Chicken McNugget problem w wymiarze osadzenia cztery

Kazimierz Chomicz

Kwiecień 2026

Streszczenie

Opracowuje geometryczną procedurę znajdowania zbioru Apéry'ego dla dowolnej półgrupy numerycznej o wymiarze osadzenia równym cztery. Wykorzystuje tę metodę do wyznaczania liczb Frobeniusa, genusów, elementów Bettiego oraz stopni łańcuchowych półgrup numerycznych generowanych przez cztery kolejne kwadraty oraz cztery kolejne liczby trójkątne.

1 Wprowadzenie

Podzbiór zbioru liczb naturalnych, który zawiera 0, jest domknięty ze względu na dodawanie oraz nie ma w nim jedynie skończenie wielu liczb naturalnych, nazywamy *numeryczną półgrupą*. Chicken McNugget problem, znany również jako problem Frobeniusa lub problem monet, dotyczy wyznaczenia największej liczby całkowitej nienależącej do danej półgrupy numerycznej. Taka liczba nazywana jest *liczbą Frobeniusa* i jest oznaczana przez $F(S)$, dla danej półgrupy numerycznej S.

Dla podzbioru A liczb naturalnych przez $\langle A\rangle$ oznaczamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów A o nieujemnych współczynnikach. Wiadomo, że $\langle A\rangle$ jest numeryczną półgrupą wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(A) = 1$ (zob. np. [30, Lemma 2.1]). Liczbę całkowitą $\mathrm{e}(S)$, zwaną *wymiarem osadzenia*, definiujemy jako moc unikalnego zbioru minimalnych generatorów numerycznej półgrupy S.

Jawny wzór na $F(S)$ jest dobrze znany w przypadku półgrupy numerycznej o dwóch generatorach (tj. gdy $\mathrm{e}(S) = 2$):

$$F(\langle a, b\rangle) = ab - a - b,$$

opublikowany przez Sylvestera w 1883 roku (zob. [32]). Jednak dla $\mathrm{e}(S) \geq 3$ problem Frobeniusa pozostaje nierozwiązany. Curtis wykazał w [9], że nie istnieje wzór wielomianowy (tj. skończony zbiór wielomianów) pozwalający obliczyć liczbę Frobeniusa, gdy $\mathrm{e}(S) = 3$. Ponadto Ramírez-Alfonsín [24] udowodnił, że zagadnienie to jest NP-trudne. Mimo tego, w przypadku trzech generatorów uzyskano wiele użytecznych rezultatów; do fundamentalnych należą prace Johnsona [16] oraz Brauera i Shockleya [7] (po więcej informacji odsyłamy czytelnika do [25]).

Wiele wzorów dla szczególnych typów półgrup numerycznych zostało również ustalonych, na przykład dla tych generowanych przez ciągi arytmetyczne [6, 26] lub prawie arytmetyczne [20, 31], ciągi geometryczne [23], generowane przez trzy kolejne kwadraty lub sześciany [11, 19], przez trzy liczby Fibonacciego [21], przez kwadraty trzech kolejnych liczb Fibonacciego [27], przez liczby trójkątne i czworościenne [28], a także wiele innych.

Rozważano również półgrupy numeryczne generowane przez ciągi nieskończone, w tym nieskończone ciągi kwadratów [22], innych k-tych potęg [4] oraz nieskończone ciągi kwadratowe [14]. Czytelnik może zobaczyć także referencje w [4] oraz [14].

W niniejszej pracy interesować nas będzie wyznaczanie liczb Frobeniusa półgrup numerycznych generowanych przez cztery kolejne kwadraty oraz cztery kolejne liczby trójkątne. Odpowiednie problemy dla trzech generatorów zostały rozwiązane w [11, 19] oraz [28].

W Sekcji 2 prezentujemy metodę wyznaczania zbioru Apéry'ego dowolnej półgrupy numerycznej o wymiarze osadzenia równym cztery, z którego można otrzymać liczbę Frobeniusa. Jest to główny wynik

niniejszej pracy. Podajemy tam również rezultat dotyczący jednoznaczności L-kształtów, powiązany z pracą [1].

W Sekcji 3 rozwijamy wyniki z poprzedniej sekcji, aby wyznaczyć również stopień łańcuchowy. Odgrywa on kluczową rolę w teorii faktoryzacji, a ostatnio w [12] wykazano, że nie istnieje dla niego wzór wielomianowy, działający dla wszystkich półgrup numerycznych (podobnie jak w przypadku liczby Frobeniusa [9]). W procesie wyznaczania stopnia łańcuchowego otrzymujemy także zbiór elementów Bettiego. Po więcej kontekstu czytelnik może zobaczyć Rozdział 6 monografii [5].

W Sekcjach 4 oraz 5 stosujemy narzędzia opracowane w poprzednich sekcjach do półgrup numerycznych generowanych przez cztery kolejne kwadraty oraz cztery kolejne liczby trójkątne. Podobne wyniki dla innej rodziny półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia równym cztery uzyskano w [28]. W szczególności autorzy badali tam liczby Frobeniusa, zbiory Apéry'ego, elementy Bettiego oraz minimalne prezentacje półgrup numerycznych generowanych przez cztery kolejne liczby czworościenne. Jednakże dowody tam przedstawione opierają się w dużej mierze na − zdefiniowanej w tej pracy − własności teleskopowości, i nie mogą być zastosowane do większości półgrup numerycznych. W szczególności nie można ich zastosować do czterech kolejnych liczb trójkątnych, co jest możliwe przy użyciu naszych metod.

Kończymy pracę uwagami, które mogą stanowić inspirację do dalszych badań.

Aby uzyskać wiele tożsamości odgrywających kluczową rolę w Sekcjach 4 oraz 5, korzystaliśmy z `Mathematica` [15]. Do weryfikacji otrzymanych wzorów na niezmienniki półgrup numerycznych użyliśmy pakietu `numericalsgps` [10] systemu `GAP` [13].

2 Geometryczna procedura

2.1 Wstęp

Dla półgrupy numerycznej S oraz elementu $a \in S$ definiujemy *zbiór Apéry'ego* S względem a jako

$$\mathrm{Ap}(S,a) = \{s \in S \mid s - a \notin S\}$$

(zob. [3]). Mamy $\#\mathrm{Ap}(S,a) = a$, ponieważ zbiór ten musi zawierać dokładnie jeden element z każdej klasy reszt modulo a. Zbiór ten jest dla nas istotny, ponieważ na jego podstawie można wyznaczyć wartości kilku niezmienników półgrupowych. W szczególności $F(S) = \max\{\mathrm{Ap}(S,a)\} - a$, oraz $G(S) = \frac{1}{a}\left(\sum_{s\in \mathrm{Ap}(S,a)} s\right) - \frac{a-1}{2}$, gdzie $G(S)$ jest mocą zbioru $\mathbb{N} \setminus S$ i jest nazywany *genusem* (zob. [31]).

Geometryczna procedura obliczania liczby Frobeniusa dla półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia równym trzy jest dobrze znana (zob. [7]). Dla półgrupy numerycznej $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$ spełniającej $\gcd(d_i, d_j) = 1$ dla $i \neq j$, polega ona na znalezieniu najmniejszych dodatnich liczb całkowitych a_{11}, a_{22}, a_{33} takich, że:

$$\begin{aligned} a_{11}d_1 &= a_{12}d_2 + a_{13}d_3,\\ a_{22}d_2 &= a_{21}d_1 + a_{23}d_3,\\ a_{33}d_3 &= a_{31}d_1 + a_{32}d_2, \end{aligned}$$

dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$. Powyższe równania nazywane są *minimalnymi relacjami* półgrupy $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$. Liczbę Frobeniusa wyraża następnie wzór

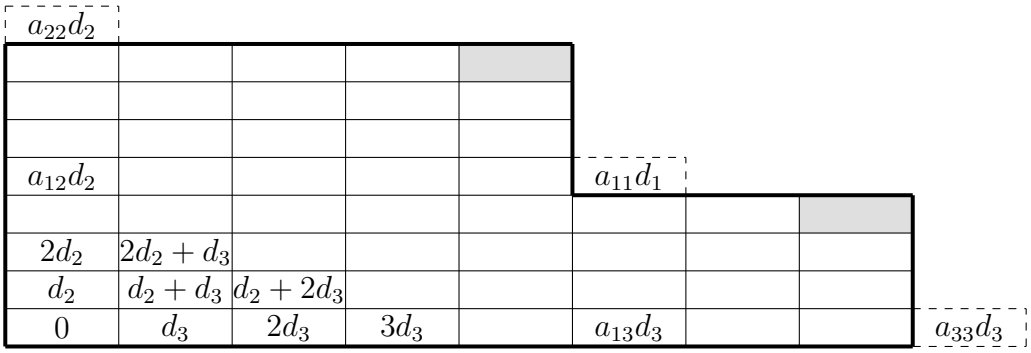
$$F(\langle d_1, d_2, d_3\rangle) = \max\{(a_{22}-1)d_2 + (a_{13}-1)d_3,\ (a_{12}-1)d_2 + (a_{33}-1)d_3\} - d_1. \tag{1}$$

Geometryczny charakter powyższej tożsamości można dostrzec w następującym szkicu dowodu.

Rozważmy zbiór jednostkowych kwadratów w pierwszej ćwiartce, ułożonych przy osiach x i y. Oznaczamy kwadrat, którego wierzchołek najbliższy początku układu współrzędnych ma współrzędne (i, j), wartością $id_2 + jd_3$. Następnie znajdujemy punkty $(a_{22}, 0)$, $(0, a_{33})$, (a_{12}, a_{13}) i usuwamy obszary $\{x > a_{22}, y > 0\}$, $\{x > 0, y > a_{33}\}$, $\{x > a_{12}, y > a_{13}\}$ (zob. Rysunek 1).

W [7] udowodniono, że etykiety pozostałe w otrzymanej figurze tworzą dokładnie zbiór $\mathrm{Ap}(\langle d_1, d_2, d_3\rangle, d_1)$ (zob. także [16]). Wykazano tam również, że współczynniki w minimalnych relacjach spełniają $a_{ii} =$

Rysunek 1: diagram wyznaczający $\mathrm{Ap}(\langle d_1, d_2, d_3\rangle, d_1)$

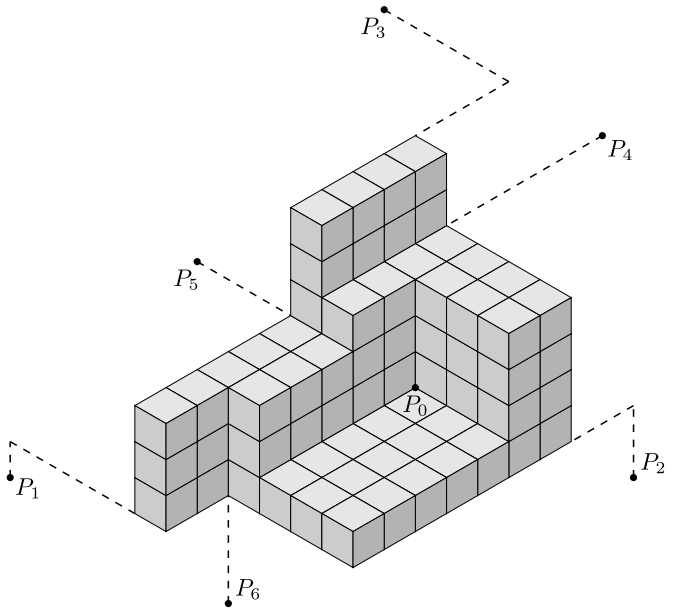


$a_{ji} + a_{ki}$. Daje to $a_{ii} \geq a_{ji}, a_{ki}$, więc otrzymana figura będzie miała kształt litery L (lub prostokątny). Wzór (1) wynika z tożsamości $F(S) = \max(\mathrm{Ap}(S, a)) - a$, ponieważ element maksymalny zbioru Apéry'ego musi etykietować jeden z narożnych kwadratów na Rysunku 1 (zaznaczonych kolorem jasnoszarym).

Killingbergtrø, w [18], rozważał możliwą uogólnioną wersję powyższej procedury dla półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia równym cztery. Między innymi obliczył liczbę Frobeniusa losowo wybranej półgrupy numerycznej $\langle 103, 133, 165, 228\rangle$, korzystając z procedury geometrycznej, aby wyznaczyć zbiór Apéry'ego względem 103. Jego metoda dla półgrupy $\langle d_0, d_1, d_2, d_3\rangle$ polega na skonstruowaniu trójwymiarowej figury (Rysunek 2), składającej się ze zbioru jednostkowych sześcianów w pierwszym oktancie, ustawionych przy płaszczyznach xy-, yz- oraz zx-, gdzie sześcian, którego wierzchołek najbliższy początku układu współrzędnych ma współrzędne (i, j, k), jest oznaczony wartością $id_1 + jd_2 + kd_3$. Podobnie jak w metodzie dla trzech generatorów, znajdujemy następnie pewien szczególny zbiór punktów i dla każdego z nich, o współrzędnych (a, b, c), usuwamy obszar $\{x > a, y > b, z > c\}$. Robimy to tak, aby zbiór etykiet pozostałej figury był zbiorem Apéry'ego względem d_0. Często będziemy odnosić się do tego zbioru po prostu jako do zbioru Apéry'ego.

Zbiór punktów używany przez Killingbergtrø (oraz jego odpowiednik dla innych półgrup numerycznych) nie jest w ogólności wystarczający do otrzymania zbioru Apéry'ego. Przedstawiamy tu zmodyfikowane podejście, które działa dla dowolnej półgrupy numerycznej o wymiarze osadzenia równym cztery.

Rysunek 2: figura z [18]



2.2 Procedura

Niech $\langle d_0, d_1, d_2, d_3\rangle$ będzie półgrupą numeryczną o wymiarze osadzenia równym cztery.

Rozważmy sześciany jednostkowe w $\mathbb{R}^3$. Każdy sześcian jednostkowy $[i, i+1] \times [j, j+1] \times [k, k+1] \in \mathbb{R}^3$ ma naturalne współrzędne $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ i jest oznaczony wartością $id_1 + jd_2 + kd_3$. Zbiór wszystkich takich oznaczonych sześcianów będziemy nazywać *początkową kolekcją sześcianów*. Sześcian jednostkowy $[i, i+1] \times [j, j+1] \times [k, k+1]$ oznaczamy przez $[[i, j, k]]$.

W pozostałej części tej sekcji przedstawiamy metodę znajdowania zbioru Apéry'ego półgrupy $\langle d_0, d_1, d_2, d_3\rangle$ względem d_0. Twierdzenie 2.2 dostarcza fundamentalnego wyniku, który to umożliwia, choć samo w sobie nie jest bezpośrednio praktyczne. Propozycje 2.5 oraz 2.7 dostarczają kluczowych rezultatów, które czynią naszą metodę użyteczną w praktyce. Dołączamy również dalsze wyniki w Propozycjach 2.8 oraz 2.9.

Zdefiniujmy minimalną relację dla d_0:

$$a_{00}d_0 = a_{01}d_1 + a_{02}d_2 + a_{03}d_3, \tag{2}$$

gdzie a_{00} jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą taką, że istnieją $a_{01}, a_{02}, a_{03} \in \mathbb{N}$ spełniające (2). Ponadto, dla każdej trójki (a_{01}, a_{02}, a_{03}), $a_{0i} \in \mathbb{N}$, takiej że (2) jest spełnione, konstruujemy punkt

$$P_0 = (a_{01}, a_{02}, a_{03}). \tag{3}$$

Wszystkie takie punkty spełniają, że $xd_1 + yd_2 + zd_3$ jest dodatnią wielokrotnością d_0 – tutaj, i w całej pozostałej części tej sekcji, x, y, z zawsze oznaczają odpowiednio współrzędne x-, y- oraz z-rozważanego punktu.

Następnie definiujemy pozostałe minimalne relacje półgrupy $\langle d_0, d_1, d_2, d_3\rangle$:

$$\begin{aligned} a_{11}d_1 &= a_{10}d_0 + a_{12}d_2 + a_{13}d_3, \\ a_{22}d_2 &= a_{20}d_0 + a_{21}d_1 + a_{23}d_3, \\ a_{33}d_3 &= a_{30}d_0 + a_{31}d_1 + a_{32}d_2, \end{aligned}$$

gdzie a_{11}, a_{22}, a_{33} są najmniejszymi dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że powyższe równości zachodzą dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a_{ij}. Korzystając z powyższych współczynników, konstruujemy punkty

$$P_1 = (a_{11}, -a_{12}, -a_{13}),\ P_2 = (-a_{21}, a_{22}, -a_{23}),\ P_3 = (-a_{31}, -a_{32}, a_{33}), \tag{4}$$

z których każdy spełnia, że $xd_1 + yd_2 + zd_3$ jest nieujemną wielokrotnością d_0.

Dodatkowo definiujemy również relacje:

$$\begin{aligned} b_{11}d_1 &= b_{10}d_0 + b_{12}d_2 + b_{13}d_3, \\ b_{22}d_2 &= b_{20}d_0 + b_{21}d_1 + b_{23}d_3, \\ b_{33}d_3 &= b_{30}d_0 + b_{31}d_1 + b_{32}d_2, \end{aligned}$$

gdzie b_{11}, b_{22}, b_{33} są najmniejszymi dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że powyższe równości zachodzą dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych b_{ij}, przy czym dodatkowo b_{10}, b_{20}, b_{30} muszą być dodatnie. Nazywamy je *d_0-pozytywnymi minimalnymi relacjami* półgrupy $\langle d_0, d_1, d_2, d_3\rangle$. Korzystając z powyższych współczynników, konstruujemy punkty

$$P_1^+ = (b_{11}, -b_{12}, -b_{13}),\ P_2^+ = (-b_{21}, b_{22}, -b_{23}),\ P_3^+ = (-b_{31}, -b_{32}, b_{33}), \tag{5}$$

z których każdy spełnia, że $xd_1 + yd_2 + zd_3$ jest dodatnią wielokrotnością d_0.

Od tego momentu, dla punktu $P = (a, b, c)$, region $\{x > a, y > b, z > c\}$ będziemy nazywać *regionem skojarzonym z P*.

Lemat 2.1. *Usunięcie z początkowej kolekcji sześcianów regionu skojarzonego z punktem $P = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{Z}^3$, spełniającym $\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 = \mu d_0$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej μ, nie usuwa żadnego sześcianu oznaczonego elementem zbioru Apéry'ego względem d_0.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór Apéry'ego względem d_0 to zbiór minimalnych liczb z każdej klasy reszt modulo d_0, które należą do półgrupy numerycznej $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnej reszty $r \in \{0, 1, \ldots, d_0 - 1\}$ usunięto sześcian oznaczony minimalną liczbą $\lambda d_0 + r$ ($\lambda \in \mathbb{N}$), która należy do $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$. Niech $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]]$ będzie usuniętym sześcianem, oznaczonym wartością $\lambda d_0 + r$. Ponieważ został usunięty przez region skojarzony z P, mamy $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_2 \geq \mu_2$, $\lambda_3 \geq \mu_3$. Otrzymujemy

$$(\lambda_1 - \mu_1)d_1 + (\lambda_2 - \mu_2)d_2 + (\lambda_3 - \mu_3)d_3 = (\lambda - \mu)d_0 + r, \tag{6}$$

gdzie wszystkie współczynniki po lewej stronie są nieujemne. Oznacza to, że wartość (6) przystaje do r modulo d_0, jest nieujemna, należy do $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$ i jest ściśle mniejsza niż $\lambda d_0 + r$, co przeczy minimalności $\lambda d_0 + r$. □

Twierdzenie 2.2. *Usuńmy z początkowej kolekcji sześcianów regiony skojarzone ze wszystkimi punktami postaci* (3) *oraz regiony skojarzone z punktami* (5)*. Dodatkowo, dla wszystkich tożsamości postaci*

$$\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1 = \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3,$$

gdzie $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_2 < b_{22}$ oraz $\lambda_3 < b_{33}$, usuńmy region skojarzony z punktem $(-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Dla wszystkich tożsamości postaci

$$\lambda_0 d_0 + \lambda_2 d_2 = \lambda_1 d_1 + \lambda_3 d_3,$$

gdzie $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 < b_{11}$ oraz $\lambda_3 < b_{33}$, usuńmy region skojarzony z punktem $(\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$. Wreszcie, dla wszystkich tożsamości postaci

$$\lambda_0 d_0 + \lambda_3 d_3 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2,$$

gdzie $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 < b_{11}$ oraz $\lambda_2 < b_{22}$, usuńmy region skojarzony z punktem $(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3)$. Pozostałą kolekcję sześcianów nazywamy figurą R. Wówczas zbiór wszystkich sześcianów z początkowej kolekcji, które są oznaczone elementem zbioru Apéry'ego, jest dokładnie figurą R.

Dowód. Warunek $\lambda_i < b_{ii}$ gwarantuje, że rozważamy jedynie tożsamości, które mają znaczenie – punkty (5) usuwają już regiony $\{x > b_{11}\}$, $\{y > b_{22}\}$, $\{z > b_{33}\}$. Lemat 2.1 zapewnia, że każdy sześcian oznaczony elementem zbioru Apéry'ego znajduje się w R. Musimy jedynie wykazać, że w R znajdują się wyłącznie sześciany oznaczone elementami zbioru Apéry'ego. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnej reszty $r \in \{0, 1, \ldots, d_0 - 1\}$, liczby $\lambda d_0 + r$ oraz $\lambda' d_0 + r$, gdzie $\lambda' > \lambda$, są etykietami w R. Wówczas dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3' \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lambda d_0 + r = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3, \tag{7}$$

$$\lambda' d_0 + r = \lambda_1' d_1 + \lambda_2' d_2 + \lambda_3' d_3, \tag{8}$$

przy czym $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]], [[\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3']] \in R$. Odejmując (7) od (8), otrzymujemy

$$(\lambda' - \lambda)d_0 = (\lambda_1' - \lambda_1)d_1 + (\lambda_2' - \lambda_2)d_2 + (\lambda_3' - \lambda_3)d_3, \tag{9}$$

gdzie z założenia $(\lambda' - \lambda) > 0$. Rozważmy przypadki dotyczące liczby dodatnich współczynników po prawej stronie (9). Lewa strona jest dodatnia, zatem po prawej stronie co najmniej jeden współczynnik jest dodatni.

Jeśli dokładnie jeden współczynnik jest dodatni, załóżmy bez straty ogólności, że jest to $(\lambda_1' - \lambda_1)$. Przenosząc niedodatnie wyrazy na drugą stronę, otrzymujemy

$$(\lambda' - \lambda)d_0 + (\lambda_2 - \lambda_2')d_2 + (\lambda_3 - \lambda_3')d_3 = (\lambda_1' - \lambda_1)d_1. \tag{10}$$

Z minimalności b_{11}, ponieważ wszystkie współczynniki powyżej są nieujemne, a $(\lambda_1' - \lambda_1)$ oraz $(\lambda' - \lambda)$ są dodatnie, otrzymujemy $b_{11} \leq (\lambda_1' - \lambda_1) \leq \lambda_1'$, co przeczy temu, że $[[\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3']] \in R$.

Jeśli dokładnie dwa współczynniki po prawej stronie (9) są dodatnie, załóżmy bez straty ogólności, że są to $(\lambda_1' - \lambda_1)$ oraz $(\lambda_2' - \lambda_2)$. Przenosząc $(\lambda_3' - \lambda_3)$ na drugą stronę, otrzymujemy

$$(\lambda' - \lambda)d_0 + (\lambda_3 - \lambda_3')d_3 = (\lambda_1' - \lambda_1)d_1 + (\lambda_2' - \lambda_2)d_2. \tag{11}$$

Powyższa tożsamość spełnia warunki bieżącego twierdzenia, zatem region $\{x > (\lambda'_1 - \lambda_1), y > (\lambda'_2 - \lambda_2)\}$ został usunięty. To ponownie przeczy temu, że $[[\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3]] \in R$, ponieważ $\lambda'_1 \geq (\lambda'_1 - \lambda_1)$ oraz $\lambda'_2 \geq (\lambda'_2 - \lambda_2)$.

Pozostaje przypadek, w którym wszystkie współczynniki w (9) są dodatnie. Podstawmy $\mu = (\lambda' - \lambda) > 0$ oraz $\mu_i = (\lambda'_i - \lambda_i) > 0$ dla $i = 1, 2, 3$. Wówczas

$$\mu d_0 = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3, \tag{12}$$

oraz sześcian $[[\mu_1, \mu_2, \mu_3]]$ musi również należeć do R, ponieważ $\mu_i \leq \lambda'_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Z minimalności a_{00} otrzymujemy $a_{00} \leq \mu$. Odejmujemy teraz $a_{00}d_0 = a_{01}d_1 + a_{02}d_2 + a_{03}d_3$ od (12), aby uzyskać

$$(\mu - a_{00})d_0 = (\mu_1 - a_{01})d_1 + (\mu_2 - a_{02})d_2 + (\mu_3 - a_{03})d_3. \tag{13}$$

Jeśli $(\mu - a_{00}) = 0$, to punkt (μ_1, μ_2, μ_3) jest postaci (3), więc region z nim skojarzony został usunięty, co przeczy temu, że $[[\mu_1, \mu_2, \mu_3]] \in R$.

Wreszcie, gdy $(\mu - a_{00}) > 0$ w (13), powtarzamy tę samą analizę przypadków co dla (9), co prowadzi do wniosku, że wszystkie współczynniki w (13) są dodatnie. Jednakże implikuje to, że sześcian $[[\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3]]$ musiał zostać usunięty przez region skojarzony z (a_{01}, a_{02}, a_{03}), co jest sprzecznością. □

Ogólnie rzecz biorąc, znalezienie minimalnych relacji oraz wszystkich tożsamości spełniających warunki Twierdzenia 2.2, a także bezpośrednie udowodnienie, że relacje te są rzeczywiście minimalne i że znaleźliśmy wszystkie takie tożsamości, jest bardzo trudne i niepraktyczne. Aby skutecznie korzystać z Twierdzenia 2.2, potrzebujemy kilku dodatkowych lematów.

Lemat 2.3. *Niech R będzie jak w Twierdzeniu 2.2. Usuńmy z R region $\{x > a_{11}\}$. Wówczas każdy element zbioru Apéry'ego nadal etykietuje jakiś pozostały sześcian. To samo będzie prawdziwe, jeśli zamiast tego usuniemy region $\{y > a_{22}\}$ lub $\{z > a_{33}\}$.*

Dowód. Bez straty ogólności rozważmy usunięcie regionu $\{x > a_{11}\}$. Jeśli $a_{11} = b_{11}$, nie ma nic do udowodnienia, więc załóżmy, że $a_{11} < b_{11}$, co implikuje $a_{10} = 0$. Rozważmy element zbioru Apéry'ego, który ma postać $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{N}$ i w szczególności $\lambda_1 \geq a_{11}$. Wówczas istnieje dodatnia liczba całkowita λ taka, że $a_{11} > (\lambda_1 - \lambda a_{11}) \geq 0$. Otrzymujemy

$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = (\lambda_1 - \lambda a_{11})d_1 + (\lambda_2 + \lambda a_{12})d_2 + (\lambda_3 + \lambda a_{13})d_3. \tag{14}$$

Ponieważ każdy sześcian oznaczony elementem zbioru Apéry'ego musi znajdować się w R, mamy $[[\lambda_1 - \lambda a_{11}, \lambda_2 + \lambda a_{12}, \lambda_3 + \lambda a_{13}]] \in R$ co daje tezę. □

Lemat 2.4. *Niech R będzie jak w Twierdzeniu 2.2. Usuńmy z R regiony $\{x > a_{11}\}$, $\{y > a_{22}\}$ oraz $\{z > a_{33}\}$. Wówczas w otrzymanej kolekcji każdy element zbioru Apéry'ego oznacza co najwyżej jeden sześcian.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3 \in \mathbb{N}$, gdzie $\lambda_i, \lambda'_i < a_{ii}$ dla $i = 1, 2, 3$, mamy

$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = \lambda'_1 d_1 + \lambda'_2 d_2 + \lambda'_3 d_3 \tag{15}$$

$$\implies (\lambda'_1 - \lambda_1)d_1 + (\lambda'_2 - \lambda_2)d_2 + (\lambda'_3 - \lambda_3)d_3 = 0. \tag{16}$$

Jeśli współczynniki w (16) są zerami, nie ma nic do udowodnienia. Zatem dokładnie jeden lub dwa współczynniki w (16) są dodatnie. Niezależnie od przypadku, bez straty ogólności możemy założyć, że

$$(\lambda'_1 - \lambda_1)d_1 = (\lambda_2 - \lambda'_2)d_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)d_3, \tag{17}$$

gdzie wszystkie współczynniki w powyższym równaniu są nieujemne. Jednak $(\lambda'_1 - \lambda_1)$ musi być dodatnie, ponieważ w przeciwnym razie wszystkie współczynniki byłyby zerowe. To implikuje $a_{11} \leq (\lambda'_1 - \lambda_1) \leq \lambda'_1$, co prowadzi do sprzeczności. □

Propozycja 2.5. *Załóżmy, że $a_{ii} = b_{ii}$ dla co najmniej dwóch różnych indeksów $i \in \{1, 2, 3\}$. Niech R będzie jak w Twierdzeniu 2.2, i usuńmy z R regiony $\{x > a_{11}\}$, $\{y > a_{22}\}$ oraz $\{z > a_{33}\}$. Wówczas każdy element zbioru Apéry'ego oznacza dokładnie jeden sześcian w otrzymanej kolekcji.*

Dowód. Jeśli $a_{ii} = b_{ii}$ dla wszystkich $i = 1, 2, 3$, to Lemat 2.4 daje tezę. W przeciwnym razie mamy $a_{ii} < b_{ii}$ dokładnie dla jednego $i \in \{1, 2, 3\}$. W takim przypadku Lemat 2.3 wraz z Lematem 2.4 daje tezę. □

Podzbiór początkowej kolekcji sześcianów nazywamy *L-kształtem* (ang. *L-shape*), jeśli tylko elementy zbioru Apéry'ego są używane do oznaczania sześcianów w tym podzbiorze, każdy element zbioru Apéry'ego oznacza dokładnie jeden sześcian w tym podzbiorze, oraz podzbiór ten posiada własność, że jeśli jakiś sześcian nie należy do podzbioru, to żaden sześcian w regionie skojarzonym z wierzchołkiem tego sześcianu najbliższym początku układu współrzędnych również do niego nie należy. W szczególności kolekcja z Propozycji 2.5 jest L-kształtem. To nazewnictwo pochodzi z [1] i jest ugruntowane w literaturze.

Okazuje się, że gdy spełnione są warunki Propozycji 2.5, możemy zastosować strategię polegającą w istocie na odgadnięciu zbioru Apéry'ego. Wspomnieliśmy już we wstępie, że ogólny wzór wielomianowy na liczbę Frobeniusa nie istnieje. Gdy poszukujemy liczby Frobeniusa dla szczególnej rodziny półgrup numerycznych, dla której podejrzewamy istnienie wzoru wielomianowego, oczekujemy również, że odpowiadający jej zbiór Apéry'ego, a wraz z nim figura R, będzie wykazywać pewną regularność. Aby przetestować te przypuszczenia, możemy badać przykłady numeryczne przy pomocy kalkulatora algebraicznego, co pozwala lepiej zrozumieć zachowanie danej rodziny.

Jeśli rodzina półgrup numerycznych jest wystarczająco dobrze ułożona, minimalne relacje oraz tożsamości z Twierdzenia 2.2 powinny mieć formę, którą będziemy w stanie przewidzieć.

Jeśli spełnione są warunki Propozycji 2.5, oznacza to, że możemy usunąć wystarczająco dużo regionów, aby pozostawić L-kształt. Jest to kluczowe, ponieważ L-kształt zawiera dokładnie d_0 sześcianów. W ten sposób nie musimy dowodzić żadnych własności równań, które znaleźliśmy − możemy po prostu użyć Lematów 2.1 oraz 2.3, aby usunąć odpowiadające im regiony i pozostawić zbiór Apéry'ego. Jeśli pozostanie nam dokładnie d_0 sześcianów, oznacza to, że znaleźliśmy L-kształt. Wykorzystamy tę ideę w Sekcjach 4 oraz 5.

Uwaga 2.6. Jeśli warunki Propozycji 2.5 nie są spełnione względem d_0, możemy na przykład poszukać zbioru Apéry'ego względem d_1, o ile dla takiego generatora warunki zastosowania Propozycji 2.5 są spełnione. Zobaczymy w Sekcjach 4 oraz 5, że taka zamiana była możliwa lub nie była potrzebna. Jednakże możliwe jest, że nie możemy tego zrobić. Zobaczmy na przykład $\langle d_0, d_1, d_2, d_3\rangle = \langle 22, 38, 55, 57\rangle$. Ma ona wymiar osadzenia równy cztery, a minimalne relacje mają postać:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 22 &= 0 \cdot 38 + 2 \cdot 55 + 0 \cdot 57, \\ 3 \cdot 38 &= 0 \cdot 22 + 0 \cdot 55 + 2 \cdot 57, \\ 2 \cdot 55 &= 5 \cdot 22 + 0 \cdot 38 + 0 \cdot 57, \\ 2 \cdot 57 &= 0 \cdot 22 + 3 \cdot 38 + 0 \cdot 55. \end{aligned}$$

Chcielibyśmy jednak móc zastosować naszą metodę znajdowania zbioru Apéry'ego dla wszystkich półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia cztery, nie tylko do tych, które spełniają założenia Propozycji 2.5.

Przypuśćmy, że znajdujemy się w sytuacji, w której Propozycji 2.5 nie da się zastosować w żadnen sposób, co oznacza, że co najmniej dwa spośród a_{ji}, a_{ki}, a_{li} są równe zero dla każdego ustawienia indeksów $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Ponieważ dla dowolnego ustawienia $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ co najwyżej dwa spośród a_{ij}, a_{ik}, a_{il} mogą być równe zero, widzimy, że dla każdego indeksu $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ minimalna relacja dla d_i ma postać $a_{ii}d_i = a_{ij}d_j$ dla pewnego $j \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Ponadto, gdyby istniała inna reprezentacja $a_{ii}d_i = \lambda_j d_j + \lambda_k d_k + \lambda_l d_l$, w której co najmniej dwa spośród $\lambda_j, \lambda_k, \lambda_l$ są ściśle dodatnie, moglibyśmy po prostu użyć tej reprezentacji jako domyślnej minimalnej relacji, a następnie zastosować Propozycję 2.5. Zatem zakładamy, że żadna taka reprezentacja nie istnieje.

Zauważmy, że $a_{ij} \geq a_{jj}$. Jeśli $a_{ij} > a_{jj}$, możemy zapisać

$$a_{ii}d_i = a_{ij}d_j = (a_{ij} - a_{jj})d_j + a_{jm}d_m, \tag{18}$$

dla pewnego $m \in \{0,1,2,3\} \setminus \{j\}$. Jeśli $m = i$, możemy odjąć d_i od obu stron (18) i otrzymać sprzeczność z minimalnością a_{ii}. Jeśli $m \neq i$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem z poprzedniego akapitu. To implikuje $a_{ij} = a_{jj}$, a zatem $a_{ii}d_i = a_{jj}d_j$.

Kolejna propozycja pozwala nam zastosować tę samą strategię co Propozycja 2.5, ale dla wszystkich pozostałych półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia cztery − dla których wspomnianej propozycji nie da się zastosować w żadnej formie.

Propozycja 2.7. *Załóżmy, że $a_{11} = b_{11}$ oraz $a_{22}d_2 = a_{33}d_3$. Niech R będzie jak w Twierdzeniu 2.2 i usuńmy z R region $\{z > a_{33}\}$. Wówczas otrzymana figura jest L-kształtem.*

Dowód. Mamy iniekcję między sześcianami z $R \cap \{y \geq a_{22}\}$ a sześcianami z $R \cap \{z \geq a_{33}\}$, która posyła $[[\mu_1, \mu_2, \mu_3]] \in R \cap \{y \geq a_{22}\}$ na $[[\mu_1, \mu_2 - a_{22}, \mu_3 + a_{33}]] \in R \cap \{z \geq a_{33}\}$. Sześcian $[[\mu_1, \mu_2 - a_{22}, \mu_3 + a_{33}]]$ należy do R na mocy Twierdzenia 2.2, ponieważ jest oznaczony elementem zbioru Apéry'ego. Podobnie możemy zdefiniować iniekcję w przeciwnym kierunku, która jest odwrotnością pierwszego odwzorowania. Zatem korespondencja ta jest bijekcją. Ponieważ bijekcja ta zachowuje etykiety, aby otrzymać L-kształt, musimy usunąć albo region $\{y > a_{22}\}$, albo $\{z > a_{33}\}$. Wybieramy usunięcie $\{z > a_{33}\}$ i niech T będzie otrzymaną figurą.

Przypuśćmy, że jakaś etykieta w T pojawia się dwukrotnie. Otrzymujemy wówczas

$$\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 = \nu_1 d_1 + \nu_2 d_2 + \nu_3 d_3, \tag{19}$$

dla pewnych $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{N}$, gdzie $[[\mu_1, \mu_2, \mu_3]]$ oraz $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]]$ są dwoma różnymi sześcianami w T. Bez straty ogólności załóżmy $\mu_2 \geq \nu_2$.

Jeśli $\mu_1 \leq \nu_1$ oraz $\mu_3 \leq \nu_3$, otrzymujemy

$$(\mu_2 - \nu_2)d_2 = (\nu_1 - \mu_1)d_1 + (\nu_3 - \mu_3)d_3, \tag{20}$$

gdzie wszystkie współczynniki są nieujemne, co implikuje $(\mu_2 - \nu_2) \geq a_{22}$. Jeśli $\nu_3 \geq (\nu_3 - \mu_3) \geq a_{33}$, otrzymujemy sprzeczność z $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]] \in T$, zatem $(\nu_3 - \mu_3) < a_{33}$. To daje

$$(\mu_2 - \nu_2 - a_{22})d_2 + (a_{33} - \nu_3 + \mu_3)d_3 = (\nu_1 - \mu_1)d_1, \tag{21}$$

gdzie wszystkie współczynniki są nieujemne, a $(a_{33} - \nu_3 + \mu_3)$ jest dodatnie. Zatem $(\nu_1 - \mu_1)$ również jest dodatnie, co implikuje $\nu_1 \geq (\nu_1 - \mu_1) \geq a_{11} = b_{11}$, co przeczy temu, że $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]] \in T$.

Jeśli $\mu_1 > \nu_1$ oraz $\mu_3 \leq \nu_3$, to

$$(\mu_2 - \nu_2)d_2 + (\mu_1 - \nu_1)d_1 = (\nu_3 - \mu_3)d_3, \tag{22}$$

co implikuje $\nu_3 \geq (\nu_3 - \mu_3) \geq a_{33}$, a więc sprzeczność z $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]] \in T$.

Wreszcie, jeśli $\mu_1 \leq \nu_1$ oraz $\mu_3 > \nu_3$, to

$$(\mu_2 - \nu_2)d_2 + (\mu_3 - \nu_3)d_3 = (\nu_1 - \mu_1)d_1, \tag{23}$$

co implikuje $\nu_1 \geq (\nu_1 - \mu_1) \geq a_{11} = b_{11}$, a więc ponownie sprzeczność z $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]] \in T$.

Podsumowując, każdy element zbioru Apéry'ego pojawia się jako etykieta w T oraz każda etykieta w T pojawia się tylko raz. Zatem T jest L-kształtem. □

2.3 Dalsze rezultaty

Przypuśćmy, że usunęliśmy z początkowej kolekcji sześcianów pewne regiony, których usunięcie spełniało założenia Lematu 2.1 lub 2.3, co gwarantuje, że każdy element zbioru Apéry'ego nadal oznacza jakiś sześcian w otrzymanej figurze. Załóżmy ponadto, że otrzymana kolekcja zawiera dokładnie d_0 sześcianów; oznacza to, że uzyskaliśmy L-kształt. Chcielibyśmy ustalić, czy równania, których użyliśmy − w szczególności relacje postaci $\lambda_i d_i = \lambda_j d_j + \lambda_k d_k + \lambda_l d_l$ − są w istocie minimalnymi relacjami lub d_0-pozytywnymi minimalnymi relacjami. Gdy założenia Propozycji 2.5 są spełnione, poniższy wynik dostarcza dokładnie takiej informacji. Będzie to istotne w Sekcji 3.

Propozycja 2.8. *Załóżmy, że usunęliśmy z początkowej kolekcji kostek regiony, które odpowiadają pewnym punktom spełniającym warunek, że $xd_1 + yd_2 + zd_3$ jest dodatnią wielokrotnością d_0 (tak jak wszystkie punkty użyte w Twierdzeniu 2.2). Dodatkowo usuwamy regiony $\{x > b'_{11}\}$, $\{y > b'_{22}\}$ oraz $\{z > a'_{33}\}$, gdzie:*

$$\begin{aligned} b'_{11}d_1 &= b'_{10}d_0 + b'_{12}d_2 + b'_{13}d_3, \\ b'_{22}d_2 &= b'_{20}d_0 + b'_{21}d_1 + b'_{23}d_3, \\ a'_{33}d_3 &= a'_{30}d_0 + a'_{31}d_1 + a'_{32}d_2, \end{aligned}$$

przy $a'_{ij}, b'_{ij} \in \mathbb{N}$ oraz w szczególności $b'_{10}, b'_{20} > 0$. Jeśli otrzymana kolekcja kostek jest L-kształtem, to $b'_{11} = b_{11} = a_{11}$, $b'_{22} = b_{22} = a_{22}$ oraz $a'_{33} = a_{33}$.

Dowód. Oznaczmy otrzymany L-kształt przez T, a R niech będzie jak w Twierdzeniu 2.2. Zauważmy, że R zawiera się w $T \cup \{z > a'_{33}\}$. Zatem, jeśli $a'_{33} > a_{33}$, to z Lematu 2.3 wynika, że każdy element zbioru Apéry'ego etykietuje kostkę w

$$R \cap \{z \leq a_{33}\} \subseteq (T \cup \{z > a'_{33}\}) \cap \{z \leq a_{33}\} = T \cap \{z \leq a_{33}\}.$$

Teraz $T \cap \{z \leq a_{33}\}$ jest ściśle mniejsze niż T, co daję sprzeczność z faktem, że T jest L-kształtem, więc $a'_{33} = a_{33}$.

Oczywiste jest, że $b'_{11} = b_{11}$ oraz $b'_{22} = b_{22}$, ponieważ żadna kostka etykietowana elementem zbioru Apéry'ego nie znajduje się poza R na mocy Twierdzenia 2.2. Możemy teraz skupić się na dowodzie równości $a_{11} = b_{11}$ (analogicznie otrzymamy $a_{22} = b_{22}$).

Przypuśćmy, że $a_{11} < b_{11}$. Otrzymujemy $a_{11}d_1 = a_{12}d_2 + a_{13}d_3$, co musi być elementem zbioru Apéry'ego, ponieważ jest to etykieta w T. Jeśli $a_{13} < a_{33}$, to mamy $[[0, a_{12}, a_{13}]] \in T$, co stoi w sprzeczności z faktem, że T jest L-kształtem, gdyż $[[a_{11}, 0, 0]] \in T$ również. Zatem $a_{13} \geq a_{33}$.

Możemy teraz zapisać

$$a_{11}d_1 = a_{12}d_2 + (a_{13} - a_{33})d_3 + a_{30}d_0 + a_{31}d_1 + a_{32}d_2. \tag{24}$$

Jeśli $a_{31}d_1 > 0$, to odejmując d_1 od obu stron (24), otrzymujemy sprzeczność z minimalnością a_{11}. Jeśli $a_{30}d_0 > 0$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem $a_{11} < b_{11}$.

Zatem $a_{31} = a_{30} = 0$ oraz $a_{33}d_3 = a_{32}d_2$. Możemy zapisać $a_{11}d_1 = (a_{12} + \lambda a_{32})d_2 + (a_{13} - \lambda a_{33})d_3$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej λ takiej, że $0 \leq (a_{13} - \lambda a_{33}) < a_{33}$. Teraz mamy $[[0, a_{12} + \lambda a_{32}, a_{13} - \lambda a_{33}]] \in T$, ponieważ żadna kostka etykietowana elementem zbioru Apéry'ego nie może znajdować się poza R na mocy Twierdzenia 2.2. Daje to sprzeczność z faktem, że T jest L-kształtem, więc $a_{11} = b_{11} = b'_{11}$. □

Kończymy tę sekcję propozycją powiązaną z [1], gdzie autorzy skonstruowali rodzinę półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia cztery, które mają dowolnie wiele powiązanych L-kształtów. Poniższa propozycja charakteryzuje, kiedy zbiór Apéry'ego półgrupy numerycznej o wymiarze osadzenia cztery ma dokładnie jeden L-kształt.

Propozycja 2.9. *Dla zbioru Apéry'ego względem d_0 istnieje dokładnie jeden L-kształt wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ii} = b_{ii}$ dla $i = 1, 2, 3$.*

Dowód. Jeśli $a_{ii} = b_{ii}$ dla $i = 1, 2, 3$, to z Lematu 2.4 wynika, że figura R jest L-kształtem. Ponadto R jest unikalny i stanowi zbiór wszystkich kostek z początkowej kolekcji, które są etykietowane elementem zbioru Apéry'ego na mocy Twierdzenia 2.2. Stąd zbiór Apéry'ego ma dokładnie jeden L-kształt.

Przez region skojarzony z kostką rozumiemy region skojarzony z wierzchołkiem kostki najbliższym początku układu współrzędnych.

Przypuśćmy, że $a_{ii} < b_{ii}$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3\}$. Wówczas R nie jest L-kształtem i pewna etykieta pojawia się w R więcej niż raz − jak np. etykieta $a_{ii}d_i$. Niech l będzie najmniejszą taką etykietą. Zapiszmy

$$l = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = \lambda'_1 d_1 + \lambda'_2 d_2 + \lambda'_3 d_3,$$

gdzie $\lambda_i, \lambda_i' \in \mathbb{N}$, a $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]]$ oraz $[[\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3']]$ są dwiema różnymi kostkami w R. Bez straty ogólności załóżmy $\lambda_1 > \lambda_1'$ oraz $\lambda_3 < \lambda_3'$.

Spośród wszystkich kostek o etykiecie l wybierzmy tę o największej współrzędnej x; jeśli kilka ma tę samą maksymalną współrzędną x, wybierzmy spośród nich tę o największej współrzędnej y (i istnieje tylko jedna taka kostka, ponieważ wszystkie mają tę samą etykietę). Usuńmy z R regiony związane ze wszystkimi pozostałymi kostkami o etykiecie l, pozostawiając tylko tą wybraną. Następnie przechodzimy do kolejnej najmniejszej etykiety, która pojawia się więcej niż raz, i powtarzamy proces. Twierdzimy, że procedura ta ostatecznie da L-kształt.

Przypuśćmy przeciwnie, że procedura nie daje L-kształtu. Wówczas na pewnym etapie wszystkie kostki o pewnej etykiecie zostają usunięte. Niech a będzie pierwszym elementem zbioru Apéry'ego, którego etykieta znika całkowicie, a b niech będzie etykietą kostek, których regiony usunęły ostatnią kostkę o etykiecie a.

Zapiszmy $a = b + \delta_1 d_1 + \delta_2 d_2 + \delta_3 d_3$ z $\delta_i \in \mathbb{N}$ oraz $b = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3$, gdzie $[[\mu_1, \mu_2, \mu_3]]$ jest kostką o etykiecie b, która przetrwała nasz proces − taka kostka musi istnieć, ponieważ w procedurze, gdy zachowujemy jedną kostkę o aktualnie najmniejszej powtarzającej się etykiecie, nie może ona zostać usunięta później z powodu minimalności etykiety. Mamy

$$a = (\delta_1 + \mu_1)d_1 + (\delta_2 + \mu_2)d_2 + (\delta_3 + \mu_3)d_3,$$

więc kostka $[[\delta_1 + \mu_1, \delta_2 + \mu_2, \delta_3 + \mu_3]]$ ma etykietę a. Ponieważ wszystkie kostki o etykiecie a zostały usunięte, ta kostka również musiała zostać usunięta przez region skojarzony z pewną kostką $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]]$.

Istnieje jednak kostka $[[\nu_1', \nu_2', \nu_3']]$ o tej samej etykiecie co $[[\nu_1, \nu_2, \nu_3]]$, która nie została usunięta. W konsekwencji a etykietuje również kostkę

$$[[\nu_1' + \delta_1 + \mu_1 - \nu_1, \nu_2' + \delta_2 + \mu_2 - \nu_2, \nu_3' + \delta_3 + \mu_3 - \nu_3]].$$

Z konstrukcji wynika, że albo jej pierwsza współrzędna przekracza $\delta_1 + \mu_1$, albo jest równa $\delta_1 + \mu_1$, a druga współrzędna jest większa niż $\delta_2 + \mu_2$. Ponownie, ponieważ a nie jest etykietą w końcowej kolekcji, ta nowa kostka również musiała zostać usunięta przez jakiś region. Powtarzając ten argument, otrzymujemy kostki o etykiecie a o dowolnie dużych współrzędnych x lub y, co stoi w sprzeczności z Twierdzeniem 2.2. Zatem procedura musi dawać L-kształt.

Wykonanie tej samej procedury, ale wybierając na każdym etapie kostkę o maksymalnej współrzędnej z (a w przypadku remisu − tą o największej współrzędnej y z nich), daje inny L-kształt. Jest on rzeczywiście inny, ponieważ z założenia $\lambda_1 > \lambda_1'$ oraz $\lambda_3 < \lambda_3'$, pierwsza wybrana kostka w tej wersji procedury nie jest tą samą co w poprzedniej. □

Dla wglądu w geometrię zbioru Apéry'ego w dowolnym wymiarze osadzenia odsyłamy czytelnika do [2] oraz [17].

3 Stopień łańcuchowy

3.1 Wstęp

Niech S będzie półgrupą numeryczną minimalnie generowaną przez $\{d_0, d_1, \ldots, d_k\}$. *Morfizm faktoryzacyjny* półgrupy S to

$$\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to S, \quad \varphi(z_0, \ldots, z_k) = z_0 d_0 + \cdots + z_k d_k.$$

Zbiorem faktoryzacji elementu $s \in S$ jest

$$\varphi^{-1}(s) = \{(z_0, \ldots, z_k) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid z_0 d_0 + \cdots + z_k d_k = s\}.$$

Jeśli $z = (z_0, \ldots, z_k) \in \varphi^{-1}(s)$, to *długość* z wynosi $|z| = z_0 + \cdots + z_k$. *Support* z definiujemy przez

$$\operatorname{supp}(z) = \{i \in \{0, \ldots, k\} \mid z_i > 0\}.$$

Dla $z = (z_0, \ldots, z_k)$ oraz $z' = (z'_0, \ldots, z'_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ definiujemy

$$\gcd(z, z') = (\min\{z_0, z'_0\}, \ldots, \min\{z_k, z'_k\}).$$

Odległość między z i z' to

$$\mathrm{d}(z, z') = \max\{|z - \gcd(z, z')|, |z' - \gcd(z, z')|\}.$$

Dla $s \in S$ oraz $z, z' \in \varphi^{-1}(s)$, *$N$-łańcuchem* faktoryzacji od z do z' nazywamy ciąg $z_1, \ldots, z_p \in \varphi^{-1}(s)$ taki, że $z_1 = z$, $z_p = z'$ oraz $\mathrm{d}(z_i, z_{i+1}) \leq N$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. *Stopień łańcuchowy* elementu s, $\mathrm{c}(s)$, to minimalne $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ takie, że dla dowolnych dwóch faktoryzacji $z, z' \in \varphi^{-1}(s)$ istnieje N-łańcuch od z do z'. Stopień łańcuchowy S definiujemy przez

$$\mathrm{c}(S) = \sup\{\mathrm{c}(s) \mid s \in S\}.$$

Dwa elementy z i z' z $\mathbb{N}^{k+1}$ są *$\mathcal{R}$-powiązane*, jeśli istnieje skończony ciąg $z = z_1, \ldots, z_p = z'$ w $\mathbb{N}^{k+1}$ taki, że $\mathrm{supp}(z_i) \cap \mathrm{supp}(z_{i+1})$ jest niepusty dla każdego $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. W takim przypadku piszemy $z \mathcal{R} z'$. Do klas równoważności $\varphi^{-1}(s)$ względem relacji $\mathcal{R}$ będziemy odnosić się jako do *$\mathcal{R}$-klas*. Mówimy, że $s \in S$ jest *elementem Bettiego*, jeśli istnieją dwie faktoryzacje z $\varphi^{-1}(s)$, które nie są $\mathcal{R}$-powiązane (tzn. s ma co najmniej dwie różne $\mathcal{R}$-klasy). Zbiór wszystkich elementów Bettiego półgrupy S oznaczamy przez $\mathrm{Betti}(S)$.

Twierdzenie 3.1. *Niech S będzie półgrupą numeryczną. Wówczas*

$$\mathrm{c}(S) = \max\{\mathrm{c}(b) \mid b \in \mathrm{Betti}(S)\}.$$

Dowód. Zobacz [5, Theorem 15]. Ogólniejszą wersję można znaleźć w [8, Theorem 3.1]. □

3.2 Znajdowanie elementów Bettiego

Niech $S = \langle d_0, d_1, d_2, d_3 \rangle$ będzie półgrupą numeryczną o wymiarze osadzenia cztery. Niech a_{ij}, b_{ij}, dla $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, będą współczynnikami minimalnych oraz d_0-dodatnich minimalnych relacji, jak w Sekcji 2.

Pozostała część tej sekcji jest poświęcona wyznaczeniu zbioru $\mathrm{Betti}(S)$ ze zbioru Apéry'ego względem d_0, otrzymanego w Sekcji 2. Aby móc zastosować wyniki tej sekcji później, w Sekcjach 4 oraz 5, będziemy potrzebować Propozycji 2.8. Ponieważ nie dysponujemy jej wersją dla półgrup numerycznych, które nie spełniają założeń Propozycji 2.5, musimy założyć tutaj pewne rzeczy o S. Zobacz Problem 6.3.

Przypuśćmy, że $a_{ii} = b_{ii}$ dla co najmniej dwóch różnych indeksów $i \in \{1, 2, 3\}$. Oznacza to, że możemy dobrać współczynniki a_{ij} tak, aby

$$\text{co najwyżej jeden z } \{a_{10}, a_{20}, a_{30}\} \text{ był równy 0.} \tag{25}$$

Niech T będzie L-kształtem z Propozycji 2.5. Niech V będzie minimalnym zbiorem punktów $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, dla których $xd_1 + yd_2 + zd_3$ jest nieujemną wielokrotnością d_0, takim że po usunięciu regionów skojarzonych z tymi punktami z początkowej kolekcji kostek otrzymujemy dokładnie T. Dla każdego punktu $(x, y, z) \in V$ definiujemy wartość $\theta_1 x d_1 + \theta_2 y d_2 + \theta_3 z d_3$, gdzie θ_1 jest równe 0, gdy $x < 0$, a 1 w przeciwnym razie, i analogicznie dla θ_2 oraz θ_3. Niech U będzie zbiorem wszystkich takich wartości.

Lemat 3.2. *Załóżmy* (25)*. Jeśli $b \in$ Betti(S) etykietuje kostkę w T, to $b \in U$.*

Dowód. Rozważmy faktoryzację $z_0 = (0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \varphi^{-1}(b)$, gdzie $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]] \in T$. Niech $(\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ będzie inną faktoryzacją elementu b. Otrzymujemy

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)d_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)d_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)d_3 = \lambda'_0 d_0. \tag{26}$$

Jeśli wszystkie współczynniki po lewej stronie są nieujemne, to musimy mieć $\lambda'_0 > 0$, ponieważ faktoryzacje są różne. To jednak stoi w sprzeczności z $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]] \in T$ na mocy Lematu 2.1.

Załóżmy teraz, że dokładnie jeden współczynnik po lewej stronie (26) jest nieujemny i − bez straty ogólności − że wszystkie współczynniki poniżej są nieujemne:

$$(\lambda_1 - \lambda_1')d_1 = \lambda_0' d_0 + (\lambda_2' - \lambda_2)d_2 + (\lambda_3' - \lambda_3)d_3. \tag{27}$$

To daje $a_{11} \leq (\lambda_1 - \lambda_1') \leq \lambda_1$, co przeczy temu, że $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]] \in T$.

Zatem dokładnie dwa współczynniki po lewej stronie (26) są nieujemne i − bez straty ogólności − możemy założyć, że wszystkie współczynniki poniżej są nieujemne:

$$(\lambda_1 - \lambda_1')d_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')d_2 = \lambda_0' d_0 + (\lambda_3' - \lambda_3)d_3. \tag{28}$$

Jeśli $\lambda_0' > 0$, to z Lematu 2.1 otrzymujemy sprzeczność z $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]] \in T$, a więc $\lambda_0' = 0$. Oznacza to, że dla każdego $z \in \varphi^{-1}(b)$ mamy $0 \notin \mathrm{supp}(z)$, ponieważ $(\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$ zostało wybrane dowolnie.

Niech $z = (0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \varphi^{-1}(b)$ będzie faktoryzacją, która nie jest $\mathcal{R}$-powiązana z z_0. Powtarzając rozumowanie jak dla $(\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$, możemy − bez straty ogólności − założyć, że $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_2 \geq \mu_2$, $\lambda_3 < \mu_3$. To implikuje $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_3 = 0$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $z\mathcal{R}z_0$. Zatem

$$b = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = \mu_3 d_3, \tag{29}$$

przy $\lambda_1, \lambda_2, \mu_3 > 0$ − jeśli $\lambda_1 = 0$ lub $\lambda_2 = 0$, otrzymujemy sprzeczność jak w (27).

Jeśli $\mu_3 > a_{33}$, moglibyśmy zapisać $b = a_{30}d_0 + a_{31}d_1 + a_{32}d_2 + (\mu_3 - a_{33})d_3$, gdzie $a_{30} = 0$ na mocy wcześniejszego rozumowania. Zatem $\max\{a_{31}, a_{32}\} > 0$, co implikuje $z_0\mathcal{R}(0, a_{31}, a_{32}, \mu_3 - a_{33})\mathcal{R}z$, co daje sprzeczność. Zatem $\mu_3 = a_{33}$ i $b = a_{33}d_3$, a więc $b \in U$. □

Twierdzenie 3.3. *Załóżmy* (25). *Wówczas cały zbiór* Betti(S) *zawiera się w* U.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje element $b \in \mathrm{Betti}(S)$, który nie należy do U. Musi istnieć faktoryzacja $z_0 = (0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \varphi^{-1}(b)$; w przeciwnym razie, gdyby każda faktoryzacja $z \in \varphi^{-1}(b)$ miała $0 \in \mathrm{supp}(z)$, wszystkie faktoryzacje byłyby $\mathcal{R}$-powiązane, co jest niemożliwe dla elementu Bettiego. Na mocy Lematu 3.2 musimy mieć $[[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3]] \notin T$, a zatem $[[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3]]$ leży w regionie skojarzonym z pewnym punktem $P \in V$.

Jeśli $P = (-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, gdzie

$$\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1 = \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3, \tag{30}$$

przy $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ dla $i = 0, 1, 2, 3$, to otrzymujemy

$$b = \lambda_0 d_0 + (\lambda_1 + \delta_1)d_1 + \delta_2 d_2 + \delta_3 d_3 = \delta_1 d_1 + (\lambda_2 + \delta_2)d_2 + (\lambda_3 + \delta_3)d_3, \tag{31}$$

dla pewnych $\delta_i \in \mathbb{N}$, gdzie $\max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Faktoryzacje $(\lambda_0, \lambda_1 + \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ oraz $(0, \delta_1, \lambda_2 + \delta_2, \lambda_3 + \delta_3)$ mają niepuste przecięcie supportów, a więc są $\mathcal{R}$-powiązane. Ponadto każda współrzędna jest dodatnia w co najmniej jednym z tych dwóch wektorów, więc każda inna faktoryzacja b będzie z nimi $\mathcal{R}$-powiązana. To przeczy temu, że $b \in \mathrm{Betti}(S)$. Przypadki $P = (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$ oraz $P = (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3)$ są analogiczne.

Jeśli $P = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, gdzie

$$\lambda_0 d_0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3, \tag{32}$$

przy $\lambda_0 \in \mathbb{Z}_+$, to otrzymujemy

$$b = \lambda_0 d_0 + \delta_1 d_1 + \delta_2 d_2 + \delta_3 d_3 = (\lambda_1 + \delta_1)d_1 + (\lambda_2 + \delta_2)d_2 + (\lambda_3 + \delta_3)d_3, \tag{33}$$

dla pewnych $\delta_i \in \mathbb{N}$, gdzie $\max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Bez straty ogólności załóżmy $\delta_1 > 0$. Wtedy faktoryzacje

$$z_1 = (\lambda_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3), \qquad z_2 = (0, \lambda_1 + \delta_1, \lambda_2 + \delta_2, \lambda_3 + \delta_3)$$

są $\mathcal{R}$-powiązane. Ponieważ b jest elementem Bettiego, istnieje faktoryzacja $z \in \varphi^{-1}(b)$, która nie jest z nimi $\mathcal{R}$-powiązana. Ponieważ $\lambda_0, \delta_1 > 0$, mamy $0, 1 \notin \mathrm{supp}(z)$.

- Jeśli $z = (0, 0, \mu_2, \mu_3)$ z $\mu_2, \mu_3 > 0$, to $z_1 = (\lambda_0, \delta_1, 0, 0)$ i $z_2 = (0, \lambda_1 + \delta_1, 0, 0)$. Jeśli $\mu_2 \geq a_{22}$, to

$$b = \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 = a_{20} d_0 + a_{21} d_1 + (\mu_2 - a_{22}) d_2 + (\mu_3 + a_{23}) d_3. \tag{34}$$

  Jeśli $a_{20} > 0$ lub $a_{21} > 0$, to $z_1 \mathcal{R}(a_{20}, a_{21}, \mu_2 - a_{22}, \mu_3 + a_{23}) \mathcal{R} z$, sprzeczność. Zatem $a_{20} = a_{21} = 0$ oraz $a_{22} d_2 = a_{23} d_3$, co implikuje $a_{23} \geq a_{33}$. Dalej,

$$b = a_{30} d_0 + a_{31} d_1 + (\mu_2 - a_{22} + a_{32}) d_2 + (\mu_3 + a_{23} - a_{33}) d_3, \tag{35}$$

  i jak poprzednio otrzymujemy $a_{30} = a_{31} = 0$. Ponieważ teraz $a_{20} = a_{30} = 0$, sprzeczność z (25). Analogiczna sprzeczność dla $\mu_3 \geq a_{33}$.

  Zatem $\mu_2 < a_{22}$ i $\mu_3 < a_{33}$. Kostka $[[0, \mu_2, \mu_3]]$ nie może leżeć w T (bo wtedy $b \in U$), więc leży w regionie skojarzonym z pewnym $Q \in V$. Rozważmy przypadek $Q = (-\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, gdzie

$$\nu_0 d_0 + \nu_1 d_1 = \nu_2 d_2 + \nu_3 d_3, \tag{36}$$

  przy $\nu_0, \nu_2, \nu_3 > 0$ (być może $\nu_1 = 0$) i $\mu_2 \geq \nu_2$, $\mu_3 \geq \nu_3$. Wtedy

$$b = \nu_0 d_0 + \nu_1 d_1 + (\mu_2 - \nu_2) d_2 + (\mu_3 - \nu_3) d_3. \tag{37}$$

  Ponieważ $\max\{\mu_2 - \nu_2, \mu_3 - \nu_3\} > 0$, mamy $z \mathcal{R}(\nu_0, \nu_1, \mu_2 - \nu_2, \mu_3 - \nu_3) \mathcal{R} z_1$, sprzeczność. Pozostałe przypadki Q są analogiczne.

- Załóżmy $z = (0, 0, \mu_2, 0)$ (przypadek $(0, 0, 0, \mu_3)$ jest analogiczny). Jeśli $\mu_2 = a_{22}$, to $b = a_{22} d_2 \in U$, więc $\mu_2 > a_{22}$. Wówczas

$$b = \mu_2 d_2 = a_{20} d_0 + a_{21} d_1 + (\mu_2 - a_{22}) d_2 + a_{23} d_3. \tag{38}$$

  Ponieważ $\mu_2 - a_{22} > 0$, mamy $z \mathcal{R}(a_{20}, a_{21}, \mu_2 - a_{22}, a_{23})$. Aby z nie był $\mathcal{R}$-powiązany z z_1, musimy mieć $a_{20} = a_{21} = 0$. To daje faktoryzację $(0, 0, \mu_2 - a_{22}, a_{23})$, która nie jest $\mathcal{R}$-powiązana z z_1 ani z_2, więc wracamy do poprzedniego przypadku.

Jeśli $P = (a_{11}, -a_{12}, -a_{13})$, otrzymujemy

$$b = (a_{11} + \delta_1) d_1 + \delta_2 d_2 + \delta_3 d_3 = a_{10} d_0 + \delta_1 d_1 + (a_{12} + \delta_2) d_2 + (a_{13} + \delta_3) d_3, \tag{39}$$

dla pewnych $\delta_i \in \mathbb{N}$, przy $\max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Wówczas faktoryzacje

$$z_1 = (0, a_{11} + \delta_1, \delta_2, \delta_3), \qquad z_2 = (a_{10}, \delta_1, a_{12} + \delta_2, a_{13} + \delta_3)$$

są $\mathcal{R}$-powiązane. Ponieważ $b \in \mathrm{Betti}(S)$, musi istnieć faktoryzacja $z \in \varphi^{-1}(b)$, która nie jest z nimi $\mathcal{R}$-powiązana.

- Załóżmy, że $\delta_1 > 0$. Jeśli $a_{12} = a_{13} = 0$, to $P = (a_{11}, 0, 0)$, a więc jesteśmy w przypadku $P = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ i otrzymujemy tę samą sprzeczność, co wcześniej.

  Jeśli $a_{12}, a_{13} > 0$, to musimy mieć $z = (\mu_0, 0, 0, 0)$. Gdyby $\mu_0 = a_{00}$, mielibyśmy $b = a_{00} d_0 \in U$. Zatem $\mu_0 > a_{00}$ i otrzymujemy

$$z \,\mathcal{R}\, (\mu_0 - a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}) \,\mathcal{R}\, z_2,$$

  ponieważ $\max\{a_{01}, a_{02}, a_{03}\} > 0$, co daje sprzeczność.

  Zatem, bez straty ogólności, możemy założyć $a_{12} > 0$ oraz $a_{13} = 0$. Jeśli $a_{10} > 0$, to musimy mieć $z = (0, 0, 0, \mu_3)$. Gdyby $\mu_3 = a_{33}$, mielibyśmy $b = a_{33} d_3 \in U$. Zatem $\mu_3 > a_{33}$ oraz

$$z \,\mathcal{R}\, (a_{30}, a_{31}, a_{32}, \mu_3 - a_{33}) \,\mathcal{R}\, z_2,$$

  ponieważ $\max\{a_{30}, a_{31}, a_{32}\} > 0$, co jest sprzecznością.

  Otrzymujemy więc:

$$\text{dla wszystkich } (a_{10}, a_{12}, a_{13}) \in \mathbb{N}^3 \text{ spełniających } a_{11} d_1 = a_{10} d_0 + a_{12} d_2 + a_{13} d_3, \text{ mamy } a_{10} = 0. \tag{40}$$

Ponadto $a_{11}d_1 = a_{12}d_2$ (bo $a_{13} = 0$), co implikuje $a_{12} \geq a_{22}$. To daje

$$a_{11}d_1 = a_{20}d_0 + a_{21}d_1 + (a_{12} - a_{22})d_2 + a_{23}d_3. \tag{41}$$

Z (40) wynika $a_{20} = 0$ (oraz $a_{21} = 0$ z minimalności a_{11}). Ponieważ teraz $a_{10} = a_{20} = 0$, otrzymujemy sprzeczność z (25).

- Załóżmy, że $\delta_2 > 0$ (przypadek $\delta_3 > 0$ jest analogiczny).
  Jeśli $a_{10} > 0$, to $0, 1, 2 \in \operatorname{supp}(z_1) \cup \operatorname{supp}(z_2)$, więc $z = (0, 0, 0, \mu_3)$. Musi zachodzić $\mu_3 > a_{33}$, bo inaczej $b = a_{33}d_3 \in U$. Ponieważ $\max\{a_{30}, a_{31}, a_{32}\} > 0$, otrzymujemy sprzeczność:

  $$z_1, z_2 \,\mathcal{R}\, (a_{30}, a_{31}, a_{32}, \mu_3 - a_{33}) \,\mathcal{R}\, z.$$

  Jeśli $a_{13} > 0$, to $1, 2, 3 \in \operatorname{supp}(z_1) \cup \operatorname{supp}(z_2)$ i analogicznie otrzymujemy sprzeczność.
  Zatem dla wszystkich (a_{10}, a_{12}, a_{13}) spełniających $a_{11}d_1 = a_{10}d_0 + a_{12}d_2 + a_{13}d_3$, mamy $a_{10} = a_{13} = 0$. Postępując jak po (40), otrzymujemy sprzeczność z (25).

Przypadki $P = (-a_{21}, a_{22}, -a_{23})$ oraz $P = (-a_{31}, -a_{32}, a_{33})$ przebiegają analogicznie, co kończy dowód.

□

Uwaga 3.4. Istnieje słabsza wersja Twierdzenia 3.3, która działa dla wszystkich półgrup numerycznych o dowolnym wymiarze osadzenia. Niech $b \in \operatorname{Betti}(\langle d_0, \ldots, d_k\rangle)$. Wówczas dla każdego indeksu $i \in \{0, \ldots, k\}$ istnieje element $s_i \in \operatorname{Ap}(\langle d_0, \ldots, d_k\rangle, d_i)$ oraz indeks $j \neq i$, $j \in \{0, \ldots, k\}$, taki że $b = s_i + d_j$. Zobacz [29, Proposition 2.2] lub [5, Proposition 66].

Aby ustalić, które elementy zbioru U są elementami Bettiego, będziemy potrzebować dodatkowych lematów.

Lemat 3.5. *Dla każdego* $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \varphi^{-1}(a_{ii}d_i)$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, *zachodzi:* $\mu_i = 0$ *lub* $\mu_i = a_{ii}$ *oraz* $\mu_j = 0$ *dla wszystkich* $j \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy $i = 0$. Otrzymujemy

$$(a_{00} - \mu_0)d_0 = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3. \tag{42}$$

Prawa strona jest oczywiście nieujemna. Jeśli $(a_{00} - \mu_0) = 0$, to musimy mieć również $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Jeśli natomiast $(a_{00} - \mu_0) > 0$, to minimalność a_{00} wymusza $\mu_0 = 0$. □

Lemat 3.6. *Załóżmy* (25). *Jeśli* $(-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V$ *spełnia*

$$\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1 = \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3,$$

przy $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ *oraz* $a_{ii} > \lambda_i$ *dla* $i = 0, 2, 3$, *to dla każdego* $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \varphi^{-1}(\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1)$ *zachodzi:*

$$(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, \lambda_2, \lambda_3) \quad \textit{lub} \quad \mu_2 = \mu_3 = 0.$$

Dowód. Załóżmy, że $\mu_0 > 0$. Jeśli $\mu_2 > 0$, to na mocy Lematu 2.1 żaden element zbioru Apéry'ego nie może być etykietą w regionie skojarzonym z $(-\mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \lambda_3 - \mu_3)$. Jest to sprzeczność, ponieważ $[[0, \lambda_2 - 1, \lambda_3]] \in T$ (zauważmy, że $\lambda_2 > 0$, gdyż $a_{33} > \lambda_3$). Analogicznie, jeśli $\mu_3 > 0$, otrzymujemy tę samą sprzeczność. Zatem $\mu_2 = \mu_3 = 0$.

Przypuśćmy teraz, że $\mu_0 = 0$. Jeśli $\mu_2 \geq \lambda_2$, to otrzymujemy

$$(\lambda_3 - \mu_3)d_3 = \mu_1 d_1 + (\mu_2 - \lambda_2)d_2, \tag{43}$$

gdzie wszystkie współczynniki są nieujemne. Jeśli $(\lambda_3 - \mu_3) > 0$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem $a_{33} > \lambda_3$. Zatem $(\lambda_3 - \mu_3) = 0$, co daje $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, \lambda_2, \lambda_3)$. Ten sam wniosek otrzymujemy, jeśli $\mu_3 \geq \lambda_3$.

Wobec tego możemy założyć, że $\mu_2 < \lambda_2$ oraz $\mu_3 < \lambda_3$. Wówczas

$$\lambda_0 d_0 + (\lambda_1 - \mu_1)d_1 = \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3. \tag{44}$$

Jeśli $(\lambda_1 - \mu_1) \leq 0$, otrzymujemy sprzeczność z $a_{00} > \lambda_0$. Zatem $(\lambda_1 - \mu_1) > 0$.

Ponieważ $\lambda_0 > 0$, to zgodnie z Lematem 2.1 żaden element zbioru Apéry'ego nie może być etykietą w regionie skojarzonym z $(\mu_1 - \lambda_1, \mu_2, \mu_3)$. Jest to sprzeczność, ponieważ $[[0, \lambda_2 - 1, \lambda_3]] \in T$. □

Lemat 3.7. *Załóżmy* (25). *Jeśli* $(-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V$ *spełnia*

$$\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1 = \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3,$$

przy $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ *oraz* $a_{ii} > \lambda_i$ *dla* $i = 0, 1, 2, 3$, *to*

$$\varphi^{-1}(\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1) = \{(\lambda_0, \lambda_1, 0, 0),\ (0, 0, \lambda_2, \lambda_3)\}.$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje trzecia faktoryzacja $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \varphi^{-1}(\lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1)$.

Na mocy Lematu 3.6 musimy mieć $\mu_2 = \mu_3 = 0$. Jeśli $\lambda_0 \geq \mu_0$, to otrzymujemy

$$(\lambda_0 - \mu_0) d_0 = (\mu_1 - \lambda_1) d_1, \tag{45}$$

gdzie wszystkie współczynniki są nieujemne. W rzeczywistości muszą być dodatnie, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\lambda_0, \lambda_1, 0, 0)$, co daje sprzeczność z założeniem $a_{00} > \lambda_0$.

Jeśli natomiast $\lambda_0 < \mu_0$, to musi zachodzić $\lambda_1 > \mu_1$, co prowadzi do sprzeczności z $a_{11} > \lambda_1$. Zatem żadna trzecia faktoryzacja nie istnieje i dostajemy tezę. □

4 Cztery kolejne kwadraty

W tej sekcji wyznaczymy liczbę Frobeniusa, genus, zbiór elementów Bettiego oraz stopień łańcuchowy półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne kwadraty; $S = \langle n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2 \rangle$, korzystając z metody zaproponowanej w Sekcjach 2 oraz 3, gdzie kładziemy $(d_0, d_1, d_2, d_3) = (n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2)$.

Figurę otrzymaną po usunięciu odpowiednich regionów z początkowego zbioru kostek będziemy nazywać T; zostanie ona wyznaczona osobno dla każdego przypadku $n \pmod{12}$. Dopiero po obliczeniu, że T zawiera dokładnie n^2 kostek, będziemy mogli stwierdzić, że zbiór etykiet T jest dokładnie zbiorem Apéry'ego względem n^2.

Korzystamy ze wzoru $F(S) = \max\{\mathrm{Ap}(S, a)\} - a$, więc aby obliczyć liczbę Frobeniusa, musimy znaleźć maksymalną etykietę w T. Ponadto wzór $G(S) = \frac{1}{a}\left(\sum_{s \in \mathrm{Ap}(S,a)} s\right) - \frac{a-1}{2}$ sprowadza obliczenie genusu do wyznaczenia sumy etykiet w T.

Podsumowanie wyników tej sekcji przedstawiamy we Wnioskach 4.1–4.4.

4.1 $n = 12k,\ k > 1$

4.1.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(7k+2)(12k)^2 = 2(12k+1)^2 + (3k-5)(12k+2)^2 + (4k+2)(12k+3)^2, \tag{46}$$
$$(6k+4)(12k+1)^2 = 1(12k)^2 + 1(12k+2)^2 + 6k(12k+3)^2, \tag{47}$$
$$9k(12k+2)^2 = (5k+1)(12k)^2 + 0(12k+1)^2 + 4k(12k+3)^2, \tag{48}$$
$$(6k+1)(12k+3)^2 = 0(12k)^2 + (6k+1)(12k+1)^2 + 2(12k+2)^2, \tag{49}$$

a na mocy Lematów 2.1 oraz 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich skojarzone regiony, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące zależności spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(7k+1)(12k)^2 + (12k+1)^2 = (3k-2)(12k+2)^2 + (4k+1)(12k+3)^2, \tag{50}$$
$$(12k)^2 + 3(12k+2)^2 = 3(12k+1)^2 + (12k+3)^2, \tag{51}$$
$$(7k+2)(12k)^2 + (2k-1)(12k+3)^2 = (6k+3)(12k+1)^2 + (3k-3)(12k+2)^2. \tag{52}$$

Odejmując równanie (51) od (50), otrzymujemy dodatkowe $2k$ tożsamości:

$$\begin{aligned}
(7k)(12k)^2 + 4(12k+1)^2 &= (3k+1)(12k+2)^2 + (4k)(12k+3)^2,\\
(7k-1)(12k)^2 + 7(12k+1)^2 &= (3k+4)(12k+2)^2 + (4k-1)(12k+3)^2,\\
&\vdots\\
(5k+2)(12k)^2 + (6k-2)(12k+1)^2 &= (9k-5)(12k+2)^2 + (2k+2)(12k+3)^2,\\
(5k+1)(12k)^2 + (6k+1)(12k+1)^2 &= (9k-2)(12k+2)^2 + (2k+1)(12k+3)^2.
\end{aligned} \tag{53}$$

Moglibyśmy ponownie odjąć równanie (51) od powyższych, lecz otrzymany punkt usunąłby region $\{y > 9k+1, z > 2k\}$, który jest już usunięty przez (48) (region $\{y > 9k\}$ został już wyeliminowany).

Podobnie, możemy odjąć równanie (51) od (52) i otrzymać kolejne $2k$ tożsamości:

$$\begin{aligned}
(7k+1)(12k)^2 + (2k)(12k+3)^2 &= (6k)(12k+1)^2 + (3k)(12k+2)^2,\\
(7k)(12k)^2 + (2k+1)(12k+3)^2 &= (6k-3)(12k+1)^2 + (3k+3)(12k+2)^2,\\
(7k-1)(12k)^2 + (2k+2)(12k+3)^2 &= (6k-6)(12k+1)^2 + (3k+6)(12k+2)^2,\\
&\vdots\\
(5k+3)(12k)^2 + (4k-2)(12k+3)^2 &= 6(12k+1)^2 + (9k-6)(12k+2)^2,\\
(5k+2)(12k)^2 + (4k-1)(12k+3)^2 &= 3(12k+1)^2 + (9k-3)(12k+2)^2.
\end{aligned} \tag{54}$$

Nie musimy już dalej odejmować, ponieważ otrzymywane punkty miałyby $y \geq 9k$, a ten przypadek został już uwzględniony przez (48).

Teraz obliczymy objętość figury T, która jest wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań. Najpierw rozważmy figurę wyciętą jedynie przez (47), (48), (49) oraz (51). Będzie ona miała objętość

$$(6k+4) \cdot 9k + 3 \cdot 9k \cdot 6k = 216k^2 + 36k,$$

gdzie pierwszy składnik jest objętością dolnej warstwy o wymiarach $(6k+4)\times 9k \times 1$, a drugi składnik to pozostała część, będąca prostopadłościanem $3 \times 9k \times 6k$. Teraz ustalimy, ile kostek zostaje usuniętych z powyższej figury przez równanie (52) oraz równania (54). Usuwają one fragment schodkowy z dolnej warstwy (zob. Rysunek 3). Ma on objętość

$$\frac{(6k+3)(6k+2)}{2} = 18k^2 + 15k + 3.$$

Na końcu, równania (46), (50) oraz (53) usuną dodatkowo objętość

$$3 \cdot 2 \cdot 4k + 3 \cdot \frac{6k(6k-1)}{2} + 3 \cdot (2k-1) = 54k^2 + 21k - 3,$$

gdzie pierwszy składnik to pasek $3\times 2\times 4k$, usunięty przez region skojarzony z $(-(6k+1), 9k-2, 2k+1)$, drugi składnik to objętość usunięta przez schodki o stopniu 3×1 powstałe z (50) oraz pozostałych równań (53), a ostatnia część jest usuwana przez (46). Objętość T sprowadza się do

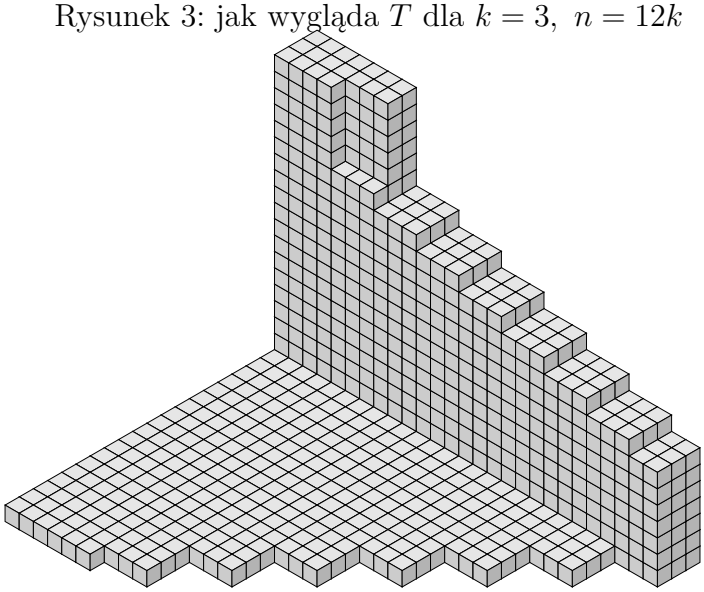
$$216k^2 + 36k - (18k^2 + 15k + 3) - (54k^2 + 21k - 3) = 144k^2.$$

Ponieważ objętość T jest równa dokładnie $(12k)^2$, musi to być L-kształt.

4.1.2 Liczba Frobeniusa

$F(S) + (12k)^2$ jest równe największej etykiecie w T. Etykieta ta oczywiście znajduje się w jednym z narożników T − w kostkach, które mają dokładnie trzy swoje ściany widoczne przy oglądaniu figury z pierwszego oktantu.

Rysunek 3: jak wygląda T dla $k = 3,\ n = 12k$



Najpierw narożniki dolnych schodków T, od lewej do prawej, mają etykiety:

$$\begin{aligned}
(6k+3)(12k+1)^2 + (3k-4)(12k+2)^2 &= 1296k^3 + 144k^2 - 102k - 13,\\
(6k+2)(12k+1)^2 + (3k-1)(12k+2)^2 &= 1296k^3 + 432k^2 + 18k - 2,\\
(6k-1)(12k+1)^2 + (3k+2)(12k+2)^2 &= 1296k^3 + 432k^2 + 90k + 7,\\
&\vdots\\
8(12k+1)^2 + (9k-7)(12k+2)^2 &= 1296k^3 + 576k^2 - 108k - 20,\\
5(12k+1)^2 + (9k-4)(12k+2)^2 &= 1296k^3 + 576k^2 - 36k - 11.
\end{aligned}$$

Etykiety narożników prawych schodków T, wypisane od dołu do góry, są następujące:

$$\begin{aligned}
2(12k+1)^2 + (9k-1)(12k+2)^2 + (2k)(12k+3)^2 &= 1584k^3 + 720k^2 + 54k - 2,\\
2(12k+1)^2 + (9k-3)(12k+2)^2 + (2k+1)(12k+3)^2 &= 1584k^3 + 576k^2 + 30k - 1,\\
2(12k+1)^2 + (9k-6)(12k+2)^2 + (2k+2)(12k+3)^2 &= 1584k^3 + 288k^2 - 42k - 4,\\
&\vdots\\
2(12k+1)^2 + (3k)(12k+2)^2 + (4k)(12k+3)^2 &= 1008k^3 + 720k^2 + 96k + 2,\\
2(12k+1)^2 + (3k-3)(12k+2)^2 + (4k+1)(12k+3)^2 &= 1008k^3 + 432k^2 + 24k - 1.
\end{aligned}$$

Na koniec, dwa ostatnie narożniki górnej warstwy T mają etykiety:

$$\begin{aligned}
2(12k+1)^2 + (3k-6)(12k+2)^2 + (6k)(12k+3)^2 &= 1296k^3 - 174k - 22,\\
(12k+1)^2 + (3k-3)(12k+2)^2 + (6k)(12k+3)^2 &= 1296k^3 + 288k^2 - 54k - 11.
\end{aligned}$$

Wartość $1584k^3+720k^2+54k-2$ jest największą z powyższych i jest równa $F(S)+(12k)^2$. Otrzymujemy więc

$$F(S) = 1584k^3 + 576k^2 + 54k - 2.$$

4.1.3 Genus

Następnie wyznaczymy sumę etykiet w T, aby obliczyć $G(S)$. Aby to zrobić, wykorzystamy już wcześniej wyznaczone narożniki.

Całe obliczenie jest żmudne, dlatego podzielimy je na mniejsze części. Ponieważ będziemy dodawać liczby z $\langle (12k+1)^2, (12k+2)^2, (12k+3)^2 \rangle$, możemy osobno ustalić, ile razy dodamy każdą z liczb

$(12k+1)^2, (12k+2)^2, (12k+3)^2$ – tzn. osobno wyznaczymy sumę współrzędnych x-, y- oraz z-owych kostek z T. Ponadto będziemy analizować T w przekrojach, podobnie jak przy obliczaniu jego objętości.

Najpierw możemy wykorzystać narożniki dolnych schodków T, aby dla każdego z nich wyznaczyć sumę współrzędnych x kostek z regionu $\{a-2 \le x \le a+1,\ y \le b+1,\ 0 \le z \le 1\}$, gdzie $(a,b,0)$ są współrzędnymi narożnej kostki z dolnej warstwy (z wyjątkiem lewego skrajnego narożnika). W ten sposób otrzymujemy wygodne do obliczenia sekcje, które możemy policzyć, korzystając z już wyznaczonych współrzędnych narożników. Dodając sumę współrzędnych x kostek z regionu $\{6k+3 \le x \le 6k+4,\ y \le 3k-3,\ 0 \le z \le 1\}$, otrzymujemy, że suma współrzędnych x kostek z dolnej warstwy T, których górna ściana jest widoczna na Rysunku 3, jest równa

$$\begin{aligned}
&(5+4+3)(9k-3) + (8+7+6)(9k-6) + \cdots + ((6k+2)+(6k+1)+6k)3k + (6k+3)(3k-3)\\
&= (6k+3)(3k-3) + \sum_{i=0}^{2k-1} (12+9i)(9k-3-3i)\\
&= (6k+3)(3k-3) + \sum_{i=0}^{2k-1} 108k - 36 + i(81k-63) - 27i^2\\
&= (6k+3)(3k-3) + 2k(108k-36) + (81k-63)\frac{(2k-1)2k}{2} - 27\frac{(2k-1)2k(4k-1)}{6}\\
&= 90k^3 + 81k^2 - 27k - 9.
\end{aligned}$$

Podobnie, suma współrzędnych y kostek z dolnej warstwy T, których górna ściana jest widoczna na Rysunku 3, jest równa

$$\begin{aligned}
&3\left(\frac{(9k-4)(9k-3)}{2} + \frac{(9k-7)(9k-6)}{2} + \cdots + \frac{(3k-1)3k}{2}\right) + \frac{(3k-4)(3k-3)}{2}\\
&= \frac{(3k-4)(3k-3)}{2} + \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{2k-1} (9k-4-3i)(9k-3-3i)\\
&= \frac{(3k-4)(3k-3)}{2} + \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{2k-1} 81k^2 - 63k + 12 + i(21-54k) + 9i^2\\
&= \frac{(3k-4)(3k-3)}{2} + 3k(81k^2-63k+12) + \frac{3}{2}(21-54k)\frac{(2k-1)2k}{2} + \frac{27}{2}\frac{(2k-1)2k(4k-1)}{6}\\
&= 117k^3 - \frac{135k^2}{2} - \frac{3k}{2} + 6.
\end{aligned}$$

Podobnie możemy postąpić dla pozostałych części T. Łatwo stąd wynika, że suma współrzędnych x wszystkich pozostałych kostek w T jest równa

$$36k^2 + 4k + 2(36k^2 - 2k + 3) = 108k^2 + 6.$$

Rozważając, dla każdego narożnika prawych schodków o współrzędnych $(2,b,c)$, region $\{0 \le x \le 2,\ b-2 \le y \le b+1,\ z \le c+1\}$ (z wyjątkiem prawego skrajnego narożnika), otrzymujemy, że suma współrzędnych y wszystkich kostek T spełniających $x \le 2$ jest równa

$$\begin{aligned}
&(6k+3)\frac{(9k-1)9k}{2} + 3\left(\frac{(9k-3)(9k-2)}{2} + \frac{(9k-6)(9k-5)}{2} + \cdots + \frac{(3k-3)(3k-2)}{2}\right)\\
&+ (6k-3)\frac{(3k-6)(3k-5)}{2} + (4k-2)((3k-3)+(3k-4)+(3k-5))\\
&= 270k^3 + 18k^2 + 60k - 21 + 3\sum_{i=0}^{2k} \frac{(9k-3-3i)(9k-2-3i)}{2}\\
&= 270k^3 + 18k^2 + 60k - 21 + \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{2k} 81k^2 - 45k + 6 + i(15-54k) + 9i^2\\
&= 270k^3 + 18k^2 + 60k - 21 + \frac{3}{2}\left((2k+1)(81k^2-45k+6) + (15-54k)\frac{2k(2k+1)}{2} + 9\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}\right)\\
&= 387k^3 - \frac{9k^2}{2} + \frac{75k}{2} - 12.
\end{aligned}$$

Powtarzając tę samą metodę, widzimy, że suma współrzędnych z wszystkich kostek T spełniających $x \leq 2$ jest równa

$$\begin{aligned}
&6\frac{2k(2k+1)}{2} + 9\left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2} + \frac{(2k+2)(2k+3)}{2} + \cdots + \frac{(4k+1)(4k+2)}{2}\right) \\
&+ 3(3k-5)\frac{6k(6k+1)}{2} + 6\left(\frac{6k(6k+1)}{2} - \frac{(4k+1)(4k+2)}{2}\right) \\
&= 162k^3 - 171k^2 - 57k - 6 + \frac{9}{2}\sum_{i=0}^{2k}(2k+1+i)(2k+2+i) \\
&= 162k^3 - 171k^2 - 57k - 6 + \frac{9}{2}\sum_{i=0}^{2k} 4k^2 + 6k + 2 + i(4k+3) + i^2 \\
&= 162k^3 - 171k^2 - 57k - 6 + \frac{9}{2}\left((4k^2+6k+2)(2k+1) + (4k+3)\frac{2k(2k+1)}{2} + \frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}\right) \\
&= 246k^3 - 45k^2 + 3k + 3.
\end{aligned}$$

Łącznie suma etykiet w T sprowadza się do

$$\begin{aligned}
&(90k^3 + 189k^2 - 27k - 3)(12k+1)^2 + (504k^3 - 72k^2 + 36k - 6)(12k+2)^2 \\
&+ (246k^3 - 45k^2 + 3k + 3)(12k+3)^2 = 120960k^5 + 54432k^4 + 3888k^3 - 72k^2.
\end{aligned}$$

Daje to

$$G(S) = \frac{120960k^5 + 54432k^4 + 3888k^3 - 72k^2}{(12k)^2} - \frac{(12k)^2 - 1}{2} = 840k^3 + 306k^2 + 27k.$$

4.1.4 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (46)-(49) są w istocie minimalnymi relacjami.

Wspólna wartość równania (52) nie jest elementem Bettiego, ponieważ

$$(7k+2)(12k)^2 + (2k-1)(12k+3)^2 = 2(12k+1)^2 + (3k-5)(12k+2)^2 + (6k+1)(12k+3)^2,$$

co oznacza, że ma tylko jedną $\mathcal{R}$-klasę.

Z Lematów 3.5 oraz 3.7 wynika, że wspólne wartości każdego z równań (46)-(51), (53), (54) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $4k+6$.

Lemat 3.7 daje nam wszystkie rozkłady wspólnych wartości równań (50), (51), (53), (54). W związku z tym można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród nich to $\mathrm{c}\big((5k+1)(12k)^2 + (6k+1)(12k+1)^2\big) = 11k+2$. Ponadto mamy

$$(6k+4)(12k+1)^2, \quad 9k(12k+2)^2, \quad (6k+1)(12k+3)^2 \ < \ 11k(12k)^2,$$

a zatem $\mathrm{c}((7k+2)(12k)^2), \mathrm{c}((6k+4)(12k+1)^2), \mathrm{c}(9k(12k+2)^2), \mathrm{c}((6k+1)(12k+3)^2) < 11k+2$, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 11k+2.$$

4.2 $n = 12k+4,\ k > 0$

4.2.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(7k+4)(12k+4)^2 = 1(12k+5)^2 + (3k-3)(12k+6)^2 + (4k+3)(12k+7)^2, \tag{55}$$
$$(6k+6)(12k+5)^2 = 1(12k+4)^2 + 1(12k+6)^2 + (6k+2)(12k+7)^2, \tag{56}$$
$$(9k+5)(12k+6)^2 = (5k+2)(12k+4)^2 + 2(12k+5)^2 + (4k+2)(12k+7)^2, \tag{57}$$
$$(6k+3)(12k+7)^2 = 0(12k+4)^2 + (6k+3)(12k+5)^2 + 2(12k+6)^2, \tag{58}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(7k+3)(12k+4)^2 + 2(12k+5)^2 = (3k)(12k+6)^2 + (4k+2)(12k+7)^2, \tag{59}$$

$$(12k+4)^2 + 3(12k+6)^2 = 3(12k+5)^2 + (12k+7)^2, \tag{60}$$

$$(7k+4)(12k+4)^2 + (2k)(12k+7)^2 = (6k+4)(12k+5)^2 + (3k-1)(12k+6)^2. \tag{61}$$

Odejmując równanie (60) od (59), otrzymujemy dodatkowe $2k+1$ relacji:

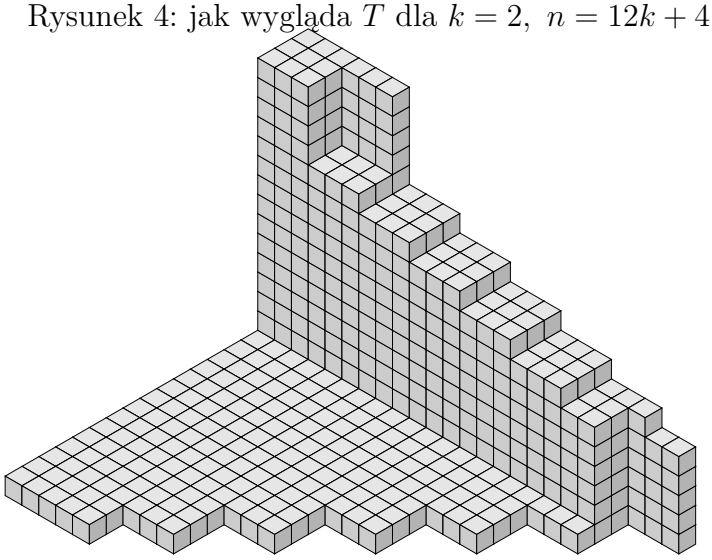
$$\begin{aligned}
(7k+2)(12k+4)^2 + 5(12k+5)^2 &= (3k+3)(12k+6)^2 + (4k+1)(12k+7)^2,\\
(7k+1)(12k+4)^2 + 8(12k+5)^2 &= (3k+6)(12k+6)^2 + (4k)(12k+7)^2,\\
&\vdots\\
(5k+3)(12k+4)^2 + (6k+2)(12k+5)^2 &= (9k)(12k+6)^2 + (2k+2)(12k+7)^2,\\
(5k+2)(12k+4)^2 + (6k+5)(12k+5)^2 &= (9k+3)(12k+6)^2 + (2k+1)(12k+7)^2.
\end{aligned} \tag{62}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (60) od (61) i otrzymać kolejne $2k+1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(7k+3)(12k+4)^2 + (2k+1)(12k+7)^2 &= (6k+1)(12k+5)^2 + (3k+2)(12k+6)^2,\\
(7k+2)(12k+4)^2 + (2k+2)(12k+7)^2 &= (6k-2)(12k+5)^2 + (3k+5)(12k+6)^2,\\
&\vdots\\
(5k+4)(12k+4)^2 + (4k)(12k+7)^2 &= 4(12k+5)^2 + (9k-1)(12k+6)^2,\\
(5k+3)(12k+4)^2 + (4k+1)(12k+7)^2 &= (12k+5)^2 + (9k+2)(12k+6)^2.
\end{aligned} \tag{63}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(12k+4)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 4: jak wygląda T dla $k = 2,\ n = 12k+4$



4.2.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(9k+4)(12k+6)^2 + (2k)(12k+7)^2 = 1584k^3 + 2208k^2 + 998k + 144,$$

co daje

$$F = 1584k^3 + 2064k^2 + 902k + 128.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$120960k^5 + 256032k^4 + 210576k^3 + 84552k^2 + 16640k + 1288,$$

co daje

$$G = 840k^3 + 1146k^2 + 509k + 73.$$

4.2.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (55)-(58) są w istocie minimalnymi relacjami.

Wspólna wartość równania (61) nie jest elementem Bettiego, ponieważ

$$(7k+4)(12k+4)^2 + (2k)(12k+7)^2 = 1(12k+5)^2 + (3k-3)(12k+6)^2 + (6k+3)(12k+7)^2,$$

co skutkuje tym, że ma tylko jedną $\mathcal{R}$-klasę.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (55)-(60), (62), (63) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $4k+8$.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (59), (60), (62), (63) wynosi $\mathrm{c}((5k+2)(12k+4)^2 + (6k+5)(12k+5)^2) = 11k+7$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (55)-(58) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 11k+7.$$

4.3 $n = 12k+8,\ k > 0$

4.3.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(7k+6)(12k+8)^2 = 0(12k+9)^2 + (3k-1)(12k+10)^2 + (4k+4)(12k+11)^2, \tag{64}$$
$$(6k+8)(12k+9)^2 = 1(12k+8)^2 + 1(12k+10)^2 + (6k+4)(12k+11)^2, \tag{65}$$
$$(9k+7)(12k+10)^2 = (5k+4)(12k+8)^2 + 1(12k+9)^2 + (4k+3)(12k+11)^2, \tag{66}$$
$$(6k+5)(12k+11)^2 = 0(12k+8)^2 + (6k+5)(12k+9)^2 + 2(12k+10)^2, \tag{67}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(7k+5)(12k+8)^2 + 3(12k+9)^2 = (3k+2)(12k+10)^2 + (4k+3)(12k+11)^2, \tag{68}$$
$$(12k+8)^2 + 3(12k+10)^2 = 3(12k+9)^2 + (12k+11)^2, \tag{69}$$
$$(7k+6)(12k+8)^2 + (2k+1)(12k+11)^2 = (6k+5)(12k+9)^2 + (3k+1)(12k+10)^2. \tag{70}$$

Odejmując równanie (69) od (68), otrzymujemy dodatkowe $2k+1$ relacji:

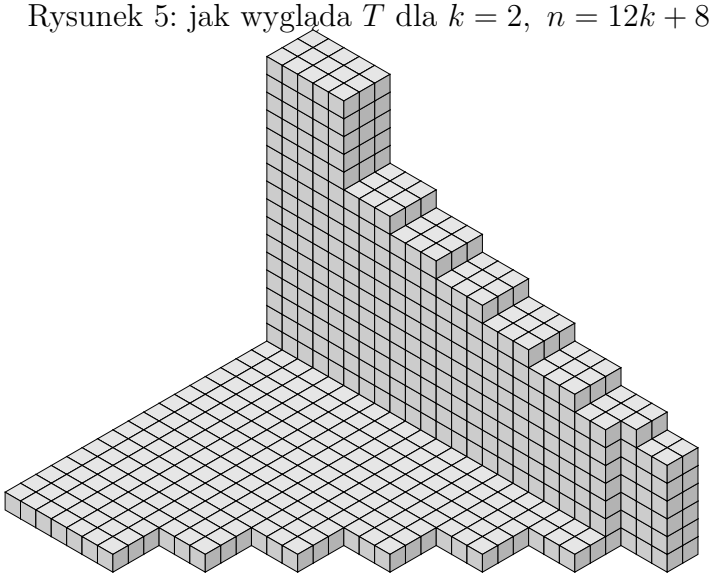
$$\begin{aligned}
(7k+4)(12k+8)^2 + 6(12k+9)^2 &= (3k+5)(12k+10)^2 + (4k+2)(12k+11)^2,\\
(7k+3)(12k+8)^2 + 9(12k+9)^2 &= (3k+8)(12k+10)^2 + (4k+1)(12k+11)^2,\\
&\vdots\\
(5k+5)(12k+8)^2 + (6k+3)(12k+9)^2 &= (9k+2)(12k+10)^2 + (2k+3)(12k+11)^2,\\
(5k+4)(12k+8)^2 + (6k+6)(12k+9)^2 &= (9k+5)(12k+10)^2 + (2k+2)(12k+11)^2.
\end{aligned} \tag{71}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (69) od (70) i otrzymać kolejne $2k+1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(7k+5)(12k+8)^2 + (2k+2)(12k+11)^2 &= (6k+2)(12k+9)^2 + (3k+4)(12k+10)^2,\\
(7k+4)(12k+8)^2 + (2k+3)(12k+11)^2 &= (6k-1)(12k+9)^2 + (3k+7)(12k+10)^2,\\
&\vdots\\
(5k+6)(12k+8)^2 + (4k+1)(12k+11)^2 &= 5(12k+9)^2 + (9k+1)(12k+10)^2.\\
(5k+5)(12k+8)^2 + (4k+2)(12k+11)^2 &= 2(12k+9)^2 + (9k+4)(12k+10)^2.
\end{aligned} \tag{72}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(12k+8)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 5: jak wygląda T dla $k=2,\ n=12k+8$



4.3.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(12k+9)^2+(9k+6)(12k+10)^2+(2k+1)(12k+11)^2=1584k^3+3840k^2+3062k+802,$$

co daje

$$F=1584k^3+3696k^2+2870k+738.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$120960k^5+457632k^4+686640k^3+511128k^2+188896k+27744,$$

co daje

$$G=840k^3+1986k^2+1555k+402.$$

4.3.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (64)-(67) są w istocie minimalnymi relacjami.

Wspólna wartość równania (70) nie jest elementem Bettiego, ponieważ

$$(7k+6)(12k+8)^2+(2k+1)(12k+11)^2=(3k-1)(12k+10)^2+(6k+5)(12k+11)^2,$$

co skutkuje tym, że ma tylko jedną $\mathcal{R}$-klasę.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (64)-(69), (71), (72) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $4k+8$.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (68), (69), (71), (72) wynosi $\mathrm{c}((5k+4)(12k+8)^2+(6k+6)(12k+9)^2)=11k+10$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (64)–(67) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S)=11k+10.$$

4.4 $n = 12k + 1,\ k > 1$

4.4.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(6k+2)(12k+1)^2 = 1(12k+2)^2 + (6k-2)(12k+3)^2 + 1(12k+4)^2, \tag{73}$$
$$(9k+5)(12k+2)^2 = (4k+2)(12k+1)^2 + 2(12k+3)^2 + 5k(12k+4)^2, \tag{74}$$
$$(6k+1)(12k+3)^2 = (6k+1)(12k+1)^2 + 2(12k+2)^2 + 0(12k+4)^2, \tag{75}$$
$$(7k+1)(12k+4)^2 = 4k(12k+1)^2 + (3k+4)(12k+2)^2 + 0(12k+3)^2, \tag{76}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(4k-1)(12k+1)^2 + (3k+7)(12k+2)^2 = 3(12k+3)^2 + (7k)(12k+4)^2, \tag{77}$$
$$(12k+1)^2 + 3(12k+3)^2 = 3(12k+2)^2 + (12k+4)^2, \tag{78}$$
$$(4k+1)(12k+1)^2 + (5k+1)(12k+4)^2 = (9k+2)(12k+2)^2 + (12k+3)^2. \tag{79}$$

Odejmując równanie (78) od (77), otrzymujemy dodatkowe $2k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(4k-2)(12k+1)^2 + (3k+10)(12k+2)^2 &= 6(12k+3)^2 + (7k-1)(12k+4)^2,\\
(4k-3)(12k+1)^2 + (3k+13)(12k+2)^2 &= 9(12k+3)^2 + (7k-2)(12k+4)^2,\\
&\vdots\\
(2k+1)(12k+1)^2 + (9k+1)(12k+2)^2 &= (6k-3)(12k+3)^2 + (5k+2)(12k+4)^2,\\
(2k)(12k+1)^2 + (9k+4)(12k+2)^2 &= (6k)(12k+3)^2 + (5k+1)(12k+4)^2.
\end{aligned} \tag{80}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (78) od (79) i otrzymać kolejne $2k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(4k)(12k+1)^2 + (5k+2)(12k+4)^2 &= (9k-1)(12k+2)^2 + 4(12k+3)^2,\\
(4k-1)(12k+1)^2 + (5k+3)(12k+4)^2 &= (9k-4)(12k+2)^2 + 7(12k+3)^2,\\
&\vdots\\
(2k+3)(12k+1)^2 + (7k-1)(12k+4)^2 &= (3k+8)(12k+2)^2 + (6k-5)(12k+3)^2,\\
(2k+2)(12k+1)^2 + (7k)(12k+4)^2 &= (3k+5)(12k+2)^2 + (6k-2)(12k+3)^2,
\end{aligned} \tag{81}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(12k+1)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

4.4.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(6k-1)(12k+3)^2 + (5k+1)(12k+4)^2 = 1584k^3 + 912k^2 + 158k + 7,$$

co daje

$$F = 1584k^3 + 768k^2 + 134k + 6.$$

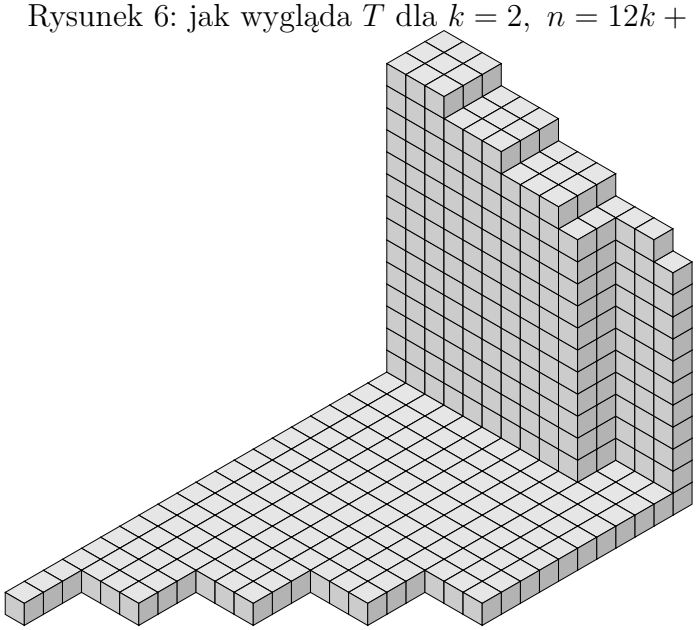
Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$120960k^5 + 107424k^4 + 31944k^3 + 4230k^2 + 259k + 6,$$

co daje

$$G = 840k^3 + 534k^2 + 103k + 6.$$

Rysunek 6: jak wygląda T dla $k = 2,\ n = 12k + 1$



4.4.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (73)-(76) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (73)-(81) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $4k + 5$.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (77)-(81) wynosi $\mathrm{c}((2k)(12k+1)^2 + (9k+4)(12k+2)^2) = 11k + 4$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (73)-(76) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 11k + 4.$$

4.5 $n = 12k + 5,\ k > 0$

4.5.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(6k+4)(12k+5)^2 = 1(12k+6)^2 + (6k)(12k+7)^2 + 1(12k+8)^2, \tag{82}$$
$$(9k+7)(12k+6)^2 = (4k+3)(12k+5)^2 + 1(12k+7)^2 + (5k+2)(12k+8)^2, \tag{83}$$
$$(6k+3)(12k+7)^2 = (6k+3)(12k+5)^2 + 2(12k+6)^2 + 0(12k+8)^2, \tag{84}$$
$$(7k+4)(12k+8)^2 = (4k+2)(12k+5)^2 + (3k+3)(12k+6)^2 + 2(12k+7)^2, \tag{85}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(4k+1)(12k+5)^2 + (3k+6)(12k+6)^2 = (12k+7)^2 + (7k+3)(12k+8)^2, \tag{86}$$
$$(12k+5)^2 + 3(12k+7)^2 = 3(12k+6)^2 + (12k+8)^2, \tag{87}$$
$$(4k+2)(12k+5)^2 + (5k+3)(12k+8)^2 = (9k+4)(12k+6)^2 + 2(12k+7)^2. \tag{88}$$

Odejmując równanie (87) od (86), otrzymujemy dodatkowe $2k$ relacji:

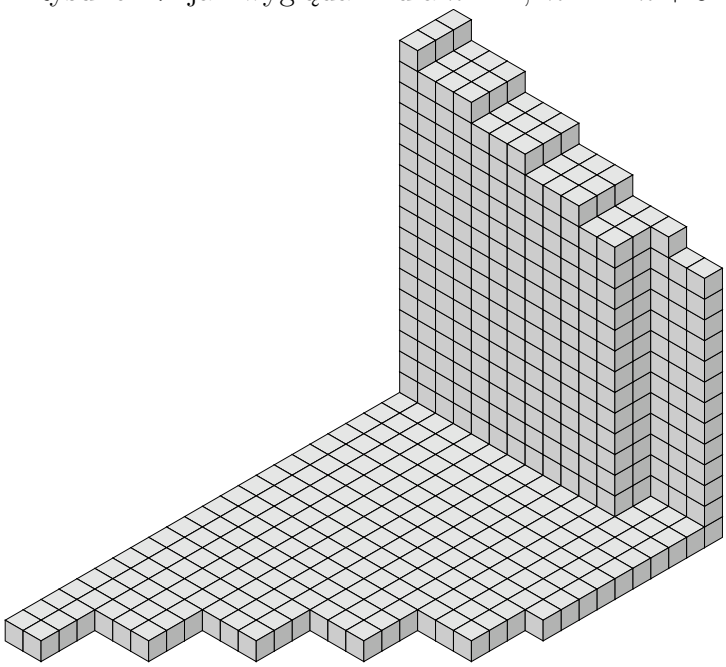
$$\begin{aligned}
(4k)(12k+5)^2 + (3k+9)(12k+6)^2 &= 4(12k+7)^2 + (7k+2)(12k+8)^2,\\
(4k-1)(12k+5)^2 + (3k+12)(12k+6)^2 &= 7(12k+7)^2 + (7k+1)(12k+8)^2,\\
&\vdots\\
(2k+2)(12k+5)^2 + (9k+3)(12k+6)^2 &= (6k-2)(12k+7)^2 + (5k+4)(12k+8)^2,\\
(2k+1)(12k+5)^2 + (9k+6)(12k+6)^2 &= (6k+1)(12k+7)^2 + (5k+3)(12k+8)^2.
\end{aligned} \tag{89}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (87) od (88) i otrzymać kolejne $2k$ relacji:

$$\begin{aligned}
(4k+1)(12k+5)^2 + (5k+4)(12k+8)^2 &= (9k+1)(12k+6)^2 + 5(12k+7)^2,\\
(4k)(12k+5)^2 + (5k+5)(12k+8)^2 &= (9k-2)(12k+6)^2 + 8(12k+7)^2,\\
&\vdots\\
(2k+3)(12k+5)^2 + (7k+2)(12k+8)^2 &= (3k+7)(12k+6)^2 + (6k-1)(12k+7)^2,\\
(2k+2)(12k+5)^2 + (7k+3)(12k+8)^2 &= (3k+4)(12k+6)^2 + (6k+2)(12k+7)^2.
\end{aligned} \tag{90}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(12k+5)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 7: jak wygląda T dla $k = 2,\ n = 12k + 5$



4.5.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(6k+2)(12k+7)^2 + (5k+2)(12k+8)^2 = 1584k^3 + 2544k^2 + 1334k + 226,$$

co daje

$$F = 1584k^3 + 2400k^2 + 1214k + 201.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$120960k^5 + 309024k^4 + 309288k^3 + 152094k^2 + 36845k + 3525,$$

co daje

$$G = 840k^3 + 1374k^2 + 737k + 129.$$

4.5.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (82)-(85) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (82)-(90) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $4k+7$.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (86)-(90) wynosi $\mathrm{c}((2k+1)(12k+5)^2+(9k+6)(12k+6)^2) = 11k+7$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (82)-(85) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 11k+7.$$

4.6 $n = 12k+9,\ k \geq 0$

4.6.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(6k+6)(12k+9)^2 = 1(12k+10)^2 + (6k+2)(12k+11)^2 + 1(12k+12)^2, \tag{91}$$
$$(9k+9)(12k+10)^2 = (4k+4)(12k+9)^2 + 0(12k+11)^2 + (5k+4)(12k+12)^2, \tag{92}$$
$$(6k+5)(12k+11)^2 = (6k+5)(12k+9)^2 + 2(12k+10)^2 + 0(12k+12)^2, \tag{93}$$
$$(7k+6)(12k+12)^2 = (4k+3)(12k+9)^2 + (3k+5)(12k+10)^2 + 1(12k+11)^2, \tag{94}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(4k+2)(12k+9)^2 + (3k+8)(12k+10)^2 = 2(12k+11)^2 + (7k+5)(12k+12)^2, \tag{95}$$
$$(12k+9)^2 + 3(12k+11)^2 = 3(12k+10)^2 + (12k+12)^2, \tag{96}$$
$$(4k+3)(12k+9)^2 + (5k+5)(12k+12)^2 = (9k+6)(12k+10)^2 + 3(12k+11)^2. \tag{97}$$

Odejmując równanie (96) od (95), otrzymujemy dodatkowe $2k$ relacji:

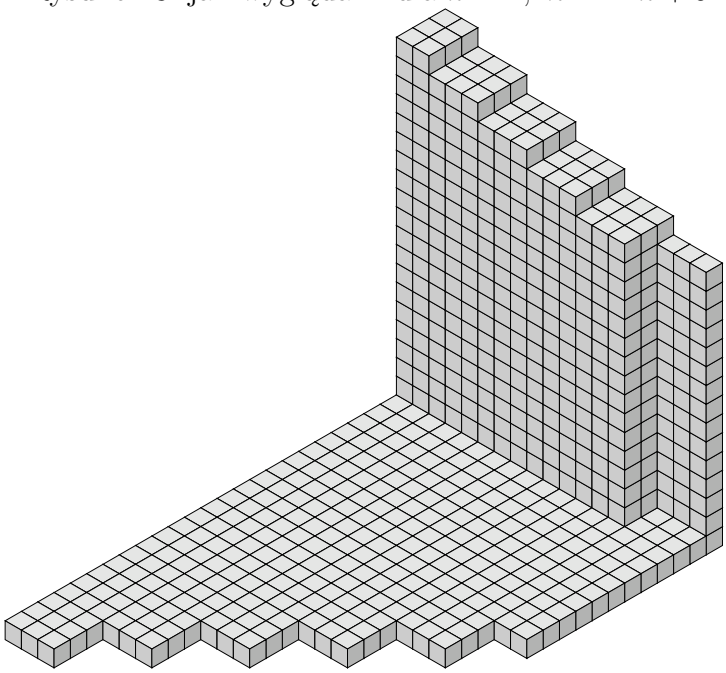
$$\begin{aligned}
(4k+1)(12k+9)^2 + (3k+11)(12k+10)^2 &= 5(12k+11)^2 + (7k+4)(12k+12)^2,\\
(4k)(12k+9)^2 + (3k+14)(12k+10)^2 &= 8(12k+11)^2 + (7k+3)(12k+12)^2,\\
&\vdots\\
(2k+3)(12k+9)^2 + (9k+5)(12k+10)^2 &= (6k-1)(12k+11)^2 + (5k+6)(12k+12)^2,\\
(2k+2)(12k+9)^2 + (9k+8)(12k+10)^2 &= (6k+2)(12k+11)^2 + (5k+5)(12k+12)^2.
\end{aligned} \tag{98}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (96) od (97) i otrzymać kolejne $2k$ relacji:

$$\begin{aligned}
(4k+2)(12k+9)^2 + (5k+6)(12k+12)^2 &= (9k+3)(12k+10)^2 + 6(12k+11)^2,\\
(4k+1)(12k+9)^2 + (5k+7)(12k+12)^2 &= (9k)(12k+10)^2 + 9(12k+11)^2,\\
&\vdots\\
(2k+4)(12k+9)^2 + (7k+4)(12k+12)^2 &= (3k+9)(12k+10)^2 + (6k)(12k+11)^2,\\
(2k+3)(12k+9)^2 + (7k+5)(12k+12)^2 &= (3k+6)(12k+10)^2 + (6k+3)(12k+11)^2.
\end{aligned} \tag{99}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(12k+9)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 8: jak wygląda T dla $k = 2,\ n = 12k + 9$



4.6.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(6k + 4)(12k + 11)^2 + (5k + 4)(12k + 12)^2 = 1584k^3 + 4176k^2 + 3654k + 1060,$$

co daje

$$F = 1584k^3 + 4032k^2 + 3438k + 979.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$120960k^5 + 510624k^4 + 856008k^3 + 712854k^2 + 295083k + 48600,$$

co daje

$$G = 840k^3 + 2214k^2 + 1935k + 560.$$

4.6.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (91)-(94) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (91)-(99) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $4k + 7$.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (95)-(99) wynosi $\mathrm{c}((2k+2)(12k+9)^2+(9k+8)(12k+10)^2) = 11k + 10$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (91)-(94) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 11k + 10.$$

4.7 $n = 4m + 2,\ m > 1$

4.7.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(4m+5)(4m+2)^2 = 2(4m+3)^2 + (4m-3)(4m+4)^2 + 2(4m+5)^2, \tag{100}$$
$$(m+4)(4m+3)^2 = 1(4m+2)^2 + 2(4m+4)^2 + m(4m+5)^2, \tag{101}$$
$$(4m+3)(4m+4)^2 = 4(4m+2)^2 + (4m+3)(4m+3)^2 + 0(4m+5)^2, \tag{102}$$
$$(m+1)(4m+5)^2 = 0(4m+2)^2 + (m+1)(4m+3)^2 + 1(4m+4)^2, \tag{103}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

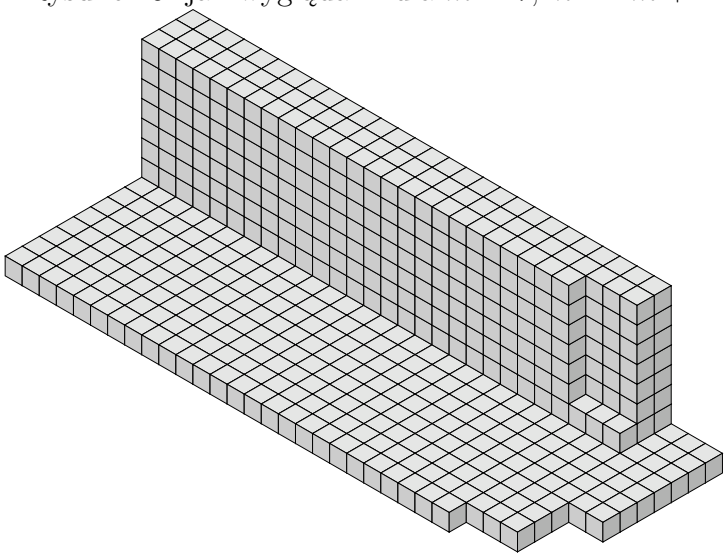
$$(4m+4)(4m+2)^2 + (4m+3)^2 = (4m)(4m+4)^2 + (4m+5)^2, \tag{104}$$
$$(4m+2)^2 + 3(4m+4)^2 = 3(4m+3)^2 + (4m+5)^2, \tag{105}$$
$$(4m+5)(4m+2)^2 + (m-1)(4m+5)^2 = (m+3)(4m+3)^2 + (4m-2)(4m+4)^2. \tag{106}$$

Odejmując równanie (105) od (106) dostajemy

$$(4m+4)(4m+2)^2 + (m)(4m+5)^2 = (m)(4m+3)^2 + (4m+1)(4m+4)^2. \tag{107}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(4m+2)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 9: jak wygląda T dla $m = 7,\ n = 4m + 2$



4.7.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(m+2)(4m+3)^2 + (4m)(4m+4)^2 = 80m^3 + 184m^2 + 121m + 18,$$

co daje

$$F = 80m^3 + 168m^2 + 105m + 14.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$640m^5 + 2208m^4 + 2816m^3 + 1696m^2 + 488m + 54,$$

co daje

$$G = 40m^3 + 90m^2 + 60m + 12.$$

4.7.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (100)-(103) są w istocie minimalnymi relacjami.

Wspólna wartość równania (106) nie jest elementem Bettiego, ponieważ

$$(4m+5)(4m+2)^2+(m-1)(4m+5)^2=2(4m+3)^2+(4m-3)(4m+4)^2+(m+1)(4m+5)^2,$$

co skutkuje tym, że ma tylko jedną $\mathcal{R}$-klasę.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (100)-(105), (107) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich 7.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (104), (105), (107) wynosi $\mathrm{c}((4m+4)(4m+2)^2+(m)(4m+5)^2)=5m+4$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (100)-(103) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S)=5m+4.$$

4.8 $n=4m+3,\ m>1$

4.8.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(m+2)(4m+3)^2=2(4m+4)^2+(m-2)(4m+5)^2+1(4m+6)^2, \tag{108}$$
$$(4m+11)(4m+4)^2=2(4m+3)^2+2(4m+5)^2+(4m+3)(4m+6)^2, \tag{109}$$
$$(m+1)(4m+5)^2=(m+1)(4m+3)^2+1(4m+4)^2+0(4m+6)^2, \tag{110}$$
$$(4m+5)(4m+6)^2=0(4m+3)^2+(4m+5)(4m+4)^2+4(4m+5)^2, \tag{111}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(m)(4m+3)^2+(4m+9)(4m+4)^2=(m)(4m+5)^2+(4m+4)(4m+6)^2, \tag{112}$$
$$(4m+3)^2+3(4m+5)^2=3(4m+4)^2+(4m+6)^2, \tag{113}$$
$$(4m+3)^2+(4m+4)(4m+6)^2=(4m+8)(4m+4)^2+(4m+5)^2, \tag{114}$$

Analogicznie jak wcześniej, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $(4m+3)^2$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

4.8.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(4m+4)^2+(m-1)(4m+5)^2+(4m+4)(4m+6)^2=80m^3+296m^2+353m+135,$$

co daje

$$F=80m^3+280m^2+329m+126.$$

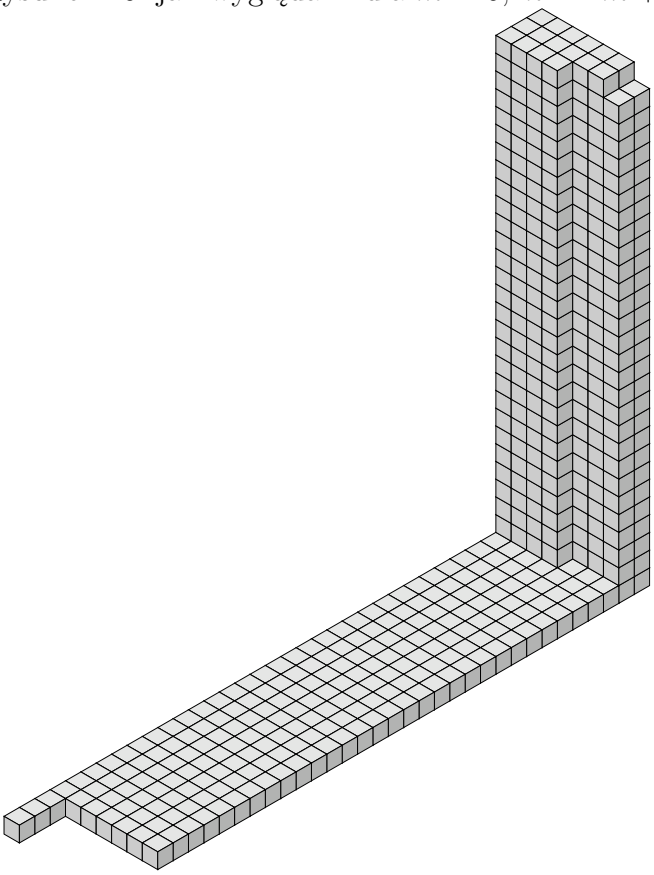
Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$640m^5+3488m^4+7224m^3+7246m^2+3552m+684,$$

co daje

$$G=40m^3+150m^2+180m+72.$$

Rysunek 10: jak wygląda T dla $m = 6,\ n = 4m + 3$



4.8.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (108)-(111) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.7, wspólne wartości każdego z równań (108)-(114) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich 7.

Podobnie jak wcześniej, korzystając z Lematu 3.7, można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (112)-(114) wynosi $\mathrm{c}((m)(4m+3)^2 + (4m+9)(4m+4)^2) = 5m + 9$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (108)-(111) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 5m + 9.$$

4.9 Summary

Możemy wykorzystać pakiet `numericalsgps` [10] systemu `GAP` [13], aby uzupełnić powyższe wyniki o wszystkie małe przypadki n, które nie zostały dotąd objęte.

Wniosek 4.1. *Liczba Frobeniusa półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne kwadraty*

$n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2$ *jest następująca:*

$$\begin{cases} \frac{11}{12}n^3 + 4n^2 + \frac{9}{2}n - 2 & gdy \;\; n \equiv 0 \pmod{12}, \; and \; n \geq 24, \\ \frac{11}{12}n^3 + \frac{10}{3}n^2 + \frac{9}{2}n - 2 & gdy \;\; n \equiv 4 \pmod{12}, \; and \; n \geq 16, \\ \frac{11}{12}n^3 + \frac{11}{3}n^2 + \frac{9}{2}n - 2 & gdy \;\; n \equiv 8 \pmod{12}, \; and \; n \geq 20, \\ \frac{11}{12}n^3 + \frac{31}{12}n^2 + \frac{13}{4}n - \frac{3}{4} & gdy \;\; n \equiv 1 \pmod{12}, \; and \; n \geq 25, \\ \frac{11}{12}n^3 + \frac{35}{12}n^2 + \frac{13}{4}n - \frac{11}{4} & gdy \;\; n \equiv 5 \pmod{12}, \; and \; n \geq 17, \\ \frac{11}{12}n^3 + \frac{13}{4}n^2 + \frac{21}{4}n + \frac{1}{4} & gdy \;\; n \equiv 9 \pmod{12}, \; and \; n \geq 9, \\ \frac{5}{4}n^3 + 3n^2 - \frac{3}{4}n - \frac{13}{2} & gdy \;\; n \equiv 2 \pmod{4}, \; and \; n \geq 6, \\ \frac{5}{4}n^3 + \frac{25}{4}n^2 + 11n + 3 & gdy \;\; n \equiv 3 \pmod{4}, \; and \; n \geq 7. \end{cases}$$

Co więcej: $F(\langle 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\rangle) = 23$, $F(\langle 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\rangle) = 119$, $F(\langle 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\rangle) = 119$, $F(\langle 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\rangle) = 240$, $F(\langle 8^2, 9^2, 10^2, 11^2\rangle) = 659$, $F(\langle 12^2, 13^2, 14^2, 15^2\rangle) = 2045$, $F(\langle 13^2, 14^2, 15^2, 16^2\rangle) = 2553$.

Wniosek 4.2. *Genus półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne kwadraty* $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2$ *jest następujący:*

$$\begin{cases} \frac{35}{72}n^3 + \frac{17}{8}n^2 + \frac{9}{4}n & gdy \;\; n \equiv 0 \pmod{12}, \; and \; n \geq 24, \\ \frac{35}{72}n^3 + \frac{17}{8}n^2 + \frac{25}{12}n - \frac{4}{9} & gdy \;\; n \equiv 4 \pmod{12}, \; and \; n \geq 16, \\ \frac{35}{72}n^3 + \frac{17}{8}n^2 + \frac{9}{4}n - \frac{8}{9} & gdy \;\; n \equiv 8 \pmod{12}, \; and \; n \geq 20, \\ \frac{35}{72}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{21}{8}n + \frac{23}{36} & gdy \;\; n \equiv 1 \pmod{12}, \; and \; n \geq 13, \\ \frac{35}{72}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{59}{24}n - \frac{11}{36} & gdy \;\; n \equiv 5 \pmod{12}, \; and \; n \geq 5, \\ \frac{35}{72}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{21}{8}n - \frac{1}{4} & gdy \;\; n \equiv 9 \pmod{12}, \; and \; n \geq 9, \\ \frac{5}{8}n^3 + \frac{15}{8}n^2 - \frac{1}{2} & gdy \;\; n \equiv 2 \pmod{4}, \; and \; n \geq 2, \\ \frac{5}{8}n^3 + \frac{15}{4}n^2 + \frac{45}{8}n + \frac{9}{2} & gdy \;\; n \equiv 3 \pmod{4}, \; and \; n \geq 11. \end{cases}$$

Co więcej: $G(\langle 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\rangle) = 60$, $G(\langle 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\rangle) = 66$, $G(\langle 7^2, 8^2, 9^2, 10^2\rangle) = 427$, $G(\langle 8^2, 9^2, 10^2, 11^2\rangle) = 389$, $G(\langle 12^2, 13^2, 14^2, 15^2\rangle) = 1161$.

Wniosek 4.3. *Stopień łańcuchowy półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne kwadraty*

$n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2$ *jest następujący:*

$$\begin{cases} \frac{11}{12}n+2 & gdy \;\; n \equiv 0 \pmod{12}, \; and \; n \geq 24, \\ \frac{11}{12}n+\frac{10}{3} & gdy \;\; n \equiv 4 \pmod{12}, \; and \; n \geq 16, \\ \frac{11}{12}n+\frac{8}{3} & gdy \;\; n \equiv 8 \pmod{12}, \; and \; n \geq 20, \\ \frac{11}{12}n+\frac{37}{12} & gdy \;\; n \equiv 1 \pmod{12}, \; and \; n \geq 13, \\ \frac{11}{12}n+\frac{29}{12} & gdy \;\; n \equiv 5 \pmod{12}, \; and \; n \geq 5, \\ \frac{11}{12}n+\frac{7}{4} & gdy \;\; n \equiv 9 \pmod{12}, \; and \; n \geq 9, \\ \frac{5}{4}n+\frac{3}{2} & gdy \;\; n \equiv 2 \pmod{4}, \; and \; n \geq 14, \\ \frac{5}{4}n+\frac{21}{4} & gdy \;\; n \equiv 3 \pmod{4}, \; and \; n \geq 7. \end{cases}$$

Co więcej: $\mathrm{c}(\langle 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\rangle) = 9$, $\mathrm{c}(\langle 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\rangle) = 16$, $\mathrm{c}(\langle 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\rangle) = 9$, $\mathrm{c}(\langle 6^2, 7^2, 8^2, 9^2\rangle) = 11$, $\mathrm{c}(\langle 8^2, 9^2, 10^2, 11^2\rangle) = 11$, $\mathrm{c}(\langle 10^2, 11^2, 12^2, 13^2\rangle) = 15$, $\mathrm{c}(\langle 12^2, 13^2, 14^2, 15^2\rangle) = 15$.

Wniosek 4.4. *Liczba elementów Bettiego półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne kwadraty* $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2$ *jest następująca:*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}n+6 & gdy \;\; n \equiv 0 \pmod{12}, \; and \; n \geq 24, \\ \frac{1}{3}n+\frac{20}{3} & gdy \;\; n \equiv 4 \pmod{12}, \; and \; n \geq 16, \\ \frac{1}{3}n+\frac{16}{3} & gdy \;\; n \equiv 8 \pmod{12}, \; and \; n \geq 20, \\ \frac{1}{3}n+\frac{14}{3} & gdy \;\; n \equiv 1 \pmod{12}, \; and \; n \geq 13, \\ \frac{1}{3}n+\frac{16}{3} & gdy \;\; n \equiv 5 \pmod{12}, \; and \; n \geq 17, \\ \frac{1}{3}n+4 & gdy \;\; n \equiv 9 \pmod{12}, \; and \; n \geq 9, \\ 7 & gdy \;\; n \equiv 2 \pmod{4}, \; and \; n \geq 6, \\ 7 & gdy \;\; n \equiv 3 \pmod{4}, \; and \; n \geq 15. \end{cases}$$

Co więcej: $\#\mathrm{Betti}(\langle 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\rangle) = 1$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\rangle) = 1$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\rangle) = 6$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\rangle) = 6$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 7^2, 8^2, 9^2, 10^2\rangle) = 7$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 8^2, 9^2, 10^2, 11^2\rangle) = 10$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 11^2, 12^2, 13^2, 14^2\rangle) = 6$, $\#\mathrm{Betti}(\langle 12^2, 13^2, 14^2, 15^2\rangle) = 11$.

5 Cztery kolejne liczby trójkątne

W tej sekcji wyznaczymy liczbę Frobeniusa, genus, zbiór elementów Bettiego oraz stopień łańcuchowy półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne liczby trójkątne; $S = \langle \binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{2}, \binom{n+3}{2}, \binom{n+4}{2}\rangle$, korzystając z metody przedstawionej w Sekcjach 2 oraz 3, gdzie kładziemy (na razie) $(d_0, d_1, d_2, d_3) = \left(\binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{2}, \binom{n+3}{2}, \binom{n+4}{2}\right)$.

Figurę otrzymaną przez usuwanie regionów z początkowej kolekcji kostek, wyznaczanych osobno dla każdego przypadku $n \pmod 6$, będziemy nazywać T. Dopiero po obliczeniu, że T zawiera dokładnie d_0 kostek, będziemy wiedzieć, że zbiór jej etykiet jest dokładnie zbiorem Apéry'ego względem d_0.

Podsumowanie wyników tej sekcji znajduje się we Wnioskach 5.1-5.4.

5.1 $n = 6k, k > 1$

5.1.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(3k+1)\binom{6k+1}{2} = 3k\binom{6k+2}{2} + 0\binom{6k+3}{2} + 0\binom{6k+4}{2}, \tag{115}$$

$$3k\binom{6k+2}{2} = (3k+1)\binom{6k+1}{2} + 0\binom{6k+3}{2} + 0\binom{6k+4}{2}, \tag{116}$$

$$3k\binom{6k+3}{2} = (2k+1)\binom{6k+1}{2} + 0\binom{6k+2}{2} + k\binom{6k+4}{2}, \tag{117}$$

$$(2k+1)\binom{6k+4}{2} = (2k+1)\binom{6k+1}{2} + 0\binom{6k+2}{2} + 2\binom{6k+3}{2}. \tag{118}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$2k\binom{6k+1}{2} + 3\binom{6k+2}{2} = \binom{6k+3}{2} + 2k\binom{6k+4}{2}, \tag{119}$$

$$\binom{6k+1}{2} + 3\binom{6k+3}{2} = 3\binom{6k+2}{2} + \binom{6k+4}{2}, \tag{120}$$

$$3k\binom{6k+1}{2} + \binom{6k+4}{2} = (3k-3)\binom{6k+2}{2} + 3\binom{6k+3}{2}. \tag{121}$$

Odejmując równanie (120) od (119), otrzymujemy dodatkowe $k-1$ relacji:

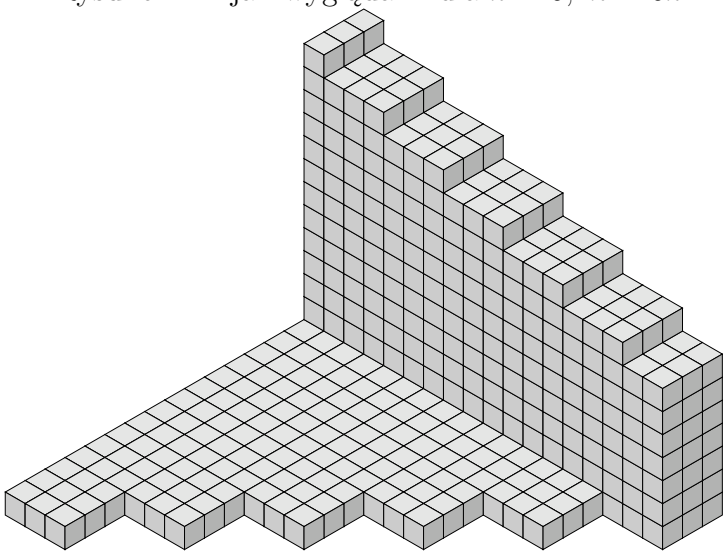
$$\begin{aligned}
(2k-1)\binom{6k+1}{2} + 6\binom{6k+2}{2} &= 4\binom{6k+3}{2} + (2k-1)\binom{6k+4}{2},\\
(2k-2)\binom{6k+1}{2} + 9\binom{6k+2}{2} &= 7\binom{6k+3}{2} + (2k-2)\binom{6k+4}{2},\\
&\vdots\\
(k+2)\binom{6k+1}{2} + (3k-3)\binom{6k+2}{2} &= (3k-5)\binom{6k+3}{2} + (k+2)\binom{6k+4}{2},\\
(k+1)\binom{6k+1}{2} + 3k\binom{6k+2}{2} &= (3k-2)\binom{6k+3}{2} + (k+1)\binom{6k+4}{2}.
\end{aligned} \tag{122}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (120) od (121) i otrzymać kolejne $k-2$ relacji:

$$\begin{aligned}
(3k-1)\binom{6k+1}{2} + 2\binom{6k+4}{2} &= (3k-6)\binom{6k+2}{2} + 6\binom{6k+3}{2},\\
(3k-2)\binom{6k+1}{2} + 3\binom{6k+4}{2} &= (3k-9)\binom{6k+2}{2} + 9\binom{6k+3}{2},\\
&\vdots\\
(2k+3)\binom{6k+1}{2} + (k-2)\binom{6k+4}{2} &= 6\binom{6k+1}{2} + (3k-6)\binom{6k+2}{2},\\
(2k+2)\binom{6k+1}{2} + (k-1)\binom{6k+4}{2} &= 3\binom{6k+2}{2} + (3k-3)\binom{6k+3}{2}.
\end{aligned} \tag{123}$$

Analogicznie jak zawsze, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $\binom{6k+1}{2}$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 11: jak wygląda T dla $k = 6,\ n = 6k$



5.1.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$2\binom{6k+2}{2} + (3k-1)\binom{6k+3}{2} + k\binom{6k+4}{2} = 72k^3 + 84k^2 + 18k - 1,$$

co daje

$$F = 72k^3 + 66k^2 + 15k - 1.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$675k^5 + \frac{1845}{2}k^4 + 297k^3 + 18k^2 - \frac{3}{2}k,$$

co daje

$$G = \frac{75}{2}k^3 + 36k^2 + \frac{15}{2}k.$$

5.1.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (115)-(118) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.6, wspólne wartości każdego z równań (115)-(123) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $2k + 3$ (ponieważ wspólne wartości (115) i (116) są równe).

Każde równanie spośród (119)-(123) spełnia założenia Lematu 3.7, z wyjątkiem ostatniego równania z (122). Stosując do niego Lemat 3.6 i używając $(3k+1)\binom{6k+1}{2} = 3k\binom{6k+2}{2}$, otrzymujemy

$$\varphi^{-1}\left((k+1)\binom{6k+1}{2} + 3k\binom{6k+2}{2}\right) = \{(0,0,3k-2,k+1),(k+1,3k,0,0),(4k+2,0,0,0)\}.$$

Można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (119)-(123) wynosi $\mathrm{c}\left((k+1)\binom{6k+1}{2} + 3k\binom{6k+2}{2}\right) = 4k+1$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (115)-(118) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 4k + 1.$$

5.2 $n = 6k + 2, k > 1$

5.2.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(3k+2)\binom{6k+3}{2} = (3k+1)\binom{6k+4}{2} + 0\binom{6k+5}{2} + 0\binom{6k+6}{2}, \tag{124}$$

$$(3k+1)\binom{6k+4}{2} = (3k+2)\binom{6k+3}{2} + 0\binom{6k+5}{2} + 0\binom{6k+6}{2}, \tag{125}$$

$$(3k+3)\binom{6k+5}{2} = (2k+1)\binom{6k+3}{2} + 2\binom{6k+4}{2} + (k+1)\binom{6k+6}{2}, \tag{126}$$

$$(2k+1)\binom{6k+6}{2} = (2k+1)\binom{6k+3}{2} + 2\binom{6k+4}{2} + 0\binom{6k+5}{2}. \tag{127}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$2k\binom{6k+3}{2} + 5\binom{6k+4}{2} = 3\binom{6k+5}{2} + 2k\binom{6k+6}{2}, \tag{128}$$

$$\binom{6k+3}{2} + 3\binom{6k+5}{2} = 3\binom{6k+4}{2} + \binom{6k+6}{2}, \tag{129}$$

$$(3k+1)\binom{6k+3}{2} + \binom{6k+6}{2} = (3k-2)\binom{6k+4}{2} + 3\binom{6k+5}{2}. \tag{130}$$

Odejmując równanie (129) od (128), otrzymujemy dodatkowe $k-1$ relacji:

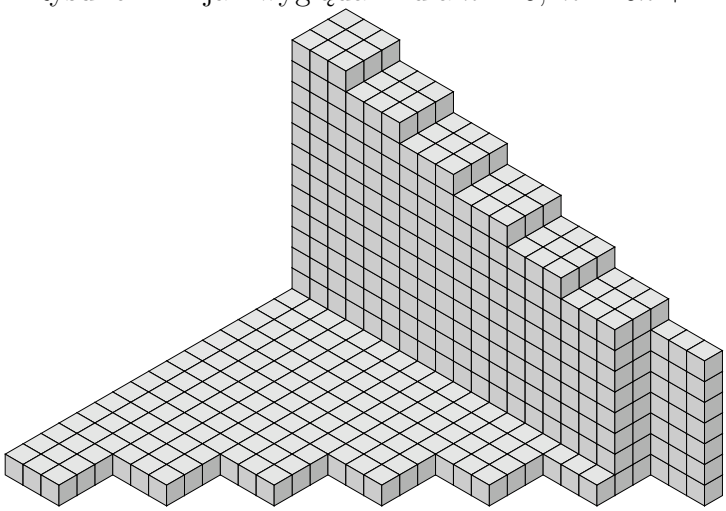
$$\begin{aligned}
(2k-1)\binom{6k+3}{2} + 8\binom{6k+4}{2} &= 6\binom{6k+5}{2} + (2k-1)\binom{6k+6}{2},\\
(2k-2)\binom{6k+3}{2} + 11\binom{6k+4}{2} &= 9\binom{6k+5}{2} + (2k-2)\binom{6k+6}{2},\\
&\vdots\\
(k+2)\binom{6k+3}{2} + (3k-1)\binom{6k+4}{2} &= (3k-3)\binom{6k+5}{2} + (k+2)\binom{6k+6}{2},\\
(k+1)\binom{6k+3}{2} + (3k+2)\binom{6k+4}{2} &= (3k)\binom{6k+5}{2} + (k+1)\binom{6k+6}{2}.
\end{aligned} \tag{131}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (129) od (130) i otrzymać kolejne $k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(3k)\binom{6k+3}{2} + 2\binom{6k+6}{2} &= (3k-5)\binom{6k+4}{2} + 6\binom{6k+5}{2},\\
(3k-1)\binom{6k+3}{2} + 3\binom{6k+6}{2} &= (3k-8)\binom{6k+4}{2} + 9\binom{6k+5}{2},\\
&\vdots\\
(2k+3)\binom{6k+3}{2} + (k-1)\binom{6k+6}{2} &= 4\binom{6k+4}{2} + (3k-3)\binom{6k+5}{2},\\
(2k+2)\binom{6k+3}{2} + (k)\binom{6k+6}{2} &= 1\binom{6k+4}{2} + (3k)\binom{6k+5}{2}.
\end{aligned} \tag{132}$$

Analogicznie jak zawsze, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $\binom{6k+3}{2}$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 12: jak wygląda T dla $k = 6,\ n = 6k + 2$



5.2.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(3k+2)\binom{6k+5}{2} + k\binom{6k+6}{2} = 72k^3 + 150k^2 + 99k + 20,$$

co daje

$$F = 72k^3 + 132k^2 + 84k + 17.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$675k^5 + \frac{4095}{2}k^4 + 2295k^3 + 1215k^2 + \frac{615}{2}k + 30,$$

co daje

$$G = \frac{75}{2}k^3 + \frac{147}{2}147k^2 + 45k + 9.$$

5.2.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (124)-(127) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.6, wspólne wartości każdego z równań (124)-(132) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $2k + 4$ (ponieważ wspólne wartości (124) i (125) są równe).

Każde równanie spośród (128)-(132) spełnia założenia Lematu 3.7, z wyjątkiem ostatniego równania z (131). Stosując do niego Lemat 3.6 i używając $(3k+2)\binom{6k+3}{2} = (3k+1)\binom{6k+4}{2}$, otrzymujemy

$$\varphi^{-1}\left((k+1)\binom{6k+3}{2} + (3k+2)\binom{6k+4}{2}\right) = \{(0,0,3k,k+1),(k+1,3k+2,0,0),(4k+3,1,0,0)\}.$$

Można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (128)-(132) wynosi $\mathrm{c}\left((k+1)\binom{6k+3}{2} + (3k+2)\binom{6k+4}{2}\right) = 4k+3$ oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (124)-(127) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 4k + 3.$$

5.3 $n = 6k + 4, k > 1$

5.3.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(3k+3)\binom{6k+5}{2} = (3k+2)\binom{6k+6}{2} + 0\binom{6k+7}{2} + 0\binom{6k+8}{2}, \tag{133}$$

$$(3k+2)\binom{6k+6}{2} = (3k+3)\binom{6k+5}{2} + 0\binom{6k+7}{2} + 0\binom{6k+8}{2}, \tag{134}$$

$$(3k+3)\binom{6k+7}{2} = (2k+2)\binom{6k+5}{2} + 1\binom{6k+6}{2} + (k+1)\binom{6k+8}{2}, \tag{135}$$

$$(2k+2)\binom{6k+8}{2} = (2k+2)\binom{6k+5}{2} + 1\binom{6k+6}{2} + 1\binom{6k+7}{2}, \tag{136}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$(2k+1)\binom{6k+5}{2} + 4\binom{6k+6}{2} = 2\binom{6k+7}{2} + (2k+1)\binom{6k+8}{2}, \tag{137}$$

$$\binom{6k+5}{2} + 3\binom{6k+7}{2} = 3\binom{6k+6}{2} + \binom{6k+8}{2}, \tag{138}$$

$$(3k+2)\binom{6k+5}{2} + \binom{6k+8}{2} = (3k-1)\binom{6k+6}{2} + 3\binom{6k+7}{2}. \tag{139}$$

Odejmując równanie (138) od (137), otrzymujemy dodatkowe k relacji:

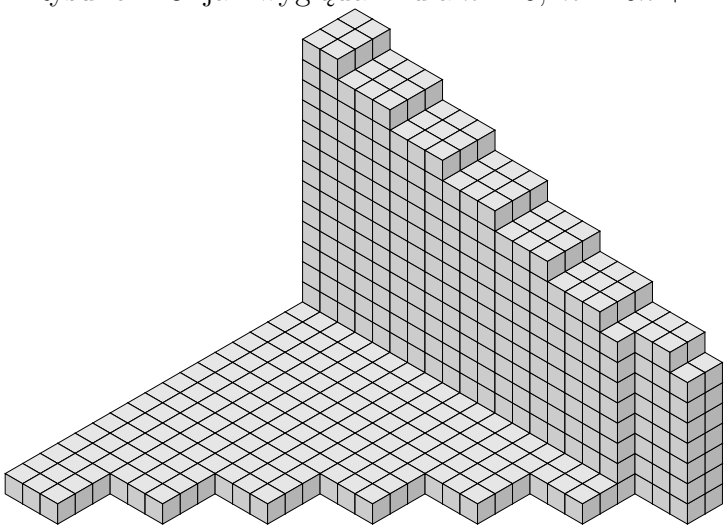
$$\begin{aligned}
(2k)\binom{6k+5}{2} + 7\binom{6k+6}{2} &= 5\binom{6k+7}{2} + (2k)\binom{6k+8}{2},\\
(2k-1)\binom{6k+5}{2} + 10\binom{6k+6}{2} &= 8\binom{6k+7}{2} + (2k-1)\binom{6k+8}{2},\\
&\vdots\\
(k+2)\binom{6k+5}{2} + (3k+1)\binom{6k+6}{2} &= (3k-1)\binom{6k+7}{2} + (k+2)\binom{6k+8}{2},\\
(k+1)\binom{6k+5}{2} + (3k+4)\binom{6k+6}{2} &= (3k+2)\binom{6k+7}{2} + (k+1)\binom{6k+8}{2}.
\end{aligned} \tag{140}$$

Podobnie, możemy odjąć równanie (138) od (139) i otrzymać kolejne $k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(3k+1)\binom{6k+5}{2} + 2\binom{6k+8}{2} &= (3k-4)\binom{6k+6}{2} + 6\binom{6k+7}{2},\\
(3k)\binom{6k+5}{2} + 3\binom{6k+8}{2} &= (3k-7)\binom{6k+6}{2} + 9\binom{6k+7}{2},\\
&\vdots\\
(2k+4)\binom{6k+5}{2} + (k-1)\binom{6k+8}{2} &= 5\binom{6k+6}{2} + (3k-3)\binom{6k+7}{2},\\
(2k+3)\binom{6k+5}{2} + (k)\binom{6k+8}{2} &= 2\binom{6k+6}{2} + (3k)\binom{6k+7}{2}.
\end{aligned} \tag{141}$$

Analogicznie jak zawsze, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $\binom{6k+5}{2}$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 13: jak wygląda T dla $k = 6,\ n = 6k + 4$



5.3.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$\binom{6k+6}{2} + (3k+1)\binom{6k+7}{2} + (k+1)\binom{6k+8}{2} = 72k^3 + 216k^2 + 208k + 64,$$

co daje

$$F = 72k^3 + 198k^2 + 181k + 54.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$675k^5 + \frac{4095}{2}k^4 + 2295k^3 + 1215k^2 + \frac{615}{2}k + 30,$$

co daje

$$G = \frac{75}{2}k^3 + \frac{147}{2}147k^2 + 45k + 9.$$

5.3.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (133)-(136) są w istocie minimalnymi relacjami.

Na mocy Lematów 3.5 oraz 3.6, wspólne wartości każdego z równań (133)-(141) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $2k + 5$ (ponieważ wspólne wartości (133) i (134) są równe).

Każde równanie spośród (137)-(141) spełnia założenia Lematu 3.7, z wyjątkiem ostatniego równania z (140). Stosując do niego Lemat 3.6 i używając $(3k+3)\binom{6k+5}{2} = (3k+2)\binom{6k+6}{2}$, otrzymujemy

$$\varphi^{-1}\left((k+1)\binom{6k+5}{2} + (3k+4)\binom{6k+6}{2}\right) = \{(0,0,3k{+}2,k{+}1),\ (k{+}1,3k{+}4,0,0),\ (4k{+}4,2,0,0)\}.$$

Można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (137)-(141) wynosi $\mathrm{c}\Big((k+1)\binom{6k+5}{2} + (3k+4)\binom{6k+6}{2}\Big) = 4k + 5$, oraz że stopnie łańcuchowe wspólnych wartości równań (133)-(136) muszą być mniejsze, co daje

$$\mathrm{c}(S) = 4k + 5.$$

5.4 $n = 6k + 1, k > 1$

W pozostałej części tej sekcji kładziemy $(d_0, d_1, d_2, d_3) = \Big(\binom{n+2}{2}, \binom{n+1}{2}, \binom{n+3}{2}, \binom{n+4}{2}\Big)$ i zamiast tego będziemy szukać zbioru Apéry'ego względem $\binom{n+2}{2}$.

5.4.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(6k+3)\binom{6k+2}{2} = (3k-1)\binom{6k+3}{2} + (3k+1)\binom{6k+4}{2} + 0\binom{6k+5}{2}, \tag{142}$$

$$(3k+2)\binom{6k+3}{2} = 0\binom{6k+2}{2} + (3k+1)\binom{6k+4}{2} + 0\binom{6k+5}{2}, \tag{143}$$

$$(3k+1)\binom{6k+4}{2} = 0\binom{6k+2}{2} + (3k+2)\binom{6k+3}{2} + 0\binom{6k+5}{2}, \tag{144}$$

$$(2k+1)\binom{6k+5}{2} = (2k+1)\binom{6k+2}{2} + 1\binom{6k+3}{2} + 1\binom{6k+4}{2}, \tag{145}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$2\binom{6k+3}{2} + k\binom{6k+2}{2} = \binom{6k+4}{2} + k\binom{6k+5}{2}, \tag{146}$$

$$(6k-2)\binom{6k+3}{2} + 3\binom{6k+4}{2} = (6k+2)\binom{6k+2}{2} + \binom{6k+5}{2}, \tag{147}$$

$$3\binom{6k+3}{2} + \binom{6k+5}{2} = \binom{6k+2}{2} + 3\binom{6k+4}{2}, \tag{148}$$

$$\binom{6k+3}{2} + (k+1)\binom{6k+5}{2} = (k+1)\binom{6k+2}{2} + 2\binom{6k+4}{2}. \tag{149}$$

Dodając równanie (148) do (146), otrzymujemy dodatkowe $k-1$ relacji:

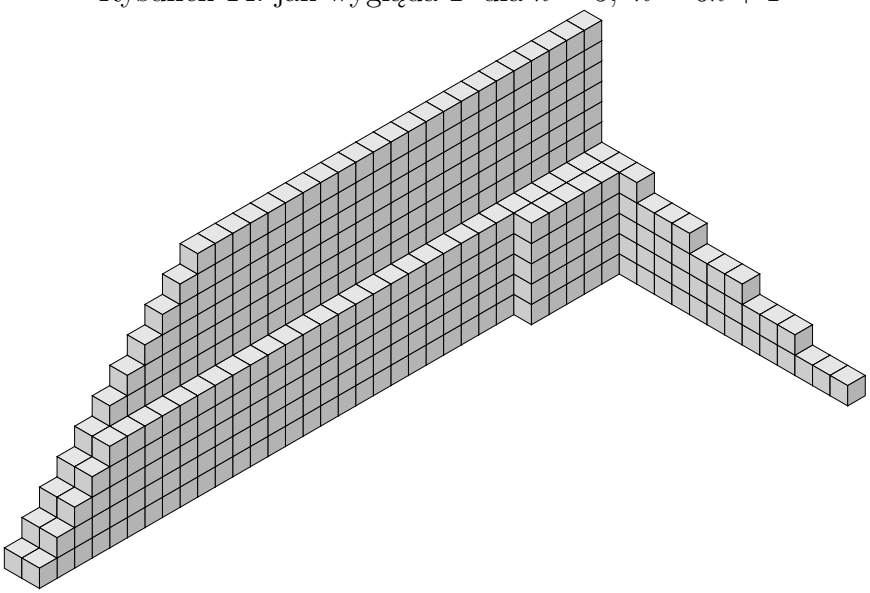
$$\begin{aligned}
5\binom{6k+3}{2} + (k-1)\binom{6k+2}{2} &= 4\binom{6k+4}{2} + (k-1)\binom{6k+5}{2},\\
8\binom{6k+3}{2} + (k-2)\binom{6k+2}{2} &= 7\binom{6k+4}{2} + (k-2)\binom{6k+5}{2},\\
&\vdots\\
(3k-4)\binom{6k+3}{2} + 2\binom{6k+2}{2} &= (3k-5)\binom{6k+4}{2} + 2\binom{6k+5}{2},\\
(3k-1)\binom{6k+3}{2} + 1\binom{6k+2}{2} &= (3k-2)\binom{6k+4}{2} + 1\binom{6k+5}{2}.
\end{aligned} \tag{150}$$

Odejmując równanie (148) od (147), otrzymujemy kolejne $2k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(6k-5)\binom{6k+3}{2} + 6\binom{6k+4}{2} &= (6k+1)\binom{6k+2}{2} + 2\binom{6k+5}{2},\\
(6k-8)\binom{6k+3}{2} + 9\binom{6k+4}{2} &= (6k)\binom{6k+2}{2} + 3\binom{6k+5}{2},\\
&\vdots\\
4\binom{6k+3}{2} + (6k-3)\binom{6k+4}{2} &= (4k+4)\binom{6k+2}{2} + (2k-1)\binom{6k+5}{2},\\
1\binom{6k+3}{2} + (6k)\binom{6k+4}{2} &= (4k+3)\binom{6k+2}{2} + (2k)\binom{6k+5}{2}.
\end{aligned} \tag{151}$$

Analogicznie jak zawsze, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $\binom{6k+3}{2}$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 14: jak wygląda T dla $k = 5,\ n = 6k + 1$



5.4.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(4k+2)\binom{6k+2}{2} + 2k\binom{6k+5}{2} = 108k^3 + 126k^2 + 42k + 2,$$

co daje

$$F = 108k^3 + 108k^2 + 27k - 1.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$999k^5 + \frac{4149}{2}k^4 + \frac{3231}{2}k^3 + 570k^2 + 84k + 3,$$

co daje

$$G = \frac{111}{2}k^3 + 60k^2 + \frac{31}{2}k.$$

5.4.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (142)-(145) są w istocie minimalnymi relacjami.

Równanie (147) oraz pierwsze $k-2$ równania z (151) nie spełniają założeń Lematu 3.6. Jednakże, podstawiając $(3k+2)\binom{6k+3}{2} = (3k+1)\binom{6k+4}{2}$, możemy przekształcić je w równania spełniające te założenia. Zatem, na mocy Lematów 3.5 oraz 3.6, wspólne wartości każdego z równań (142)-(151) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $3k+5$ (ponieważ wspólne wartości (143) i (144) są równe).

Ponadto, stosując Lemat 3.6 do (147) oraz wszystkich równań (151), otrzymujemy:

$$\varphi^{-1}\left((6k-2)\binom{6k+3}{2}+3\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,6k+2,0,1),(6k-2,0,3,0),(3k-4,0,3k+4,0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((6k-5)\binom{6k+3}{2}+6\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,6k+1,0,2),(6k-5,0,6,0),(3k-7,0,3k+7,0)\},$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+7)\binom{6k+3}{2}+(3k-6)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,5k+5,0,k-2),(3k+7,0,3k-6,0),(5,0,6k-5,0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+4)\binom{6k+3}{2}+(3k-3)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,5k+4,0,k-1),(3k+4,0,3k-3,0),(2,0,6k-2,0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+1)\binom{6k+3}{2}+(3k)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,5k+3,0,k),(3k+1,0,3k,0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((3k-2)\binom{6k+3}{2}+(3k+3)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,5k+2,0,k+1),(3k-2,0,3k+3,0),(6k,0,2,0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((3k-5)\binom{6k+3}{2}+(3k+6)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,5k+1,0,k+2),(3k-5,0,3k+6,0),(6k-3,0,5,0)\},$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{-1}\left(4\binom{6k+3}{2}+(6k-3)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,4k+4,0,2k-1),(4,0,6k-3,0),(3k+6,0,3k-4,0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left(1\binom{6k+3}{2}+(6k)\binom{6k+4}{2}\right)=\{(0,4k+3,0,2k),(1,0,6k,0),(3k+3,0,3k-1,0)\}.$$

Zauważmy również, że równania (146), (148), (149), (150) spełniają założenia Lematu 3.7, a zatem znamy także ich faktoryzacje.

Można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (142)-(151) wynosi $6k+3$, osiągany dla (142), (147) oraz wszystkich równań z (151), skąd

$$\mathrm{c}(S)=6k+3.$$

5.5 $n=6k+3, k>1$

5.5.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(6k+5)\binom{6k+4}{2}=3k\binom{6k+5}{2}+(3k+2)\binom{6k+6}{2}+0\binom{6k+7}{2}, \tag{152}$$
$$(3k+3)\binom{6k+5}{2}=0\binom{6k+4}{2}+(3k+2)\binom{6k+6}{2}+0\binom{6k+7}{2}, \tag{153}$$
$$(3k+2)\binom{6k+6}{2}=0\binom{6k+4}{2}+(3k+3)\binom{6k+5}{2}+0\binom{6k+7}{2}, \tag{154}$$
$$(k+1)\binom{6k+7}{2}=(k+1)\binom{6k+4}{2}+0\binom{6k+5}{2}+1\binom{6k+6}{2}, \tag{155}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto

mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$3\binom{6k+5}{2}+k\binom{6k+4}{2}=2\binom{6k+6}{2}+k\binom{6k+7}{2}, \tag{156}$$

$$6k\binom{6k+5}{2}+3\binom{6k+6}{2}=(6k+4)\binom{6k+4}{2}+\binom{6k+7}{2}, \tag{157}$$

$$3\binom{6k+5}{2}+\binom{6k+7}{2}=\binom{6k+4}{2}+3\binom{6k+6}{2}. \tag{158}$$

Dodając równanie (158) do (156), otrzymujemy dodatkowe $k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
6\binom{6k+5}{2}+(k-1)\binom{6k+4}{2}&=5\binom{6k+6}{2}+(k-1)\binom{6k+7}{2},\\
9\binom{6k+5}{2}+(k-2)\binom{6k+4}{2}&=8\binom{6k+6}{2}+(k-2)\binom{6k+7}{2},\\
&\vdots\\
(3k-3)\binom{6k+5}{2}+2\binom{6k+4}{2}&=(3k-4)\binom{6k+6}{2}+2\binom{6k+7}{2},\\
(3k)\binom{6k+5}{2}+1\binom{6k+4}{2}&=(3k-1)\binom{6k+6}{2}+1\binom{6k+7}{2}.
\end{aligned} \tag{159}$$

Odejmując równanie (158) od (157), otrzymujemy kolejne $k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(6k-3)\binom{6k+5}{2}+6\binom{6k+6}{2}&=(6k+3)\binom{6k+4}{2}+2\binom{6k+7}{2},\\
(6k-6)\binom{6k+5}{2}+9\binom{6k+6}{2}&=(6k+2)\binom{6k+4}{2}+3\binom{6k+7}{2},\\
&\vdots\\
(3k+6)\binom{6k+5}{2}+(3k-3)\binom{6k+6}{2}&=(5k+6)\binom{6k+4}{2}+(k-1)\binom{6k+7}{2},\\
(3k+3)\binom{6k+5}{2}+3k\binom{6k+6}{2}&=(5k+5)\binom{6k+4}{2}+k\binom{6k+7}{2}.
\end{aligned} \tag{160}$$

Analogicznie jak zawsze, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $\binom{6k+5}{2}$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

5.5.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(5k+5)\binom{6k+4}{2}+2\binom{6k+6}{2}+(k-1)\binom{6k+7}{2}=108k^3+252k^2+183k+39,$$

co daje

$$F=108k^3+234k^2+156k+29.$$

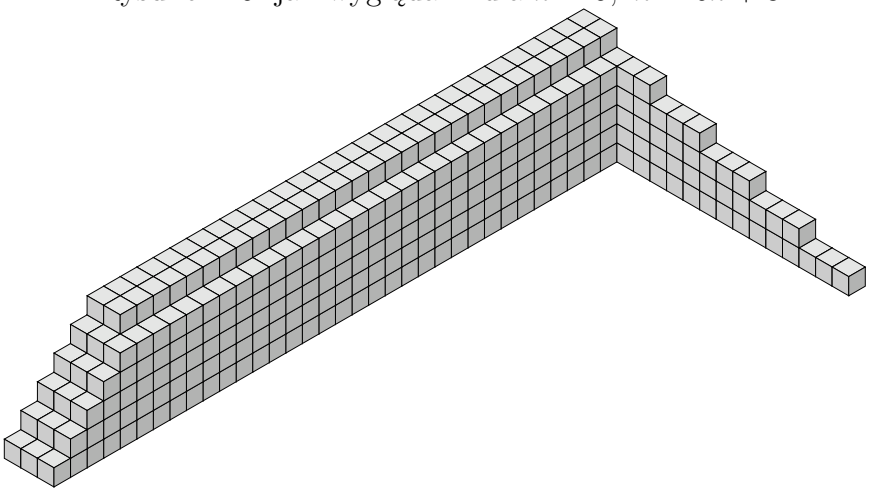
Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$999k^5+\frac{7641}{2}k^4+5712k^3+4152k^2+\frac{2913}{2}k+195,$$

co daje

$$G=\frac{111}{2}k^3+120k^2+\frac{159}{2}k+15.$$

Rysunek 15: jak wygląda T dla $k = 5,\ n = 6k + 3$



5.5.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (152)-(155) są w istocie minimalnymi relacjami.

Równania (157) oraz (160) nie spełniają założeń Lematu 3.6. Jednakże, podstawiając $(3k + 3)\binom{6k+5}{2} = (3k + 2)\binom{6k+6}{2}$, możemy przekształcić je w równania spełniające te założenia. Zatem, na mocy Lematów 3.5 oraz 3.6, wspólne wartości każdego z równań (152)-(160) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $2k + 4$ (ponieważ wspólne wartości (153) i (154) są równe).

Ponadto, stosując Lemat 3.6 do (157) oraz (160), otrzymujemy:

$$\varphi^{-1}\left(6k\binom{6k+5}{2} + 3\binom{6k+6}{2}\right) = \{(0, 6k+4, 0, 1), (6k, 0, 3, 0), (3k-3, 0, 3k+5, 0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((6k-3)\binom{6k+5}{2} + 6\binom{6k+6}{2}\right) = \{(0, 6k+3, 0, 2), (6k-3, 0, 6, 0), (3k-6, 0, 3k+8, 0)\},$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+6)\binom{6k+5}{2} + (3k-3)\binom{6k+6}{2}\right) = \{(0, 5k+6, 0, k-1), (3k+6, 0, 3k-3, 0), (3, 0, 6k-1, 0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+3)\binom{6k+5}{2} + 3k\binom{6k+6}{2}\right) = \{(0, 5k+5, 0, k), (3k+3, 0, 3k, 0), (0, 0, 6k+2, 0)\}.$$

Zauważmy również, że równania (156), (158), (159) spełniają założenia Lematu 3.7, a zatem znamy także ich faktoryzacje.

Można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (152)-(160) wynosi $6k + 5$, osiągany dla (152), (157) oraz (160), skąd

$$\mathrm{c}(S) = 6k + 5.$$

5.6 $n = 6k + 5, k > 1$

5.6.1 Zbiór Apéry'ego

Mamy następujące relacje:

$$(6k+7)\binom{6k+6}{2} = (3k+1)\binom{6k+7}{2} + (3k+3)\binom{6k+8}{2} + 0\binom{6k+9}{2}, \tag{161}$$

$$(3k+4)\binom{6k+7}{2} = 0\binom{6k+6}{2} + (3k+3)\binom{6k+8}{2} + 0\binom{6k+9}{2}, \tag{162}$$

$$(3k+3)\binom{6k+8}{2} = 0\binom{6k+6}{2} + (3k+4)\binom{6k+7}{2} + 0\binom{6k+9}{2}, \tag{163}$$

$$(k+1)\binom{6k+9}{2} = (k+1)\binom{6k+6}{2} + 1\binom{6k+7}{2} + 0\binom{6k+8}{2}, \tag{164}$$

oraz na mocy Lematów 2.1 i 2.3, konstruując punkty z powyższych równań i usuwając ich regiony skojarzone, otrzymujemy, że zbiór Apéry'ego jest zawarty w zbiorze etykiet pozostałej figury. Ponadto mamy następujące tożsamości spełniające warunki Twierdzenia 2.2:

$$4\binom{6k+7}{2} + k\binom{6k+6}{2} = 3\binom{6k+8}{2} + k\binom{6k+9}{2}, \tag{165}$$

$$(6k+2)\binom{6k+7}{2} + 3\binom{6k+8}{2} = (6k+6)\binom{6k+6}{2} + \binom{6k+9}{2}, \tag{166}$$

$$3\binom{6k+7}{2} + \binom{6k+9}{2} = \binom{6k+6}{2} + 3\binom{6k+8}{2}. \tag{167}$$

Dodając równanie (167) do (165), otrzymujemy dodatkowe $k-1$ relacji:

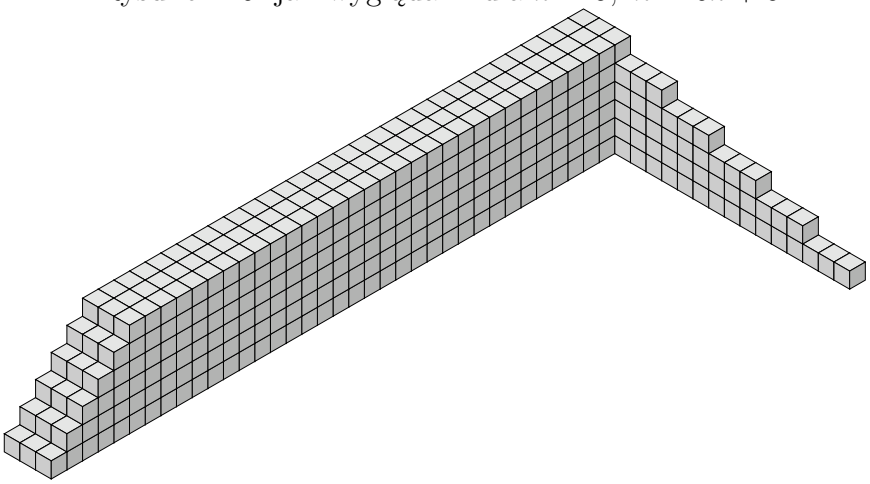
$$\begin{aligned}
7\binom{6k+7}{2} + (k-1)\binom{6k+6}{2} &= 6\binom{6k+8}{2} + (k-1)\binom{6k+9}{2},\\
10\binom{6k+7}{2} + (k-2)\binom{6k+6}{2} &= 9\binom{6k+8}{2} + (k-2)\binom{6k+9}{2},\\
&\vdots\\
(3k-2)\binom{6k+7}{2} + 2\binom{6k+6}{2} &= (3k-3)\binom{6k+8}{2} + 2\binom{6k+9}{2},\\
(3k+1)\binom{6k+7}{2} + 1\binom{6k+6}{2} &= (3k)\binom{6k+8}{2} + 1\binom{6k+9}{2}.
\end{aligned} \tag{168}$$

Odejmując równanie (167) od (166), otrzymujemy kolejne $k-1$ relacji:

$$\begin{aligned}
(6k-1)\binom{6k+7}{2} + 6\binom{6k+8}{2} &= (6k+5)\binom{6k+6}{2} + 2\binom{6k+9}{2},\\
(6k-4)\binom{6k+7}{2} + 9\binom{6k+8}{2} &= (6k+4)\binom{6k+6}{2} + 3\binom{6k+9}{2},\\
&\vdots\\
(3k+8)\binom{6k+7}{2} + (3k-3)\binom{6k+8}{2} &= (5k+8)\binom{6k+6}{2} + (k-1)\binom{6k+9}{2},\\
(3k+5)\binom{6k+7}{2} + (3k)\binom{6k+8}{2} &= (5k+7)\binom{6k+6}{2} + (k)\binom{6k+9}{2}.
\end{aligned} \tag{169}$$

Analogicznie jak zawsze, można sprawdzić, że figura T, wycięta przy użyciu wszystkich powyższych równań, ma objętość $\binom{6k+7}{2}$, co implikuje, że musi być L-kształtem.

Rysunek 16: jak wygląda T dla $k = 5,\ n = 6k + 5$



5.6.2 Liczba Frobeniusa i genus

Można sprawdzić, że największa etykieta w T to

$$(5k+6)\binom{6k+6}{2} + 2\binom{6k+8}{2} + k\binom{6k+9}{2} = 108k^3 + 360k^2 + 399k + 146,$$

co daje

$$F = 108k^3 + 342k^2 + 360k + 125.$$

Można również wyznaczyć, że suma etykiet T wynosi

$$999k^5 + \frac{10971}{2}k^4 + 12006k^3 + 13086k^2 + \frac{14199}{2}k + 1533,$$

co daje

$$G = \frac{111}{2}k^3 + \frac{351}{2}k^2 + 183k + 63.$$

5.6.3 Stopień łańcuchoowy

Z Propozycji 2.8 otrzymujemy, że równania (161)-(164) są w istocie minimalnymi relacjami.

Równania (166) oraz (169) nie spełniają założeń Lematu 3.6. Jednakże, podstawiając $(3k + 4)\binom{6k+7}{2} = (3k + 3)\binom{6k+8}{2}$, możemy przekształcić je w równania spełniające te założenia. Zatem, na mocy Lematów 3.5 oraz 3.6, wspólne wartości każdego z równań (161)-(169) są elementami Bettiego. Na mocy Twierdzenia 3.3 są to wszystkie elementy Bettiego i jest ich $2k + 4$ (ponieważ wspólne wartości (162) i (163) są równe).

Ponadto, stosując Lemat 3.6 do (166) oraz (169), otrzymujemy:

$$\varphi^{-1}\left((6k+2)\binom{6k+7}{2} + 3\binom{6k+8}{2}\right) = \{(0, 6k+6, 0, 1), (6k+2, 0, 3, 0), (3k-2, 0, 3k+6, 0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((6k-1)\binom{6k+7}{2} + 6\binom{6k+8}{2}\right) = \{(0, 6k+5, 0, 2), (6k-1, 0, 6, 0), (3k-5, 0, 3k+9, 0)\},$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+8)\binom{6k+7}{2} + (3k-3)\binom{6k+8}{2}\right) = \{(0, 5k+8, 0, k-1), (3k+8, 0, 3k-3, 0), (4, 0, 6k, 0)\},$$
$$\varphi^{-1}\left((3k+5)\binom{6k+7}{2} + (3k)\binom{6k+8}{2}\right) = \{(0, 5k+7, 0, k), (3k+5, 0, 3k, 0), (1, 0, 6k+3, 0)\}.$$

Zauważmy również, że równania (165), (167), (168) spełniają założenia Lematu 3.7, a zatem znamy także ich faktoryzacje.

Można sprawdzić, że największy stopień łańcuchowy wśród wspólnych wartości równań (161)-(169) wynosi $6k+7$, osiągany dla (161), (166) oraz (169), skąd

$$\mathrm{c}(S) = 6k+7.$$

5.7 Podsumowanie

Wniosek 5.1. *Liczba Frobeniusa półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne liczby trójkątne* $\binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{2}, \binom{n+3}{2}, \binom{n+4}{2}$ *jest następująca:*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}n^3+\frac{11}{6}n^2+\frac{5}{2}n-1 & gdy \;\; n\equiv 0 \pmod 6,\; n\geq 6,\\ \frac{1}{3}n^3+\frac{5}{3}n^2+\frac{10}{3}n+1 & gdy \;\; n\equiv 2 \pmod 6,\; n\geq 2,\\ \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n & gdy \;\; n\equiv 4 \pmod 6,\; n\geq 4,\\ \frac{1}{2}n^3+\frac{3}{2}n^2-3 & gdy \;\; n\equiv 1 \pmod 6,\; n\geq 1,\\ \frac{1}{2}n^3+2n^2+\frac{1}{2}n-4 & gdy \;\; n\equiv 3 \pmod 6,\; n\geq 3,\\ \frac{1}{2}n^3+2n^2+\frac{5}{2}n & gdy \;\; n\equiv 5 \pmod 6,\; n\geq 5. \end{cases}$$

Wniosek 5.2. *Genus półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne liczby trójkątne* $\binom{n+1}{2}$, $\binom{n+2}{2}$, $\binom{n+3}{2}$, $\binom{n+4}{2}$ *jest następujący:*

$$\begin{cases} \frac{25}{144}n^3+n^2+\frac{5}{4}n & gdy \;\; n\equiv 0 \pmod 6,\; n\geq 6,\\ \frac{25}{144}n^3+n^2+\frac{17}{12}n+\frac{7}{9} & gdy \;\; n\equiv 2 \pmod 6,\; n\geq 2,\\ \frac{25}{144}n^3+n^2+\frac{13}{12}n-\frac{4}{9} & gdy \;\; n\equiv 4 \pmod 6,\; n\geq 4,\\ \frac{37}{144}n^3+\frac{43}{48}n^2+\frac{1}{48}n-\frac{169}{144} & gdy \;\; n\equiv 1 \pmod 6,\; n\geq 1,\\ \frac{37}{144}n^3+\frac{49}{48}n^2+\frac{3}{16}n-\frac{27}{16} & gdy \;\; n\equiv 3 \pmod 6,\; n\geq 3,\\ \frac{37}{144}n^3+\frac{49}{48}n^2+\frac{49}{48}n+\frac{37}{144} & gdy \;\; n\equiv 5 \pmod 6,\; n\geq 5. \end{cases}$$

Wniosek 5.3. *Stopień łańcuchowy półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne liczby trójkątne* $\binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{2}, \binom{n+3}{2}, \binom{n+4}{2}$ *jest następujący:*

$$\begin{cases} \frac{2}{3}n+1 & gdy \;\; n\equiv 0 \pmod 6,\; n\geq 6,\\ \frac{2}{3}n+\frac{5}{3} & gdy \;\; n\equiv 2 \pmod 6,\; n\geq 8,\\ \frac{2}{3}n+\frac{7}{3} & gdy \;\; n\equiv 4 \pmod 6,\; n\geq 4,\\ n+2 & gdy \;\; n\equiv 1 \pmod 2,\; n\geq 3. \end{cases}$$

Co więcej: $\mathrm{c}\left(\langle \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \binom{6}{2}\rangle\right) = 10.$

Wniosek 5.4. *Liczba elementów Bettiego półgrupy numerycznej generowanej przez cztery kolejne*

liczby trójkątne $\binom{n+1}{2}, \binom{n+2}{2}, \binom{n+3}{2}, \binom{n+4}{2}$ *jest następująca:*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}n+3 & gdy \;\; n \equiv 0 \pmod 6, \;\; n \geq 12, \\ \frac{1}{3}n+\frac{10}{3} & gdy \;\; n \equiv 2 \pmod 6, \;\; n \geq 8, \\ \frac{1}{3}n+\frac{11}{3} & gdy \;\; n \equiv 4 \pmod 6, \;\; n \geq 10, \\ \frac{1}{2}n+\frac{9}{2} & gdy \;\; n \equiv 1 \pmod 6, \;\; n \geq 7, \\ \frac{1}{3}n+3 & gdy \;\; n \equiv 3 \pmod 6, \;\; n \geq 9, \\ \frac{1}{3}n+\frac{7}{3} & gdy \;\; n \equiv 5 \pmod 6, \;\; n \geq 11. \end{cases}$$

Co więcej: $\#\text{Betti}\left(\langle \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \binom{6}{2} \rangle\right) = 1$, $\#\text{Betti}\left(\langle \binom{4}{2}, \binom{6}{2}, \binom{7}{2}, \binom{8}{2} \rangle\right) = 1$, $\#\text{Betti}\left(\langle \binom{5}{2}, \binom{6}{2}, \binom{7}{2}, \binom{8}{2} \rangle\right) = 4$, $\#\text{Betti}\left(\langle \binom{6}{2}, \binom{7}{2}, \binom{8}{2}, \binom{9}{2} \rangle\right) = 2$, $\#\text{Betti}\left(\langle \binom{7}{2}, \binom{8}{2}, \binom{9}{2}, \binom{10}{2} \rangle\right) = 4$.

6 Kończące uwagi

W [22] Moscariello wykazał, że liczba Frobeniusa półgrup numerycznych generowanych przez nieskończony ciąg $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots$ jest asymptotycznie rzędu $O(n^2)$. Wynik ten został wykorzystany w [4] do pokazania, że wymiar osadzenia tych półgrup jest asymptotycznie rzędu $O(n)$. W [19] wyznaczono liczbę Frobeniusa półgrupy numerycznej generowanej przez $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2$, i okazało się, że jest ona dana przez skończony zbiór wielomianów trzeciego stopnia w n. Zgadza się to z wynikami niniejszej pracy dotyczącej czterech kolejnych kwadratów, gdyż w tym przypadku również otrzymujemy wielomiany trzeciego stopnia w n. Ponieważ dla nieskończonych ciągów kwadratów odpowiedź jest asymptotycznie rzędu $O(n^2)$, pojawia się pytanie, czy istnieje dodatnia liczba całkowita k taka, że $F(\langle n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+k)^2 \rangle)$ można opisać za pomocą skończonego zbioru wielomianów kwadratowych w n. Korzystając z następującego dolnego szacowania na liczbę Frobeniusa, udowodnionego w [18] (zob. także [25, Chapter 3]), odpowiedź jest negatywna.

Twierdzenie 6.1. *Niech* $a_1, \ldots, a_m$ *będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że* $\gcd(a_1, \ldots, a_m) = 1$. *Wówczas*

$$F(\langle a_1, \ldots, a_m \rangle) \geq ((m-1)! a_1 a_2 \cdots a_m)^{\frac{1}{m-1}} - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Podstawiając do Twierdzenia 6.1, otrzymujemy

$$F(\langle n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+k)^2 \rangle) \geq (k!(n(n+1)\cdots(n+k))^2)^{\frac{1}{k}} - \sum_{i=0}^{k} (n+i)^2 \geq (k!(n^{k+1})^2)^{\frac{1}{k}} - \sum_{i=0}^{k} (n+i)^2.$$

Zatem dla dostatecznie dużych n prawa strona jest $\geq C \cdot (n^2)^{\frac{k+1}{k}}$ dla pewnej dodatniej stałej C, co pokazuje, że liczba Frobeniusa nie może być wielomianem kwadratowym w n.

W świetle wyników z Sekcji 2 oraz 3 proponujemy następujące zadanie.

Problem 6.2. *Zastosować metody z Sekcji 2 oraz 3 do innej nieskończonej rodziny półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia równym cztery.*

W Sekcji 3 ograniczyliśmy się do pracy pod założeniami z Propozycji 2.5, ponieważ rodziny półgrup numerycznych badane w Sekcjach 4 oraz 5 spełniają te hipotezy. Autor nie próbował rozszerzyć procedury rozwiniętej w Sekcji 3 na wszystkie półgrupy numeryczne o wymiarze osadzenia równym cztery. Następujący problem precyzyjnie izoluje brakujący krok; jego rozwiązanie dostarczyłoby pożądanej uogólnionej wersji metody z Sekcji 3.

Problem 6.3. *Sformułować i udowodnić wersję Propozycji 2.8 oraz procedury z Sekcji 3, która działa do półgrup numerycznych spełniających założenia Propozycji 2.7.*

Minimalne prezentacje mają kluczowe znaczenie dla półgrup numerycznych (zob. [29] lub [5, Chapter 5]). Aby je uzyskać, konieczne jest wyznaczenie wszystkich faktoryzacji elementów Bettiego danej półgrupy numerycznej. W kontekście wyników niniejszej pracy wymagałoby to sformułowania i udowodnienia silniejszej wersji Lematu 3.5.

Problem 6.4. *Opracować procedurę wyznaczania minimalnych prezentacji półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia równym cztery.*

Równie istotny, zwłaszcza w teorii faktoryzacji, jest stopień łagodności (ang. tame degree) (zob. [5, Chapter 6] oraz [12]). Stopnie łańcuchowy i łagodności są często rozpatrywane razem; jednak stopień łagodności jest trudniejszy do wyznaczenia. W szczególności jego obliczenie wymaga znajomości zbiorów $\mathrm{Minimals}_{\leq}\varphi^{-1}(d_i + S)$. Zobacz [5, Theorem 16]. Porównaj także [5, Proposition 70] z Uwagą 3.4.

Problem 6.5. *Opracować procedurę wyznaczania stopnia łagodności półgrup numerycznych o wymiarze osadzenia równym cztery.*

7 Podziękowania

W momencie pisania niniejszej pracy autor był uczniem szkoły średniej. Autor dziękuje swojemu opiekunowi, Tomaszowi Kowalczykowi, za zasugerowanie tematu półgrup numerycznych. Wspólna praca autora i Tomasza Kowalczyka stanowi część indywidualnej opieki nad szczególnie uzdolnionymi matematycznie uczniami szkół średnich prowadzonej przez Uniwersytet Jagielloński.

Autor pragnie również podziękować Pedrowi A. García-Sánchezowi oraz Alfredowi Geroldingerowi za cenne uwagi i sugestie przekazane w trakcie naszej korespondencji, podczas powstawania tej pracy.

Literatura

[1] F. Aguiló-Gost, P. A. García-Sánchez, and D. Llena. On the number of L-shapes in embedding dimension four numerical semigroups. *Discrete Mathematics*, 338(12):2168–2178, 2015.

[2] F. Aicardi. On the geometry of the Frobenius problem. *Functional Analysis and Other Mathematics*, 2(2):111–127, 2009.

[3] R. Apéry. Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 222, 1946.

[4] F. Arias, J. Borja, and J. Terán. A note on numerical nemigroups generated by k-th powers. *Integers*, 25:A11, 2025.

[5] A. Assi, M. D'Anna, and P. A. García-Sánchez. *Numerical Semigroups and Applications*, volume 3 of *RSME Springer Series*. Springer, 2 edition, 2020.

[6] A. Brauer. On a problem of partitions. *American Journal of Mathematics*, 64:299–312, 1942.

[7] A. Brauer and J. E. Shockley. On a problem of Frobenius. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 211:215–220, 1962.

[8] S. T. Chapman, P. A. García-Sánchez, D. Llena, V. Ponomarenko, and J. C. Rosales. The catenary and tame degree in finitely generated commutative cancellative monoids. *Manuscripta Mathematica*, 120:253–264, 2006.

[9] F. Curtis. On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup. *Mathematica Scandinavica*, 67(2):190–192, 1990.

[10] M. Delgado, P. A. García-Sánchez, and J. Morais. NumericalSgps, A GAP package for numerical semigroups, Version 1.4.0. `https://gap-packages.github.io/numericalsgps`, 2024.

[11] L. G. Fel. Numerical semigroups generated by squares and cubes of three consecutive integers. In *Combinatorial and Additive Number Theory III*, pages 101–121, Cham, 2020. Springer International Publishing.

[12] A. Geroldinger and A. Moscariello. There is no polynomial formula for the catenary and the tame degree of finitely generated monoids. arXiv:2505.05330 [math.AC].

[13] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.15.1. `https://www.gap-system.org`, 2025.

[14] M. Hashuga, M. Herbine, and A. Jensen. Numerical semigroups generated by quadratic sequences. *Semigroup Forum*, 104:330–357, 2022.

[15] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 14.3. Champaign, Illinois, 2025.

[16] S. M. Johnson. A Linear Diophantine Problem. *Canadian Journal of Mathematics*, 12:390–398, 1960.

[17] R. Kannan. Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem. *Combinatorica*, 12(2):161–177, 1992.

[18] H. G. Killingbergtrø. Betjening av figur i Frobenius' problem. *Normat*, 2:75–82, 2000.

[19] M. Lepilov, J. O'Rourke, and I. Swanson. Frobenius numbers of numerical semigroups generated by three consecutive squares or cubes. *Semigroup Forum*, 91:238–259, 2015.

[20] M. Lewin. An algorithm for a solution of a problem of Frobenius. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 276:68–82, 1975.

[21] J. M. Marín, J. L. Ramírez-Alfonsín, and M. P. Revuelta. On the Frobenius number of Fibonacci numerical semigroups. *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 7:A14, 2007.

[22] A. Moscariello. On integers which are representable as sums of large squares. *International Journal of Number Theory*, 11(8):2505–2511, 2015.

[23] D. C. Ong and V. Ponomarenko. The Frobenius number of geometric sequences. *Integers*, 8:A33, 2008.

[24] J. L. Ramírez-Alfonsín. Complexity of the Frobenius problem. *Combinatorica*, 16:143–147, 1996.

[25] J. L. Ramírez-Alfonsín. *The Diophantine Frobenius Problem*, volume 30 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2005.

[26] J. B. Roberts. Note on linear forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:465–469, 1956.

[27] A. M. Robles-Pérez and J. C. Rosales. The Frobenius number corresponding to the squares of three consecutive Fibonacci numbers: comparison of three algorithmic processes. arXiv:2507.01898 [math.NT].

[28] A. M. Robles-Pérez and J. C. Rosales. The Frobenius number for sequences of triangular and tetrahedral numbers. *Journal of Number Theory*, 186:473–492, 2017.

[29] J. C. Rosales. An algorithmic method to compute a minimal relation for any numerical semigroup. *International Journal of Algebra and Computation*, 6(4):441–455, 1996.

[30] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez. *Numerical Semigroups*, volume 20 of *Developments in Mathematics*. Springer, New York, 2009.

[31] E. S. Selmer. On the linear diophantine problem of Frobenius. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 293/294:1–17, 1977.

[32] J. J. Sylvester. Problem 7382. *The Educational Times, and Journal of the College of Preceptors*, 36(266):177, 1883. Solution by W. J. Curran Sharp, ibidem, 36(271):315, 1883.