Punkty okresowe i funkcje kwadratowe

Anna Bajda

23 kwietnia 2026

1 Wstęp

Jednym z prostszych do sformułowania zagadnień współczesnej teorii układów dynamicznych jest pytanie o istnienie punktów okresowych. Szczególne znaczenie w tym kontekście ma twierdzenie Szarkowskiego, które ustanawia relację porządku pomiędzy możliwymi okresami punktów okresowych dla funkcji ciągłych określonych na przedziale. Obecność cyklu o danym okresie implikuje istnienie cykli o innych dłlugościach, „wcześniejszych" w sensie odpowiedniego porządku. Inspiracją do napisania tej pracy jest chęć poznania zupełnie nieporuszanego na lekcjach szkolnych tematu układów dynamicznych, w szczególności wspomnianego wcześniej twierdzenia.

Rozważamy funkcję ciągłą działającą na odcinku. Kolejne przekształcenia f generują ciąg $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) = x_1 \xrightarrow{f} f^2(x_0) = x_2 \xrightarrow{f} f^3(x_0) = x_3 \xrightarrow{f} ...$, który opisuje ewolucję punktu początkowego. Punkt stały to taki argument x_0, dla którego zachodzi relacja: $x_0 = f(x_0) = ... = f^n(x_0)$ dla każdego n, czyli funkcja nie zmienia jego wartości. Znajduje się on więc w miejscu przecięcia wykresu funkcji z prostą $y = x$. Mówimy, że x_0 jest punktem okresowym o okresie $n \in \mathbb{N}$, jeśli $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) = x_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} f^n(x_0) = x_n = x_0$, przy czym n jest najmniejszą dodatnią liczbą o tej własności. To znaczy, że po n-krotnym przekształceniu argumentu x_0 osiąga on tą samą wartość, co początkowo. Jeśli x_0 jest punktem o okresie n, to zbiór $\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$ będziemy nazywać n-cyklem.

Twierdzenie Szarkowskiego wprowadza porządek na zbiorze liczb naturalnych, zwany porządkiem Szarkowskiego, który opisuje relacje wymuszania między okresami. Wygląda on następująco:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \cdots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \cdots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec$$

$$\prec \cdots \prec 2^n \cdot 3 \prec 2^n \cdot 5 \prec \cdots \prec 2^n \prec 2^{n-1} \prec \cdots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Najpierw ustawiamy wszystkie liczby nieparzyste większe od 1 w rosnącym porządku: „$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$" Następnie bierzemy te same liczby nieparzyste i mnożymy je przez 2: „$2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \ldots$" Potem przez coraz wyższe potęgi 2, a na samym końcu pojawiają się już tylko potęgi 2, ustawione malejąco: „$2^n \prec ... \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$". Twierdzenie Szarkowskiego składa się właściwie z dwóch osobnych stwierdzeń: po pierwsze, dla funkcji ciągłych $f\colon [0,1] \to [0,1]$ istnienie punktu okresowego o danym okresie wymusza istnienie punktów o wszystkich okresach wcześniejszych w tym porządku; po drugie, dla każdego „ogona" tego porządku istnieje funkcja ciągła, dla której dokładnie te okresy

są realizowane. Szarkowski udowodnił te twierdzenia w pracach [1] i [2]. Oba te twierdzenia wraz z pełnymi dowodami można znaleźć w pracy [3]

Celem niniejszej pracy jest analiza jednego z najprostszych przypadków, bardzo często badanych w liceum – funkcji kwadratowych. Naturalne jest rozważanie funkcji będących surjekcjami, ponieważ warto zauważyć, że istnieją funkcje ciągłe, dla których cała dynamika degeneruje się do jednego punktu. Na przykład, niech $f(x) = ax+b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Jeżeli $|a| < 1$, to kolejne przekształcenia zbiegają do punktu stałego $x = \frac{b}{1-a}$. Skupimy się na pełnym opisie 2-cykli, badając warunki ich istnienia, własności oraz zależność od parametrów funkcji. Na rozgrzewkę zaczniemy jednak od przypadku funkcji logistycznych, które nie muszą być surjekcjami.

2 Odwzorowanie logistyczne

Funkcja postaci $f(x) = ax(1-x)$ nazywa się odwzorowaniem logistycznym. Opisywana przez nas parabola musi mieć ramiona skierowane w dół, czyli $a > 0$, w przeciwnym wypadku wszystkie wartości dla argumentów $[0, 1]$ będą ujemne. Pierwsza współrzędna jej wierzchołka to $x = \frac{1}{2}$. Wyznaczmy dziedzinę a oraz znajdźmy punkty stałe i o okresie 2 tej funkcji.
Aby móc badać funkcję pod kątem punktów okresowych, musi ona dla każdego $x \in [0, 1]$ osiągać wartość w zakresie $[0, 1]$, więc: $1 \geqslant f(\frac{1}{2}) \geqslant 0$, dlatego $0 \leqslant a \leqslant 4$. Funkcja będzie miała dwa punkty stałe w miejscach przecięcia jej wykresu z prostą $y = x$:

$$ax(1-x) = x$$
$$x \in \{0, \frac{a-1}{a}\}$$

Możemy teraz określić, od jakiego a funkcja będzie miała 2-cykle. W tym celu należy rozwiązać równanie:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x \\ a(ax(1-x))(1-(ax(1-x)) &= x \end{aligned}$$

Jest to równanie 4 stopnia, ale znamy już dwa z jego rozwiązań – wyznaczone wcześniej punkty stałe. Wykorzystując twierdzenie Bézouta, możemy podzielić nasz wielomian przez odpowiednie dwumiany i otrzymać równanie kwadratowe:

$$-a^3x^2 + a^2(a+1)x - a(a+1) = 0$$

Żeby otrzymać dwa punkty okresowe, to równanie musi mieć dwa różne rozwiązania, dlatego rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ a^4(a+1)^2 - 4a^4(a+1) &> 0 \\ a^4(a+1)(a-3) &> 0 \end{aligned}$$

Wiemy już, że $a > 0$, więc $a \in (3, 4]$. Pary punktów okresowych tworzą:

$$x_0 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

3 Surjekcje kwadratowe

Przechodzimy teraz do badania funkcji kwadratowych będących surjekcjami $[0, 1]$ na $[0, 1]$. Zaczniemy od dwóch upraszczających obserwacji.

Obserwacja 1. *Każda funkcja kwadratowa opisana wzorem $f(x) = a(x-p)^2+q$ ma co najwyżej jedną parę punktów o okresie dwa.*

Wynika to z faktu, że punkty te są rozwiązaniami równania $f(f(x)) = x$. Po odpowiednich przekształceniach równanie:

$$a[a(x-p)^2 + q - p]^2 + q = x$$

sprowadza się do:

$$\begin{aligned} a^3x^4 - 4a^3px^3 + (6a^3p^2 + 2a^2(q-p))x^2 - (4a^3p^3 + 4a^2p(q-p) + 1)x & \\ +a^3p^4 + 2a^2p^2(q-p) + a(q-p)^2 + q &= 0 \end{aligned}$$

Jest to równanie 4 stopnia, więc może mieć maksymalnie 4 rozwiązania. Na mocy twierdzenia Szarkowskiego, jedno z nich to na pewno punkt stały. Z możliwych trzech pozostałych możemy utworzyć tylko jedną parę, więc żadna funkcja kwadratowa nie będzie miała dwóch lub więcej orbit o okresie 2.

Obserwacja 2. *Wystarczy rozpatrywać funkcje kwadratowe, dla których $a < 0$.*

Funkcje kwadratowe z $a < 0$ zachowują się tak samo jak funkcje z $a > 0$, które powstały z odbicia symetrycznego względem punktu $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Możemy w prosty sposób wyznaczyć wzór tego odbicia przekształcający $P(x, y) \mapsto P'(x', y')$ przez przesunięcie go o dwukrotność wektora $\vec{PS}$. Otrzymamy punkt P' o współrzędnych $(1 - x, 1 - y)$.

Dla każdej funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w dół, spróbujemy uzyskać nowy wzór odpowiadającej jej funkcji z ramionami skierowanymi w górę:

$$\begin{aligned} x' &= 1 - x \\ f(x') &= f(1-x) \\ y' &= 1 - y \\ y' &= f(x') \\ 1 - y &= f(1-x) \\ y &= g(x) = 1 - f(1-x) \end{aligned}$$

Niech teraz x_1, x_2 tworzą 2-cykl względem funkcji f, tzn.

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_1.$$

Przeprowadźmy przekształcenia:

$$g(x_0') = 1 - f(x_0) = 1 - x_1 = x_1'$$

$$g(x_1') = 1 - f(x_1) = 1 - x_0 = x_1'$$

Zatem (x_1', x_2') jest 2-cyklem dla funkcji g. Odbicie względem punktu $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ zachowuje więc strukturę takich cykli.

Rozpatrujemy teraz funkcję kwadratową o wzorze ogólnym $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie p to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, a dziedzina i zbiór wartości to przedział [0,1]. Chcemy, żeby na wykresie parabola miała ramiona skierowane w dół, czyli $a < 0$. Oznaczmy przez x_0 i x_1 parę punktów o okresie 2, tzn. $x_1 = f(x_0)$ i $x_0 = f(x_1)$. Wtedy punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ leżą symetrycznie względem prostej $y = x$, na prostej prostopadłej do niej o wzorze: $y = A - x$. Wyznaczmy wzór tych prostej oraz funkcji kwadratowej w zależności od jednego parametru p. Rozróżnimy pięć przypadków:

- $p \leqslant 0$
  Szukamy funkcji kwadratowej, której wierzchołek ma ujemną pierwszą współrzędną i która w zbiorze $[0, 1]$ jest surjekcją. Rozpatrujemy warunki:

$$\begin{cases} f(x) = a(x-p)^2 + q \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

  Podstawiamy:

$$1 = a(0-p)^2 + q = ap^2 + q$$

$$0 = a(1-p)^2 + q$$

$$\begin{cases} ap^2 + q = 1 \\ a(1-p)^2 + q = 0 \end{cases}$$

$$ap^2 - 1 = a(1-p)^2$$

$$a[p^2 - (1 - 2p + p^2)] = 1$$

$$a = \frac{1}{2p-1}$$

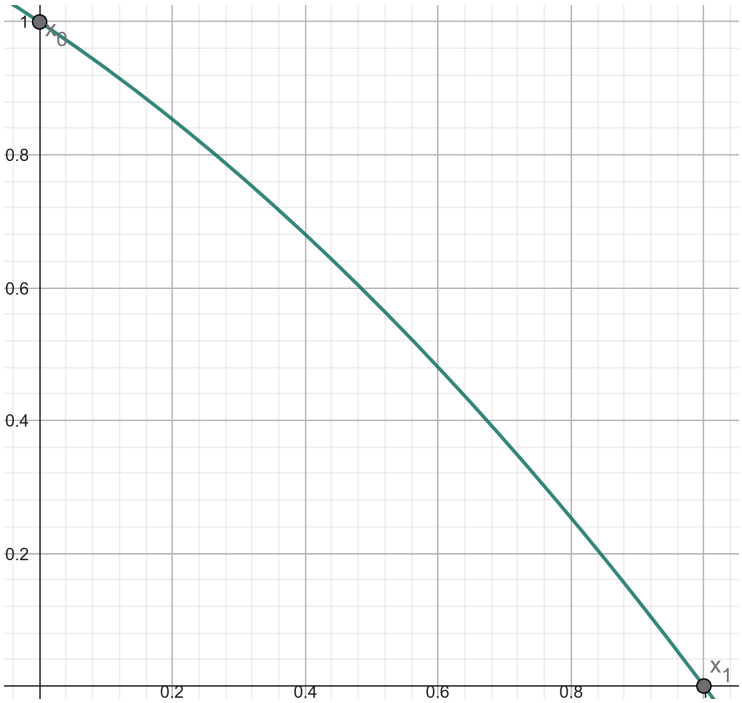
  Wyznaczamy q:

$$q = 1 - ap^2 = 1 - \frac{p^2}{2p-1} = \frac{(1-p)^2}{1-2p}$$

  Ostateczny wzór:

$$f(x) = \frac{1}{2p-1}(x-p)^2 + \frac{(1-p)^2}{1-2p}$$

  W tym przypadku zawsze orbitą o okresie 2 jest $\{0, 1\}$.



Rysunek 1: Przedstawienie graficzne przykładowego przypadku $p \leqslant 0$

- $0 < p < \frac{1}{2}$
  Wierzchołek paraboli znajduje się po lewej stronie prostej $x = \frac{1}{2}$. Żeby funkcja była surjekcją, musi osiągać wartość 0 dla argumentu 1 i wartość 1 w wierzchołku. Mamy więc następujące warunki:

$$\begin{cases} f(x) = a(x-p)^2 + q \\ f(p) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(x_0) = x_1 \\ f(x_1) = x_0 \end{cases}$$

  Z pierwszych dwóch warunków: $f(x) = a(x-p)^2 + 1$. Po zastosowaniu tego wzoru do trzeciego warunku otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a(1-p)^2 + 1 &= 0 \\ a &= -\frac{1}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

  Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{(1-p)^2}(x-p)^2 + 1$ przecina się z prostą $y = A - x$ dla argumentów x_0 i x_1. Najpierw przedstawmy

funkcję za pomocą wzoru ogólnego:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{(1-p)^2}(x-p)^2+1 = -\frac{1}{(1-p)^2}(x^2-2px+p^2)+1 = \\ &= -\frac{1}{(1-p)^2}x^2+\frac{2p}{(1-p)^2}x+1-\frac{p^2}{(1-p)^2} = \\ &= -\frac{1}{(1-p)^2}x^2+\frac{2p}{(1-p)^2}x+\frac{1-2p}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

Szukamy punktów przecięcia z prostą $y = A - x$, dlatego przyrównujemy: $A - x = f(x)$. Punkty okresowe x_0, x_1 są rozwiązaniami tego równania. Czyli mamy:

$$A = x_0 + f(x_0) = x_0 + x_1$$

Z drugiej strony, x_0 i x_1 są rozwiązaniami równania kwadratowego:

$$\begin{aligned} f(x)+x-A &= 0 \\ -\frac{1}{(1-p)^2}x^2+\left(\frac{2p}{(1-p)^2}+1\right)x+\frac{1-2p}{(1-p)^2}-A &= 0 \\ -\frac{1}{(1-p)^2}x^2+\frac{p^2+1}{(1-p)^2}x+\frac{1-2p}{(1-p)^2}-A &= 0 \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków, otrzymując:

$$A = -\frac{\frac{p^2+1}{(1-p)^2}}{-\frac{1}{(1-p)^2}} = p^2+1$$

Możemy teraz wyznaczyć x_0 i x_1:

$$-\frac{1}{(1-p)^2}x^2+\frac{p^2+1}{(1-p)^2}x+\frac{1-2p}{(1-p)^2}-p^2-1=0$$

Mnożymy przez $(1-p)^2 \neq 0$:

$$-x^2+(p^2+1)x+(1-2p)-(p^2+1)(1-p)^2=0$$

Po uproszczeniach:

$$x^2-(p^2+1)x-p^2(p^2-2p+2)=0$$

$$\Delta = 5p^4-8p^3+10p^2+1$$

Zauważmy, że Δ jest dodatnia dla p z naszego przedziału, więc równanie będzie mieć dwa rozwiązania.

$$x_{0,1} = \frac{p^2+1 \pm \sqrt{5p^4-8p^3+10p^2+1}}{2}$$

Ostatecznie:

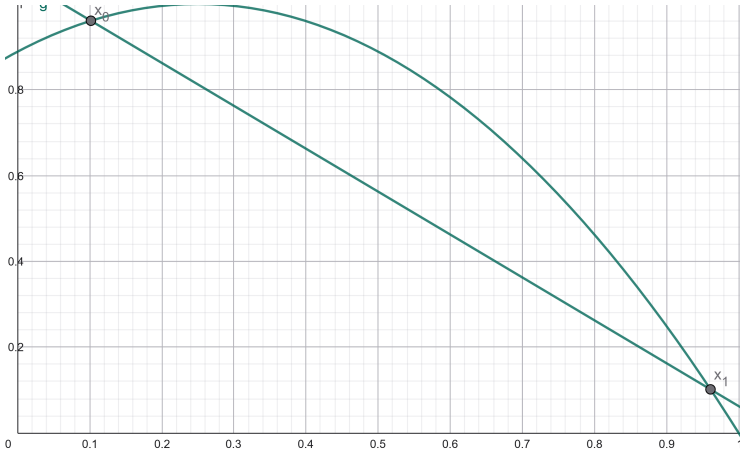
$$f(x) = -\frac{1}{(1-p)^2}(x-p)^2+1$$

$$y = p^2 + 1 - x$$

$$x_0 = \frac{p^2 + 1 - \sqrt{5p^4 - 8p^3 + 10p^2 + 1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{p^2 + 1 + \sqrt{5p^4 - 8p^3 + 10p^2 + 1}}{2}$$

Ponieważ $1 < A = 1 + p^2 < 2$, oba punkty przecięcia na pewno należą do [0,1], czyli tworzą orbitę o okresie 2 w rozpatrywanym przypadku.



Rysunek 2: Przedstawienie graficzne przykładowego przypadku $0 < p < \frac{1}{2}$.

- $p = \frac{1}{2}$
  W tym przypadku sytuacja jest dość prosta. Jest to odwzorowanie logistyczne $f(x) = 4x(1-x)$. Sprawdzimy jednak, że rozumowanie takie jak w pozostałych punktach tego rozdziału da taki sam wynik, jak uzyskany w rozdziale 2. Żeby funkcja była „na" i posiadała poszukiwane punkty okresowe, musi spełniać następujące warunki:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - \frac{1}{2})^2 + q \\ f(\frac{1}{2}) = 1 \\ f(0) = f(1) = 0 \\ f(x_0) = x_1 \\ f(x_1) = x_0 \end{cases}$$

  Na podstawie drugiego warunku wiemy, że $q = \frac{1}{2}$. Możemy łatwo obliczyć a:

$$\frac{1}{4}a + 1 = 0$$
$$a = -4$$

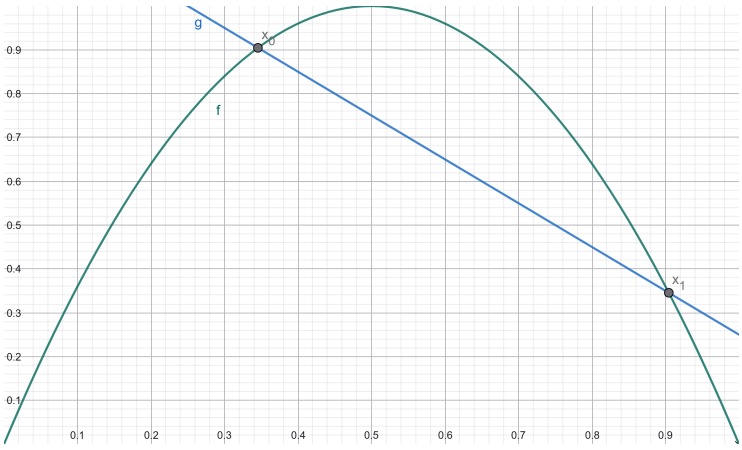
  Funkcja wyraża się więc wzorem:
  $f(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 1 = -4x^2 + 4x$.

Tak jak w poprzednim przypadku, parametr A w funkcji liniowej opisującej położenie punktów x_0, x_1 wyznaczymy jako sumę rozwiązań równania kwadratowego:

$$\begin{aligned} f(x) &= A - x \\ -4x^2 + 4x &= A - x \\ -4x^2 + 5x - A &= 0 \\ A &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Dzięki temu możemy wyznaczyć punkty x_0 i x_1:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 4x &= \frac{5}{4} - x \\ -4x^2 + 5x - \frac{5}{4} &= 0 \\ \Delta = 25 - 4(-4)(-\frac{5}{4}) &= 25 - 20 = 5 \\ x_0 &= \frac{-5 + \sqrt{5}}{2(-4)} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ x_1 &= \frac{-5 - \sqrt{5}}{2(-4)} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$



Rysunek 3: Przedstawienie graficzne przypadku $p = \frac{1}{2}$.

Aby upewnić się, że obliczenia są poprawne, podstawmy wartości liczbowe do wzoru funkcji:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -4(\frac{5 - \sqrt{5}}{8})^2 + 4\frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = x_1 \\ f(x_1) &= -4(\frac{5 + \sqrt{5}}{8})^2 + 4\frac{5 + \sqrt{5}}{8} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = x_0 \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$f(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 1$$

$$y = \frac{5}{4} - x$$

$$x_0 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

Gdzie x_0, x_1 to punkty o okresie 2.

- $\frac{1}{2} < p < 1$
  Wyznaczmy teraz wzór dla tych funkcji "na", których wierzchołek znajduje się w przedziale $p \in (\frac{1}{2}; 1)$. Określmy potrzebne warunki:

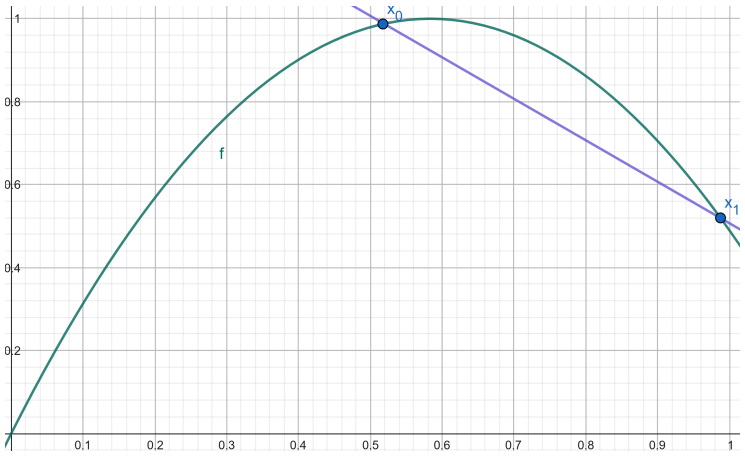
$$\begin{cases} f(x) = a(x-p)^2 + q \\ f(p) = 1 \\ f(0) = 0 \\ f(x_0) = x_1 \\ f(x_1) = x_0 \end{cases}$$

  Tak jak wcześniej, $q = 1$. Obliczmy teraz parametr a w zależności od p korzystając z dwóch pierwszych równań:

$$\begin{aligned} a(-p)^2 + 1 &= 0 \\ p^2 a &= -1 \\ a &= -\frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

  Funkcja wyraża się więc wzorem:

$$f(x) = -\frac{1}{p^2}(x-p)^2 + 1 = -\frac{1}{p^2}x^2 - \frac{1}{p^2}(-2px) - \frac{1}{p^2}p^2 + 1 = -\frac{1}{p^2}x^2 + \frac{2}{p}x$$



Rysunek 4: Przedstawienie graficzne przykładowego przypadku $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$

Analogicznie do poprzednich przypadków można wyznaczyć A:

$$A = -\frac{\frac{2}{p}+1}{-\frac{1}{p^2}} = p(p+2),$$

więc $y = p(p+2) - x$. Żeby równanie $-\frac{1}{p^2}x^2 + (\frac{2}{p}+1)x - p(p+2) = 0$ miało rozwiązania:

$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ \frac{-3p^2-4p+4}{p^2} &> 0 \\ \begin{cases} p \in (-2, \frac{2}{3}) \\ p \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} &\implies p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \\ x_0 = \frac{p}{2}\left(p+2+\sqrt{-3p^2-4p+4}\right) \\ x_1 = \frac{p}{2}\left(p+2-\sqrt{-3p^2-4p+4}\right) \end{aligned}$$

Oba rozwiązania znajdują się w $[0,1]$, ponieważ (x_0, x_1) i (x_1, x_0) należą do paraboli, której wierzchołek jest na wysokości 1 (czyli są nie większe od 1) oraz są dodatnie (co łatwo widać ze wzoru).

- $p \geqslant 1$
  Funkcja $y = A - x$ jest malejąca, a funkcja $y = a(x-p)^2 + q$ jest rosnąca na $[0,1]$, gdy $a < 0$ i $p > 1$. Zatem te funkcje nie mogą mieć dwóch punktów przecięcia, a w konsekwencji, nie może być punktu okresowego o okresie 2.

Ostatecznie przedstawiamy wyrażenia na funkcje kwadratowe mające punkty okresowe o okresie 2 i będące surjekcjami $[0,1] \to [0,1]$. Uwzględnimy też funkcje o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze. Dla każdej z nich cykl o okresie 2 jest tylko jeden.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o 2-cyklach)**.** *Wszystkie funkcje kwadratowe f będące surjekcjami $[0,1]$ na $[0,1]$, wraz z odpowiadającymi im 2-cyklami $\{x_0, x_1\}$ prezentuje poniższa lista:*

- $p \leqslant 0$

  $$f(x) = \frac{1}{2p-1}(x-p)^2 + \frac{(1-p)^2}{1-2p}$$

  LUB

  $$f(x) = \frac{1}{1-2p}(x+p-1)^2 - \frac{p^2}{1-2p}$$

  i w obu przypadkach

  $$x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

- $0 < p < \frac{1}{2}$

  $$f(x) = -\frac{1}{(1-p)^2}(x-p)^2 + 1$$

  $$x_0 = \frac{p^2+1-\sqrt{5p^4-8p^3+10p^2+1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{p^2+1+\sqrt{5p^4-8p^3+10p^2+1}}{2}$$

LUB

$$f(x) = \frac{1}{(1-p)^2}(x+p-1)^2$$

$$x_0 = \frac{1-p^2-\sqrt{5p^4-8p^3+10p^2+1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-p^2+\sqrt{5p^4-8p^3+10p^2+1}}{2}$$

- $p = \frac{1}{2}$

$$f(x) = -4(x-\frac{1}{2})^2+1$$

$$x_0 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}, \quad x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

LUB

$$f(x) = 4(x-\frac{1}{2})^2$$

$$x_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \quad x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

- $\frac{1}{2} < p \leqslant \frac{2}{3}$

$$f(x) = -\frac{1}{p^2}(x-p)^2+1$$

$$x_0 = \frac{p}{2}\left(p+2+\sqrt{-3p^2-4p+4}\right)$$

$$x_1 = \frac{p}{2}\left(p+2-\sqrt{-3p^2-4p+4}\right)$$

LUB

$$f(x) = \frac{1}{p^2}(x+p-1)^2$$

$$x_0 = 1-\frac{p}{2}\left(p+2+\sqrt{-3p^2-4p+4}\right)$$

$$x_1 = 1-\frac{p}{2}\left(p+2-\sqrt{-3p^2-4p+4}\right)$$

Dla $p > \frac{2}{3}$, czyli parabol o ramionach skierowanych w dół i odciętej wierzchołka p albo parabol o ramionach w górę i odciętej wierzchołka $1-p$, nie ma kwadratowych surjekcji posiadających 2-cykl.

Literatura

[1] A. N. Sharkovskiĭ, Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, *Ukrain. Mat. Zh.* 16 (1964) 61-71

[2] A. N. Sharkovskiĭ, On cycles and structure of a continuous mapping, *Ukrain. Mat. Zh.* 17 (1965) 104-111

[3] K. Burns, B. Hasselblatt, The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof. *The American Mathematical Monthly*, 118(3) (2011), 229-244