Kolorowalność diagramów węzłów po podziale łuków

Mateusz Gibski

Opiekun: Prof. Tadeusz Krasiński

Spis treści

Wstęp *3*

Rozdział 1 ..... *4*

Wprowadzenie **4**

Kolorowanie Foxa **9**

Rozdział 2 ..... *10*

Lemat 2.1. ..... **13**

Hipoteza 2.2. ..... **15**

Przykład porównawczy z kolorowaniem Foxa **18**

Bibliografia *19*

Wstęp

Teoria węzłów jest działem topologii zajmującym się badaniem własności węzłów i splotów. Jednym z jej podstawowych problemów jest rozróżnianie węzłów oraz ustalanie, kiedy dwa diagramy przedstawiają ten sam węzeł. Problem ten nie jest trywialny, ponieważ dwa równoważne węzły mogą mieć bardzo różne diagramy, a dwa różne węzły mogą na pierwszy rzut oka wyglądać podobnie. Z tego powodu w teorii węzłów wprowadza się niezmienniki, czyli wielkości lub własności zachowywane przy deformacjach, które nie dopuszczają przecinania krzywej.

Szczególnie interesującą klasę stanowią diagramy alternujące. Dla tej klasy znane są między innymi następujące fakty: zredukowane diagramy alternujące są minimalne, a zredukowane diagramy alternujące tego samego węzła są ze sobą związane przez ruchy flype. Dlatego, chcąc badać możliwą niezmienniczość konstrukcji zdefiniowanej na diagramach alternujących, naturalnie należy przeanalizować jej zachowanie względem tego ruchu.

W pracy rozważam konstrukcję związaną z kolorowaniem diagramu po odpowiednim podziale jego łuków. Konstrukcja ta nie prowadzi do niezmiennika dla dowolnych diagramów węzłów. Celem pracy jest zbadanie, czy po ograniczeniu do zredukowanych diagramów alternujących otrzymana wartość może pozostawać niezmienna. W tym celu formułuję hipotezę o niezmienniczości konstrukcji względem ruchu flype oraz przedstawiam częściową analizę tego problemu. Dodatkowo porównuję badaną konstrukcję z klasycznym kolorowaniem Foxa.

Praca składa się z dwóch głównych rozdziałów. W pierwszym przedstawiam podstawowe definicje i pojęcia z teorii węzłów potrzebne w dalszej części pracy. W drugim rozdziale wprowadzam badaną konstrukcję, formułuję związane z nią definicje, pokazuję jej ograniczenia dla dowolnych diagramów oraz przedstawiam hipotezę dotyczącą diagramów alternujących. Na końcu zamieszczam porównanie tej konstrukcji z klasycznym kolorowaniem Foxa.

Rozdział 1

Wprowadzenie

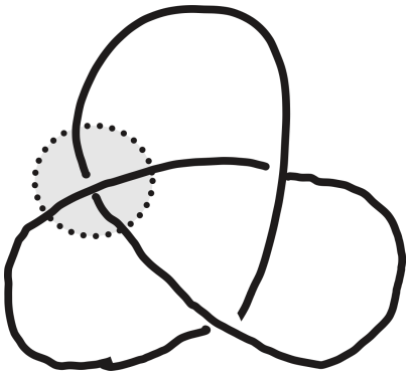
W tym rozdziale przedstawiam podstawowe pojęcia z teorii węzłów potrzebne do zrozumienia dalszej części pracy.

Definicje w tym rozdziale podaję własnymi słowami, opierając się na wskazanych źródłach. Rysunki zamieszczone w pracy są rysunkami pomocniczymi wykonanymi przeze mnie i służą przede wszystkim wyjaśnieniu omawianych pojęć oraz konstrukcji.

Definicja 1.1. Węzłem nazywamy domkniętą krzywą w przestrzeni trójwymiarowej, która nie przecina samej siebie [1, s. 2].

Definicja 1.2. Rzutując węzeł na płaszczyznę, otrzymujemy jego projekcję. Po zaznaczeniu informacji o tym, która gałąź przechodzi górą, otrzymujemy diagram węzła [1, s. 3].

Definicja 1.3. Skrzyżowaniami na diagramie nazywamy punkty, w których przecinają się dwa fragmenty projekcji, wraz z informacją, który z nich przechodzi górą, a który dołem [1, s. 3].



Rysunek 1.1. Skrzyżowanie zaznaczone na przykładzie diagramu węzła trójlistnego.

Definicja 1.4. W skrzyżowaniu diagramu gałąź przechodzącą górą nazywamy overcrossingiem, czyli przejściem górą, a gałąź przechodzącą dołem undercrossingiem, czyli przejściem dołem [10, s. 5].

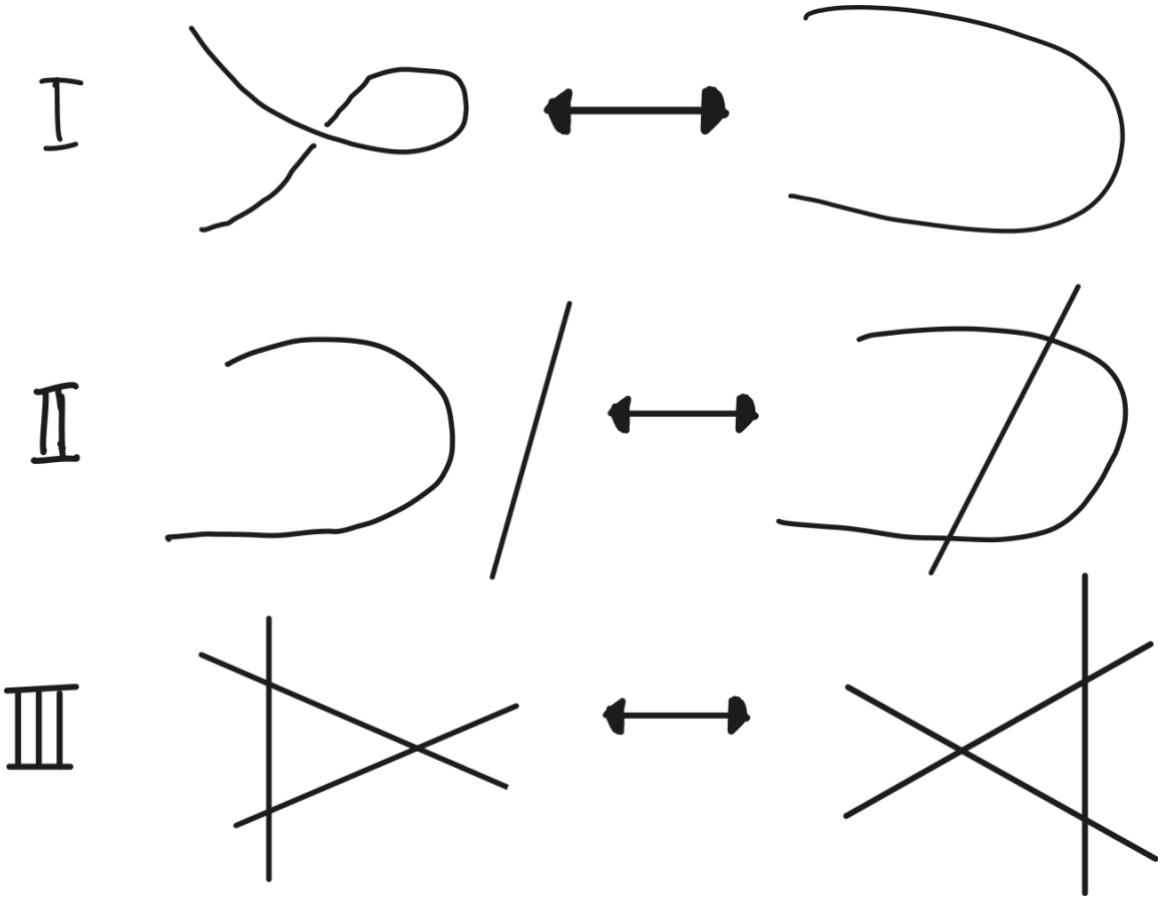
Definicja 1.5. Łukiem diagramu nazywamy fragment diagramu od jednego undercrossingu do następnego, zawierający po drodze jedynie overcrossingi [1, s. 23].

Definicja 1.6. Węzeł jest zorientowany, jeśli wybierzemy jeden z dwóch możliwych kierunków przejścia wzdłuż węzła. Na diagramie zaznaczamy to za pomocą strzałek [1, s. 10].

Definicja 1.7. Diagram D węzła K nazywamy minimalnym, jeśli liczba jego skrzyżowań spełnia $c(D) = c(K)$, gdzie $c(K)$ oznacza crossing number, czyli minimalną liczbę skrzyżowań wśród wszystkich diagramów węzła K [3].

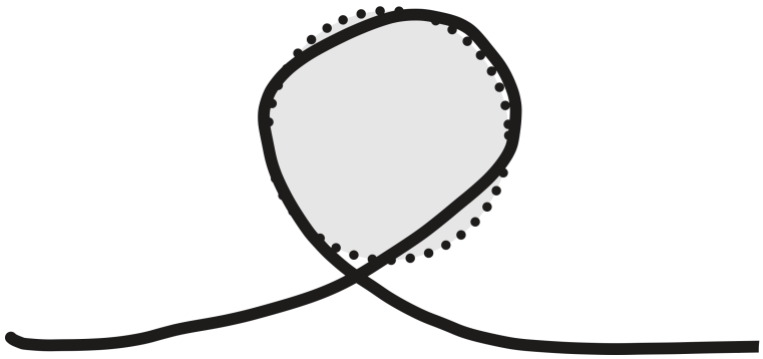
Definicja 1.8. Dwa węzły są równoważne, jeśli jeden można przekształcić w drugi przez ciągłą deformację przestrzeni bez samoprzecięć [1, s. 14].

Twierdzenie 1.1. (Reidemeistera) Dwa diagramy reprezentują równoważne węzły wtedy i tylko wtedy, gdy można przejść od jednego do drugiego skończonym ciągiem ruchów Reidemeistera typu I, II i III [4]. Ruch typu *I* dodaje lub usuwa pojedynczą pętlę, ruch typu *II* dodaje lub usuwa parę sąsiednich skrzyżowań, a ruch typu *III* przesuwa pasmo przez skrzyżowanie bez zmiany liczby skrzyżowań.



Rysunek 1.2. Trzy typy ruchów Reidemeistera.

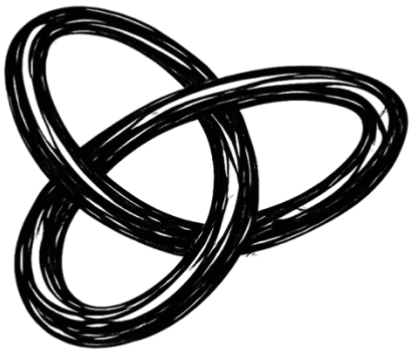
Definicja 1.9. Skrzyżowanie diagramu nazywamy zbędnym (nugatory crossing), jeśli można narysować na płaszczyźnie diagramu okrąg przechodzący przez to skrzyżowanie, który poza tym miejscem nie przecina diagramu. Taki okrąg oddziela fragment diagramu zawierający to skrzyżowanie od reszty diagramu [5].



Rysunek 1.3. Przykład skrzyżowania zbędnego.

Definicja 1.10. Diagram nazywamy zredukowanym (reduced), jeśli nie zawiera skrzyżowań zbędnych [1, s. 68].

Definicja 1.11. Diagram nazywamy alternującym (alternating), jeśli podczas przechodzenia wzdłuż diagramu napotykamy na przemian przejścia górą i przejścia dołem [1, s. 7].



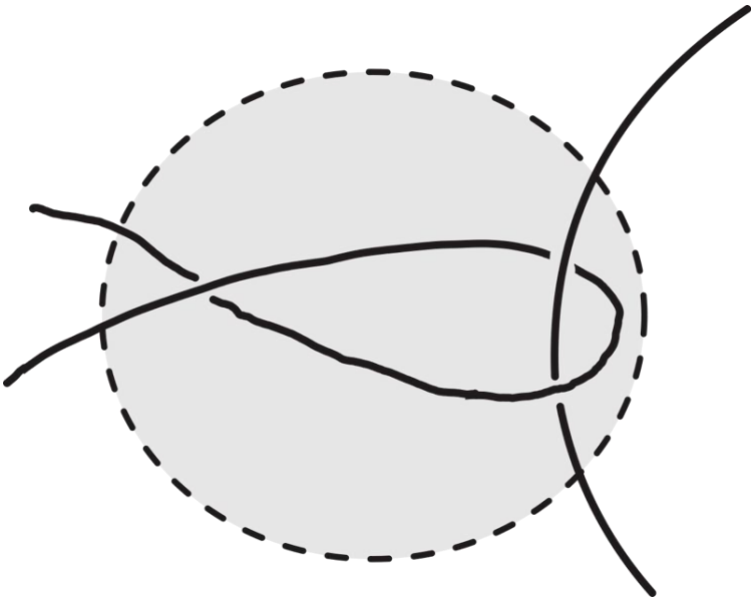
Rysunek 1.4 Przykład diagramu alternującego.

Definicja 1.12. Węzeł nazywamy alternującym, jeśli posiada diagram alternujący.

Twierdzenie 1.2. Jeżeli diagram D jest alternujący i zredukowany oraz reprezentuje węzeł K, to $c(D) = c(K)$ [7].

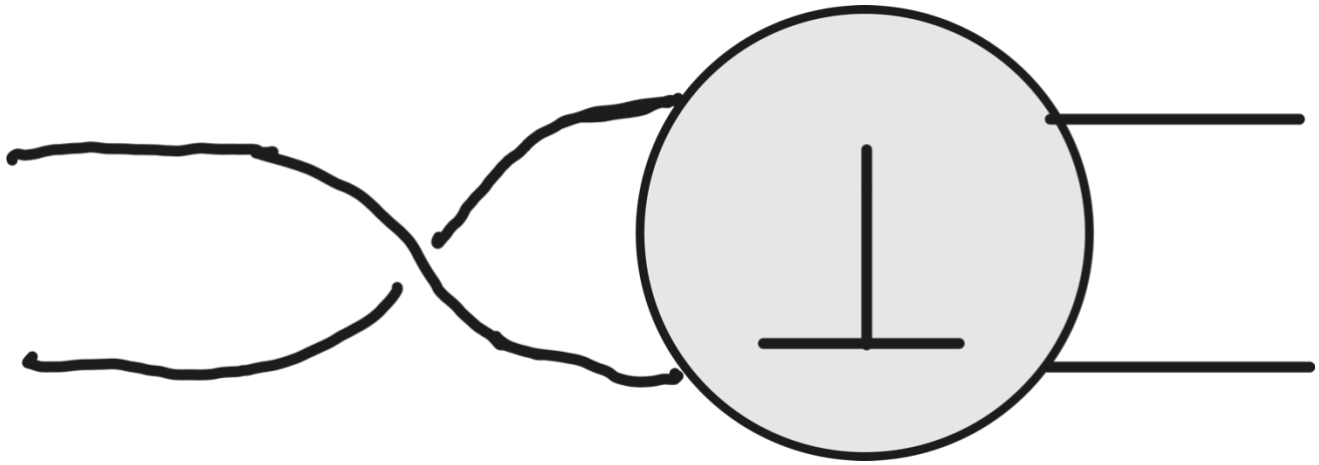
Definicja 1.13. Tanglem nazywamy część węzła zawartą w trójwymiarowej kuli, taką, że brzeg tej kuli przecina węzeł w dokładnie czterech punktach [1, s. 41].

W niniejszej pracy tangle będziemy rozumieć przede wszystkim przez ich diagramy, czyli jako lokalne fragmenty diagramu węzła wyodrębnione od reszty diagramu.

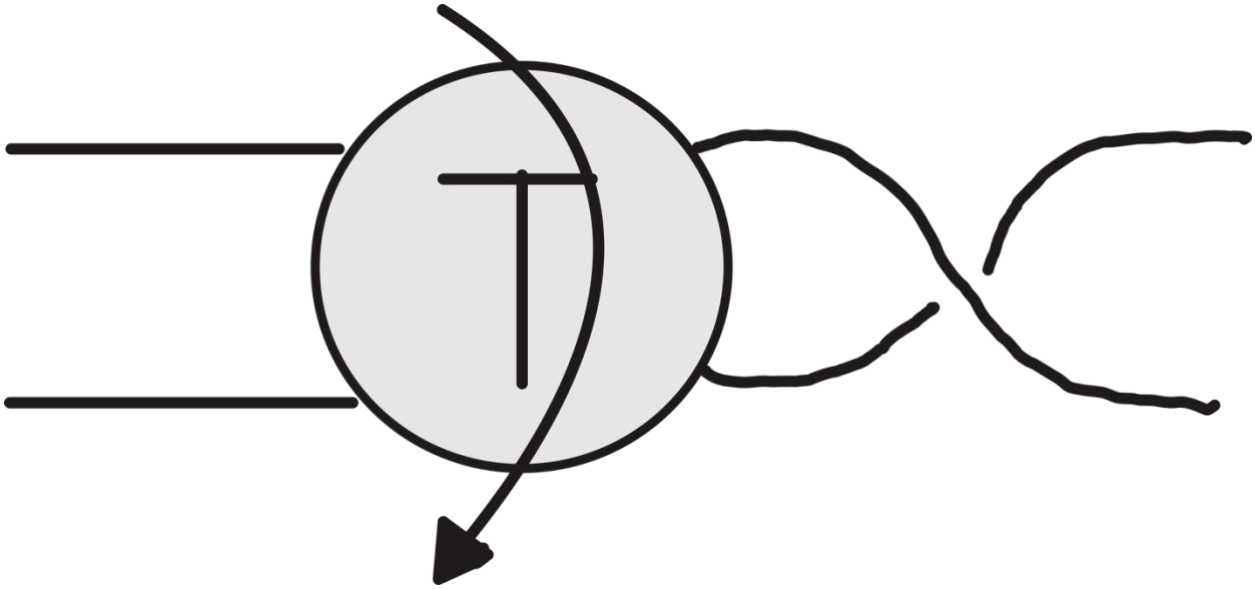


Rysunek 1.5. Przykładowy tangel.

Definicja 1.14. Flype to lokalny ruch na diagramie polegający na obrocie tangla o 180° względem sąsiedniego skrzyżowania. Ruch ten nie zmienia typu reprezentowanego węzła [8]. Tangel T przed wykonaniem flype'u przedstawiono na rysunku 1.6a. Po wykonaniu flype'u tangel zostaje obrócony o 180°, a skrzyżowanie znajdujące się po jednej stronie tangla zostaje zastąpione odpowiadającym mu skrzyżowaniem po drugiej stronie tangla. Sytuację po wykonaniu ruchu pokazuje rysunek 1.6b. W dalszej części pracy istotne będzie właśnie to, jak ten lokalny ruch wpływa na podział łuków i na warunki kolorowania.



Rysunek 1.6a. Fragment diagramu przed wykonaniem flype'u.



Rysunek 1.6b. Fragment diagramu po wykonaniu flype'u.

Definicja 1.15. Mostem (overpass) diagramu D nazywamy fragment diagramu, który przechodzi nad co najmniej jednym skrzyżowaniem i nie przechodzi pod żadnym skrzyżowaniem [1, s. 64].

Rysunek 1.7. Przykład mostu na fragmencie diagramu węzła.

Definicja 1.16. Niezmiennikiem węzła nazywamy funkcję określoną na zbiorze typów węzłów, która przyjmuje tę samą wartość dla węzłów równoważnych. Równoważnie, funkcja określona na diagramach wyznacza niezmiennik węzła, jeżeli jest niezmienna względem ruchów Reidemeistera [3, s. 19].

Kolorowanie Foxa

Klasycznym przykładem kolorowania diagramów węzłów jest kolorowanie Foxa, zwane też trójkolorowaniem [11]. W tej wersji każdemu łukowi diagramu przypisuje się jeden z trzech kolorów, które można oznaczyć liczbami 0, 1, 2.

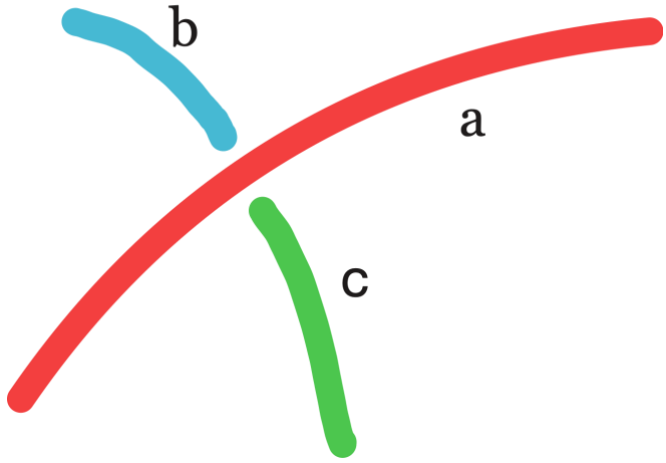
Kolorowanie jest poprawne, jeśli przy każdym skrzyżowaniu spełniony jest warunek

$$2a \equiv b + c \ (mod\ 3),$$

gdzie a oznacza kolor łuku przechodzącego górą, a b i c oznaczają kolory dwóch łuków przechodzących dołem.

Dla kolorów oznaczonych liczbami 0, 1, 2 warunek ten dopuszcza przy skrzyżowaniu tylko dwie sytuacje: albo wszystkie trzy kolory są takie same, albo wszystkie trzy kolory są różne. Kolorowanie, w którym wszystkie łuki mają ten sam kolor, nazywa się trywialnym. Istnienie nietrywialnego trójkolorowania Foxa jest własnością niezmienniczą węzła.

Badana konstrukcja również używa trzech kolorów i warunków lokalnych przy skrzyżowaniach, ale różni się od kolorowania Foxa tym, że kolory nie są przypisywane klasycznym łukom diagramu, lecz segmentom powstałym po dodatkowym podziale łuków.



Rysunek 1.8. Warunek kolorowania Foxa przy jednym skrzyżowaniu.

W tej pracy kolorowanie Foxa pełni rolę punktu odniesienia. W przypadku kolorowania Foxa interesuje nas przede wszystkim to, czy dany diagram posiada nietrywialne trójkolorowanie, a nie dokładna liczba takich kolorowań. Jest to więc własność typu: węzeł jest trójkolorowalny albo nie jest trójkolorowalny.

Rozdział 2

Konstrukcja kolorowania po podziale łuków

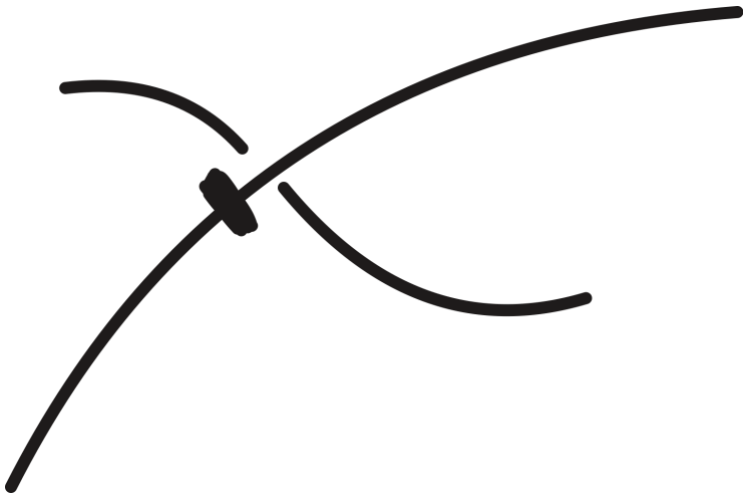
Po wprowadzeniu podstawowych pojęć z teorii węzłów przechodzimy do opisania konstrukcji kolorowania diagramu po dodatkowym podziale jego łuków.

Definicja 2.1. (Podział łuków diagramu) Niech D będzie diagramem węzła K. Wybieramy jedną z dwóch orientacji diagramu D i poruszamy się zgodnie z jej kierunkiem.

Za każdym razem, gdy zgodnie z orientacją dochodzimy do początku mostu, stawiamy kreskę bezpośrednio przed wejściem na ten most. Kreska ta wprowadza dodatkowy punkt podziału na diagramie. Otrzymane w ten sposób części diagramu, rozpatrywane między kolejnymi punktami podziału oraz undercrossingami, nazywamy segmentami.

Otrzymane fragmenty nazywamy segmentami diagramu. Podział zależy od wybranej orientacji, dlatego w dalszej części konstrukcję rozpatrujemy osobno dla obu orientacji diagramu.

Innymi słowy, kreskę stawiamy bezpośrednio przed początkiem fragmentu, który zgodnie z orientacją zaczyna przechodzić górą i nie przechodzi pod żadnym skrzyżowaniem aż do kolejnego undercrossingu.



Rysunek 2.1. Przykład podziału łuku przed wejściem na most.

Definicja 2.2. (Zbiór segmentów i funkcja następnika) Niech X oznacza zbiór wszystkich segmentów otrzymanych z diagramu D po wykonaniu podziału dla ustalonej orientacji. Segmenty numerujemy zgodnie z kierunkiem orientacji:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Indeksowanie jest cykliczne w sensie kolejności przejścia po diagramie: po ostatnim segmencie x_n następuje ponownie pierwszy segmentx_1, czyli $\mathrm{x_{n+1}} = \mathrm{x_1}$.

Definiujemy funkcję następnika:

$$\mathrm{succ}: X \to X, \qquad \mathrm{succ}(x_i) = x_{i+1}.$$

Funkcja ta opisuje przejście od danego segmentu do następnego segmentu zgodnie z orientacją diagramu.

Definicja 2.3. (Kolorowanie segmentów) Kolorowaniem segmentów nazywamy funkcję

$$A: X \to \{0,1,2\}.$$

Kolorowanie A uznajemy za poprawne, jeśli dla każdego skrzyżowania diagramu spełnia następujący warunek: trzy segmenty spotykające się przy tym skrzyżowaniu mają trzy różne kolory.

Jeżeli przy danym skrzyżowaniu spotykają się segmenty x_a, x_b, $x_{c,}$ to warunek ten zapisujemy jako:

$$\{A(x_a), A(x_b), A(x_c)\} = \{0,1,2\}.$$

W dalszej części przez poprawne kolorowanie będziemy rozumieć właśnie funkcję A spełniającą ten warunek przy każdym skrzyżowaniu diagramu.

Definicja 2.4. Niech D będzie diagramem węzła K z wybraną orientacją dodatnią. Przez $I_+(D)$ oznaczamy liczbę poprawnych kolorowań segmentów otrzymanych z tej orientacji.

Analogicznie, przez $I_-(D)$ oznaczamy liczbę poprawnych kolorowań otrzymanych po wyborze orientacji przeciwnej.

Ponieważ podział łuków zależy od orientacji, do diagramu D przypisujemy parę:

$$I_{\text{pair}}(D) = \{I_+(D), I_-(D)\}.$$

Traktujemy ją jako nieuporządkowaną parę wartości, ponieważ wybór, którą orientację nazwiemy dodatnią, jest umowny. Na tym etapie $I_{\text{pair}}(D)$ jest wartością przypisaną diagramowi, a nie udowodnionym niezmiennikiem węzła.

Jeżeli $A: X \to \{0,1,2\}$ jest poprawnym kolorowaniem oraz δ jest permutacją zbioru $\{0,1,2\}$, to funkcja $\delta \circ A$ również jest poprawnym kolorowaniem. Permutacja δ zmienia jedynie nazwy kolorów, a nie układ zależności między segmentami.

Dlatego dwa poprawne kolorowania A i B będziemy uznawać za równoważne, jeśli istnieje permutacja δ zbioru $\{0,1,2\}$ taka, że

$$B = \delta \circ A.$$

Wartości $I_+(D)$ oraz $I_-(D)$ oznaczają liczbę klas równoważności poprawnych kolorowań względem tej relacji. Innymi słowy, nie liczymy osobno kolorowań różniących się wyłącznie zamianą nazw kolorów. Ponieważ zbiór $\{0,1,2\}$ ma $3! = 6$ permutacji, jedna

struktura kolorowania odpowiada sześciu przypisaniom kolorów różniącym się tylko ich nazwami.

Lemat 2.1.

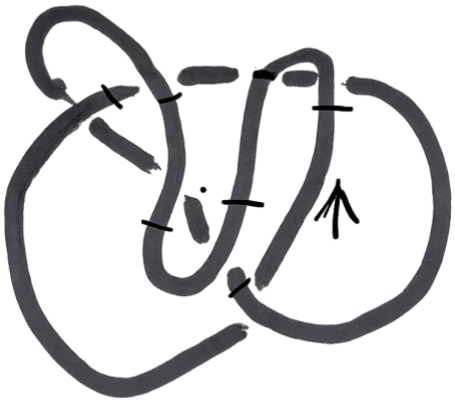
Konstrukcja nie jest w ogólności niezmiennikiem dla klasy wszystkich diagramów węzłów.

Uzasadnienie.

Poniższy argument pokazuje mechanizm, przez który zmiana diagramu reprezentującego ten sam węzeł może zmienić układ segmentów i warunków kolorowania.

Rozważmy diagram D pewnego węzła oraz diagram D' otrzymany z D przez dodanie zbędnego skrzyżowania, czyli nugatory crossing. Taka operacja nie zmienia typu reprezentowanego węzła, ponieważ odpowiada lokalnemu ruchowi Reidemeistera typu I.

[Rysunek 2.2a. Fragment diagramu D przed dodaniem zbędnego skrzyżowania.]



[Rysunek 2.2b. Fragment diagramu D' po dodaniu zbędnego skrzyżowania.]

W badanej konstrukcji podział łuków zależy od miejsc, w których zgodnie z orientacją diagramu wchodzimy na most. Dodanie zbędnego skrzyżowania może utworzyć dodatkowe przejście górą, a więc także dodatkową kreskę podziału. Wtedy w diagramie D' pojawia się dodatkowy segment, którego nie było w diagramie D.

Z tego powodu układ warunków kolorowania dla D' nie musi być taki sam jak układ warunków kolorowania dla D. W konsekwencji liczba poprawnych kolorowań może zależeć od wybranego diagramu, a nie tylko od typu węzła.

Zatem bez dodatkowego ograniczenia klasy diagramów badana konstrukcja nie może być traktowana jako niezmiennik węzła.

Hipoteza 2.2.

Niech D_1 i D_2 będą zredukowanymi alternującymi diagramami tego samego węzła. Przypuszczam, że wartości otrzymane z badanej konstrukcji są równe, czyli

$$I_{\text{pair}}(D_1) = I_{\text{pair}}(D_2).$$

Innymi słowy, badana konstrukcja może wyznaczać niezmiennik w klasie zredukowanych diagramów alternujących.

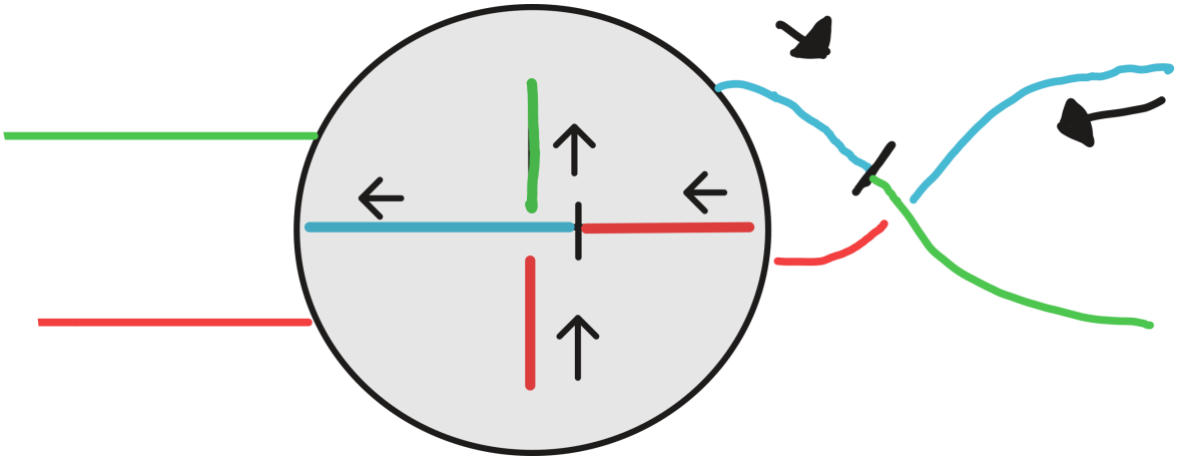
Motywacja hipotezy

Z Lematu 2.1 wynika, że badana konstrukcja nie jest niezmiennikiem dla klasy wszystkich diagramów węzłów. Naturalne jest więc ograniczenie uwagi do zredukowanych diagramów alternujących. Dla takich diagramów kluczowe znaczenie ma twierdzenie o flype'ach: zredukowane diagramy alternujące tego samego węzła są połączone skończonym ciągiem ruchów flype [12], [13].

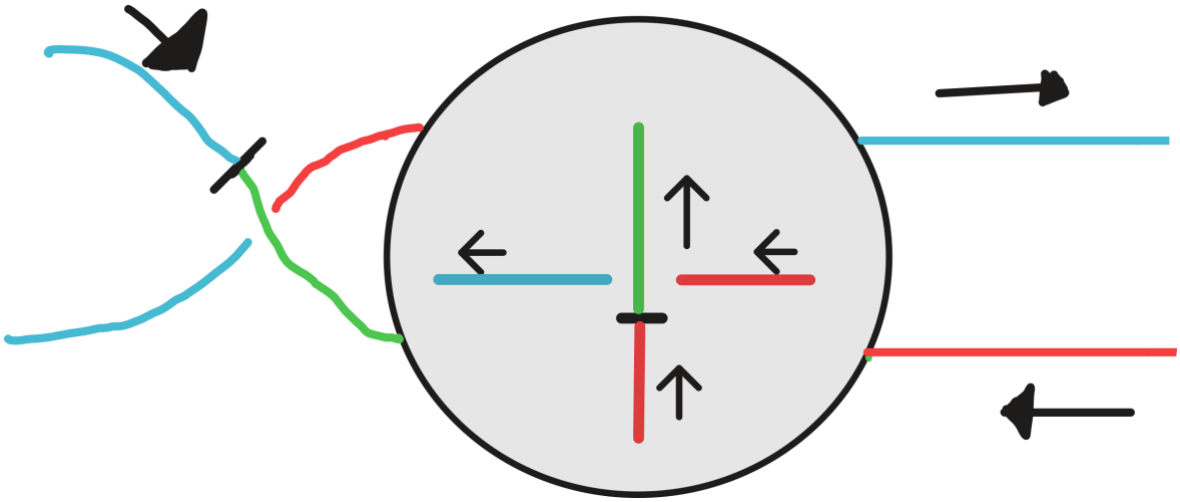
Dlatego, aby uzasadnić Hipotezę 2.2, wystarczyłoby pokazać, że wartość $I_{\text{pair}}(D)$ nie zmienia się przy pojedynczym ruchu flype.

Analiza lokalna ruchu flype

Rysunek 2.3a przedstawia lokalny fragment diagramu przed wykonaniem ruchu flype, a rysunek 2.3b przedstawia odpowiadający mu fragment po wykonaniu tego ruchu. Nie zakładamy szczególnej postaci połączeń segmentów wychodzących z tangla z resztą diagramu.



Rysunek 2.3a. Lokalny fragment diagramu przed wykonaniem ruchu flype.



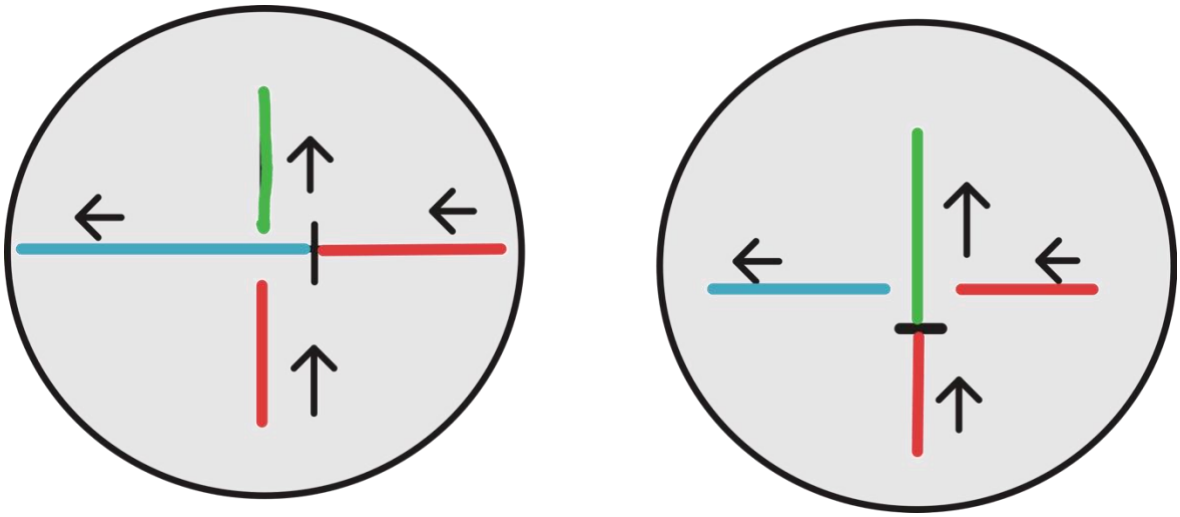
Rysunek 2.3b. Lokalny fragment diagramu po wykonaniu ruchu flype

W rozpatrywanym fragmencie ruch flype zmienia położenie lokalnego skrzyżowania względem tangla. Z punktu widzenia badanej konstrukcji istotne jest nie samo geometryczne położenie fragmentów łuku, lecz to, czy po ruchu zachowany zostaje porządek segmentów oraz relacje kolorowania przy odpowiadających sobie skrzyżowaniach.

Kreska rozdzielająca jest wprowadzana przed wejściem na most. Dlatego przy analizie flype'u należy śledzić, które fragmenty diagramu stają się przejściami górą, a które przejściami dołem. Sama długość geometryczna segmentów nie ma znaczenia; znaczenie ma jedynie ich kolejność zgodna z orientacją oraz warunki narzucone przy skrzyżowaniach.

Na rysunkach 2.3a i 2.3b widać, że lokalny porządek kolorów segmentów może zostać przeniesiony z fragmentu przed flype'em na fragment po flype'ie. Sugeruje to istnienie naturalnego przyporządkowania między kolorowaniami lokalnymi przed i po wykonaniu ruchu.

Rysunek 2.4.pokazują ten sam mechanizm w uproszczonym lokalnym układzie. Obrót rysunku pozwala otrzymać pozostałe ustawienia orientacji brzegowych. Nie stanowi to jeszcze pełnego dowodu hipotezy, ale wskazuje, że problem można sprowadzić do formalnego sprawdzenia skończonej liczby lokalnych konfiguracji.



Rysunek 2.4. Uproszczony układ segmentów przed i po ruchu flype.

Osobnej uwagi wymaga segment związany ze skrzyżowaniem przesuwanym przez flype. Po jednej stronie tangla lokalne skrzyżowanie znika, a odpowiadające mu skrzyżowanie pojawia się po drugiej stronie. Wraz z tą zmianą może przesunąć się także miejsce wstawienia kreski rozdzielającej.

W szczególności dwa kolejne segmenty występujące przy skrzyżowaniu, które po flypie znika, mogą w nowym diagramie odpowiadać jednemu segmentowi. Nie oznacza to jednak konieczności utożsamienia kolorów obu dawnych segmentów. Nowy segment dziedziczy kolor pierwszego z nich, zgodnie z kolejnością przechodzenia po diagramie i funkcją następnika. Formalnie, jeśli przed flype'em występuje para segmentów x_i oraz x_{i+1}, a po flypie odpowiada jej jeden segment y_i, to przy przeniesieniu kolorowania przyjmujemy

$$c_2(y_i) = c_1(x_i).$$

Po drugiej stronie tangla zachodzi sytuacja odwrotna: pojawia się odpowiadające skrzyżowanie, a wraz z nim nowa kreska podziału i nowy segment. Także tutaj kolor jest przenoszony zgodnie z kolejnością następnika, czyli od pierwszego segmentu w odpowiedniej parze.

Trudność pełnego dowodu nie polega więc na samym obrocie tangla ani na lokalnym znikaniu i pojawianiu się skrzyżowania. Brakującym elementem jest formalny opis połączeń segmentów przy granicy tangla, czyli w miejscach, w których łuki diagramu wchodzą do tangla i wychodzą z niego. To właśnie tam trzeba sprawdzić, czy relacje kolorowania zachowują się zgodnie z przyporządkowaniem segmentów przed i po wykonaniu flype'u.

Powyższa analiza nie jest jeszcze pełnym dowodem Hipotezy 2.2. Pokazuje jednak, jaki warunek należałoby formalnie udowodnić: dla każdego ruchu flype trzeba opisać przyporządkowanie między segmentami przed i po ruchu, które zachowuje relacje kolorowania przy wszystkich skrzyżowaniach. Spełnienie tego warunku dawałoby bijekcję między zbiorami poprawnych kolorowań, a więc zachowanie wartości $I_{\text{pair}}(D)$.

Przykład porównawczy z kolorowaniem Foxa

Na końcu pracy przedstawiam przykład obliczeniowy dla dwóch węzłów: 6_2 oraz 7_2. Diagramy tych węzłów zaczerpnąłem z Knot Atlas [14]. Celem przykładu jest pokazanie, jak badana konstrukcja zachowuje się na konkretnych diagramach oraz porównanie otrzymanych wyników z klasycznym punktem odniesienia, jakim jest kolorowanie Foxa.

Dla każdego z diagramów wykonałem podział łuków zgodnie z Definicją 2.1, osobno dla obu orientacji. Następnie wypisałem segmenty w kolejności wyznaczonej przez orientację oraz sprawdziłem przypisania kolorów spełniające warunek z Definicji 2.3. Rysunki 6 i 7 przedstawiają diagramy użyte do obliczeń oraz oznaczenia segmentów.

Dla węzła 6_2 otrzymałem jedno poprawne kolorowanie dla orientacji dodatniej:

$$2, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 0$$

oraz jedno poprawne kolorowanie dla orientacji przeciwnej:

$$0, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 2.$$

Dla węzła 7_2 nie otrzymałem żadnego poprawnego kolorowania ani dla orientacji dodatniej, ani dla orientacji przeciwnej. Otrzymujemy więc:

$$I_{\text{pair}}(6_2) = \{1,1\}, \qquad I_{\text{pair}}(7_2) = \{0,0\}.$$

Dla porównania, w użytym przeze mnie porównaniu opartym na wyznaczniku macierzy Foxa oba węzły zachowują się tak samo: w obu przypadkach otrzymujemy wartość 11. W tym sensie to konkretne porównanie Foxa nie rozróżnia węzłów 6_2 i 7_2, podczas gdy badana konstrukcja daje dla nich różne wyniki.

Ten przykład nie stanowi dowodu ogólnej skuteczności konstrukcji. Pokazuje jednak, że w wybranym przypadku badane kolorowanie może dawać informację inną niż użyte porównanie oparte na wyznaczniku macierzy Foxa.

Naturalnym dalszym pytaniem jest, czy podobne zjawisko występuje dla większej liczby węzłów oraz czy Hipotezę 2.2 można domknąć przez formalną analizę lokalnych konfiguracji ruchu flype.

Bibliografia

[1] Colin C. Adams, The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[2] Kunio Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Birkhäuser, Boston, 1996.

[3] Justin Roberts, Knots Knotes, lecture notes, 2015.

[4] Kurt Reidemeister, Knot Theory, translated by Leo F. Boron, Charles O. Christenson, Bryan A. Smith, BCS Associates, Moscow, Idaho, 1983.

[5] Moshe Cohen, Dimer Models for Knot Polynomials, Ph.D. dissertation, Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, 2010.

[6] P. N. Balister, B. Bollobás, O. M. Riordan, A. D. Scott, Alternating Knot Diagrams, Euler Circuits and the Interlace Polynomial, European Journal of Combinatorics 22 (2001), no. 1, 1–4.

[7] M. B. Thistlethwaite, A Spanning Tree Expansion of the Jones Polynomial, Topology 26 (1987), no. 3, 297–309.

[8] Isabel K. Darcy, Modeling protein-DNA complexes with tangles, Computers & Mathematics with Applications 55 (2008), no. 5.

[9] Alexander Stoimenow, Genus generators and the positivity of the signature, Algebraic & Geometric Topology 6 (2006), 2351–2393.

[10] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, Introduction to Vassiliev Knot Invariants, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[11] Józef H. Przytycki, 3-coloring and other elementary invariants of knots, Banach Center Publications 42, no. 1 (1998), 275–295.

[12] W. W. Menasco, M. B. Thistlethwaite, The Tait Flyping Conjecture, Bulletin of the American Mathematical Society 25 (1991), no. 2, 403–412.

[13] W. W. Menasco, M. B. Thistlethwaite, The Classification of Alternating Links, Annals of Mathematics 138 (1993), no. 1, 113–171.

[14] Dror Bar-Natan et al., The Knot Atlas, dostęp online: https://katlas.org/wiki/Main_Page, dostęp: 28.04.2026.