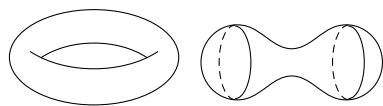


# Bańka jaka jest, każdy widzi

Michał MIŚKIEWICZ\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Każdy widział kiedyś bańki mydlane. Nie ma co ukrywać, są one okrągłe. Tylko dlaczego?

Nie wiadomo, czemu to pytanie miałooby służyć, ale zastanówmy się chwilę. Czy gdyby się postarać, to czy można wydymać bańkę-torus, czyli bańkę w kształcie dętki rowerowej? A jeśli już bańka musi mieć kształt sfery, to czy może być to sfera zdeformowana, na przykład zwężona w talii? Doświadczenie mówi, że nie – o ile bańka nie jest za ciężka, to już chwilę po wydymaniu przybiera kształt idealnie okrągłej sfery. Zobaczmy więc, jaka matematyka (i oczywiście fizyka) za tym stoi.

Przy dmuchaniu bańki wtłaczamy do niej powietrze o ciśnieniu wyższym niż atmosferyczne. Równanie Younga–Laplace’a stwierdza, że w dowolnym punkcie  $A$  powierzchni bańki zachodzi wzór

$$\Delta p(A) = \sigma H(A),$$

gdzie  $\sigma$  jest napięciem powierzchniowym (współczynnikiem zależnym od parametrów materiału; w przypadku baniek mydlanych możemy przyjąć, że jest ono stałe na całej powierzchni),  $\Delta p(A)$  oznacza różnicę ciśnień po obu stronach bańki w punkcie  $A$ , a  $H(A)$  oznacza *średnią krzywiznę* powierzchni w tym punkcie. Zgodnie ze znanym ze szkoły prawem Pascala, ciśnienie jest stałe na zewnątrz bańki i stałe w jej wnętrzu, a więc różnica  $\Delta p$  tak naprawdę nie zależy od wyboru punktu. To samo dotyczy się zatem średniej krzywizny.

Pozostaje wyjaśnić, czym ta średnia krzywizna jest. Żeby ją określić, potrzebujemy oprzeć naszą powierzchnię  $\mathcal{M}$  na płaszczyźnie  $xy$  tak, by jej punkt  $A$  dotykał początku układu współrzędnych (rys. 1). Następnie wybieramy funkcję kwadratową dwóch zmiennych, czyli funkcję postaci  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ , której wykres najlepiej przybliży  $\mathcal{M}$  w otoczeniu  $A$ , i definiujemy średnią krzywiznę jako

$$H(A) := a + c.$$

Średniej krzywizny nie należy mylić z krzywizną Gaussa, którą definiuje się w podobny sposób jako  $G(A) := -(b^2 - 4ac)$ .

Nazwa *średnia* bierze się stąd, że gdybyśmy przecięli  $\mathcal{M}$  jakąś płaszczyzną zawierającą oś  $z$  i dla powstałej na przecięciu krzywej obliczyli krzywiznę w punkcie  $A$ , to  $H(A)$  równa się średniej wartości wszystkich uzyskanych w ten sposób pomiarów. Można powiedzieć nieściśle, że im większa krzywizna, tym bardziej powierzchnia zagina się do wewnątrz.

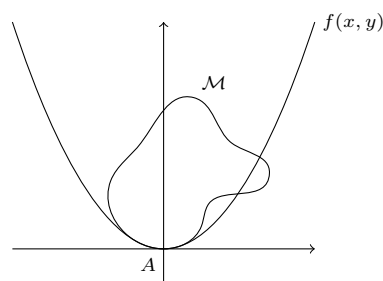
Przykładowo, jeśli sferę o promieniu  $R$  położyć w wyżej opisany sposób, to dolna półsfera jest wykresem funkcji  $g(x, y) = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . W otoczeniu zera najlepiej przybliży ją funkcja kwadratowa  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2R}$ , więc średnia krzywizna wynosi  $1/R$ . Oczywiście nie ma znaczenia, który punkt obraliśmy jako punkt podparcia, więc sfera ma stałą średnią krzywiznę równą  $1/R$ .

W latach pięćdziesiątych XX wieku Aleksandr Aleksandrow wykazał, że jest to jedyna zamknięta (czyli ograniczona, domknięta i pozbawiona brzegu, który ma na przykład półsfera) powierzchnia o tej własności:

**Twierdzenie (Aleksandrow).** *Jeśli spójna i zamknięta powierzchnia  $\mathcal{M}$  w przestrzeni trójwymiarowej ma taką samą średnią krzywiznę  $H$  w każdym swoim punkcie, to jest sferą o promieniu  $1/H$ .*

Twierdzenie to wyjaśnia okrągłość baniek. Rzeczywiście, powierzchnia pojedynczej bańki jest ograniczona i spójna, a z praw Pascala i Younga–Laplace’a wynika, że w każdym punkcie ma tę samą średnią krzywiznę. Z twierdzenia Aleksandrowa wnioskujemy więc, że musi być to sfera.

Ponieważ powierzchnie o stałej średniej krzywiznie są interesujące same w sobie, naszkicujemy teraz dowód twierdzenia. Będzie on oparty na następującym fakcie, którego uzasadnienie odłożymy na później.



Rys. 1



Więcej (i trochę inaczej) o krzywiznach można przeczytać w artykule Jerzego Konarskiego w  $\Delta_{19}^4$ .

**Rozwiązanie zadania F 979.**

Niech  $t$  oznacza czas trwania dźwięku. Częstota  $\nu$  dźwięku nasze ucho rozpoznaje na podstawie liczby rejestrowanych pełnych drgań  $n$  mieszczących się w czasie  $t$ , inaczej:  $n$  równe jest całkowitej części iloczynu  $\nu t$ . Dokładność określenia częstoty  $\Delta\nu \approx 1/t$ . Jeśli różnica częstoty ma odpowiadać nie więcej niż 1/16 tonu (czyli 1/8 półtonu), to

$$\frac{\nu + \Delta\nu}{\nu} \leq (2^{1/12})^{1/8} = 2^{1/96}.$$

Mamy więc  $\Delta\nu/\nu < 0,0073$ , czyli  $t > 1/(0,0073\nu)$ . Otrzymujemy dla  $\nu_1 = 880 \text{ Hz}$ ,  $t_1 > 0,157 \text{ s}$ , a dla  $\nu_2 = 110 \text{ Hz}$ ,  $t_2 > 1,255 \text{ s}$ . Tłumaczy to „powolność” arii basowych w porównaniu z partiami sopranu.

**Rozwiązanie zadania F 980.**

Czas  $\tau$  życia stanu ogranicza dokładność  $\Delta E$ , z jaką można wyznaczyć jego energię:

$$\tau \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Masa spoczynkowa  $m$  cząstki równoważna jest energii  $E = mc^2$ . Tym samym masę spoczynkową cząstki o czasie życia  $\tau$  można wyznaczyć z dokładnością

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \geq \frac{h}{4\pi\tau c^2}.$$

Dla  $\tau = 3 \cdot 10^{-25} \text{ s}$  oszacowanie to daje

$$\Delta m \geq 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 1,1 \text{ GeV}/c^2.$$

**Lemat 1.** Jeśli powierzchnia  $\mathcal{M}$  spełnia założenia twierdzenia Aleksandrowa i ma środek ciężkości w punkcie  $S$ , to jest symetryczna względem każdej płaszczyzny przechodzącej przez  $S$ .

Twierdzenie Aleksandrowa jest natychmiastowym wnioskiem z powyższego lematu. Istotnie, weźmy dowolny punkt  $A \in \mathcal{M}$  różny od  $S$ . Pokażemy, że  $\mathcal{M}$  pokrywa się ze sferą  $\mathcal{M}'$  o środku  $S$  i promieniu  $|AS|$ . Dla każdego punktu  $B \in \mathcal{M}'$  można znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez  $S$ , względem której punkty  $A$  i  $B$  są symetryczne, a więc z symetrii  $\mathcal{M}$  wynika  $B \in \mathcal{M}$ . To pokazuje zawieranie  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ , ale skoro  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią, to  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{M}'$  muszą być równe. Jak obliczyliśmy wcześniej, promień musi wynosić  $1/H$ , by zgadzała się krzywizna.

Naszkiujemy zaraz uzasadnienie Lematu 1, ale najpierw przedstawimy dwa pomocnicze fakty. Rozważmy sytuację, w której dwie powierzchnie  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  są umieszczone jak  $\mathcal{M}$  na rysunku 1, przy czym w pewnym otoczeniu początku układu współrzędnych  $A$  powierzchnia  $\mathcal{M}_1$  znajduje się nad  $\mathcal{M}_2$  (z możliwymi punktami styku, na przykład w  $A$ ). Wówczas odpowiadające im funkcje kwadratowe  $f_1, f_2$  są związane relacją  $f_1 \geq f_2$ , z której w szczególności odczytujemy  $H_1(A) \geq H_2(A)$ . Nierówność ta jest zresztą zgodna z intuicją: „większe zakrzywienie do wewnątrz = większa krzywizna”. Uzasadniliśmy w ten sposób

**Lemat 2 (słaba zasada maksimum).** Jeśli dane są powierzchnie  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  o stałej średniej krzywiznie  $H_1, H_2$ , przy czym  $\mathcal{M}_1$  znajduje się nad  $\mathcal{M}_2$  oraz  $H_1 < H_2$ , to powierzchnie te nie mogą się stykać w punktach wewnętrznych.

Do dowodu Lematu 1 będzie jednak potrzebna tak zwana *silna zasada maksimum*, która stwierdza, że również w przypadku  $H_1 = H_2$  powierzchnie nie mogą się stykać, chyba że są jedną i tą samą powierzchnią; ponadto użyteczny będzie analogiczny wynik w przypadku, gdy punkt styku leży na brzegu obu powierzchni.

**Lemat 3 (silna zasada maksimum).** Dane są dwie różne powierzchnie  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  o tej samej stałej średniej krzywiznie, przy czym  $\mathcal{M}_1$  znajduje się nad  $\mathcal{M}_2$ . Wówczas:

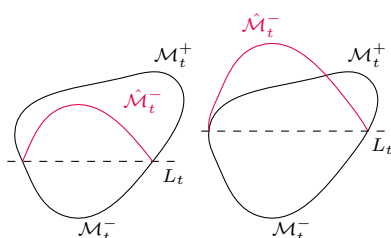
- powierzchnie te nie mogą się stykać w punktach wewnętrznych,
- jeśli  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  mają brzeg i stykają się w punkcie brzegowym, to nie mogą mieć w tym punkcie tej samej płaszczyzny stycznej.

Uzasadnienie wymagałoby wprowadzenia narzędzi równań różniczkowych cząstkowych i w związku z tym wykracza poza możliwości niniejszego artykułu. Czytelnik być może zechce uwierzyć mi na słowo, że idea dowodu nie odbiega znacząco od tego, co już zauważyliśmy przy Lemacie 2. Tymczasem przejdziemy do geometrycznej części rozumowania.

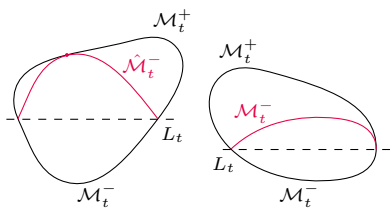
*Dowód Lematu 1.* Zauważmy, że jeśli powierzchnia  $\mathcal{M}$  ma jakąś płaszczyznę symetrii, to jej środek ciężkości automatycznie musi leżeć na owej płaszczyźnie. Wystarczy więc, że znajdziemy płaszczyznę symetrii w każdym możliwym kierunku. Dla uproszczenia zapisu skupimy się na szukaniu płaszczyzny symetrii równoległej do płaszczyzny  $xy$ , a więc wśród rodziny  $L_t = \{(x, y, t) : x, y \in \mathbb{R}\}$  parametryzowanej przez  $t \in \mathbb{R}$ . Dla każdego innego kierunku dowód wygląda analogicznie.

Poniższe rozumowanie nosi obecnie nazwę *metody ruchomych płaszczyzn*, a to dlatego, że będziemy przesuwać płaszczyznę  $L_t$  (poprzez zmianę parametru  $t$ ) tak długo, aż znajdziemy płaszczyznę symetrii.

Wprowadźmy pewne oznaczenia. Dla ustalonego  $t$  niech  $\mathcal{M}_t^+, \mathcal{M}_t^-$  będzie częścią  $\mathcal{M}$  znajdującą się odpowiednio nad i pod płaszczyzną  $L_t$ . Ponadto część  $\mathcal{M}_t^-$  odbitą względem  $L_t$  oznaczymy przez  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  – z nadzieją na równość  $\hat{\mathcal{M}}_t^- = \mathcal{M}_t^+$ , która kończyłaby dowód. Przeanalizujmy, jak ta konfiguracja zależy od  $t$ . Dla odpowiednio małych wartości  $t$  płaszczyzna  $L_t$  przebiega poniżej  $\mathcal{M}$ , w rezultacie  $\mathcal{M}_t^-$  i  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  są puste. Następnie dla pewnego zakresu  $t$



Rys. 2.  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  w dwóch fazach ruchu – tuż przed i tuż po krytycznym momencie

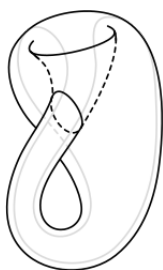


Rys. 3. Dwie możliwości  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  w krytycznym momencie

powierzchnia  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  znajduje się pod  $\mathcal{M}_t^+$ ; od teraz interesować nas będzie największa wartość  $t$ , dla której ma to miejsce.

Przypuśćmy, że w tym krytycznym momencie  $t$  powierzchnie  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  i  $\mathcal{M}_t^+$  się nie pokrywają. Zauważmy, że mają tę samą stałą średnią krzywiznę  $H$  oraz wspólny brzeg, mianowicie przecięcie  $\mathcal{M} \cap L_t$ . Ponadto  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  cały czas znajduje się poniżej  $\mathcal{M}_t^+$ , jest to jednak ostatni taki moment – rysunek 3 ilustruje dwie możliwości, jak może on wyglądać (zachęcam Czytelnika do uzasadnienia, że innych możliwości nie ma). W pierwszym przypadku  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$ ,  $\mathcal{M}_t^+$  mają wewnętrzny punkt wspólny, co jest wykluczone przez Lemat 3(a); w drugim zachodzi zgodność płaszczyzn stycznych w którymś z punktów brzegowych, co z kolei przeczy Lematowi 3(b).

Sprzeczność ta pokazuje, że dla tej szczególnej wartości  $t$  powierzchnie  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  i  $\mathcal{M}_t^+$  istotnie muszą się pokrywać, a więc  $L_t$  jest szukaną płaszczyzną symetrii  $\mathcal{M}$ . Jak już zauważyliśmy wcześniej, w takim przypadku  $L_t$  przechodzi przez środek ciężkości  $S$ , natomiast wybrany kierunek nie miał znaczenia dla dowodu.  $\square$



Rys. 4. Immersja butelki Kleina w  $\mathbb{R}^3$

Z ciekawymi problemami w matematyce często jest tak, że ich rozwiązanie stanowi bardziej początek niż koniec historii. Tak było i w tym przypadku – wprowadzona przez Aleksandrowa metoda ruchomych płaszczyzn znalazła zastosowanie w przeróżnych zagadnieniach, niekoniecznie w kontekście powierzchni o stałej średniej krzywiznie. Natomiast klasyfikacja takich powierzchni jest nadal aktywnie uprawianą dziedziną badań. Jednym z odgałęzień tej dziedziny jest dopuszczenie możliwych samoprzecięć, czyli rozważanie tak zwanych *powierzchni immersyjnych* (przykładem jest tzw. *butelka Kleina*). Rodzina możliwych rozwiązań tego typu okazuje się bogatsza, choć nie jest łatwo się o tym przekonać. Dopiero w 1984 Henry Wente skonstruował różny od sfery „immersyjny przykład” powierzchni o stałej, średniej krzywiznie – był to torus z samoprzecięciami.

## Czy przestępstwa można przewidzieć?

Patryk MIZIUŁA\*

\* deepsense.ai

Walka z przestępczością jest jednym z podstawowych zadań każdej władzy, od jej skuteczności zależy jakość życia obywateli. Nic więc dziwnego, że rozmaite instytucje publiczne starają się zaprzęgać do tego celu metody statystyczne i uczenie maszynowe. Opowiem tu pokrótce, jak wygląda w praktyce „maszynowe” przewidywanie przestępstw i czy daje zadowalające rezultaty. Skupię się na miastach Ameryki Północnej, ponieważ tam tego typu systemy są najbardziej rozwinięte. Aby uniknąć rozważań natury prawnej, przestępstwem będę dla uproszczenia nazywał każde złamanie prawa, niezależnie od tego, czy formalnie kwalifikuje się jako czyn zabroniony, wykroczenie czy przestępstwo.

### Co dokładnie chcemy przewidzieć?

Kiedy myślimy o przewidywaniu przestępstw, wielu z nas przychodzi na myśl film „Raport mniejszości”, oparty na opowiadaniu Philipa Dicka o tym samym tytule. Nazwisko przyszłego przestępcy było tam grawerowane na drewnianej kulce, a jej kolor określał typ niecnego czynu. Oczywiście w prawdziwym świecie możemy zapomnieć o tak dużej dokładności naszych prognoz. Warto natomiast spojrzeć na sprawę w sposób ilościowy – próbować przewidzieć, w jakich obszarach będzie miało miejsce najwięcej przestępstw, np. w ciągu tygodnia albo nawet miesiąca. Jeśli tam właśnie wyślemy dodatkowe patrole, być może zapobiegniemy największej liczbie przestępstw.

Jakie obszary się rozważa? Północnoamerykańskie miasta są formalnie podzielone na rewiry policyjne o takich rozmiarach, aby jeden funkcjonariusz mógł patrolować jeden rewir na piechotę. Prognozą może być wybranie „najgorszych” (o największej przestępczości) rewirów. Często też nakłada się na miasto regularną prostokątną siatkę o oczku o rozmiarach rzędu 100 m × 100 m (dosyć zgodną z układem ulic) i wskazuje „najgorsze” komórki. Można również nie narzucać żadnego odgórnego podziału i pozwolić algorytmom znaleźć nieregularne „najgorsze” obszary wedle ich uznania.

Jak zmierzyć jakość naszych przewidywań? W związku z niewielką liczbą policjantów wybrane fragmenty