



Boki trójkąta

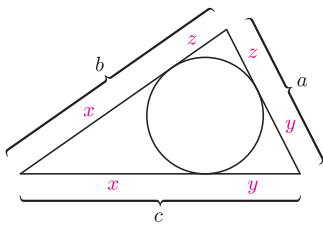
Joanna JASZUŃSKA

Jeśli w nierówności, którą chcemy uzasadnić, występują długości boków a, b, c pewnego trójkąta, często przydaje się *podstawienie Ravięgo*: $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, gdzie $x, y, z > 0$. Takie liczby x, y, z zawsze istnieją, są to bowiem długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt (rysunek).

Nierówność średnich dla liczb $s, t > 0$:

$$\sqrt{\frac{s^2 + t^2}{2}} \geq \frac{s + t}{2} \geq \sqrt{st} \geq \frac{2}{1/s + 1/t}.$$

Średnie te to kolejno: kwadratowa (K), arytmetyczna (A), geometryczna (G) i harmoniczna (H).



Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że:

1.
$$\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c} + \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{a-b+c} + \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{a+b-c} \geq a+b+c.$$

2.
$$\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3.
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{-a+b+c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{a+b-c}.$$

4.
$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

5.
$$2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2.$$

6.
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

7. Wykaż, że jeśli $x, y, z > 0$, to
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Autorem nierówności 4 jest Alessandro Padoa, natomiast nierówność 7 to nierówność Alfreda Nesbitta.

Rozwiązania

We wszystkich rozwiązaniach stosujemy podstawienie:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Wówczas $-a + b + c = 2x$, $a - b + c = 2y$, $a + b - c = 2z$.

R1. Należy dowieść, że

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq G$ mamy

$$\frac{\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}}{2} \geq \sqrt{x^2}, \quad \frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{y^2}, \quad \frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geq \sqrt{z^2},$$

co po dodaniu stronami kończy dowód. \square

R2. Należy wykazać, że

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq H$ mamy

$$\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{4} \geq \frac{1}{y+z}, \quad \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{4} \geq \frac{1}{z+x}, \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{4} \geq \frac{1}{x+y},$$

co po dodaniu stronami daje tezę. \square

R3. Należy udowodnić, że

$$\sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z}.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $K \geq A$ mamy

$$\begin{aligned} \sqrt{y+z} &\geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{2}, \\ \sqrt{z+x} &\geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{2}, \\ \sqrt{x+y} &\geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}, \end{aligned}$$

co po dodaniu stronami kończy dowód. \square

R4. Należy pokazać, że

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq G$ mamy

$$y+z \geq 2\sqrt{yz}, \quad z+x \geq 2\sqrt{zx}, \quad x+y \geq 2\sqrt{xy},$$

co po wymnożeniu stronami daje tezę. \square

R5. Należy dowieść, że

$$\begin{aligned} 2((y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)) &> \\ &> (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2. \end{aligned}$$

Równoważnie,

$$4(xy + yz + zx) > 0,$$

co jest prawdą, bo $x, y, z > 0$. \square

R6. Należy uzasadnić, że

$$\frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} < 2.$$

Zmniejszenie mianownika zwiększa wartość ułamka, więc

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} &< \\ &< \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{z+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} = 2. \quad \square \end{aligned}$$

R7. Należy wykazać, że

$$\frac{-a+b+c}{a} + \frac{a-b+c}{b} + \frac{a+b-c}{c} \geq 3.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq G$ mamy

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2, \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2,$$

co po dodaniu stronami i odjęciu 3 daje tezę. \square

Zadania 2 i 7 pochodzą odpowiednio z XLV i z VIII Olimpiady Matematycznej.