

# O trójkątach (nie tylko) na sferze

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Michał MIŚKIEWICZ\*

Rozpocznijmy od przypomnienia, czym jest trójkąt geodezyjny. Mając dane dwa punkty na powierzchni (powiedzmy, że leżące odpowiednio blisko siebie), najkrótszą łączącą je krzywą leżącą na tej powierzchni nazwiemy *geodezyjną*. Dla przykładu – na płaszczyźnie tę rolę pełnią odcinki, a na sferze łuki tzw. okręgów wielkich. Przez *trójkąt geodezyjny* rozumiemy obszar wyznaczony przez trzy punkty, zamknięty między łączącymi je geodezyjnymi. Kąt w wierzchołku takiego trójkąta liczymy jako kąt między stycznymi do odpowiednich krzywych geodezyjnych.

W poprzednim numerze ( $\Delta_{19}^2$ ), w artykule *O trójkątach na sferze*, wprowadziliśmy pojęcie *krzywizny Gaussa*,

opierając się na przykładzie sfer o różnych promieniach. Przypomnijmy je w trochę zmienionej wersji: jeśli na danej powierzchni  $\mathcal{M}$  dowolny trójkąt geodezyjny o kątach  $\alpha, \beta, \gamma$  i polu  $A$  spełnia nierówność

$$(*) \quad \alpha + \beta + \gamma \geq \pi + K \cdot A,$$

to powiemy, że powierzchnia ta ma krzywiznę Gaussa ograniczoną z dołu przez  $K$ . Jeśli  $(*)$  jest zawsze równością, to mówimy, że krzywizna Gaussa *jest równa*  $K$ . W świetle tej definicji płaszczyzna ma zerową krzywiznę Gaussa, natomiast okazuje się, że sfera o promieniu  $r$  ma krzywiznę równą  $1/r^2$ , co wykazaliśmy w poprzednim artykule.

Celem tego artykułu jest uzasadnienie następującej zależności pola *całej* powierzchni  $\mathcal{M}$  od jej krzywizny:

**Twierdzenie.** Jeśli  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią o krzywiznie Gaussa ograniczonej z dołu przez  $K > 0$ , to jej pole  $|\mathcal{M}|$  spełnia nierówność

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{4\pi}{K}.$$

Warto odnotować, że dla dowolnej sfery ta nierówność staje się równością.

Na potrzeby dowodu zacznijmy od nałożenia na  $\mathcal{M}$  siatki złożonej z trójkątów geodezyjnych, oznaczmy przez  $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$  odpowiednio zbiory wierzchołków, krawędzi i trójkątów w tej siatce, a przez  $V, E, F$  liczności tych zbiorów. Zadanie pozostawione na koniec poprzedniego artykułu pokazuje, że

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{2\pi}{K}(V - E + F).$$

Pozostaje więc wykazać nierówność  $V - E + F \leq 2$ . Sprowadziliśmy więc dowód twierdzenia do następującego faktu:

**Lemat.** Jeśli spójna powierzchnia  $\mathcal{M}$  jest pokryta trójkątną siatką, to  $V - E + F$  nie przekracza 2.

Aby ten fakt uzasadnić, wprowadzimy narzędzie pomocnicze, w którym odpowiednio doświadczony życiem Czytelnik może rozpoznać homologie symplecjalne o współczynnikach w  $\mathbb{Z}_2$ .

Wprowadźmy zbiory potęgowe (czyli zbiory wszystkich podzbiorów)  $2^{\mathcal{V}}, 2^{\mathcal{E}}, 2^{\mathcal{F}}$  i określmy tak zwany *operator brzegu*  $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$ :

$$\partial_1(X) = \{v \in \mathcal{V} : v \text{ jest końcem nieparzystej wielu krawędzi należących do } X\}.$$

Analogicznie definiujemy drugi operator brzegu  $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$ :

$$\partial_2(Y) = \{e \in \mathcal{E} : e \text{ jest krawędzią nieparzystej wielu ścian należących do } Y\}.$$

Nazwa *operator brzegu* bierze się stąd, że  $\partial_1(\{e\})$  to dwuelementowy zbiór końców krawędzi  $e$ , a  $\partial_2(\{f\})$  jest zbiorem trzech boków ściany  $f$ .

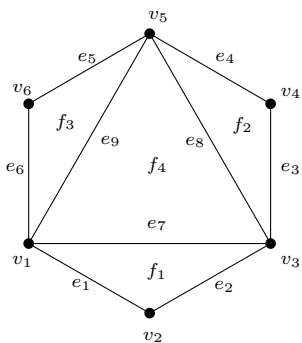
Dla dowodu kluczowa jest pewna własność tych operatorów, którą nazwiemy tutaj *liniowością*. Mianowicie operator  $p: 2^A \rightarrow 2^B$  nazwiemy *liniowym*, jeśli

$$p(A_1 \div A_2) = p(A_1) \div p(A_2) \quad \text{dla } A_1, A_2 \subseteq A,$$

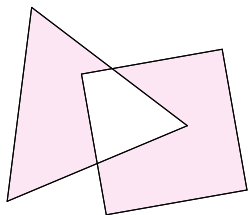
gdzie  $\div$  oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów. Sprawdzenie liniowości operatorów  $\partial_1$  i  $\partial_2$  zostawimy Czytelnikowi jako ćwiczenie (rozwiązanie na stronie 14).

Równość  $p(A_1) = p(A_2)$  jest równoważna równości  $p(A_1) \div p(A_2) = \emptyset$ , co (jeśli  $p$  jest liniowy) zachodzi dokładnie wtedy, gdy  $p(A_1 \div A_2) = \emptyset$ . Stąd wynika, że  $p$  przyjmuje każdą swoją wartość tyle samo razy, a mianowicie

Gdyby znać *wszystkie* spójne powierzchnie i dla każdej obliczyć charakterystykę Eulera, otrzymalibyśmy dokładnie liczby 2, 1, 0, -1, -2, ... Taka wiedza nie będzie nam jednak konieczna.



Na powyższym rysunku:  
 $\partial_1(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}) = \{v_1, v_6\}$ ,  
 $\partial_2(\{f_1, f_2, f_4\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_9\}$



Różnica symetryczna trójkąta i kwadratu zaznaczona jest kolorem.

$|p^{-1}(\emptyset)|$  razy. Oznacza to, że zbiór  $2^A$  można podzielić na  $|p(2^A)|$  podzbiorów, każdy o liczności  $|p^{-1}(\emptyset)|$ , co daje nam równość

$$(1) \quad |2^A| = |p(2^A)| \cdot |p^{-1}(\emptyset)|.$$

Ustalmy ścianę  $f$  i oznaczmy jej krawędzie oraz wierzchołki jak na rysunku, wówczas  $\partial_2(\{f\}) = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Widzimy teraz, że każdy z wierzchołków  $v_1, v_2, v_3$  należy do dwóch krawędzi z otrzymanego zbioru, natomiast każdy pozostały wierzchołek nie należy do żadnego. Jako że 0 i 2 są liczbami parzystymi, wnioskujemy, że  $\partial_1(\partial_2(\{f\}))$  jest zbiorem pustym. Korzystając z liniowości operatorów  $\partial_1$  i  $\partial_2$  (i indukcji względem  $k$ ), możemy wyprowadzić równość  $\partial_1(\partial_2(\{f_1, \dots, f_k\})) = \emptyset$  dla dowolnego podzbioru  $\{f_1, \dots, f_k\}$  rodziny  $\mathcal{F}$ . Oznacza to, że jeśli  $\mathcal{E}'$  jest wartością  $\partial_2$  (czyli jest elementem  $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$ ), to  $\partial_1(\mathcal{E}') = \emptyset$  (czyli  $\mathcal{E}'$  jest elementem  $\partial_1^{-1}(\emptyset)$ ). Zbiór  $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$  jest więc podzbiorem  $\partial_1^{-1}(\emptyset)$ , w związku z czym

$$(2) \quad |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)|.$$

Wprost z definicji  $\partial_2$  wynika, że  $\partial_2(\emptyset) = \emptyset$  oraz  $\partial_2(\mathcal{F}) = \emptyset$ ; sprawdzimy teraz, że istotnie  $\partial_2^{-1}(\emptyset) = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$ . Rozważmy mianowicie podzbiór  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ , dla którego  $\partial_2(\mathcal{F}') = \emptyset$ . Warunek ten oznacza, że jeśli jakaś ściana należy do  $\mathcal{F}'$ , to każda ze ścian sąsiadujących również należy do  $\mathcal{F}'$ . Ponieważ  $\mathcal{M}$  jest powierzchnią spójną, łatwo zauważyć, że wówczas wszystkie ściany muszą należeć do  $\mathcal{F}'$ . Pozostawia to dwa możliwe przypadki:  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{F}' = \emptyset$ .

Wykażemy również, że  $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) = \mathcal{P}$ , gdzie  $\mathcal{P}$  jest rodziną wszystkich parzystoelementowych podzbiorów  $\mathcal{V}$ . Zauważmy najpierw, że  $\partial_1(\{e\})$  jest zbiorem dwuelementowym, a więc  $\partial_1(\{e\}) \in \mathcal{P}$ . Ponieważ różnica symetryczna dwóch zbiorów parzystej mocy również jest parzystej mocy, ogólny warunek  $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) \in \mathcal{P}$  łatwo otrzymujemy z liniowości  $\partial_1$  przez indukcję ze względu na  $k$ . Stąd zawieranie  $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) \subseteq \mathcal{P}$ . Dla dowodu przeciwnego zawierania rozważmy najpierw dowolny dwuelementowy zbiór wierzchołków  $\{v_1, v_2\}$ . Dzięki spójności  $\mathcal{M}$  możemy znaleźć łamaną  $e_1, \dots, e_k$  prowadzącą z  $v_1$  do  $v_k$ ; wprost z definicji mamy wtedy  $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) = \{v_1, v_2\}$ . Ogólny przypadek ponownie otrzymujemy przez indukcję. Jeśli dla dowolnych  $v_1, \dots, v_4$  umiemy znaleźć podzbiory  $X, Y$  spełniające  $\partial_1(X) = \{v_1, v_2\}$  i  $\partial_1(Y) = \{v_3, v_4\}$ , to

$$\partial_1(X \div Y) = \partial_1(X) \div \partial_1(Y) = \{v_1, \dots, v_4\}.$$

Iterując to rozumowanie, otrzymujemy odpowiedni zbiór krawędzi dla każdego parzystoelementowego zbioru wierzchołków.

Z powyższych dwóch akapitów wynika, że

$$(3) \quad |\partial_2^{-1}(\emptyset)| = 2 \quad \text{oraz} \quad |\partial_1(2^{\mathcal{E}})| = |\mathcal{P}| = 2^{V-1}.$$

Wykorzystując równości (1), (2) i (3), otrzymujemy

$$\frac{2^{\mathcal{F}}}{2} = \frac{|2^{\mathcal{F}}|}{|\partial_2^{-1}(\emptyset)|} = |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)| = \frac{|2^{\mathcal{E}}|}{|\partial_1(2^{\mathcal{E}})|} = \frac{2^{\mathcal{E}}}{2^{V-1}}.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron odczytujemy nierówność  $V - E + F \leq 2$ , która kończy dowód lematu, przez to również uzasadnienie twierdzenia, w konsekwencji niestety niniejszy artykuł. A wszystko zaczęło się tak niewinnie, od sumy kątów w trójkącie...

Dlaczego  $|\mathcal{P}| = 2^{V-1}$ ? Jeśli ustalimy dowolny wierzchołek  $v \in \mathcal{V}$ , to

$$X \mapsto X \div v$$

zadaje bijekcję między rodziną  $\mathcal{P}$  a dopełnieniem tej rodziny.

## Od obserwacji Eddingtona do obrazu czarnej dziury

\* Black Hole Initiative,  
Harvard University

Maciek WIELGUS

W kwietniu 2019 roku mieliśmy okazję zobaczyć pierwszy obraz supermasywnej czarnej dziury w centrum galaktyki M87, zarejestrowany przez Teleskop Horyzontu Zdarzeń (*Event Horizon Telescope*, EHT). Obraz przedstawia niezbyt ostry jasny pierścień, czasem określany jako *cień czarnej dziury*. Szybko zrobił popkulturową karierę, zostając bohaterem licznych memów, ale czy aby wszyscy publikujący jego internetowe przeróbki wiedzą, co tak naprawdę przedstawia? Żeby to wyjaśnić, musimy najpierw cofnąć się w czasie o 100 lat, do początków teorii względności i teorii grawitacyjnego ugięcia promieni światła.