Ciągłe endomorfizmy standardowej algebry MV: podejście przez równania funkcyjne

Ksawery Tomczak

II Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wlkp.

Za pomoc merytoryczną przy spisywaniu
wyników oraz rozmowy, które natchnęły
mnie do napisania tej pracy, serdeczne
podziękowania kieruję do Pani:

mgr **Doroty Tomczak**

Spis treści

1 Wstęp **1**

2 Podstawowe pojęcia **2**
2.1 Logika Łukasiewicza i standardowa algebra MV 2
2.2 Równania funkcyjne na odcinku jednostkowym 2

3 Wyniki główne **2**
3.1 Rozwiązanie równania addytywnego $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$ 2
3.2 Uwzględnienie negacji – ciągłe endomorfizmy 5
3.3 Funkcje komutujące z silną koniunkcją 5

4 Dyskusja i powiązania **6**
4.1 Związek z twierdzeniem McNaughtona 6
4.2 Inne kierunki badań 6
4.3 Perspektywa algebraiczna 7
4.4 Znaczenie ciągłości 7

5 Podsumowanie **7**

Streszczenie

Algebraicznym odpowiednikiem nieskończonowartościowej logiki Łukasiewicza jest rozmaitość algebr MV. Modelem standardowym jest odcinek jednostkowy $[0,1]$ wyposażony w działania $x \oplus y = \min(1, x+y)$ oraz $\neg x = 1 - x$. W pracy badamy ciągłe funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$, które komutują z tymi podstawowymi działaniami, tzn. spełniają równania funkcyjne $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$ oraz $f(\neg x) = \neg f(x)$. Dowodzimy pełnej charakteryzacji: jedynymi ciągłymi rozwiązaniami są funkcja identycznościowa oraz funkcje stałe 0 i 1. W szczególności standardowa algebra MV nie posiada nietrywialnych ciągłych endomorfizmów — jest to silna własność sztywnościowa, odróżniająca ją od wielu innych struktur algebraicznych. Rozpatrujemy także dualne działanie silnej koniunkcji $\odot$ i omawiamy związki otrzymanych wyników z twierdzeniem McNaughtona o funkcjach definiowalnych w logice Łukasiewicza. Metody są elementarne i samodzielne, łącząc zwykłą analizę rzeczywistą z własnościami algebraicznymi.

Słowa kluczowe: logika Łukasiewicza; logika wielowartościowa; algebra MV; równanie funkcyjne; ciągły endomorfizm; odcinek jednostkowy; definiowalność; norma trójkątna.
Klasyfikacja tematyczna (2020): 03B50, 06D35, 39B22, 03B52.

1 Wstęp

Logiki wielowartościowe rozszerzają klasyczny dwuwartościowy rachunek zdań, dopuszczając pośrednie wartości prawdy, co daje naturalne narzędzie do opisu nieostrości, niepewności czy częściowej informacji. Do najważniejszych rodzin takich logik należą logiki oparte na ciągłych normach trójkątnych, wprowadzone systematycznie przez Hájka [2]: logika Łukasiewicza, logika Gödla i logika produktowa. Każda z nich posiada wyróżnioną algebrę wartości logicznych na odcinku jednostkowym $[0, 1]$, a ich metamatematyczne własności są głęboko związane z odpowiednimi strukturami algebraicznymi.

Standardową semantyką nieskończonowartościowej logiki Łukasiewicza L_∞ jest algebra

$$\neg x = 1 - x, \qquad x \oplus y = \min(1, x + y), \qquad x \odot y = \max(0, x + y - 1),$$

gdzie $\oplus$ oraz $\odot$ to odpowiednio silna alternatywa i silna koniunkcja. Strukturę $\mathrm{MV} = ([0, 1], \oplus, \neg, 0)$ nazywa się *standardową algebrą MV* i generuje ona całą rozmaitość algebr MV, która pełni w stosunku do logiki Łukasiewicza rolę analogiczną do algebr Boole'a w przypadku logiki klasycznej [1, 4].

Jednym z podstawowych pytań dotyczących każdego systemu logicznego jest pytanie o jego siłę wyrażalności: jakie funkcje na zbiorze wartości logicznych dają się zdefiniować za pomocą formuł danej logiki? Dla logiki Łukasiewicza odpowiedź daje klasyczne twierdzenie McNaughtona [3]: funkcje definiowalne to dokładnie ciągłe funkcje kawałkami liniowe o współczynnikach całkowitych. W niniejszej pracy stawiamy pytanie komplementarne: które funkcje $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *respektują strukturę algebraiczną* standardowej algebry MV? W języku algebry chodzi o opis ciągłych endomorfizmów struktury MV.

Prowadzi to naturalnie do równań funkcyjnych:

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in [0, 1], \tag{1}$$

$$f(\neg x) = \neg f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in [0, 1]. \tag{2}$$

Równanie (1) wyraża addytywność względem skróconej sumy $\oplus$, a (2) — przemienność z inwolucją.

Głównym wynikiem pracy jest całkowita klasyfikacja wszystkich ciągłych rozwiązań układu (1)–(2). Dowodzimy, że jedynymi możliwościami są funkcja identycznościowa $f(x) = x$ oraz dwie funkcje stałe $f(x) = 0$ i $f(x) = 1$. W szczególności MV nie ma nietrywialnych ciągłych endomorfizmów, co jest silną własnością sztywnościową, odróżniającą ją choćby od przestrzeni liniowych czy algebr Boole'a. Rozpatrujemy także dualne równanie dla silnej koniunkcji $\odot$ i otrzymujemy analogiczną klasyfikację.

Nasze metody są elementarne i samodzielne, opierają się jedynie na podstawowych własnościach liczb rzeczywistych oraz ciągłości. Kluczowym krokiem jest wykazanie, że dowolne ciągłe rozwiązanie (1) musi być postaci $\min(1, \alpha x)$ dla pewnej stałej $\alpha \geq 0$, a następnie warunek zgodności z negacją (2) wymusza $\alpha = 1$.

Praca jest zorganizowana następująco. Rozdział 2 przypomina niezbędne pojęcia dotyczące logiki Łukasiewicza i standardowej algebry MV oraz formułuje odpowiednie równania funkcyjne. Rozdział 3 zawiera wyniki główne wraz z pełnymi dowodami. W rozdziale 4 dyskutujemy konsekwencje otrzymanych rezultatów, wiążemy je z twierdzeniem McNaughtona i sygnalizujemy możliwe uogólnienia. Rozdział 5 podsumowuje pracę.

2 Podstawowe pojęcia

2.1 Logika Łukasiewicza i standardowa algebra MV

Język nieskończonowartościowego rachunku zdań Łukasiewicza L_∞ składa się z przeliczalnego zbioru zmiennych zdaniowych, dwuargumentowego spójnika $\to$ (implikacji) oraz stałej $\overline{0}$ (fałsz). Pozostałe spójniki są skrótami:

$$\neg\varphi := \varphi \to \overline{0}, \qquad \varphi \oplus \psi := \neg\varphi \to \psi, \qquad \varphi \odot \psi := \neg(\neg\varphi \oplus \neg\psi).$$

W standardowej semantyce wartości logiczne pochodzą z odcinka $[0,1]$, a funkcja prawdy implikacji dana jest wzorem

$$x \to y = \min(1, 1 - x + y).$$

W konsekwencji pochodne spójniki interpretuje się jako

$$\neg x = 1 - x, \quad x \oplus y = \min(1, x + y), \quad x \odot y = \max(0, x + y - 1).$$

Algebrę $([0,1], \oplus, \neg, 0)$ nazywamy *standardową algebrą MV* [1].

2.2 Równania funkcyjne na odcinku jednostkowym

Interesują nas funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$ spełniające:

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) \qquad (\forall x, y \in [0,1]), \tag{E1}$$

$$f(\neg x) = \neg f(x) \qquad (\forall x \in [0,1]). \tag{E2}$$

Funkcję spełniającą (E1) nazywamy *addytywną* względem $\oplus$, a spełniającą oba równania — *endomorfizmem* standardowej algebry MV. Rozważamy również równanie dla silnej koniunkcji:

$$f(x \odot y) = f(x) \odot f(y) \qquad (\forall x, y \in [0,1]). \tag{E3}$$

Przypomnijmy, że $\oplus$ jest przemienne, łączne, a elementem neutralnym jest 0. Ponadto $\neg$ jest inwolucją, a $x \oplus y = 1$ dla $x + y \geq 1$. Zbiór liczb naturalnych z zerem oznaczamy przez $\mathbb{N}$.

3 Wyniki główne

3.1 Rozwiązanie równania addytywnego $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$

Lemat 3.1. *Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie ciągła i spełnia* (E1)*. Wówczas albo $f(0) = 0$, albo $f(x) = 1$ dla wszystkich x.*

Dowód. Kładąc $x = y = 0$ w (E1), otrzymujemy $f(0) = f(0) \oplus f(0) = \min(1, 2f(0))$. Jeśli $f(0) > 0$, to $2f(0) > f(0)$, więc równość może zajść tylko wtedy, gdy $f(0) = 1$. Jeśli zatem $f(0) = 1$, to dla dowolnego x:

$$f(x) = f(x \oplus 0) = f(x) \oplus f(0) = f(x) \oplus 1 = \min(1, f(x) + 1) = 1.$$

□

W dalszej części, o ile nie zaznaczono inaczej, rozpatrujemy przypadek $f(0) = 0$.

Lemat 3.2. *Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ spełnia* (E1) *oraz $f(0) = 0$. Wówczas dla każdego $x \in [0,1]$ i $n \in \mathbb{N}$ takich, że $nx \leq 1$, zachodzi*

$$f(nx) = \min(1,\, nf(x)).$$

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 0$ teza jest prawdziwa. Załóżmy, że wzór zachodzi dla pewnego n i niech $(n+1)x \leq 1$. Wtedy $nx \leq 1$ i z założenia indukcyjnego $f(nx) = \min(1, nf(x))$. Korzystając z (E1),

$$f((n+1)x) = f(nx \oplus x) = f(nx) \oplus f(x) = \min(1, nf(x)) \oplus f(x).$$

Ponieważ $\min(1, nf(x)) \leq 1$, to ostatnie wyrażenie równa się $\min(1, nf(x) + f(x)) = \min(1, (n+1)f(x))$, co kończy krok indukcyjny. □

Lemat 3.3. *Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie ciągła i spełnia* (E1) *z $f(0) = 0$. Wówczas istnieje stała $\alpha \geq 0$ taka, że*

$$f(x) = \min(1, \alpha x) \qquad \textit{dla wszystkich } x \in [0,1].$$

Dowód. Ponieważ $f(0) = 0$ i f jest ciągła, istnieje $\epsilon > 0$ taka, że $f(x) < 1/2$ dla $x \in [0, \epsilon]$. Ustalmy x, y takie, że $x, y, x + y \in [0, \epsilon]$. Wtedy $f(x) + f(y) < 1$, więc

$$f(x+y) = f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) = \min(1, f(x) + f(y)) = f(x) + f(y).$$

Zatem f spełnia równanie Cauchy'ego na przedziale $[0, \epsilon]$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla $x, y, x + y \leq \epsilon$. Ponieważ f jest ciągła, standardowe twierdzenie o równaniu Cauchy'ego daje $f(x) = \alpha x$ dla $x \in [0, \epsilon]$ i pewnej stałej $\alpha \geq 0$.

Weźmy teraz dowolny $x \in [0,1]$. Wybierzmy $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $x/n \leq \epsilon$. Z Lematu 3.2 i udowodnionej przed chwilą liniowości na małych liczbach:

$$f(x) = f\Big(n \cdot \frac{x}{n}\Big) = \min\big(1,\, nf(x/n)\big) = \min\big(1,\, n \cdot \alpha\tfrac{x}{n}\big) = \min(1, \alpha x).$$

□

Stwierdzenie 3.4. *Ciągła funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$ spełnia* (E1) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) \equiv 1 \qquad \textit{lub} \qquad f(x) = \min(1, \alpha x) \textit{ dla pewnej stałej } \alpha \in \{0\} \cup [1, \infty).$$

Dowód. **Konieczność.** Z Lematu 3.1 wynika, że jeśli $f(0) = 1$, to $f \equiv 1$. Załóżmy teraz, że $f(0) = 0$. Z Lematu 3.3 wiemy, że istnieje $\alpha \geq 0$, dla którego $f(x) = \min(1, \alpha x)$ przy każdym $x \in [0,1]$. Pozostaje sprawdzić, jakie wartości może przyjmować α.

Kładziemy $x = y = 1$ w równaniu (E1) i pamiętamy, że $1 \oplus 1 = 1$:

$$f(1) = f(1 \oplus 1) = f(1) \oplus f(1) = \min(1,\, 2f(1)).$$

Oznaczmy $c = f(1) = \min(1, \alpha)$.

Jeśli $c = 0$, to $\min(1, \alpha) = 0$, stąd $\alpha = 0$ i $f \equiv 0$. Jeśli $c \in (0,1)$, to z równości $c = \min(1, 2c)$ mamy dwa podprzypadki:

- $2c \leq 1$: wówczas $\min(1, 2c) = 2c$, więc $c = 2c$, czyli $c = 0$ – sprzeczność.

- $2c > 1$: wówczas $\min(1, 2c) = 1$, więc $c = 1$ – sprzeczność.

Zatem c nie może leżeć ściśle między 0 a 1. Jedyną pozostałą możliwością jest $c = 1$, a ponieważ $c = \min(1, \alpha)$, warunek $c = 1$ jest równoważny nierówności $\alpha \geq 1$.

Ostatecznie dopuszczalne są wyłącznie:

- $f \equiv 1$ (gdy $f(0) = 1$),
- $f(x) = \min(1, \alpha x)$ z $\alpha = 0$, czyli $f \equiv 0$,
- $f(x) = \min(1, \alpha x)$ z $\alpha \geq 1$.

Dostateczność. Funkcja stała $f \equiv 1$ spełnia (E1), bo $1 \oplus 1 = 1$. Funkcja stała $f \equiv 0$ również, bo $0 \oplus 0 = 0$.

Weźmy teraz $\alpha \geq 1$ i połóżmy $f(x) = \min(1, \alpha x)$. Dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$ oznaczmy $S = x + y$. Lewa strona równania (E1):

$$L = f(x \oplus y) = f(\min(1, S)) = \min(1, \alpha \min(1, S)).$$

Prawa strona:

$$R = f(x) \oplus f(y) = \min(1,\ \min(1, \alpha x) + \min(1, \alpha y)).$$

Rozważymy trzy przypadki ze względu na wartość S.

1. $S \leq 1$. Wtedy $\min(1, S) = S$, więc $L = \min(1, \alpha S)$. Prawą stronę badamy w zależności od αx oraz αy:
   - Jeśli $\alpha x \leq 1$ oraz $\alpha y \leq 1$, to $R = \min(1,\ \alpha x + \alpha y) = \min(1, \alpha S) = L$.
   - Jeśli $\alpha x > 1$, to $\min(1, \alpha x) = 1$ oraz $R = \min(1,\ 1 + \min(1, \alpha y)) = 1$. Ponieważ $\alpha x > 1$, to $\alpha S \geq \alpha x > 1$, skąd $L = \min(1, \alpha S) = 1 = R$. Przypadek $\alpha y > 1$ jest analogiczny.
2. $S > 1$ oraz $\alpha S \leq 1$. Ponieważ $\alpha \geq 1$, nierówność $\alpha S \leq 1$ może zajść tylko wtedy, gdy $1 < S \leq 1/\alpha$. Wówczas $L = \min(1, \alpha \cdot 1) = \min(1, \alpha) = 1$ (bo $\alpha \geq 1$). Z drugiej strony $\alpha x \leq \alpha \cdot 1 = \alpha$, ale przede wszystkim $\alpha x \leq \alpha S \leq 1$, więc $\min(1, \alpha x) = \alpha x$. Podobnie $\min(1, \alpha y) = \alpha y$. Stąd $R = \min(1,\ \alpha x + \alpha y) = \min(1, \alpha S)$. Lecz $\alpha S \leq 1$, więc $R = \alpha S$. Z warunku $S > 1$ i $\alpha \geq 1$ mamy jednak $\alpha S \geq \alpha \geq 1$, co razem z $\alpha S \leq 1$ daje $\alpha S = 1$ i w konsekwencji $\alpha = 1$, $S = 1$, co przeczy $S > 1$. Zatem przypadek $S > 1$ i $\alpha S \leq 1$ przy $\alpha \geq 1$ faktycznie nigdy nie występuje.[1] Można więc pominąć tę sytuację jako niemożliwą.
3. $S > 1$ oraz $\alpha S > 1$. Wtedy $L = \min(1, \alpha \cdot 1) = \min(1, \alpha) = 1$. Prawą stronę szacujemy następująco: $\min(1, \alpha x) + \min(1, \alpha y) \geq \min(1, \alpha x + \alpha y)$? Lepiej bezpośrednio: ponieważ $\alpha \geq 1$ i $x + y = S > 1$, to $\alpha x + \alpha y = \alpha S > 1$. Niezależnie od tego, czy składniki $\min(1, \alpha x)$, $\min(1, \alpha y)$ są mniejsze od 1 czy równe 1, ich suma wynosi co najmniej $\min(1, \alpha x) + \min(1, \alpha y)$. Jeśli oba są ≤ 1, to suma $= \alpha S > 1$, więc $R = \min(1, \alpha S) = 1$. Jeśli którykolwiek składnik jest równy 1, to suma przekracza 1, więc $R = 1$. W każdej sytuacji $R = 1$, zatem $L = R$.

Pokazaliśmy, że dla każdej pary x, y zachodzi $L = R$, więc funkcja $f(x) = \min(1, \alpha x)$ istotnie spełnia (E1). □

[1] Gdyby ktoś rozważał α ujemne (czego nie robimy), analiza byłaby inna.

3.2 Uwzględnienie negacji – ciągłe endomorfizmy

Twierdzenie 3.5. *Jedyną ciągłą funkcją $f : [0,1] \to [0,1]$ spełniającą jednocześnie* (E1) *i* (E2) *jest funkcja identycznościowa $f(x) = x$.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.4 każda ciągła funkcja spełniająca (E1) jest albo stałą 1, albo postaci $f(x) = \min(1, \alpha x)$ ($\alpha \geq 0$). Stała 1 nie spełnia (E2) (bo $f(\neg x) = 1 \neq 0 = \neg f(x)$). Pozostają funkcje $f(x) = \min(1, \alpha x)$. Podstawiamy do (E2):

$$f(\neg x) = \min(1, \alpha(1-x)), \qquad \neg f(x) = 1 - \min(1, \alpha x).$$

Rozważmy $x = 1/2$. Wtedy $f(\neg 1/2) = f(1/2) = \min(1, \alpha/2)$, a $\neg f(1/2) = 1 - \min(1, \alpha/2)$. Równość wymaga $\min(1, \alpha/2) = 1 - \min(1, \alpha/2)$, stąd $\min(1, \alpha/2) = 1/2$. Zatem $\alpha/2 \geq 1/2$ (bo min=1/2) i jednocześnie $\alpha/2 \leq 1$ (automatycznie). Dostajemy $\alpha \geq 1$ oraz $\alpha/2 \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq 2$. Weźmy teraz $x = 1/4$.

$$f(3/4) = \min(1, 3\alpha/4), \quad \neg f(1/4) = 1 - \min(1, \alpha/4).$$

Dla $\alpha \in [1,2]$ mamy $\min(1, \alpha/4) = \alpha/4$ (bo $\alpha/4 \leq 1/2 < 1$), a $\min(1, 3\alpha/4)$ jest równe $3\alpha/4$ gdy $3\alpha/4 \leq 1$, czyli $\alpha \leq 4/3$; dla $\alpha > 4/3$ min daje 1. Sprawdzamy oba przypadki.

- Dla $\alpha \leq 4/3$: równanie $3\alpha/4 = 1 - \alpha/4$ prowadzi do $\alpha = 1$.
- Dla $\alpha \in (4/3, 2]$: lewa strona to 1, prawa $1 - \alpha/4 < 1$, sprzeczność.

Zatem jedyną możliwością jest $\alpha = 1$, czyli $f(x) = \min(1, x) = x$. □

Wniosek 3.6. *Standardowa algebra MV* $\mathrm{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0)$ *nie posiada nietrywialnych ciągłych endomorfizmów. W szczególności jej grupa ciągłych automorfizmów jest trywialna.*

3.3 Funkcje komutujące z silną koniunkcją

Silna koniunkcja $\odot$ dana jest wzorem $x \odot y = \max(0, x + y - 1)$. Jest ona dualna do $\oplus$ względem negacji: $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$.

Twierdzenie 3.7. *Ciągła funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$ spełnia* (E3)*, $f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest identycznością, stałą zerową lub stałą jedynkową.*

Dowód. Stałe 0 i 1 oczywiście spełniają (E3). Załóżmy, że f jest ciągła, spełnia (E3) i nie jest stała. Pokażemy, że $f(x) = x$.

Podstawiamy $y = 1$ do (E3) (pamiętając $x \odot 1 = x$):

$$f(x) = f(x \odot 1) = f(x) \odot f(1) \qquad (\forall x).$$

Zatem $f(1)$ jest jedynką dla $\odot$ na obrazie f. Ponieważ obraz f zawiera liczby dodatnie (funkcja nie jest stała), jedynym elementem $c \in [0,1]$ spełniającym $a \odot c = a$ dla wszystkich $a > 0$ jest $c = 1$ (dla $c < 1$ mielibyśmy dla małych a: $a \odot c = \max(0, a + c - 1) = 0 \neq a$). Stąd $f(1) = 1$.

Podobnie, kładąc $y = 0$ ($x \odot 0 = 0$):

$$f(0) = f(x \odot 0) = f(x) \odot f(0).$$

Gdyby $f(0) = d > 0$, to dla wartości $a = f(x)$ dostajemy $a \odot d = d$. Dla $d \in (0,1)$ i $a < 1 - d$ mamy $a \odot d = 0 \neq d$, co przeczy równości (obraz f zawiera przedział, więc znajdziemy takie a). Zatem $f(0) = 0$.

Mamy więc $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Wykorzystamy dualność. Zdefiniujmy $g(x) = \neg f(\neg x) = 1 - f(1 - x)$. Funkcja g jest ciągła. Pokażemy, że g spełnia (E1):

$$\begin{aligned} g(x \oplus y) &= 1 - f(1 - (x \oplus y)) = 1 - f(\neg(x \oplus y)) \\ &= 1 - f(\neg x \odot \neg y) \\ &= 1 - \big(f(\neg x) \odot f(\neg y)\big). \end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości $1 - (a \odot b) = \neg(a \odot b) = \neg\neg(\neg a \oplus \neg b) = \neg a \oplus \neg b$, otrzymujemy

$$g(x \oplus y) = \neg f(\neg x) \oplus \neg f(\neg y) = g(x) \oplus g(y).$$

Zatem g jest ciągłym rozwiązaniem (E1). Ponieważ $g(0) = 1 - f(1) = 0$ oraz $g(1) = 1 - f(0) = 1$, to na mocy Stwierdzenia 3.4 jedyną taką funkcją jest identyczność: $g(x) = x$. Stąd $1 - f(1 - x) = x$, czyli $f(1 - x) = 1 - x$, a więc $f(x) = x$ dla wszystkich x. □

4 Dyskusja i powiązania

Otrzymane wyniki pokazują niezwykłą sztywność standardowej algebry MV: brak w niej nietrywialnych ciągłych endomorfizmów. Własność ta ostro kontrastuje z wieloma znanymi strukturami algebraicznymi – np. ciało liczb rzeczywistych ma wiele ciągłych endomorfizmów (skalowania), a algebra Boole'a $\{0,1\}$ – nietrywialny automorfizm (negację). Tutaj struktura jest tak silnie ograniczona, że tylko identyczność jednocześnie zachowuje obciętą sumę i inwolucję.

4.1 Związek z twierdzeniem McNaughtona

Twierdzenie McNaughtona [3] charakteryzuje funkcje $f : [0,1]^n \to [0,1]$ definiowalne w logice Łukasiewicza – są to dokładnie ciągłe funkcje kawałkami liniowe o współczynnikach całkowitych. W przypadku jednej zmiennej są to zatem funkcje o całkowitych nachyleniach odcinków liniowych. Nasz rezultat uzupełnia ten obraz: spośród tych funkcji jedyną, która jest endomorfizmem (tzn. komutuje z podstawowymi spójnikami), jest funkcja identycznościowa. Można więc powiedzieć, że oba podejścia – definiowalność i niezmienniczość – spotykają się właśnie w trywialnym przypadku.

4.2 Inne kierunki badań

Naturalnym pytaniem jest, co się stanie, gdy zrezygnujemy z założenia ciągłości. Równanie (E1) przypomina równanie Cauchy'ego na ograniczonej dziedzinie. Nieliniowe rozwiązania (korzystające z bazy Hamela) mogą istnieć, ale ograniczenie wartości do $[0,1]$ oraz monotoniczność mogą narzucić dodatkowe warunki. Pełny opis dowolnych (niekoniecznie ciągłych) endomorfizmów MV pozostaje problemem otwartym.

Warto również rozszerzyć analizę na funkcje wielu zmiennych oraz na pozostałe podstawowe normy trójkątne. Dla logiki Gödla, gdzie $x \oplus_G y = \max(x,y)$, równanie $f(\max(x,y)) = \max(f(x), f(y))$ charakteryzuje funkcje niemalejące, a dla logiki produktowej sytuacja jest bardziej złożona. Każdy z tych przypadków daje pole do samodzielnych badań.

4.3 Perspektywa algebraiczna

Z punktu widzenia algebry uniwersalnej, standardowa algebra MV jest algebrą prostą, która generuje całą rozmaitość algebr MV. Fakt, że jej ciągły monoid endomorfizmów jest trywialny, podkreśla pierwotność tej struktury. Interesujące byłoby porównanie z monoidem endomorfizmów w kategorii wszystkich funkcji (bez ciągłości), gdzie spodziewamy się znacznie bogatszej rodziny.

4.4 Znaczenie ciągłości

W dowodzie silnie wykorzystaliśmy założenie ciągłości – pozwoliło ono wyprowadzić postać $\min(1, \alpha x)$ z równania (E1). Bez tego założenia sytuacja staje się znacznie bogatsza. Równanie (E1) jest w istocie zbliżone do równania Cauchy'ego na ograniczonym obszarze, a przy założeniu aksjomatu wyboru istnieją niemonotoniczne, nieciągłe rozwiązania otrzymane za pomocą bazy Hamela. Przykładowo: niech $\mathcal{B}$ będzie bazą Hamela ciała $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Ustalmy $b_0 \in \mathcal{B}$ i określmy $h(x) = \lambda$, gdzie $x = \lambda b_0 + \sum_{b \neq b_0} \lambda_b b$ jest jednoznacznym rozwinięciem. Wówczas $h(x+y) = h(x)+h(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, ale h nie jest ciągła. Ograniczając h do $[0, 1]$ i odpowiednio obcinając (np. $f(x) = \min(1, |h(x)|)$), otrzymujemy nieciągłe, addytywne rozwiązanie (E1), które nie jest postaci $\min(1, \alpha x)$. Pełna klasyfikacja dowolnych (niekoniecznie ciągłych) endomorfizmów standardowej algebry MV pozostaje zatem interesującym problemem otwartym, pokazującym głęboką różnicę między przypadkiem ciągłym a dowolnym.

5 Podsumowanie

W pracy przeprowadziliśmy pełną klasyfikację ciągłych funkcji $f : [0, 1] \to [0, 1]$, które komutują z działaniami standardowej algebry MV: silną alternatywą $\oplus$ oraz negacją $\neg$. Jedynymi rozwiązaniami są identyczność i dwie funkcje stałe. Ten sam rezultat zachodzi dla silnej koniunkcji $\odot$. Dowody są elementarne, oparte wyłącznie na ciągłości i własnościach liczb rzeczywistych.

Otrzymane wyniki świadczą o wyjątkowej sztywności semantyki logiki Łukasiewicza i wzbogacają wiedzę o definiowalności oraz endomorfizmach w strukturach wielowartościowych. Podejście przez równania funkcyjne oferuje świeże spojrzenie, uzupełniające klasyczne metody algebraiczne i logiczne.

Dalsze prace mogą objąć przypadek bez ciągłości, analizę innych logik normowych czy badanie analogicznych równań dla funkcji wielu zmiennych. Interakcja między równaniami funkcyjnymi a logikami wielowartościowymi wydaje się być żyznym gruntem dla przyszłych badań.

Literatura

[1] Cignoli, R., D'Ottaviano, I.M.L., Mundici, D. (1999). *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*. Kluwer Academic Publishers.

[2] Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers.

[3] McNaughton, R. (1951). A theorem about infinite-valued sentential logic. *Journal of Symbolic Logic*, 16(1), 1–13.

[4] Mundici, D. (2011). *Advanced Łukasiewicz Calculus and MV-algebras*. Springer.

[5] Aczél, J. (1966). *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press.

[6] Kuczma, M. (2009). *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*. Birkhäuser.

[7] Chang, C.C. (1958). Algebraic analysis of many valued logics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88(2), 467–490.