

Wykres dla $n = 3$

Parametry gwiazd politropowych:

n	ξ_1	μ_1	$\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle}$
0,0	2,44949	4,89898	1,00000
0,5	2,75270	3,78865	1,83514
1,0	3,14159	3,14159	3,28987
1,5	3,65375	2,71406	5,99070
2,0	4,35287	2,41105	11,40254
2,5	5,35528	2,18720	23,40646
3,0	6,89685	2,01824	54,18248
3,5	9,53581	1,89056	152,88366
4,0	14,97155	1,79723	622,40788
4,5	31,83646	1,73780	6189,47313
5,0	∞	1,73205	∞

Wynik dla $n = 5$ pochodzi z rozwiązania analitycznego.

po obu stronach daje rozwiązanie:

$$(7) \quad \mu = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Mając z obliczeń ξ_1 i μ_1 na powierzchni, rzeczywisty promień R i masę gwiazdy M obliczamy z (3), otrzymując $R = r_n \xi_1 \sim \rho_c^{(1-n)/(2n)}$ i $M = m_n \mu_1 \sim \rho_c^{(1-n/3)}$.

Eliminując ρ_c , otrzymujemy:

$$(8) \quad M^{n-1} R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \mu_1^{n-1} \xi_1^{3-n} = const.$$

W podobny sposób średnia gęstość $\langle \rho \rangle$ to $M/(\frac{4}{3}\pi R^3) = 3\rho_c \mu_1 / \xi_1^3$, skąd przy pomocy (4)

$$(9) \quad \frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \frac{\xi_1^3}{3\mu_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{Gm_n}{(n+1)r_n} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Zależność 8 jest bardzo ważna i może być weryfikowana w oparciu o obserwacje astronomiczne. Odwracając problem, dla znanych M i R oraz n można obliczyć ρ_c i K .

Z równania (8) wynika, że dla $n = 3$ gwiazda o danej masie zachowując równowagę mechaniczną (hydrostatyczną), może przyjmować różne promienie. Oznacza to, że jej równowaga jest obojętna. Można pokazać, że w równowadze trwałe są kule gazowe dla $n < 3$. Przykładem jest Ziemia o wnętrzu złożonym z ciekłych metali, gdzie gęstość praktycznie nie zmienia się z ciśnieniem, co oznacza $n = 0$ w równaniu (1). Natomiast dla $n > 3$ gwiazda nie jest trwała: ulega albo rozproszeniu, albo kurczy się do momentu, w którym zmiana własności sprasowanego gazu spowoduje $n < 3$.

Używając równania (9), można także obliczyć temperaturę w centrum gwiazdy. Skorzystamy z równania stanu gazu doskonałego, zapisanego jako $P = kT\rho/\mu_g$, gdzie μ_g to masa cząsteczki gazu, a k to stała Boltzmanna. Jeśli m i V to masa i objętość gazu, to gęstość jest m/V , a stała liczba Avogadro N jest ilością cząsteczek w molu, to $N\mu_g$ jest masą mola; zatem liczba moli to $q = m/(N\mu_g)$ i stała gazowa jest równa $\mathcal{R} = kN$, to podstawiając, otrzymujemy $PV = qRT$, czyli zwykłą postać równania gazu. Wstawiając do (9), dostajemy

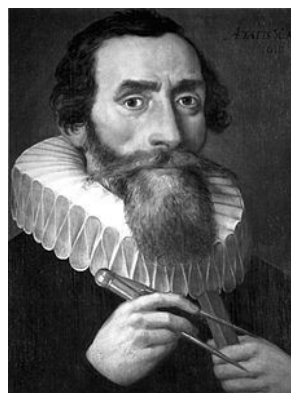
$$(10) \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{kT_c}{\mu_g} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Dla Słońca w przybliżeniu można użyć $n = 3$, choć naprawdę n jest nieco mniejsze i zmienia się z promieniem. Wyjaśnienie, dlaczego tak się dzieje, to temat na inną opowieść: o porównaniu gwiazd zwykłych (takich jak Słońce) i „kwantowych”, czyli białych karłów.

Matematyka i jej historia. Nie tylko ciekawostki!

Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w *Principiach*

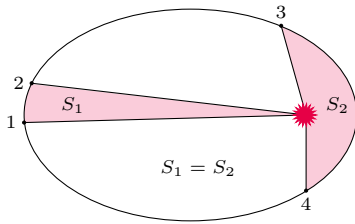
* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Johannes Kepler (1571–1630)

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**, *Mikołaj SIERŻĘGA**

Drugie prawo Keplera, mówiące o tym, że w równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola (patrz ilustracja na następnej stronie), było w dużym stopniu ignorowane w astronomii przednewtonowskiej. Na przykład w dziele *Astronomia Carolina*, z którego korzystał Newton, jest ono wyraźnie nieobecne. Wynikało to z jego niewielkiej przydatności do obliczeń położenia planet na ich orbitach. Załóżmy, że znamy okres T obiegu planety po orbicie eliptycznej. Promień wodzący planety zakreślił w tym czasie znane pole $S = \pi ab$, gdzie a i b są półosiami elipsy. Rozpoczynając wędrówkę po orbicie w danym punkcie Q , po czasie T jesteśmy znowu w Q . Położenie to jest funkcją czasu obiegu T , jak i pola S zakreślonego w tym czasie przez promień wodzący planety. Korzystając z drugiego prawa Keplera, możemy teraz znaleźć pole s sektora zakreślonego przez promień wodzący planety w dowolnym odcinku czasu o długości t . Wydawałoby się, że w tym ogólnym przypadku można także łatwo wyrazić i obliczyć położenie P planety na jej orbicie jako funkcję czasu t lub zakreślonego w czasie t pola s . Okazuje się, że tak nie jest.



Ilustracja drugiego prawa Keplera.

Przestępna jest np. relacja

$$F(x, y) = xy + \sin x = 0,$$

gdzie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

w odróżnieniu np. od relacji wielomianowej

$$G(x, y) = y^2 - x + 2x^3 = 0.$$

Relacja $F(P, S) = 0$ wiążąca położenie P planety na orbicie z polem S sektora (lub z czasem zakreślenia sektora, gdy skorzystamy z drugiego prawa Keplera) jest *przestępna* i jej obliczenie prowadzi do szeregów nieskończonych.

Praktyczne obliczenia wymagałyby stosowania aproksymacji bardziej kłopotliwych rachunkowo od innych, obmyślonych w tamtych czasach, metod obliczania położenia planet na orbitach. W dodatku sama *eliptyczność orbit*, ze Słońcem w jednym z ognisk elipsy, stanowiąca treść pierwszego prawa Keplera, była jeszcze kwestionowana. Przykładowo dyrektor Obserwatorium Paryskiego, Giovanni Domenico Cassini, próbował przeforsować krzywe swego własnego pomysłu, znane jako *owale Cassiniego*.

Z kolei trzecie prawo Keplera, mówiące o tym, że *stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciątej średniej odległości od Słońca jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym*, było dość powszechnie przyjęte, co wynikało z jego zgodności z obserwacjami. Historia recepcji praw Keplera jest dość skomplikowana i ma wiele wątków. Spójny opis można znaleźć np. w książce I. Bernarda Cohena.

W swoich *Principiach*, czyli *Matematycznych Zasadach Filozofii Naturalnej*, Newton argumentował, że z drugiego prawa Keplera nie da się *ściśle obliczyć* położenia planety na orbicie ze względu na *przestępność* wspomnianej wyżej funkcji. Rozumowanie Newtona dotyczyło zresztą dużo szerszej od elips klasy torów owalnych, nazywanych w dyskusjach *owalami Newtona*.

Ponieważ Newton nie określił dokładnie, co rozumie przez owal, jego argumentacja została podważona poprzez kontrprzykłady. Jeden z pierwszych podał Gottfried Leibniz. W każdym razie w przypadku elips Newton miał rację. Fascynująca historia kontrowersji wokół poniższego Lematu XXVIII Newtona jest opisana w artykule Bruce'a Pourciau.

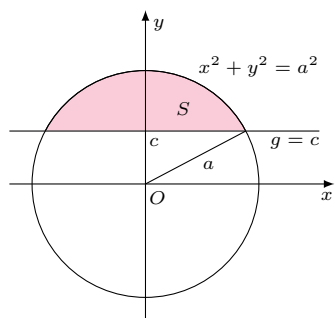
Lemat XXVIII (*Principia*, Księga 1) *Nulla extat figura Ovalis cujus area rectis pro lubitu abscissa possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.* [Nie istnieje figura owalna taka, że pola wszystkich jej segmentów odciętych przez dowolne

proste można wyznaczyć w sposób ogólny jako rozwiązania równań wielomianowych].

Możemy to rozumieć tak, że jeśli dowolna prosta $ax + by = c$ odcina z danego owalu segment o polu S , to nie istnieje równanie wielomianowe $W(S, a, b, c) = 0$ wiążące pole S ze współczynnikami a, b, c równania tej prostej.

Prawdziwość tego lematu, w przypadku elipsy, implikuje trudności z zastosowaniem drugiego prawa Keplera do obliczania położenia danej planety w dowolnej chwili.

Kontrowersje co do samego lematu wynikają z wątpliwości, co rozumiał Newton przez „figurę owalną”. Już Bernoulli, Huygens i Leibniz nie mieli co do tego pełnej jasności, natomiast „dowód” Newtona zdawał się pasować do dowolnej zamkniętej figury. Chcąc się temu zagadnieniu dokładniej przyjrzeć, w tym artykule podamy przykłady „figur owalnych”, dla których lemat jest prawdziwy bądź fałszywy. Oryginalny „dowód” Newtona można znaleźć w jego *magnum opus*.

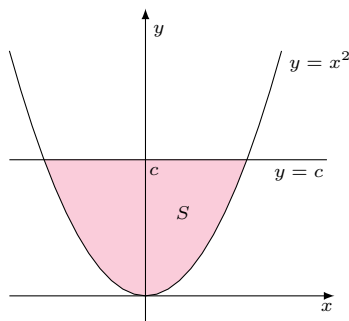


Przykład 1. Rozważmy koło, ograniczone okręgiem $x^2 + y^2 = a^2$, i jego górny segment odcięty prostą $y = c$, $0 \leq c < a$. Jeżeli przez S oznaczymy pole tej części, to można obliczyć, że

$$S = \pi \frac{a^2}{2} - a^2 \arcsin \frac{c}{a} - c\sqrt{a-c}\sqrt{a+c}.$$

W przypadku koła jest to ogólna sytuacja, stąd Lemat XXVIII jest prawdziwy dla tego owalu.

Powyższa zależność jest *przestępna*, gdyż nie da się jej sprowadzić do zależności wielomianowej. Wykonując obrót koła, a następnie spłaszczając je poprzez transformację $(x, y) \rightarrow (x, z)$, $z = \frac{b}{a}y$, otrzymujemy ogólny wzór wiążący pole segmentu elipsy o półosiach a, b , $b < a$ odciętego przez przecinającą ją prostą.



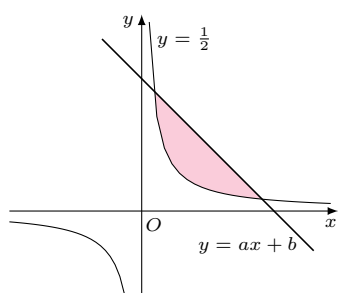
Przykład 2. Rozważmy teraz parabolę $y = x^2$ i ograniczony segment nad nią odcięty prostą $y = c$, $c > 0$. Nie jest to przypadek najogólniejszy, ale sprawdzamy, że pole S tak określonego obszaru wyraża się poprzez c zależnością

$$9S^2 - 16c^3 = 0,$$

a zatem Lemat XXVIII nie jest prawdziwy dla parabol. Można powiedzieć – zgoda, ale parabola nie jest owalem zamkniętym. Można jednak uzyskać (wypukły) owal zamknięty, zakrywając ją z góry częścią okręgu o promieniu np. 2 i środku na osi y .

Taki okrąg styka się z naszą parabolą w dwóch punktach i łatwo wykazać, że współczynnik kierunkowy stycznej do uzyskanej figury owalnej zmienia się w sposób ciągły. Mamy zatem gładki (na oko) owal, wypukły, zamknięty, ale

przykład 2 pokazuje, że Lemat XXVIII nie jest prawdziwy dla tego owalu, bo odcinanie wycinka paraboli daje zależność algebraiczną.



Przykład 3. Warto jeszcze sprawdzić, jak to jest dla hiperboli, następnej krzywej stożkowej istotnej w astronomii planetarnej. Niech $y = \frac{1}{x}$ i niech prosta $y = -ax + b$ odcina z hiperboli segment ograniczony. Łatwo sprawdzić, że w zależności pola S od a, b pojawi się funkcja logarytmiczna. Zatem zależność między polem wycinka i parametrami prostej go odcinającej z hiperboli jest przestępna. Zauważmy, że nasz „owal” nie jest zamknięty.

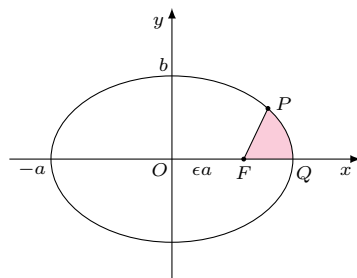
Zapytać można, czym w istocie różni się okrąg od krzywej Γ stanowiącej zamknięty owal z przykładu 2. Zarówno okrąg, jak i krzywa Γ są krzywymi algebraicznymi (można założyć, że tylko takie rozważał Newton – Pourciau, str. 5), zadanymi równaniami wielomianowymi postaci $W(x, y) = 0$. Dokładniej, nasz okrąg jest dany równaniem

$$(11) \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

a każdy punkt krzywej Γ spełnia równanie

$$(12) \quad (y - x^2) \left(x^2 + \left(\frac{17}{4} - y \right)^2 - 4 \right) = 0.$$

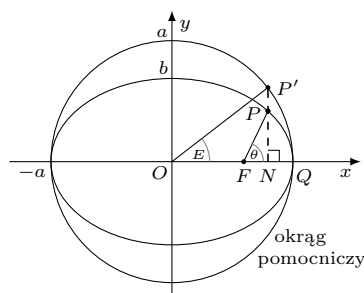
Może istotnej różnicy należy się doszukiwać w fakcie, że równanie (12) zawiera w sobie nie tylko naszą krzywą Γ , ale też „wąsy”, jeden będący półokręgiem, a drugi, ten nieskończony, kawałkiem paraboli. Naprowadza nas to na własność jednoznaczności, odróżniającej wykresy równań (11) i (12). Poruszając się po wykresie równania (11), nie mamy wyboru, pozostajemy na naszym owalu. Inaczej jest w przypadku wykresu równania (12), gdyż możemy zboczyć na któryś z „wąsów” na rozwidleniu w którymś z dwóch punktów styku paraboli z okręgiem. Jest to właściwy ślad, bo taka niejednoznaczność nie może zdarzyć się na krzywych *analitycznych*, które są w szczególności nieskończenie gładkie. A krzywa Γ jest gładka tylko na oko!



Sektor FQP o polu S i punkt P .

Jeśli umieścimy lokalny kartezjański układ współrzędnych na krzywej Γ w punkcie styku paraboli z okręgiem, tak aby styczna do niej w tym punkcie stanowiła oś odciętych, a prostopadła do stycznej w tym punkcie oś rzędnych, to wykres krzywej Γ w otoczeniu tego punktu nie jest w naszym lokalnym układzie współrzędnych wykresem funkcji posiadającej wszystkie pochodne. Łatwo sprawdzić, że w punkcie styku nie istnieje już druga pochodna.

Analityczność krzywej możemy określić w tym języku następująco. W każdym punkcie krzywej, w lokalnym układzie współrzędnych kartezjańskich opisanym wyżej, krzywa stanowi wykres funkcji mającej lokalnie przedstawienie w postaci szeregu potęgowego $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$



Konstrukcja rozwiązania wykorzystująca równanie Keplera.

Powracamy teraz do drugiego prawa Keplera i zmagania Newtona ze znalezieniem położenia P planety w dowolnej chwili t , liczonej od przejścia przez perycentrum na orbicie eliptycznej o półosiach a, b , przy założeniu, że czas pełnego obiegu planety po trajektorii (okres obiegu) T jest znany. Relacja wiążąca P i t zadana jest słynnym *równaniem Keplera*

$$M = E - \epsilon \sin E,$$

gdzie M jest *anomaliami średnią*, E jest *anomaliami mimośrodkową*, a ϵ jest *mimośrodek orbity*.

Mamy $M = \frac{2\pi}{T}t$, gdzie czas t jest związany drugim prawem Keplera z polem S sektora elipsy zakreślonego przez promień wodzący planety,

$$\frac{S}{t} = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Z powyższych wzorów widać, że relacje wiążące pole zakreślonego w czasie t sektora elipsy, a także sam czas t z *anomaliami mimośrodkową* E , są przestępne. Obliczenie anomalii mimośrodkowej można uznać za wskazanie miejsca planety na orbicie (patrz rysunek). Znając E , obliczenie współrzędnych punktu P sprowadza się do prostego rachunku. Chcąc obliczyć E w danej chwili czasu t , obliczamy M i dalej obliczamy E z równania Keplera. Dla tego ostatniego obliczenia Newton zastosował metodę aproksymacji, którą obecnie nazywamy metodą Newtona–Raphsona.

O głębszych aspektach problemów przedstawionych powyżej postaramy się opowiedzieć w następnym artykule.

Literatura

- Jerzy Kierul: *Kepler*, PIW, 2007.
 Jerzy Kierul: *Newton*, PIW, 2010.
 I. B. Cohen: *The Newtonian Revolution*, CUP, 1980.
 I. Newton: *Matematyczne Zasady Filozofii Przyrody*, Kraków 2011.
 B. Pourciau: *The Integrability of Ovals: Newton's Lemma 28 and Its Counterexamples*, Arch. Hist. Exact Sci. 55 (2001) 479-499.
 D. T. Whiteside (ed.): *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol. 6, CUP 1974. (Article VI).