



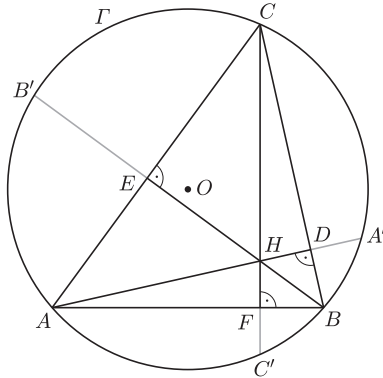
Odbicia ortocentrum

Joanna JASZUŃSKA

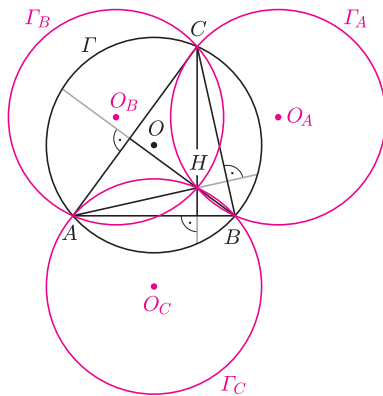
Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach 1 i 2 oraz założenie, że trójkąt ABC jest ostrokątny.

Twierdzenie (*). Punkty A', B', C' są obrazami ortocentrum trójkąta ABC w symetriach względem prostych odpowiednio BC, CA, AB .

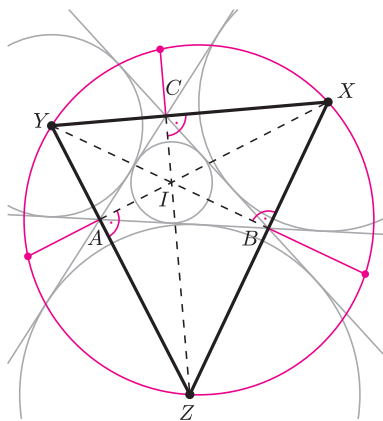
Dowód. Trójkąty ABD i CBF są prostokątne o wspólnym kącie przy wierzchołku B , więc $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BCC'$. Jednocześnie $\sphericalangle BCC' = \sphericalangle BAC'$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Stąd $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BAC'$, więc trójkąty prostokątne FAH i FAC' , o wspólnym boku FA , są przystające. Wobec tego $HF = C'F$. Analogicznie $HD = A'D$ oraz $HE = B'E$, co kończy dowód. \square



Rys. 1. A', B', C' to punkty przecięcia wysokości trójkąta z okręgiem Γ .



Rys. 2. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ to okręgi opisane odpowiednio na trójkątach BCH, CAH, ABH .



Rys. 3

Zadanie 2 pochodzi z XIX Olimpiady Matematycznej, a zadanie 8 z XVII OM.

1. Udowodnij twierdzenie (*) dla trójkąta ABC niekoniecznie ostrokątnego.

2. Dany jest okrąg Γ , punkt A na nim i punkt H wewnątrz niego. Wpisz w okrąg Γ taki trójkąt o wierzchołku A , żeby punkt H był jego ortocentrum.

3. Wykaż, że trójkąty $A'B'C'$ i DEF są podobne.

4. Wykaż, że $A'A, B'B, C'C$ są dwusiecznymi kątów trójkąta $A'B'C'$.

5. Udowodnij, że okręgi $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ są przystające (rys. 2).

6. Wykaż, że trójkąt $O_A O_B O_C$ przystaje do trójkąta ABC , punkt O jest jego ortocentrum oraz punkt H jest środkiem opisanego na nim okręgu (rys. 2).

7. Udowodnij, że H jest jedynym punktem wewnątrz trójkąta ABC , którego obrazy w symetriach względem prostych BC, CA, AB leżą na okręgu Γ .

8. Wykaż, że środki okręgów dopisanych do trójkąta i punkty symetryczne do środka okręgu wpisanego w ten trójkąt względem jego wierzchołków leżą na jednym okręgu.

9. Wykaż, że $AD \cdot HD = BD \cdot DC$ oraz że $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

10. Udowodnij, że obrazy symetryczne ortocentrum względem środków boków trójkąta leżą na okręgu Γ . Jak punkty te są położone względem A, B i C ?

11. Dany jest okrąg Γ i punkt H wewnątrz niego. Wyznacz zbiór środków boków takich trójkątów wpisanych w okrąg Γ , że punkt H jest ich ortocentrum.

12. Oznaczmy przez P i Q odpowiednio punkty przecięcia prostych OB' z AC oraz OC' z AB . Wykaż, że istnieje okrąg styczny do prostych $B'P, HP, C'Q, HQ$.

Rozwiązania niektórych zadań

R2. Punkt przecięcia prostej AH z okręgiem to A' . Na mocy (*), symetralna odcinka HA' przecina okrąg Γ w szukanych punktach B i C . \square

R4. Na mocy (*) mamy $AB' = AH = AC'$, więc $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle AA'C'$ jako kąty wpisane oparte na równych łukach $\widehat{AB'}$ i $\widehat{AC'}$. Wobec tego $A'A$ jest dwusieczną kąta $B'A'C'$. Dowód dla $B'B$ i $C'C$ przebiega analogicznie. \square

R5. Okręgi Γ_C i Γ są przystające, jako opisane na symetrycznych trójkątach ABH i ABC' . Analogicznie okręgi Γ_A i Γ_B przystają do Γ . \square

R7. Aby obraz punktu X w symetrii względem BC leżał na okręgu Γ , punkt X musi leżeć na obrazie okręgu Γ w tej symetrii, czyli na okręgu Γ_A . Musi też leżeć na Γ_B i Γ_C , a jedynym wspólnym punktem tych trzech okręgów jest H . \square

R8. Oznaczmy środki okręgów dopisanych przez X, Y, Z (rys. 3). Wtedy $XI \perp YZ, YI \perp XZ$ oraz $ZI \perp XY$ jako dwusieczne kątów przyległych. Stąd punkt I jest ortocentrum trójkąta XYZ . Punkty symetryczne do I względem wierzchołków wyjściowego trójkąta są odbiciami ortocentrum I trójkąta XYZ w jego bokach, więc na mocy (*) leżą na okręgu opisanym na trójkącie XYZ . \square

Wskazówka 9. Trójkąty podobne lub potęga punktów D i H względem okręgu Γ .

Wskazówka 11. Jest to obraz okręgu Γ w jednokładności o środku H i skali $1/2$.

Wskazówka 12. Środkiem szukanego okręgu jest punkt A .

Które z udowodnionych faktów pozostają prawdziwe dla trójkąta ABC niekoniecznie ostrokątnego? Które sformułowania wymagają modyfikacji i jakich?