826967639470
1611740030958031479422630772435108338197415462209889870028989098246336
0020621057779956123274710893707037805270495600757334561141082095501116
1727733341392703905059393714488959386040943865844056196267040229137144
3336635114388515340179588575123667348568825964646692934660141183084571
3740441766470186676959388818726058248262998368173335343665540832475692
7513459298960656660264740040418963562807675788674394820479493431927133
9679892301603907358176094501393110913923504525042745816401673411352386
7367494705114517577870389026748106597536248760100738861134964616028017
233171638352916199997199220147154784471234753069056.

Rozstrzygających metod głosowania jest $k^{(k!)^n}$, bo w zbiorze $\mathbf{K}$ jest k podzbiorów jednoelementowych. W powyższym przykładzie, przy 3 kandydatach i 4 głosujących, rozstrzygających metod głosowania jest

2234323825912686603652498758384161746484884021795349332950684462029766
5002351600645249077433245312869613558549905759786376639350432790604456
5198275993176292715996628394735364755386255060552536185316114905432119
4408052801650020903728327074633504458321589284912207657647101938774424
0771450483682822779317110857011557225602993860868157357726085880496533
2948663791171875064740477862284287766410390387319046260792534185549504
8286596263521392156429585975057984092006559195430503064164879095713016
6542073576733344520413151595418296311361743881317228953750830529620678
52219166130382579345714668759699980965404339782604112960321.

Jak już pisałam, wyborcy tworzą rankingi. Jeśli wynik wyborów zależy tylko od pierwszego wyboru każdego wyborcy, to mówimy o *funkcji wyboru jednego kandydata* lub *głosowaniu na jednego kandydata*. Dokładniej,

Definicja 7. Metoda $\mathbf{V}$ jest *głosowaniem na jednego kandydata*, jeżeli spełniony jest następujący warunek:

dla dowolnych profili $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$, jeśli $\text{top}_i(\mathbf{P}) = \text{top}_i(\mathbf{P}')$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to $\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \mathbf{V}(\mathbf{P}')$.

Jeśli $\mathbf{V}$ jest głosowaniem na jednego kandydata, to *uproszczony profil* będzie oznaczał po prostu n -elementowy ciąg kandydatów, i takich profili będzie k^n .

Jeśli dana metoda jest głosowaniem na jednego kandydata, to jest ona funkcją *uproszczonego profilu*. Metod głosowania na jednego kandydata jest więc $2^{k(k^n)}$, czyli w moim przypadku 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, zaś rozstrzygających metod głosowania na jednego kandydata jest zaledwie k^{k^n} , czyli u mnie 443426488243037769948249630619149892803.

Głosowanie bardzo się upraszcza, jeśli jest tylko *dwóch kandydatów*. W tej sytuacji ranking i -tego kandydata wygląda tak: $\succ_i = (\text{top}_i(\mathbf{P}), \text{bottom}_i(\mathbf{P}))$, czyli zawsze mamy do czynienia z *głosowaniem na jednego kandydata*. Liczba metod dla pary $(\mathbf{K}, n)$ z $\#\mathbf{K} = 2$ wynosi $2^{2(2^n)} = 2^{2^{n+1}}$, natomiast metod rozstrzygających jest 2^{2^n} . Dla $n = 4$ mamy odpowiednio 4294967296 i 65536 metod.

W przypadku *jednego kandydata* sytuacja staje się trywialna. Wszyscy wyborcy głosują na tego samego kandydata. Istnieją tylko dwie metody głosowania: rozstrzygająca, w której wybiera się tego jedyne kandydata, oraz nieudana, kiedy wynikiem wyborów jest zbiór pusty.

Metody głosowania mogą mieć różne *własności*. Dana metoda może taką *własność posiadać lub nie*. Formalnie, własność określona jest dla danej pary $(\mathbf{K}, n)$ jako funkcja o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$; jeśli wartość tej funkcji wynosi 1, to znaczy, że metoda tę własność posiada, i 0, jeśli nie posiada. Przykładem takiej własności jest *rozstrzygalność*: funkcja wyboru jest rozstrzygająca.

Chociaż formalnie zarówno metody, jak i ich własności, formułowane są dla konkretnych zbiorów $(\mathbf{K}, n)$ kandydatów i wyborców, większość metod i własności formułowanych jest tak, żeby dało się je zastosować do dowolnej takiej pary. Wyżej wymieniona rozstrzygalność jest przykładem takiej własności.

Jest oczywiste, że spośród ogromnej liczby możliwych metod tylko niektóre będą miały praktyczne znaczenie. Dlatego ważne jest, by metody były *rozsądne*. Dalej podam przykład takiej nierozsądnej metody. Dla odróżnienia metod rozsądnych od nierozsądnych używać będę *kryteriów*. *Kryteria to własności, których spełniania oczekujemy od każdej rozsądnej metody*. Pojęcie to nie jest ściśle określone, i to, co rozsądne dla jednych, może być nierozsądne dla innych. W dodatku okaże się, że niemożliwe jest jednoczesne spełnienie nawet bardzo naturalnych kryteriów.

3. SPOSÓB OPISU METOD GŁOSOWANIA

W tym rozdziale wyjaśnię, jak będą nieformalnie opisywane metody głosowania. Następny rozdział będzie zawierał opis najbardziej znanych metod głosowania (funkcji wyboru społecznego).

Definicja 8. *Tabela profilu* to tabela, w której kolejne kolumny odpowiadają kolejnym głosującym (od 1 do n), w kolumnie kandydaci ustawieni są od góry do dołu w kolejności preferencji, z najlepszymi w pierwszym wierszu (innymi słowy, w i -ta kolumna to ranking i -tego wyborcy. Wierszy jest tyle, co kandydatów.

Jest oczywiste, że istnieje bijektywna odpowiedniość między profilami i tabelami profili.

Definicja 9. *Profil podliczony Q profilu P* to zbiór par $\{(\succ'_j, n_j)\}_{j=1}^m$ taki, że $\succ'_j$ są ostrymi porządkami liniowymi, $0 \leq n_j \leq n$ dla $j = 1, \dots, m$, gdzie m jest liczbą różnych elementów ciągu $\mathbf{P}$, dla każdego j istnieje dokładnie n_j takich $i \in N$, że $\succ_i = \succ'_j$ oraz $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Obiekty takie jak $\mathbf{Q}$ nazywamy często multizbiorami, z każdym elementem podana jest liczba jego wystąpień. Widać, że każdy ciąg skończony można zamienić

na taki multizbiór, choć zrekonstruowanie ciągu z takiego multizbioru nie jest na ogół możliwe. Z drugiej strony, łatwo zauważyć, że

Stwierdzenie 10. *Dwóm różnym profilom odpowiada taki sam profil podliczony wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest jakąś permutacją drugiego. Możemy powiedzieć, że profil podliczony wyznacza profil z dokładnością do permutacji zbioru wyborców N .*

Dowód. Jeśli dwóm profilom $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ odpowiada ten sam profil podliczony, to każdy element $\succ'_j$ profilu podliczonego musi wystąpić tę samą liczbę n_j razy w każdym z tych profili, i nie mogą tam wystąpić żadne inne elementy. Jeśli $\succ'_j$ występuje w profilu $\mathbf{P}_1$ na miejscach $i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_{n_j}^{(1)}$, natomiast w profilu $\mathbf{P}_2$ na miejscach $i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_{n_j}^{(2)}$, to kładziemy $\sigma(i_1^{(1)}) = i_1^{(2)}, \sigma(i_2^{(1)}) = i_2^{(2)}, \dots, \sigma(i_{n_j}^{(1)}) = i_{n_j}^{(2)}$. Postępujemy tak dla $j = 1, 2, \dots, m$. Otrzymana funkcja σ jest bijekcją N na N taką, że $\mathbf{P}_2 = (\succ_{\sigma(1)}, \succ_{\sigma(2)}, \dots, \succ_{\sigma(n)})$, czyli profil $\mathbf{P}_2$ jest permutacją profilu $\mathbf{P}_1$.

Jeśli jeden z profili jest permutacją drugiego, to teza wynika wprost z Definicji 9. $\square$

Definicja 11. *Tabela podliczonego profilu to tabela, w której w wierszu zerowym podane są liczby $n_1, n_2, \dots, n_m$, pod nimi kolumny odpowiadające $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$. Kolejność kolumn (wraz z liczbami wystąpień w zerowym wierszu) jest dowolna (to znaczy nie odróżniamy od siebie dwóch tabeli różniących się tylko kolejnością kolumn).*

Znowu widać, że istnieje wzajemnie jednoznaczna (bijektywna) odpowiedniość między podliczonymi profilami i tabelami podliczonych profili.

Uwaga. Przy głosowaniu na jednego kandydata tabela uproszczonego profilu ma tylko wiersz numer 1, natomiast tabela uproszczonego podliczonego profilu wiersze numer 0 i 1.

4. NAJPOPULARNIEJSZE METODY GŁOSOWANIA

Poniżej opiszemy pięć najpopularniejszych funkcji wyboru (metod głosowania). Jak już wspomniałam wyżej, metody mają tę własność, że stosują się do każdej pary $(\mathbf{K}, n)$. Formalnie, dla każdego $(\mathbf{K}, n)$ są to inne metody (funkcje), ale działają one według tego samego schematu.

Metoda maksimum Metoda polega na wyłonieniu najlepszego lub najlepszych na podstawie pierwszych miejsc w rankingach wyborców. Dla każdego kandydata zliczamy, ile razy jest on pierwszym (najlepszym) wyborem. Ten kandydat (lub kandydaci), który ma najwięcej takich głosów, jest zwycięzcą (lub są zwycięzcami). Zauważ, że metoda maksimum to głosowanie na jednego kandydata. Rzeczywiście, dla wyniku wyborów nie ma znaczenia, kogo wyborcy umieszczają na miejscach innych niż pierwsze.

Metoda Bordy Metoda polega na przyznawaniu punktów kandydatom na podstawie rankingów, w celu wyłonienia najlepszego kandydata. Za każde miejsce w rankingu przyznajemy odpowiednią liczbę punktów. Punktacja jest najwyższa za najwyższe miejsce w rankingu i maleje w miarę obniżania pozycji. Dokładniej, liczba punktów dla kandydata, który jest ℓ -tym wyborem u danego wyborcy, to $n - \ell$. Innymi słowy, kandydaci za kolejne miejsca w rankingu u danego wyborcy dostają kolejno $n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 0$ punkty. Punkty każdego kandydata od kolejnych

wyborców są sumowane i kandydat (kandydaci) z największą liczbą punktów jest zwycięzcą (są zwycięzcami).

Metoda Hare’a Metoda polega na kolejnym eliminowaniu kandydatów, którzy są najlepsi u najmniejszej liczby głosujących. Po wyeliminowaniu jednego lub więcej kandydatów stosujemy znów eliminację do profilu powstałego przez przesunięcie w rankingach kandydatów na wyższe miejsca, pozostałe po usuniętych kandydatach, bez zmiany preferencji wyborców w stosunku do pozostałych kandydatów. Eliminację kończymy, gdy pozostał tylko jeden kandydat lub gdy wszyscy pozostali kandydaci są najlepsi u tej samej liczby wyborców. Ten kandydat jest zwycięzcą (lub ci wszyscy kandydaci są zwycięzcami).

Metoda Coombsa Metoda polega na kolejnych eliminacjach kandydatów, którzy są najgorsi u największej liczby głosujących. Po wyeliminowaniu jednego lub więcej kandydatów powtarzamy znów eliminację do profilu powstałego przez przesunięcie w rankingach kandydatów na wyższe miejsca, pozostałe po usuniętych kandydatach, bez zmiany preferencji wyborców w stosunku do pozostałych kandydatów. Eliminację kończymy, gdy pozostał tylko jeden kandydat lub wszyscy pozostali kandydaci są najgorsi u tej samej liczby wyborców. Ten kandydat jest zwycięzcą (lub ci wszyscy kandydaci są zwycięzcami).

Metoda Copelanda Metoda polega na bezpośrednich pojedynkach każdego kandydata z każdym, za które otrzymują oni punkty. Każdy pojedynek opiera się na analizowaniu rankingów wyborców, w celu ustalenia, ile razy jeden kandydat jest wyżej w rankingu od drugiego. Kandydat lepszy (czyli ten, który jest więcej razy wyżej w rankingu) otrzymuje 1 punkt za pojedynczy pojedynek, zaś w sytuacji remisu obaj otrzymują po połowie punktu. Następnie zliczane są punkty każdego kandydata, w celu wyłonienia najlepszego lub, w przypadku takiego samego wyniku, wyłonienia kilku najlepszych. Ten kandydat jest zwycięzcą (lub ci wszyscy kandydaci są zwycięzcami).

Przykład 12. Przedstawiona poniżej tabela podliczonego profilu z 5 kandydatami i 22 wyborcami będzie służyła do ilustracji różnych metod głosowania.

8	6	4	2	2
A	B	C	D	E
C	E	B	B	D
D	D	D	E	B
B	C	A	C	A
E	A	E	A	C

TABELA 1

Metoda maksimum

W przedstawionym powyżej zestawieniu wyników najczęściej razy pierwszym wyborem był kandydat A. Został on wybrany 8 razy. Ogólnie, zwycięzcę lub zwycięzców znajdujemy przeglądając wiersze 0 i 1 tabeli podliczonego profilu, trzeba mianowicie wybrać kandydata (lub kandydatów) z wiersza pierwszego, któremu w wierszu zerowym odpowiada największa liczba. Tak więc zwycięzcą jest kandydat A.

Metoda Bordy

Obliczamy liczbę punktów dla każdego kandydata:

- $A = (8 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (4 \cdot 1) + (2 \cdot 0) + (2 \cdot 1) = 38$
- $B = (8 \cdot 1) + (6 \cdot 4) + (4 \cdot 3) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 2) = 54$
- $C = (8 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (4 \cdot 4) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 0) = 48$
- $D = (8 \cdot 2) + (6 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (2 \cdot 4) + (2 \cdot 3) = 50$
- $E = (8 \cdot 0) + (6 \cdot 3) + (4 \cdot 0) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 4) = 30$

Z powyższych obliczeń wynika, że zwycięzcą jest kandydat B.

Metoda Hare'a

W pierwszej kolejności eliminujemy kandydatów, którzy najrzadziej są pierwszym wyborem, czyli tych z pierwszego wiersza, którym odpowiada najmniejsza liczba w wierszu zerowym. Są to kandydaci D i E. Po ich eliminacji rankingi wyglądają następująco:

8	6	4	2	2
A	B	C	B	B
C	C	B	C	A
B	A	A	A	C

Tu kandydat A jest pierwszym wyborem dla 8 wyborców, kandydat B dla 10 wyborców, zaś kandydat C dla 4 wyborców. Eliminujemy więc kandydata C. Nowa tabela wygląda tak:

8	6	4	2	2
A	B	B	B	B
B	A	A	A	A

Zatem kandydat A jest pierwszym wyborem dla 8 wyborców, zaś kandydat B dla 14 wyborców. Zwycięzcą jest kandydat B.

Metoda Coombsa

Zliczamy, ile razy każdy z kandydatów był najgorszym wyborem. Kandydat E wystąpił 12 razy jako najgorszy, kandydat A wystąpił 8 razy, zaś kandydat C tylko 2 razy (kandydaci B i D nie byli najgorszymi dla żadnego wyborcy). Eliminujemy więc kandydata E. Otrzymujemy następującą tabelkę:

8	6	4	2	2
A	B	C	D	D
C	D	B	B	B
D	C	D	C	A
B	A	A	A	C

Teraz najczęściej najgorszym wyborem jest A, bo aż 12 razy, przy 8 razach dla B i 2 dla C. Po eliminacji A tabela wygląda tak:

8	6	4	2	2
C	B	C	D	D
D	D	B	B	B
B	C	D	C	C

Jak widać, najwięcej głosów najgorszych otrzymał kandydat C, mianowicie 12, przy 8 dla B i 4 dla D. Eliminujemy więc C, co prowadzi do takiej tabelki:

4	3	2	1	1
D	B	B	D	D
B	D	D	B	B

Tu B jest najgorszym wyborem dla 6 wyborców, zaś D dla 5. Zwycięzcą zostaje więc kandydat D.

Metoda Copelanda Poniżej wypisujemy wyniki meczów "jeden na jednego".

A	8	A	10	A	8	A	12
B	14	C	12	D	14	E	10
B	10	B	10	B	20	C	12
C	12	D	12	E	2	D	10
		C	12	D	8		
		E	10	E	14		

Sprawdzamy, że A wygrywa raz, czyli ma 1 punkt, B zdobywa 2 punkty, C zdobywa 4 punkty, D 2 punkty i E 1 punkt. Zwycięzcą zostaje C.

Okazuje się, że zastosowanie różnych metod głosowania daje różne wyniki — poniżej przedstawiam metody, które dają zwycięstwo odpowiednio kandydatowi:

- (1) A — metoda maksimum;
- (2) B — metody Bordy i Hare'a;
- (3) C — metoda Copelanda;
- (4) D — metoda Coombsa;

Żadna z powyższych metod nie daje zwycięstwa kandydatowi E.

Zauważmy, że z powyższych 5 metod tylko jedna, czyli metoda maksimum, jest głosowaniem na jednego kandydata (chyba, że mamy tylko dwóch lub jednego kandydata). Żadna z tych metod nie jest, w ogólnym przypadku, rozstrzygająca (choć w naszym przykładzie każda z nich wybierała jednego zwycięzcę).

5. PODSTAWOWE KRYTERIA WYBORÓW DEMOKRATYCZNYCH

Wybory są *demokratyczne*, jeśli głos każdego wyborcy jest tak samo istotny, a także gdy żaden z kandydatów nie jest faworyzowany. Prowadzi to do dwóch ważnych kryteriów głosowania: *anonimowości* i *neutralności*.

Definicja 13. Metoda głosowania $\mathbf{V}$ jest *anonimowa* jeśli dla dowolnej permutacji σ zbioru głosujących N (tzn. σ jest bijekcją N na N) i dowolnego profilu $\mathbf{P}$ zachodzi

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \mathbf{V}(\sigma(\mathbf{P})),$$

gdzie $\sigma((\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_n)) := (\succ_{\sigma(1)}, \succ_{\sigma(2)}, \dots, \succ_{\sigma(n)})$.

Innymi słowy, przenumerowanie głosujących (przypisanie im innych numerów) nie może wpływać na wynik głosowania. Jeśli stosujemy anonimową metodę głosowania, to o wyborcach mówimy, że są *anonimowi*.

Twierdzenie 14. Funkcja wyboru (metoda głosowania) jest anonimowa wtedy i tylko wtedy, gdy zależy tylko od podliczonego profilu.

Dowód. Dowód wynika wprost ze Stwierdzenia 10 i Definicji 13. □

Definicja 15. Metoda głosowania $\mathbf{V}$ jest *neutralna* jeśli dla dowolnej permutacji σ zbioru kandydatów K i dowolnego profilu $\mathbf{P}$ zachodzi

$$\mathbf{V}((\sigma(\succ_1), \sigma(\succ_2), \dots, \sigma(\succ_n))) = \sigma(\mathbf{V}((\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_n))),$$

gdzie dla ostrego liniowego porządku $\succ = (A_1, A_2, \dots, A_k)$,

$$\sigma(\succ) := (\sigma(A_1), \sigma(A_2), \dots, \sigma(A_k)).$$

Wszystkie rozważane do tej pory metody głosowania (maksimum, Bordy, Hare'a, Coombsa i Copelanda) są zarówno anonimowe, jak i neutralne.

6. INNE KRYTERIA WYBORU

Do tej pory poznaliśmy trzy kryteria wyboru: rozstrzygalność, anonimowość i neutralność. Wymaganie rozstrzygalności jest na ogół zbyt silne. Wystarczy zauważyć, że już przy dwóch kandydatach i parzystej liczbie wyborców może się zdarzyć, że każdy z kandydatów otrzyma tę samą liczbę głosów. W tej sytuacji żadna z naszych pięciu metod nie da jednoznacznego rozstrzygnięcia. Zobaczmy później, że z brakiem rozstrzygalności można sobie radzić — jest sporo sposobów na wybór, spośród zbioru $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ jednego zwycięzcy. Dwa pozostałe kryteria, czyli anonimowość i neutralność, to naturalne wymagania dla wyborów, jeśli chcemy je nazwać demokratycznymi. Tym niemniej spełnianie tylko tych dwóch kryteriów nie gwarantuje, że metoda wyboru będzie “rozsądna”.

Przykład 16. Wyobraźmy sobie głosowanie na jednego kandydata i następującą funkcję wyboru: Każdy kandydat, który otrzyma parzystą liczbę głosów, wygrywa wybory. Jeśli kandydatów jest dwóch, powiedzmy $\mathbf{K} = A, B$, to przy parzystej liczbie głosujących albo obaj zostają zwycięzcami, albo żaden z nich. Jeśli liczba głosujących jest nieparzysta, to metoda ta jest rozstrzygająca, ale z pewnością nierozsądna: Jeśli kandydat A otrzyma wszystkie głosy, a kandydat B ani jednego, to wygra kandydat B! Metoda ta działa równie źle przy wielu kandydatach: dodanie kandydatowi jednego głosu zamienia przegranego w zwycięzcę, a zwycięzcę w przegranego.

Z powyższego przykładu widać, że potrzebne są jeszcze inne naturalne kryteria. Okaże się jednak, że nie należy od metody wyboru wymagać zbyt wiele. Poniżej wypiszę najczęściej stosowane kryteria wraz z ich formalną definicją. Zakładamy poniżej, że V jest funkcją $(n, \mathbf{K})$ -profilu, przy ustalonych n i $\mathbf{K}$.

- **Kryterium jednomyślności:** Jeśli jakiś kandydat jest pierwszym wyborem wszystkich głosujących, to zostaje on jedynym zwycięzcą.

$$\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} (\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A\} \Leftrightarrow \forall i \in N : A = \text{top}_i(\mathbf{P}))$$

- **Kryterium większościowe:** Jeśli jakiś kandydat jest pierwszym wyborem ponad połowy wszystkich głosujących, to zostaje on jedynym zwycięzcą.

$$\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} (\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A\} \Leftrightarrow \text{Top}(A; \mathbf{P}) > n/2)$$

- **Kryterium Pareto:** Kandydat nie może zostać zwycięzcą, jeśli istnieje inny kandydat, którego każdy wyborca od niego woli.

$$\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} ((\exists B \in \mathbf{K} \forall i \in N (B \succ_i A)) \Rightarrow A \notin \mathbf{V}(\mathbf{P}))$$

- **Kryterium nienadkładania się:** Dla każdego kandydata istnieją takie wybory (czyli taki profil), że jest on ich jedynym zwycięzcą.

$$\forall A \in \mathbf{K} \exists \mathbf{P} \in \mathcal{P} (\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A\})$$

- **Kryterium Condorceta:** Jeśli jakiś kandydat wygrywa pojedynki “jeden na jeden” ze wszystkimi innymi kandydatami, to zostaje on jedynym zwycięzcą.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} ((\forall B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} W(A, B; \mathbf{P}) > W(B, A; \mathbf{P})) \\ \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A\}) \end{aligned}$$

- **Słabe kryterium Condorceta:** Jeśli jakiś kandydat wygrywa lub remisuje pojedynki “jeden na jeden” ze wszystkimi innymi kandydatami, to zostaje on zwycięzcą (być może nie jedynym).

$$\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} ((\forall B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} W(A, B; \mathbf{P}) \geq W(B, A; \mathbf{P})) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A\})$$

- **Kryterium anty-Condorceta:** Jeśli jakiś kandydat przegrywa pojedynki “jeden na jeden” ze wszystkimi innymi kandydatami, to nie może on zostać zwycięzcą.

$$\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} ((\forall B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} W(A, B; \mathbf{P}) < W(B, A; \mathbf{P})) \Rightarrow A \notin \mathbf{V}(\mathbf{P}))$$

- **Kryterium monotoniczności:** Jeśli kandydat wygrywa konkretne wybory, to zostaje też zwycięzcą wyborów, w których któryś z głosujących “poprawi” jego miejsce w rankingu o jedną pozycję, zamieniając go w ranking z kandydatem o jedną pozycję lepszym.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} \forall \mathbf{P}' \in \mathcal{P} \forall A \in \mathbf{K} ((A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \wedge (\exists i \in N \exists B \in \mathbf{K} \\ (\mathbf{P}|N \setminus \{i\} = \mathbf{P}'|N \setminus \{i\} \wedge \text{poz}_i(A; \mathbf{P}) = \text{poz}_i(B; \mathbf{P}') = \\ \text{poz}_i(B; \mathbf{P}) + 1 = \text{poz}_i(A; \mathbf{P}') + 1))) \Rightarrow A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}')) \end{aligned}$$

- **Kryterium niezależności:** Jeśli kandydat A jest w wyborach $\mathbf{P}$ zwycięzcą, a kandydat B przegranym, to w żadnych wyborach $\mathbf{P}'$, w których wszyscy głosujący tak samo ustawiają względem siebie kandydatów A i B , kandydat B nie może być zwycięzcą.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathcal{P} \forall A, B \in \mathbf{K} (A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \wedge B \notin \mathbf{V}(\mathbf{P}) \wedge \\ (\forall i \in N (A \succ_i B \Leftrightarrow A \succ'_i B)) \Rightarrow B \notin \mathbf{V}(\mathbf{P}')) \end{aligned}$$

7. NIEDEMOKRATYCZNE METODY WYBORU

Jak zobaczymy w dalszym ciągu, może się zdarzyć, że metoda jest demokratyczna, mimo że nie jest anonimowa i/lub neutralna. Najczęściej jednak brak anonimowości lub neutralności powstaje w wyniku użycia metod głosowania typowych dla dyktatur i monarchii.

Definicja 17. Dla dowolnego podzbioru M zbioru wyborców N , *pluriwirat* ze zbiorem decydentów M to metoda głosowania $\mathbf{V}$ spełniająca dla dowolnego profilu $\mathbf{P}$ warunek:

$$A \in \mathbf{V}(|P) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{top}_i(\mathbf{P}) = A \text{ dla pewnego } i \in M.$$

Pluriwirat nazywamy *dyktaturą* gdy M jest zbiorem jednoelementowym, *duumwiratem* gdy dwuelementowym, *triumwiratem* gdy jest zbiorem trzelementowym, *omniwiratem* gdy $M = N$. Rozstrzygający pluriwirat bywa przez niektórych autorów (niezbyt udanie) nazywany *oligarchią*.

Zauważmy, że poza sytuacjami skrajnymi (gdy $M = \emptyset$ lub $M = N$) pluriwirat nie jest anonimowy. Pluriwirat z pustym zbiorem M prowadzi do głosowania zawsze nieudanego. Pluriwirat jest zawsze głosowaniem na jednego kandydata.

Definicja 18. Dla dowolnego podzbioru $\mathbf{L}$ zbioru kandydatów $\mathbf{K}$, *pluriarchia* ze zbiorem zwycięzców $\mathbf{L}$ to metoda głosowania $\mathbf{V}$ spełniająca dla dowolnego profilu $\mathbf{P}$ warunek:

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \mathbf{L}.$$

Pluriarchię z pustym zbiorem $\mathbf{L}$ to anarchia, z jednoelementowym zbiorem $\mathbf{L}$ to *monarchia*. Jeśli zbiór $\mathbf{L}$ ma więcej niż jeden element, to nazywa się go też *radą regencyjną*. W przypadku $\mathbf{L} = \mathbf{K}$ mówimy o *omniarchii* jak również o *totalnym remisie*.

Zauważmy, że poza sytuacjami skrajnymi (anarchia, omniarchia) pluriarchia nie jest neutralna.

8. METODY WYBORU DWÓCH KANDYDATÓW

Metody z dwoma kandydatami to zawsze metody głosowania na jednego kandydata. Wśród nich wyróżnia się metoda zwykłej większości, która spełnia najwięcej kryteriów wymaganych od metod głosowania. Tym niemniej, nie jest to jedyna możliwa rozsądna metoda. Opiszemy też poniżej metody superwiększości i jednomyślności. Metody ważonego wpływu nie są anonimowe i mogą być istotne również dla metod głosowania na więcej niż dwóch kandydatów.

Definicja 19. Dla dowolnego zbioru wyborców N , metoda *zwykłej większości* to metoda głosowania $\mathbf{V}$ spełniająca dla dowolnego profilu $\mathbf{P}$ warunek:

$$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{Top}(A; \mathbf{P}) > n/2.$$

W przypadku metody zwykłej większości, przy parzystej liczbie wyborców, możliwy jest remis między kandydatami. W tej sytuacji zbiór zwycięzców byłby pusty. Można metodę zwykłej większości zmodyfikować tak, by przy remisie wygrywali obaj kandydaci, albo żeby zwycięzca był wyłaniany inną metodą. Dwie narzucające się to metoda losowania zwycięzcy lub metoda *status quo*, gdzie zwycięzca w remisowym głosowaniu jest wskazywany arbitralnie jeszcze przed głosowaniem. Metoda status quo jest stosowana na ogół wtedy, gdy jeden z kandydatów sprawował już funkcję, dla której odbywają się wybory (np. był już wójtem w poprzedniej kadencji) i wtedy status quo oznacza, że w przypadku remisu to on otrzymuje tę funkcję (np. zostaje znowu wójtem). Oba opisane sposoby wyłaniania jednego zwycięzcy spośród zbioru zwycięzców (losowa, status quo) mogą być też stosowane przy dowolnej metodzie wyborczej, która nie jest rozstrzygająca.

Definicja 20. Dla dowolnej liczby α z przedziału $(1/2, 1]$, metoda *superwiększości o progu α* jest zdefiniowana warunkiem

$$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{Top}(A; \mathbf{P}) > \alpha n.$$

Definicja 21. Jeśli $\alpha = 1$, mamy do czynienia z *metodą jednomyślności*:

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A\} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall i : \text{top}_i(\mathbf{P}) = A.$$

(lub, równoważnie, jeśli $\text{Top}(A; \mathbf{P}) = n$).

Wyżej opisane metody mogą wyłonić jednego zwycięzcę lub doprowadzić do braku rozstrzygnięcia, gdy zbiór zwycięzców jest pusty.

Wszystkie te metody mogą być stosowane również w przypadku wyboru spośród więcej niż dwóch kandydatów i są szczególnym przypadkiem *metod progu wyborczego*.

9. KLASYFIKACJA METOD WYBORU

W tym rozdziale zakładam, że liczba kandydatów jest większa niż dwa. Postaram się podzielić metody na grupy, charakteryzujące się podobnym sposobem wyłaniania zwycięzcy lub zwycięzców. Opiszę następujące grupy metod:

- Metody większościowe (np. metoda maksimum)
- Metody punktowe (np. metoda Bordy, metoda Copelanda)
- Metody generowane kryteriami (np. metoda Pareto)
- Metody kolejnych eliminacji (np. metoda Hare'a, metoda Coombsa)
- Metody agendy (np. metoda kolejnych par)

9.1. Metody większościowe. *Metody większościowe* to metody, w których zwycięstwo zależy tylko od liczby głosów uzyskanych przez nich (jako najlepszych kandydatów), to znaczy dla kandydata A ważna jest tylko liczba $\text{Top}(A; \mathbf{P})$. Wszystkie te metody są *głosowaniem na jednego kandydata*. Poniżej kilka przykładów (w tym opisana wcześniej metoda maksimum):

Metoda maksimum:

$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall B \in \mathbf{K} : \text{Top}(A; \mathbf{P}) \geq \text{Top}(B; \mathbf{P})$.

Metody progu wyborczego Dla dowolnego $\alpha \in (0, 1]$ metoda progu wyborczego z *progiem* α działa według zasady:

$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Top}(A; \mathbf{P}) > \alpha n$.

Niewielka modyfikacja tej metody jest stosowana przy polskich wyborach do sejmu. Wszyscy ‘kandydaci’ są podzieleni na *partie* i *koalicje*. Próg wyborczy dla partii wynosi 0,05, dla koalicji 0,08. Do Sejmu dostają się (czyli są zwycięzcami) te partie (koalicje), które osiągną próg wyborczy.

Metoda wyboru dwóch najlepszych Wybieramy dwóch kandydatów z największą liczbą głosów.

$\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \{A, B\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall C \in \mathbf{K}, C \neq A, B :$

$\text{Top}(A; \mathbf{P}) \geq \text{Top}(B; \mathbf{P}) > \text{Top}(C; \mathbf{P})$.

Jeśli nie istnieją kandydaci A, B spełniający ten warunek, to $\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \emptyset$.

Polska metoda prezydencka, używana w Polsce do wyboru prezydenta, jest modyfikacją metody wyboru dwóch najlepszych. Prowadzi do wyboru jednego kandydata, gdy osiągnie on zwykłą większość, lub dwóch kandydatów z największą liczbą głosów, gdy nikt nie osiąga zwykłej większości.

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \begin{cases} \{A\}, & \text{gdy } \text{Top}(A; \mathbf{P}) > n/2; \\ \{A, B\}, & \text{gdy } \forall C \in \mathbf{K}, C \neq A, B : \\ & n/2 \geq \text{Top}(A; \mathbf{P}) \geq \text{Top}(B; \mathbf{P}) > \text{Top}(C; \mathbf{P}); \\ \emptyset, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

W przypadku wyboru dwóch kandydatów rozstrzyga II tura.

Metoda blokowa Każdy wyborca ma przypisaną wagę. W najprostszej sytuacji jest to liczba naturalna, traktowana jako liczba głosów, które oddaje ten wyborca. Wygrywa kandydat, który zdobędzie najwięcej głosów. Ta metoda nie jest anonimowa, ale można uznać ją za demokratyczną – przykładem jest opisana niżej amerykańska metoda prezydencka.

Amerykańska metoda prezydencka jest modyfikacją metody blokowej. Opisuję ją bez wszystkich szczegółów, ale tak, żeby zrozumieć jej zasadę. Zbiór kandydatów $\mathbf{K}$ jest ustalony. Najpierw odbywają się wybory w każdym z 50 stanów, metodą maksimum. Każdy stan ma przypisaną konkretną liczbę elektorów. Zwycięzca w danym stanie dostaje automatycznie wszystkie głosy elektorów z tego stanu. Prezydentem zostaje kandydat, który zdobywa najwięcej głosów elektorskich.

9.2. Metody punktowe. Metody punktowe są to metody, w których kandydaci otrzymują punkty. Kryteria przyznawania punktów mogą być różne, ale najczęściej są to punkty za osiągnięcie pewnej pozycji w rankingu albo punkty za wygrane pojedynki.

W ważonych metodach punktowych każda pozycja otrzymuje swoją wagę. Waga może być dowolną liczbą rzeczywistą, choć najczęściej wagi będą liczbami naturalnymi albo liczbami rzeczywistymi z przedziału $[0, 1]$. Wag jest zawsze tyle, ilu jest kandydatów (kandydatek). W dalszym ciągu ustalę zbiór kandydatów K i liczbę n i będę rozważać wyłącznie (K, n) -profile. Zbiór zwycięzców określa się w metodach punktowych tak, by zwyciężali kandydaci z największą liczbą punktów:

$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall B \in \mathbf{K} \text{ pkt}(A; \mathbf{P}) \geq \text{pkt}(B; \mathbf{P})$.

Definicja 22. Wazona metoda punktowa $\mathbf{V}$ z wagami $w_1, w_2, \dots, w_k$ jest określona jako funkcja wybierająca kandydata lub kandydatów z największą liczbą punktów, przy czym liczba punktów dla kandydata A jest określona wzorem

$$\text{pkt}(A; \mathbf{P}) := \sum_{i=1}^n w_{\text{poz}_i(A; \mathbf{P})}$$

Wazona metoda punktowa jest *naturalna*, jeśli $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_k$.

Przykład 23 (Metoda Bordy). Przykładem naturalnej ważonej metody punktowej jest metoda Bordy, w której wagi określone są następująco:

$$w_1 = k - 1, w_2 = k - 2, \dots, w_{k-1} = 1, w_k = 0.$$

Inny sposób przyznawania punktów można znaleźć na przykład w metodzie Copelanda.

Przykład 24 (Metoda Copelanda). W metodzie Copelanda punkty przyznaje się za wygrane i zremisowane pojedynki (1 za wygrany, 1/2 za remis), to znaczy

$$\begin{aligned} \text{pkt}(A; \mathbf{P}) = & \#\{B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} : W(A, B; P) > W(B, A; P)\} + \\ & \#\{B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} : W(A, B; P) = W(B, A; P)\} / 2 \end{aligned}$$

Zwycięzca lub zwycięzcy określany jest tak, jak we wszystkich metodach punktowych, jako kandydat (kandydaci) z największą liczbą punktów.

Poniżej podam też autorską metodę punktową.

9.3. Metody generowane kryteriami. Niektóre kryteria pozwalają zdefiniować w naturalny sposób, według ustalonego schematu, konkretne metody. Nadają się do tego takie kryteria, które mówią o tym:

- który kandydat musi zostać zwycięzcą (a nawet jedynym zwycięzcą);
- który kandydat nie może zostać zwycięzcą.

W pierwszym przypadku w generowanej metodzie wszyscy, którzy muszą zostać zwycięzcami przy spełnieniu odpowiedniego kryterium, zostają nimi. W drugim, zwycięzcami są ci wszyscy, którzy mogą zostać zwycięzcami zgodnie z tym kryterium.

Przykład 25. Poniżej podaję przykłady różnych metod generowanych kryteriami. Niektóre z nich mogą być zaliczone też do innych rodzajów metod, na przykład metoda jednomyślności jest jednocześnie rodzajem pluriwiratu (omniwirat), jak również (wraz z metodą zwykłej większości) metodą większościową.

- **Metoda jednomyślności** jest metodą generowaną przez kryterium jednomyślności. Zgodnie z tym kryterium, jeśli kandydat zdobywa poparcie jako pierwszy wybór każdego z wyborców, to automatycznie zostaje uznany za zwycięzcę. W związku z tym zwycięzcą przy metodzie generowanej przez kryterium jednomyślności jest taki kandydat, który zdobywa poparcie jako pierwszy wybór wszystkich wyborców.

$$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{Top}(A; \mathbf{P}) = n.$$

- **Metoda zwykłej większości** jest metodą generowaną przez kryterium większościowe. Zgodnie z tym kryterium, kandydat, który uzyskał poparcie jako pierwszy wybór więcej niż połowy wyborców, zostaje zwycięzcą. W związku z tym zwycięzcą przy metodzie generowanym przez kryterium większości jest taki kandydat, który uzyskał poparcie jako pierwszy wybór więcej niż u połowy wyborców.

$$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{Top}(A; \mathbf{P}) > n/2.$$

- **Metoda Pareto** jest metodą generowaną przez kryterium Pareto. Zgodnie z tym kryterium, kandydat nie może zostać zwycięzcą, jeśli istnieje inny kandydat, który jest wyżej w rankingu u każdego wyborcy. W związku z tym zwycięzcą przy metodzie generowanym przez kryterium Pareto jest taki zbiór kandydatów, dla których nie istnieje inny kandydat, który woli od niego każdy wyborca.

$$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} \exists i \in N A \succ_i B$$

- **Metoda Condorceta** jest metodą generowaną przez kryterium Condorceta. Zgodnie z tym kryterium, kandydat, który w bezpośrednich pojedynkach pokonuje każdego innego kandydata, zostaje uznany za zwycięzcę wyborów. Zachodzi to wówczas, gdy taki kandydat uzyskuje więcej głosów od każdego z rywali w pojedynkach „jeden na jeden”. W związku z tym zwycięzcą przy metodzie generowanym przez kryterium Condorceta jest taki kandydat, który w bezpośrednich pojedynkach pokonuje każdego innego kandydata.

$$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy}$$

$$\forall B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} : W(A, B; \mathbf{P}) > W(B, A; \mathbf{P})$$

- **Metoda słabego Condorceta** jest generowana przez kryterium słabego Condorceta. Zgodnie z tym kryterium kandydat, który wygrywa lub remisuje w pojedynkach "jeden na jeden" ze wszystkimi innymi kandydatami, zostaje uznany za zwycięzcę. W tej metodzie zwycięzca to kandydat, który osiąga najlepszy wynik w porównaniu do pozostałych kandydatów, nawet

jeśli nie wygrywa wszystkich pojedynków (remisuje z niektórymi kandydatami).

$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} : W(A, B; \mathbf{P}) \geq W(B, A; \mathbf{P})$$

- **Metoda anty-Condorceta** jest metodą generowaną przez kryterium anty-Condorceta. Zgodnie z tym kryterium, kandydat, który przegrywa w bezpośrednich pojedynkach z każdym innym kandydatem, nie może zostać uznany za zwycięzcę. Zachodzi to wówczas, gdy taki kandydat nie zdobywa większej ilości głosów niż jakikolwiek inny uczestnik wyborów w pojedynkowych pojedynkach. W związku z tym zwycięzcą przy metodzie generowanym przez kryterium anty-Condorceta jest taki zbiór kandydatów, którzy nie przegrywają we wszystkich bezpośrednich pojedynkach z każdym innym kandydatem.

$A \in \mathbf{V}(\mathbf{P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists B \in \mathbf{K} \setminus \{A\} : W(A, B; \mathbf{P}) > W(B, A; \mathbf{P})$$

9.4. Metody kolejnych eliminacji. Metody kolejnych eliminacji polegają na kolejnym eliminowaniu kandydatów według ich konkretnych własności (takich jak najmniejsza liczba pierwszych wyborów w metodzie Hare’a). W metodach tych mamy do czynienia z ciągiem $(\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \supseteq \mathbf{K}_2 \supseteq \mathbf{K}_3 \dots$ oraz ciągiem $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{K}_1, \mathbf{E}_2 \subseteq \mathbf{K}_2, \mathbf{E}_3 \subseteq \mathbf{K}_3, \dots$ takimi, że $\mathbf{K}_{\ell+1} = \mathbf{K}_\ell \setminus \mathbf{E}_\ell, \dots$. Zbiór zwycięzców to $\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \mathbf{K}_m$, gdzie m jest najmniejszą liczbą taką, że $\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{K}_m$ lub $\mathbf{K}_{m+1} = \emptyset$ (to znaczy $\mathbf{E}_m = \mathbf{K}_m$ or $\mathbf{E}_m = \emptyset$). Zbiory $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \dots$ to zbiory kandydatów eliminowanych w kolejnych krokach. Musi być podany sposób eliminacji, to znaczy dla ustalonego $(n, \mathbf{K})$ -profilu $\mathbf{P}$ metoda określa zbiór $\mathbf{E}$ eliminowanych kandydatów. W następnym kroku metoda eliminacji jest stosowana do $(n, \mathbf{K} \setminus \mathbf{E})$ -profilu $\mathbf{P}'$, który otrzymujemy przez obcięcie profilu $\mathbf{P}$ do zbioru kandydatów $\mathbf{K} \setminus \mathbf{E}$.

Niewielkie rozszerzenie tej metody to pozwolenie na różne sposoby eliminacji kandydatów w różnych krokach eliminacji kandydatów.

Przykład 26 (Metoda Hare’a). Dla opisanie metody Hare’a jako metody kolejnych eliminacji wystarczy podać sposób eliminowania kandydatów z konkretnego $(n, \mathbf{K})$ -profilu $\mathbf{P}$. Zbiór eliminowany $\mathbf{E}$ to zbiór kandydatów, którzy są najrzadziej wybierani jako najlepsi kandydaci:

$$\mathbf{E} = \{A \in \mathbf{K} : \forall B \in \mathbf{K} (\text{Top}(A; \mathbf{P}) \leq \text{Top}(B; \mathbf{P}))\}.$$

Przykład 27 (Metoda Coombsa). Dla opisanie metody Coombsa jako metody kolejnych eliminacji wystarczy podać sposób eliminowania kandydatów z konkretnego $(n, \mathbf{K})$ -profilu $\mathbf{P}$. Zbiór eliminowany $\mathbf{E}$ to zbiór kandydatów, którzy są najczęściej wybierani jako najgorsi kandydaci:

$$\mathbf{E} = \{A \in \mathbf{K} : \forall B \in \mathbf{K} (\text{Bottom}(A; \mathbf{P}) \geq \text{Bottom}(B; \mathbf{P}))\}.$$

Poniżej podamy jeszcze autorską metodę kolejnych eliminacji.

9.5. Metody agendy. Metody agendy to metody eliminacyjne, w których z góry ustalony jest porządek kandydatów (zwany *agendą*) i porządek eliminacji kandydatów też od niego zależy. Metodę można uznać za demokratyczną, jeśli agenda jest ustalana w sposób losowy.

Przykład 28. Metoda kolejnych eliminacji według agendy. Dla ułatwienia, aby uniknąć remisów, założymy, że liczba głosujących jest nieparzysta (to założenie jest w praktyce niepotrzebne, bo przy dużej liczbie głosujących szansa na remis jest znikoma). Metoda polega na kolejnych pojedynkach jeden na jeden. Na początku walczy kandydat pierwszy z drugim, wygrany walczy z trzecim, kolejny wygrany z czwartym itd. W przypadku pojedynku kandydatów A i B , wygrywa ten, dla którego $W(A, B; \mathbf{P}) > W(B, A; \mathbf{P})$.

Poniżej podam przykład autorskiej metody agendy.

Zakończ ten rozdział tabelką pokazującą, które kryteria powinny być spełnione (lub nie) dla poszczególnych rodzajów metod. Znak $\pm$ oznacza, że możliwe jest zarówno spełnianie, jak i niespełnianie określonego kryterium. Nawet jeśli w konkretnym miejscu tabelki jest plus lub minus, to niekoniecznie oznacza to spełnianie lub niespełnianie tego kryterium przez wszystkie metody danego rodzaju, bo często da się w sposób sztuczny skonstruować metodę, która będzie zachowywała się inaczej niż większość metod danego typu.

	anonimowe	neutralne	jednomyślne	większościowe	Pareto	nienakładanie	Condorceta	anty-Condorceta	monotoniczne	niezależne
Metody większościowe	+	+	+	$\pm$	+	+	-	-	+	-
Metody punktowe	+	+	+	$\pm$	+	+	$\pm$	$\pm$	+	-
Metody generowane kryteriami	+	+	+	$\pm$	+	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	-
Metody kolejnych eliminacji	+	+	+	$\pm$	+	$\pm$	-	-	+	-
Metody agendy	+	-	+	$\pm$	-	$\pm$	+	+	+	-
Metody dyktatury	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+
Metody monarchii	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+

10. METODY AUTORSKIE

Metoda czesanego zajęcia Metoda ta powinna się naprawdę nazywać metodą Coombsa-Hare’a, wybrana została ze względu na fonetyczne podobieństwo do kawałka angielskiego zdania ‘He combs hare’, czyli ‘On czesze zajęcia’. Metoda polega na kolejnych eliminacjach kandydatów, z zastosowaniem naprzemiennie metody głosowania Hare’a z metodą Coombsa. W pierwszej kolejności zaczynamy eliminację kandydatów, którzy są najlepsi u najmniejszej liczby głosujących. Po wyeliminowaniu jednego lub więcej kandydatów stosujemy odmienną eliminację kandydatów, którzy tym razem są najgorsi u największej liczby głosujących do profilu powstałego przez przesunięcie w rankingach kandydatów na wyższe miejsca. Pozostali po usuniętych kandydatach pozostają bez zmiany preferencji wyborców w stosunku do pozostałych kandydatów. Eliminację kończymy, gdy pozostał tylko jeden kandydat lub gdy wszyscy pozostali kandydaci są najlepsi u tej samej liczby wyborców. Ten kandydat jest zwycięzcą (lub ci wszyscy kandydaci są zwycięzcami).

Metoda przeciętniaków Jest to naturalna metoda punktowa, różniąc się jednak od metody Bordy. Faworyzuje ona kandydatów, którzy nie budzą skrajnych emocji. Przyznawane punkty są wartościami symboli Newtona postaci $\binom{n-1}{\ell}$, uporządkowanych od największego do najmniejszego. Punkty każdego kandydata

od kolejnych wyborców są sumowane i kandydat (kandydaci) z największą liczbą punktów jest zwycięzcą (są zwycięzcami).

Metoda pucharowa Dla uproszczenia zakładamy, że liczba głosujących jest *nieparzysta*. Metoda ta zakłada wcześniejsze losowanie, które nadaje kandydatom numery. Listę kandydatów uzupełniamy kandydatami pustymi tak, żeby w sumie kandydatów było 2^m , gdzie m jest najmniejszą liczbą taką, że $k \leq 2^m$. Następnie kojarzymy kandydatów w pary, kandydata nr 1 z kandydatem nr 2^m , kandydata nr 2 z kandydatem nr $2^m - 1$, kandydata nr 3 z kandydatem nr $2^m - 2$ itd., aż do pary $2^{m-1}, 2^{m-1} + 1$. Dalej kandydaci walczą każdy z każdym, dostając punkt za każdym razem, gdy są w rankingu wyżej niż ich przeciwnik. Zwycięzcą zostaje kandydat z większą liczbą punktów. Zakładamy, że walka z kandydatem pustym kończy się porażką tego kandydata. Dzięki temu, że n jest nieparzyste, taka walka musi się skończyć zwycięstwem jednego z kandydatów.

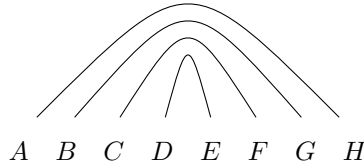
W następnej rundzie pozostaje 2^{m-1} kandydatów. Eliminujemy z rankingów kandydatów, którzy przegrali, i kontynuujemy pojedynki jeden na jeden w taki sposób, że zwycięzca pierwszej pary walczy ze zwycięzcą ostatniej pary, zwycięzca drugiej ze zwycięzcą przedostatniej itd. Walki metodą pucharową są prowadzone do wyłonienia jednego zwycięzcy.

Przykład 29. Przedstawiona poniżej tabela podliczonego profilu z 5 kandydatami i 22 wyborcami będzie służyła do ilustracji autorskich metod głosowania.

8	6	4	2	2
A	B	C	B	E
C	E	B	D	D
D	D	D	E	B
B	C	A	C	A
E	A	E	A	C

TABELA 2

Metoda pucharowa Uzupełniamy liczbę kandydatów do 8. Dodatkowi (puści) kandydaci to F, G, H .



W pierwszej rundzie grają A z H , B z G , C z F i D z E . Automatycznie do drugiej rundy przechodzą A, B, C . Ponieważ $W(D, E; \mathbf{P}) > W(E, D; \mathbf{P})$, więc dalej przechodzi D . W następnej rundzie gra A z D i B z C . Teraz D wygrywa z A , zaś C z B . Do finału wchodzi C i D . W finale C wygrywa z D , więc C jest zwycięzcą.

Metoda czesanego zajęcia

W pierwszej kolejności eliminujemy kandydatów, którzy najrzadziej są pierwszym wyborem, czyli tych z pierwszego wiersza, którym odpowiada najmniejsza liczba w wierszu zerowym. Jest to kandydat E . Po jego eliminacji rankingi wyglądają następująco:

8	6	4	2	2
A	B	C	B	D
C	D	B	D	B
D	C	D	C	A
B	A	A	A	C

Następnie zliczamy, tym razem ile razy każdy z kandydatów był najgorszym wyborem. Kandydat A wystąpił 12 razy jako najgorszy, kandydat B wystąpił 8 razy, zaś kandydat C tylko 2 razy (kandydat D nie był najgorszy dla żadnego wyborcy). Eliminujemy więc kandydata A. Otrzymujemy następującą tabelkę:

8	6	4	2	2
C	B	C	B	D
D	D	B	D	B
B	C	D	C	C

W kolejnym kroku powracamy do pierwszego typu eliminacji i stosujemy go zamiennie z drugim do uzyskania zwycięzców. Tu kandydat B jest pierwszym wyborem dla 8 wyborców, kandydat C dla 12 wyborców, zaś kandydat D dla 2 wyborców. Eliminujemy więc kandydata D. Nowa tabela wygląda tak:

8	6	4	2	2
C	B	C	B	B
B	C	B	C	C

Tu B jest najgorszym wyborem dla 12 wyborców, zaś C dla 10. Zwycięzcą zostaje więc kandydat C.

Metoda przeciętniaków Obliczamy wagi, które będą przypisane od góry rankingowi:

- pierwszy wybór: $\binom{4}{2} = 6$
- drugi wybór: $\binom{4}{3} = 4$
- trzeci wybór: $\binom{4}{1} = 4$
- czwarty wybór: $\binom{4}{4} = 1$
- ostatni wybór: $\binom{4}{0} = 1$

Obliczamy liczbę punktów dla każdego kandydata:

- $A = (8 \cdot 6) + (6 \cdot 1) + (8 \cdot 1) = 62$
- $B = (8 \cdot 6) + (4 \cdot 4) + (2 \cdot 4) + (8 \cdot 1) = 80$
- $C = (4 \cdot 6) + (8 \cdot 4) + (8 \cdot 1) + (2 \cdot 1) = 66$
- $D = (4 \cdot 4) + (18 \cdot 4) = 88$
- $E = (2 \cdot 6) + (6 \cdot 4) + (2 \cdot 4) + (12 \cdot 1) = 56$

Z powyższych obliczeń wynika, że zwycięzcą jest kandydat D.