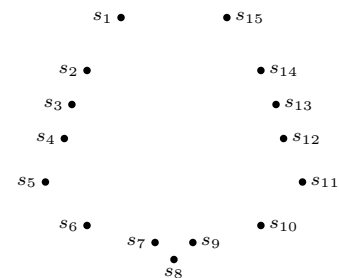


Odkryj wielokąt!

Jarosław GÓRNICKI*



Rys. 1

Punkty z rysunku 1, jako środki kolejnych boków wielokąta, kodują pewien obrazek. Czy potrafisz go odtworzyć? Spróbuj! Rozpatrzmy sytuację ogólną.

Problem. Czy (jak?, kiedy?) można odtworzyć wielokąt, gdy znamy środki jego kolejnych boków?

Rozpocniemy od prostego przypadku, gdy na płaszczyźnie dane są trzy różne punkty S_1, S_2, S_3 . Zbudujemy trójkąt $\triangle W_1W_2W_3$ taki, że punkty S_i są środkami jego boków. Pokażemy jednocześnie, że złożenie trzech (ogólnie nieparzystej liczby ≥ 3) symetrii środkowych jest symetrią środkową.

Gdy będzie to dla nas wygodne, na punkty płaszczyzny będziemy patrzeć jak na wektory zaczepione w początku układu współrzędnych (oznaczenia wektorów pomijamy).

Wybieramy na płaszczyźnie punkt \bar{W} różny od wszystkich punktów S_i . Symetryczne odbicie punktu \bar{W} względem punktu S_1 wyznacza punkt \bar{W}_1 , symetryczne odbicie punktu \bar{W}_1 względem S_2 daje punkt \bar{W}_2 , a symetryczne odbicie punktu \bar{W}_2 względem S_3 wyznacza punkt \bar{W}_3 (rys. 2). Takie przekształcenie płaszczyzny $\bar{W} \rightarrow \bar{W}_3$ jest symetrią środkową.

Istotnie, eliminując \bar{W}_1 i \bar{W}_2 z równań opisujących warunki symetrii

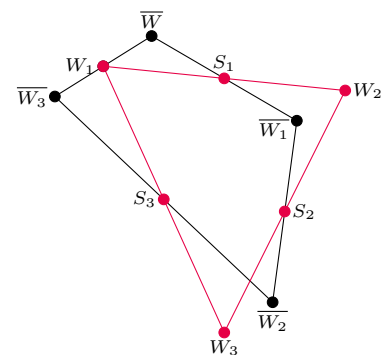
$$\bar{W}_1 = 2S_1 - \bar{W}, \quad \bar{W}_2 = 2S_2 - \bar{W}_1, \quad \bar{W}_3 = 2S_3 - \bar{W}_2,$$

otrzymujemy wzór $\bar{W}_3 = 2(S_1 - S_2 + S_3) - \bar{W}$, a stąd poszukiwany środek symetrii

$$\frac{\bar{W}_3 + \bar{W}}{2} = S_1 - S_2 + S_3.$$

Jako jedyny punkt stały przekształcenia $\bar{W} \rightarrow \bar{W}_3$, punkt $W_1 = \frac{1}{2}(\bar{W}_3 + \bar{W})$ jest jednym z wierzchołków trójkąta $\triangle W_1W_2W_3$, który łatwo wyznaczyć (rys. 2).

Rozumowanie to działa w przypadku każdej nieparzystej liczby różnych punktów $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ ($k \geq 1$) płaszczyzny, które są środkami kolejnych boków wielokąta. Proponujemy samodzielnie przeprowadzić tę konstrukcję dla punktów S_i z rysunku 1 – rozwiązanie (o świątecznym charakterze) na stronie 11.



Rys. 2

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty S_1, S_2, S_3, S_4 będące środkami kolejnych boków wielokąta. Pokażemy, że w tym przypadku złożenie symetrii środkowych jest translacją.

Wybieramy na płaszczyźnie punkt \bar{W} różny od każdego z punktów S_i . Symetryczne odbicie punktu \bar{W} względem punktu S_1 daje punkt \bar{W}_1 , symetryczne odbicie punktu \bar{W}_1 względem S_2 wyznacza punkt \bar{W}_2 , symetryczne odbicie punktu \bar{W}_2 względem S_3 daje \bar{W}_3 i wreszcie symetryczne odbicie punktu \bar{W}_3 względem S_4 wyznacza punkt \bar{W}_4 . Eliminując punkty $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3$ z warunków symetrii

$$\bar{W}_1 = 2S_1 - \bar{W}, \quad \bar{W}_2 = 2S_2 - \bar{W}_1, \quad \bar{W}_3 = 2S_3 - \bar{W}_2, \quad \bar{W}_4 = 2S_4 - \bar{W}_3,$$

otrzymujemy

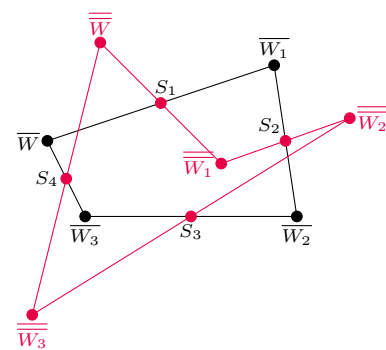
$$\bar{W}_4 = 2(S_4 - S_3 + S_2 - S_1) + \bar{W},$$

co oznacza, że przekształcenie płaszczyzny $\bar{W} \rightarrow \bar{W}_4$ jest translacją o wektor $2(S_4 - S_3 + S_2 - S_1)$. Gdy jest to translacja o wektor niezerowy, nie istnieje czworokąt, którego środki boków są zadanymi wcześniej punktami (gdyż jeden z wierzchołków tego czworokąta musiałby być punktem stałym wspomnianej translacji).

Równość $\bar{W} = \bar{W}_4$ (czyli istnienie czworokąta spełniającego warunki zadania) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_2 + S_4}{2} = \frac{S_1 + S_3}{2},$$

czyli gdy środek odcinka łączącego punkty S_2 i S_4 pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego punkty S_1 i S_3 . Wówczas czworokątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele, punkt \bar{W} (lub $\bar{\bar{W}}$), różny od każdego punktu S_i , możemy wybrać dowolnie (rys. 3).



Rys. 3



Rozumowanie to pozostaje prawdziwe dla dowolnej parzystej liczby różnych punktów płaszczyzny S_1, S_2, \dots, S_{2k} ($k \geq 2$) będących środkami kolejnych boków wielokąta. Odkryliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Edward Kasner, 1903). *Niech S_1, S_2, \dots, S_i ($i \geq 3$) będą różnymi punktami płaszczyzny, które są środkami kolejnych boków wielokąta.*

(a) *Jeżeli i jest liczbą nieparzystą ($i = 2k + 1, k \geq 1$), to istnieje dokładnie jeden wielokąt $W_1W_2 \dots W_i$ taki, że*

$$(*) \quad S_j = \frac{1}{2}(W_j + W_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad \text{gdzie } W_{i+1} = W_1.$$

(b) *Jeżeli i jest liczbą parzystą ($i = 2k, k \geq 2$), to wielokąt $W_1W_2 \dots W_i$ spełniający warunek (*) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $S_1 + S_3 + \dots + S_{2k-1} = S_2 + S_4 + \dots + S_{2k}$.*

Punkt (b) geometrycznie oznacza, że zbiory punktów S_j o indeksach nieparzystych oraz parzystych mają ten sam środek ciężkości. Wówczas takich wielokątów jest nieskończenie wiele i dowolny punkt płaszczyzny różny od punktów S_j może pełnić rolę wierzchołka W_1 .

Powyższe uwagi nie wyczerpują zagadnienia. Rozważania można prowadzić, rozpatrując dla $i \geq 4$ „wieloboki przestrzenne”.

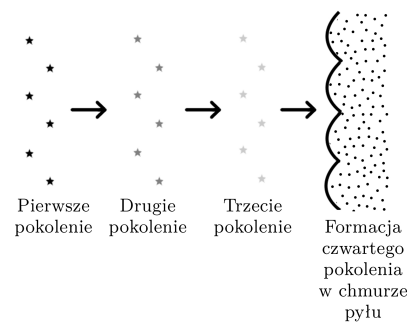
Opisana sytuacja to prosta ilustracja działania skończonych szeregów Fouriera, ogólniej – analizy harmonicznej, która z małego zbioru informacji stara się odtworzyć ogólniejsze zjawisko. Czasem można to zrobić bardzo precyzyjnie, innym razem tylko w ogólnym zarysie, a czasem jest to niemożliwe.

Collect and Collapse: obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd

Miguel FIGUEIRA*

* Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Gwiazdy typu OB to gorące, masywne gwiazdy widmowe typu O (hiperolbrzymy o temperaturze powierzchni 25 000–50 000 K i masach $>16 M_\odot$) lub wczesnego typu B (jasne, masywne, 2,1–16 M_\odot , olbrzymy o temperaturze 10 000–30 000 K), które tworzą się w luźno zorganizowanych grupach zwanych stowarzyszeniami OB. Oba typy gwiazdowe są bardzo masywne i krótko żyjące, dlatego nie oddalają się zbyt od miejsca swojego powstania.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie sekwencyjnego scenariusza tworzenia się gwiazd z uformowanymi trzema pokoleniami i czwartym pokoleniem gwiazd tworzącym się w chmurze pyłu. Strzałki wskazują, że do powstania drugiego i wyższych pokoleń gwiazd przyczyniła się bezpośrednio podgrupa wcześniejsza

Gwiazdy o masach większych niż $8 M_\odot$ nazywane są gwiazdami o dużej masie.

W połowie XX wieku astronomowie zaobserwowali kilka niezwiązanych ze sobą grawitacyjnie skupisk gwiazd wysokomasowych typu OB (tzw. asocjacji gwiazdowych OB). Okazało się, że każda z tych grup zawiera gwiazdy mniej więcej w tym samym wieku, co może sugerować, że formowanie się gwiazd w tych obszarach następowało w sposób sekwencyjny: pierwsza generacja spowodowała uformowanie drugiego pokolenia gwiazd o dużych masach, druga – trzeciego i tak dalej (rys. 1). Ten prosty, sekwencyjny scenariusz może wyjaśnić, w jaki sposób gwiazdy w każdej z zaobserwowanych podgrup znajdują się w tej samej lub bardzo zbliżonej fazie ewolucji.

Terminem H II astronomowie określają zjonizowany wodór atomowy (obszar H I to obłok neutralnego wodoru atomowego, a H_2 to wodór cząsteczkowy). W artykule „Gwiazdne przedszkola – obszary H II w galaktyce” (Δ_{20}^4), opisałem tworzenie się zjonizowanych (H II) regionów wokół gwiazd o dużych masach. Zasadniczo gwiazdy o dużej masie emitują fotony w zakresie ultrafioletowych (UV) długości fal elektromagnetycznych, które jonizują chmurę wodoru wokół nich. Kiedy liczba jonizacji jest równa liczbie rekombinacji, obszar H II osiąga swoją początkową wielkość nazywaną sferą Strömghrena. Po utworzeniu sfery Strömghrena ciśnienie jonizacji wewnątrz obszaru H II jest większe niż ciśnienie otaczającej go chmury. Ta różnica ciśnień powoduje rozpoczęcie fazy ekspansji. Naddźwiękowy front jonizacyjny (IF) tworzy front uderzeniowy (SF), który następnie ścieśnia chmurę (Δ_{20}^4). Poprzez rozszerzanie się coraz więcej materiału gromadzi się pomiędzy frontami. Stabilne ciśnienie utrzymywane pomiędzy frontami IF a SF sprawia, że chmura (w kształcie torusa) jest odporna na zapadanie grawitacyjne, aż do momentu osiągnięcia gęstości krytycznej, powyżej której utrzymywany pomiędzy frontami materiał rozpada się na kawałki. Powstałe w ten sposób fragmenty będą stanowiły siedlisko dla kolejnych pokoleń gwiazd. Mechanizm ten, w którym nowe pokolenie gwiazd jest konsekwencją gromadzenia się (*collect*)