Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2012

Zadania z matematyki nr 633, 634

Redaguje Marcin E. KUCZMA

633. Każdy punkt płaszczyzny został pokolorowany na czerwono lub zielono. Dany jest trójkąt ABC. Dowieść, że istnieje trójkąt przystający do ABC o wszystkich wierzchołkach zielonych lub istnieje odcinek długości jednostkowej o obu końcach czerwonych.

634. Niech S będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje wielomian stopnia pierwszego, o współczynnikach całkowitych, którego wartości w punktach zbioru S są parami względnie pierwsze.

Zadanie 634 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2011

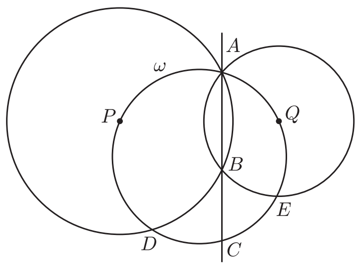
Przypominamy treść zadań:

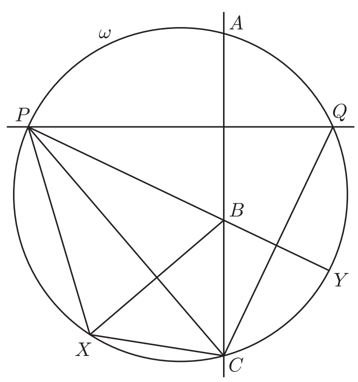
625. Okręgi o środkach P i Q przecinają się w punktach A i B; promienie PA i QA nie są prostopadłe. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina te dwa okręgi w punktach D i E (różnych od A) oraz przecina prostą AB w punkcie C (różnym od A). Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BDE ma środek w punkcie C.

626. Dana jest liczba $a > 0$. Określamy ciągi (x_n) oraz (y_n):

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{dla } n \geqslant 1; \quad y_n = x_1^{1/2} x_2^{1/4} \ldots x_n^{1/2^n}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (y_n).





625. Okrąg ω, opisany na trójkącie APQ, nie jest styczny do żadnego z dwóch danych okręgów (bo je przecina w punktach różnych od A). Zatem żaden z odcinków AQ, AP nie jest jego średnicą; w takim razie żaden z kątów APQ, AQP nie jest prosty. Stąd wniosek, że żaden z punktów P, Q nie leży na prostej AB, wobec czego prosta PQ nie przechodzi przez punkt C.

Mamy więc niezdegenerowany trójkąt CPQ, wpisany w okrąg ω. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C, lub jej przedłużenie, przecina okrąg ω ponownie w punkcie A. Ortocentrum trójkąta CPQ leży w punkcie symetrycznym do A względem prostej PQ – czyli w punkcie B.

Punkty symetryczne do ortocentrum B względem boków CP i CQ także leżą na okręgu ω; oznaczmy je odpowiednio przez X i Y (żaden z nich nie pokrywa się z A, bo punkt C nie leży na prostej PQ).

Trójkąt CXP jest symetryczny do CBP, więc $|CX| = |CB|$, $|PX| = |PB|$. Ostatnia równość mówi, że X jest punktem okręgu o środku P, przechodzącego przez A i B. Skoro zaś leży na okręgu ω i nie pokrywa się z A, musi się pokrywać z D lub E; ustalmy oznaczenia (D, E) tak, że $X = D$.

Analogicznie stwierdzamy, że $|CY| = |CB|$, $|QY| = |QB|$, $Y = E$. Tak więc $|CD| = |CB| = |CE|$. To znaczy, że punkty B, D, E leżą na okręgu o środku C.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 621 ($WT = 3{,}00$) i 622 ($WT = 1{,}27$) z numeru 5/2011

Piotr Sobczak	Łódź	43,59
Paweł Kubit	Kraków	38,59
Tomasz Tkocz	Rybnik	38,41
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Janusz Olszewski	Warszawa	36,91
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	31,49
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	31,04

626. Przyjmijmy oznaczenia:

$$u_n = \left(\frac{a+1}{2}\right)^{2^n}, \quad v_n = \left(\frac{a-1}{2}\right)^{2^n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Widać, że $u_n = u_{n-1}^2$, $v_n = v_{n-1}^2$; $u_0 + v_0 = a$, $u_0 - v_0 = 1$, $u_1 - v_1 = a$.

Udowodnimy indukcyjnie dwie równości. Pierwsza z nich:

(1) $$x_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dla $n = 1$ zgadza się. Przyjmijmy jej słuszność dla n. Wtedy dla $n+1$ mamy

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} + \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}}\right) = \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2 + (u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2)} = \frac{u_n + v_n}{u_n - v_n},$$

stąd słuszność (1) dla wszystkich n.

Teraz druga z zapowiedzianych równości:

(2) $$y_n^{2^n} = u_n - v_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Znów, dla $n = 1$ zgadza się. Weźmy $n \geqslant 2$ i załóżmy, że równość analogiczna do (2) zachodzi dla $n-1$:

$$y_{n-1}^{2^{n-1}} = u_{n-1} - v_{n-1}.$$

Z określenia ciągu (y_n) wynika, że $y_n = y_{n-1} x_n^{1/2^n}$. Stąd oraz z (1):

$$y_n^{2^n} = (y_{n-1}^{2^{n-1}})^2 \cdot x_n = (u_{n-1} - v_{n-1})^2 \cdot \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} = u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2 = u_n - v_n,$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (2).

Przepisujemy tę zależność w postaci

$$y_n^{2^n} = u_n q_n, \quad \text{gdzie} \quad q_n = 1 - \frac{v_n}{u_n} = 1 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2^n}.$$

Liczba a jest dodatnia, więc iloraz w nawiasie jest liczbą o module mniejszym od 1. Wobec tego $q_n \to 1$. Stąd, ostatecznie,

$$y_n = (u_n q_n)^{1/2^n} = \frac{a+1}{2} \cdot q_n^{1/2^n} \to \frac{a+1}{2}.$$