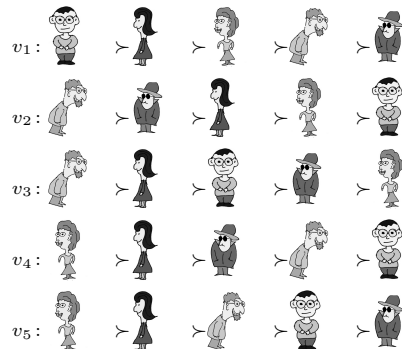


Proporcjonalność bez partii politycznych

Piotr SKOWRON*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Innym klasycznym modelem rozważanym w ramach teorii wyboru społecznego jest model oparty o rankingi. Wtedy wymagamy, aby wyborcy uszeregowali kandydatów od najbardziej do najmniej preferowanego. W takim modelu przykład preferencji wyborców może wyglądać następująco:



Model, w którym wyborcy wskazują kandydatów, których akceptują, jest jednak szczególnie atrakcyjny. W takim systemie głosowania wyborcom stosunkowo łatwo jest oddać głos, podczas gdy uszeregowanie, nawet tylko kilkunastu kandydatów, jest dużo trudniejsze.


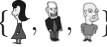

¹Oczywiście nie jest to jedyny proporcjonalny komitet. Każdy komitet, który będzie składał się z dwóch kandydatów akceptowanych przez pierwszą grupę 400 wyborców, jednego kandydata akceptowanego przez drugą grupę 200 wyborców i jednego kandydata akceptowanego przez ostatnią grupę wyborców, będzie równie dobry. Na potrzeby naszej analizy założymy, że mamy pewną regułę rozstrzygania remisów, używaną, gdy istnieje kilka optymalnych komitetów.

Thorvald Nicolai Thiele (1838–1910), profesor astronomii i dyrektor obserwatorium astronomicznego na Uniwersytecie w Kopenhadze. Jego najbardziej znane prace dotyczą matematyki, w szczególności statystyki.

Koniec dziewiętnastego wieku był szczególnie korzystnym okresem dla naukowców zajmujących się projektowaniem systemów wyborczych. Na przykład Szwecja wprowadzała w tym czasie prawo wyborcze dla kobiet; w związku z tym partia konserwatywna spodziewała się utraty większości parlamentarnej i skłonna była rozważać zmianę dotychczasowej ordynacji wyborczej. Inny, równie ciekawy, system wyborczy został opracowany mniej więcej w tym samym czasie przez szwedzkiego matematyka Larsa Edvarda Phragmęna (1863–1937).

Rozważmy następujący scenariusz: n wyborców pragnie wybrać komitet, czyli podzbiór kandydatów o ustalonej liczebności. Oznaczmy zbiór wyborców jako $N = \{1, 2, \dots, n\}$, zbiór kandydatów jako $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ (w szczególności n i m to, odpowiednio, liczba wyborców i liczba kandydatów), a rozmiar komitetu, który chcemy wyłonić jako k (przy czym $k \leq m$). Na przykład wyobraźmy sobie, że wyborcy chcą wybrać parlament o rozmiarze k w małym kraju, w którym nie zaistniała jeszcze koncepcja partii politycznych (w związku z czym muszą głosować bezpośrednio na kandydatów, a nie na partie polityczne), albo że pracownicy pewnej firmy lub organizacji chcą wybrać k osób, które będą ich reprezentować w związkach zawodowych. Załóżmy, że każdy z wyborców głosuje, wskazując podzbiór kandydatów, których uważa za akceptowalnych: dla wyborcy $i \in N$ taki podzbiór akceptowalnych kandydatów będziemy oznaczać przez $A(i)$. Pokażemy, że wskazanie „sprawiedliwego” sposobu przeprowadzenia takich wyborów jest nieoczywiste.









Przykład 1. Przyjmijmy, że $n = 800$, $m = 9$, a głosy wyborców są następujące:

- 400 wyborców akceptuje: {
- 200 wyborców akceptuje: {
- 200 wyborców akceptuje: {

Przypuśćmy, że $k = 4$. Jaki komitet powinien zostać wybrany w tym przypadku? Komitet $S = \{\text{candydate icons}\}$ wydaje się być rozsądnym wyborem¹. Taki komitet jest proporcjonalny – dla każdej z trzech grup wyborców, liczba wybranych kandydatów, których ci wyborcy aprobuja, jest proporcjonalna do liczby wyborców w tej grupie.

Preferencje wyborców w przykładzie 1 mają pewną specyficzną strukturę: dla każdego z dwóch wyborców ich zbiory akceptowalnych kandydatów są takie same lub rozłączne. Pozwala to pogrupować wyborców i kandydatów w taki sposób, że wskazanie proporcjonalnego komitetu jest proste i intuicyjne. Co jednak, gdy mamy do czynienia z bardziej złożonymi i „chaotycznymi” preferencjami?

Przykład 2. Rozważmy następujące preferencje wyborców:

- v_1 : {
- v_2 : {
- v_3 : {
- v_4 : {
- v_5 : {
- v_6 : {
- v_7 : {
- v_8 : {

Przypuśćmy, że chcemy wybrać proporcjonalny komitet rozmiaru $k = 4$. W tym wypadku odpowiedź nie jest już tak oczywista.

Wyżej opisany model był badany – między innymi – pod koniec dziewiętnastego wieku przez duńskiego astronoma i matematyka Thorvalda Nicolai Thielego. Thiele zaprojektował regułę obecnie nazywaną PAV (*Proportional Approval Voting*). Dla $r \in \mathbb{N}$, niech $H(r)$ oznacza r -tą liczbę harmoniczną, tzn. $H(r) = \sum_{i=1}^r 1/i$. Reguła PAV wybiera komitet S , który maksymalizuje wartość $\text{pkt}(S) = \sum_{i \in N} H(|A(i) \cap S|)$. Innymi słowy, dla każdego wyborcy $i \in N$ i dla każdego komitetu $S \subseteq C$ ($|S| = k$) analizujemy, ilu kandydatów z komitetu S wyborca i akceptuje ($|A(i) \cap S|$); bierzemy liczbę harmoniczną o tym indeksie z tej wartości ($H(|A(i) \cap S|)$) i traktujemy ją jako wynik punktowy, który wyborca i przypisuje komitetowi S . Dla każdego komitetu liczymy sumę punktów przypisanych temu komitetowi przez wszystkich wyborców i wybieramy ten komitet S , którego wynik punktowy $\text{pkt}(S)$ jest najwyższy. Na pierwszy

²W regule PAV maksymalizujemy wartość zadowolenia wyborców. Wyborca będzie bardziej zadowolony, jeżeli wybory wygra chociaż jeden z akceptowanych przez niego kandydatów, niż gdyby miał nie wygrać żaden. Oczywiście będzie także bardziej zadowolony, jeżeli wygra dwóch kandydatów, których akceptuje, jeszcze bardziej, jeżeli wygra trzech takich kandydatów itd. Zadowolenie z każdym kolejnym akceptowanym kandydatem będzie rosło coraz wolniej. Jest wiele funkcji, poza funkcją harmoniczną, które spełniają tę własność. Wykażemy jednak, że funkcja harmoniczna jest w pewien sposób „specjalna” i użycie akurat tej funkcji powoduje, że system wyborczy jest proporcjonalny.

Aby reguła PAV mogła wyłonić zwycięski komitet, trzeba obliczyć wynik punktowy dla każdego możliwego komitetu. Takich komitetów jest $\binom{m}{k}$. Powoduje to pewne praktyczne ograniczenia: wydaje się, że ciężko użyć reguły PAV, zwłaszcza dla dużych wartości m i k . Współczesne prace z dziedziny informatyki pokazują, że potrafimy sobie dobrze radzić z tym problemem, stosując nowoczesne algorytmy heurystyczne i aproksymacyjne. Ponadto istnieją alternatywne systemy głosowania, które mają podobne własności co reguła PAV, a których obliczanie jest dużo prostsze, np. sekwencyjny wariant PAV lub sekwencyjna reguła Phragmèna.

rzut oka nie jest jasne, dlaczego użyliśmy liczb harmoniczných w definicji reguły PAV². Jak się jednak okaże, w tym przypadku jest to jak najbardziej uzasadnione.

W przykładzie 2 zastosowanie reguły PAV doprowadzi do wyboru komitetu $S = \{\text{członek 1}, \text{członek 2}, \text{członek 3}, \text{członek 4}\}$. Wyborca v_1 akceptuje jednego członka tego komitetu, więc przypisze mu $H(1) = 1$ punkt; wyborca v_2 akceptuje trzech kandydatów z S , więc przypisze temu komitetowi $H(3) = 1 + 1/2 + 1/3 = 11/6$ punktów. Sumarycznie komitet ten otrzyma następującą liczbę punktów:

$$\text{pkt}(\{\text{członek 1}, \text{członek 2}, \text{członek 3}, \text{członek 4}\}) = 1 + 11/6 + 3/2 + 3/2 + 1 + 1 + 1 + 3/2 = 31/3.$$

PAV wybierze ten właśnie komitet, ponieważ wynik punktowy dla każdego innego 4-elementowego podzbioru kandydatów będzie mniejszy bądź równy $31/3$.

Dlaczego regułą wyborczą PAV możemy uważać za proporcjonalną? Tu z pomocą przychodzi nam podejście aksjomatyczne: najpierw spróbujemy formalnie zdefiniować pewną matematyczną własność, która będzie mówiła, czy dana reguła wyborcza jest proporcjonalna, czy też nie; następnie sprawdzimy, czy PAV rzeczywiście spełnia tę własność.

Definicja (silna proporcjonalność). Powiemy, że reguła wyborcza \mathcal{R} spełnia silną proporcjonalność, jeśli dla każdego profilu preferencji, dla każdej liczby $\ell \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej grupy wyborców $V \subseteq N$ takiej, że $|V| \geq \ell \cdot n/k$ oraz $|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$, reguła zwróci komitet S taki, że $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell$.

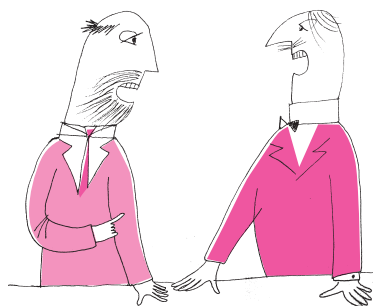
Zgodnie z powyższą definicją grupa $\ell \cdot n/k$ wyborców (czyli grupa, która stanowi ℓ/k część wszystkich wyborców) powinna mieć prawo decydować o ℓ członkach komitetu (czyli o ℓ/k części wybranego komitetu); np. grupa 30% wyborców powinna móc decydować o 30% członków komitetu. Zatem jeżeli grupa ma co najmniej $\ell \cdot n/k$ wyborców ($|V| \geq \ell \cdot n/k$) oraz jeżeli grupa ta zgadza się co do tego, że akceptuje pewnych ℓ kandydatów ($|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$), to średnio wyborcy z tej grupy powinni akceptować co najmniej ℓ członków wybranego komitetu ($\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell$).

Powyższa własność jest bardzo pożądana, ale nie istnieje reguła wyborcza, która by ją spełniała. Aby się o tym przekonać, spójrzmy na następujący przykład:

$$\begin{array}{cccc} v_1: \{\text{członek 1}, \text{członek 2}\} & v_4: \{\text{członek 1}, \text{członek 3}\} & v_7: \{\text{członek 2}, \text{członek 3}\} & v_{10}: \{\text{członek 3}, \text{członek 4}\} \\ v_2: \{\text{członek 1}\} & v_5: \{\text{członek 2}\} & v_8: \{\text{członek 3}\} & v_{11}: \{\text{członek 4}\} \\ v_3: \{\text{członek 1}\} & v_6: \{\text{członek 2}\} & v_9: \{\text{członek 3}\} & v_{12}: \{\text{członek 4}\}. \end{array}$$

Przyjmijmy, że $k = 3$. W tym przykładzie grupa wyborców v_1, \dots, v_4 stanowi $1/3$ społeczeństwa i zgadza się co do kandydata członek 1 . Wyborcy ci powinni zatem akceptować średnio co najmniej jednego członka komitetu, więc członek 1 musi zostać wybrany jako członek zwycięskiego komitetu (gdybyśmy nie wybrali członek 1 , to nawet przy wyborze członek 2 i członek 3 wyborcy v_1, \dots, v_4 akceptowaliby średnio tylko $1/2$ członków wybranego komitetu). Analogiczne rozumowanie zastosowane do grupy v_4, \dots, v_7 pozwala nam stwierdzić, że również członek 2 musi być członkiem zwycięskiego komitetu. I tu podobnie stwierdzamy, że członek 3 oraz członek 4 muszą zostać wybrani. Jest to niemożliwe, ponieważ możemy wybrać jedynie trzech kandydatów.

Możemy natomiast delikatnie osłabić powyższą własność: będziemy wymagać, aby grupa wyborców V , która spełnia warunki $|V| \geq \ell \cdot n/k$ i $|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$ (czyli grupa, której intuicyjnie powinno przysługiwać prawo wyboru ℓ członków komitetu), akceptowała średnio co najmniej $\ell - 1$ wybranych kandydatów. W definicji silnej proporcjonalności zmieniamy warunek $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell$ na $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| \geq \ell - 1$ i tę własność będziemy nazywać *slabą proporcjonalnością*.



³Formalne wykazanie, że jakakolwiek reguła wyborcza licząca punkty przy użyciu innej funkcji niż funkcja harmoniczna $H(r)$ nie spełnia słabej proporcjonalności, wymaga dłuższego dowodu. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do pracy [1] (Twierdzenie 11). Pokażemy jednak, jak przeprowadzić takie rozumowanie w konkretnym przypadku. Załóżmy, że liczymy punkty, używając funkcji $g(r) = r/H(r)$ zamiast $H(r)$, czyli że używamy funkcji rosnącej szybciej niż funkcja harmoniczna. Rozważmy teraz wybory, w których 70 wyborców akceptuje kandydatów c_1, \dots, c_{10} i 30 wyborców akceptuje kandydatów c_{11}, \dots, c_{20} . Niech $k = 10$. Łatwo sprawdzić, że komitet, który maksymalizuje wynik punktowy, składa się z 9 kandydatów spośród c_1, \dots, c_{10} i jednego kandydata spośród c_{11}, \dots, c_{20} – taki maksymalny wynik punktowy to $70 \cdot 9/H(9) + 30 \cdot 1/H(1) \approx 252,7$. Zatem w tym wypadku grupa 30 wyborców akceptuje średnio tylko jednego kandydata z wybranego komitetu. Własność słabej proporcjonalności wymaga, aby członkowie tej grupy akceptowali średnio co najmniej dwóch kandydatów z wybranego komitetu. Pokazuje to, że użycie funkcji $g(r) = r/H(r)$ nie daje własności słabej proporcjonalności.

Reguła PAV spełnia własność słabej proporcjonalności, co udowodnimy poniżej. Co więcej, gdybyśmy w regule PAV liczyli punkty komitetu, używając innej funkcji niż harmoniczna $H(r) = \sum_{i=1}^r 1/i$, to taka reguła już nie spełniałaby własności słabej proporcjonalności³. Innymi słowy, to właśnie użycie liczb harmonicznych w definicji reguły PAV sprawia, że reguła ta jest proporcjonalna.

Twierdzenie ([2]). *Reguła PAV spełnia własność słabej proporcjonalności.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że reguła PAV wybrała komitet S oraz że istnieje grupa wyborców V i liczba $\ell \geq 1$ taka, że:

- (i) $|V| \geq \ell \cdot n/k$,
- (ii) $|\bigcap_{i \in V} A(i)| \geq \ell$ oraz
- (iii) $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| < \ell - 1$.

Wykażemy, że z komitetu S możemy usunąć jednego kandydata, a w zamian dodać innego, tak że wynik punktowy komitetu $\text{pkt}(S)$ wzrośnie. Będzie to sprzeczność z tym, że komitet S został wybrany przez regułę PAV; wszak PAV wybiera tylko te komitety, których wartość punktowa jest najwyższa.

Dla każdego wybranego kandydata $c \in S$, przez $\Delta(c)$ oznaczymy wartość, o którą zmniejszy się wynik punktowy S , gdy usuniemy z niego c . Formalnie $\Delta(c) = \text{pkt}(S) - \text{pkt}(S \setminus \{c\})$. Przez $N(c)$ oznaczymy zbiór wyborców, którzy akceptują kandydata c , $N(c) = \{i \in N : c \in A(i)\}$. Oszacujemy sumę $\sum_{c \in S} \Delta(c)$:

$$\begin{aligned} \sum_{c \in S} \Delta(c) &= \sum_{c \in S} (\text{pkt}(S) - \text{pkt}(S \setminus \{c\})) = \\ &= \sum_{c \in S} \sum_{i \in N} (\text{H}(|A(i) \cap S|) - \text{H}(|A(i) \cap (S \setminus \{c\})|)) = \\ &= \sum_{c \in S} \sum_{i \in N(c)} (\text{H}(|A(i) \cap S|) - \text{H}(|A(i) \cap S| - 1)) = \\ &= \sum_{c \in S} \sum_{i \in N(c)} \frac{1}{|A(i) \cap S|} = \sum_{i \in N} \sum_{c \in A(i) \cap S} \frac{1}{|A(i) \cap S|} = \\ &= \sum_{i \in N : |A(i) \cap S| \geq 1} \left(|A(i) \cap S| \cdot \frac{1}{|A(i) \cap S|} \right) \leq |N| = n. \end{aligned}$$

Zatem ponieważ $|S| = k$, istnieje kandydat $c_r \in S$, dla którego $\Delta(c_r) \leq n/k$.

Rozważmy teraz kandydata c_a , który jest akceptowany przez wszystkich wyborców z V oraz który nie został wybrany do zwycięskiego komitetu. Taki kandydat zawsze istnieje; jeżeli wszyscy kandydaci z $\bigcap_{i \in V} A(i)$ należeliby do S , to oznaczałoby, że wyborcy z V akceptują średnio co najmniej ℓ członków S ; założyliśmy jednak, że $\frac{1}{|V|} \cdot \sum_{i \in V} |A(i) \cap S| < \ell - 1$. Niech $\Delta(c_a)$ oznacza wartość, o jaką zwiększy się wynik punktowy komitetu S , gdy dodamy do niego c_a , $\Delta(c_a) = \text{pkt}(S \cup \{a\}) - \text{pkt}(S)$. Mamy:

$$\begin{aligned} \Delta(c_a) &= \sum_{i \in N} (\text{H}(|A(i) \cap (S \cup c_a)|) - \text{H}(|A(i) \cap S|)) \geq \\ &\geq \sum_{i \in V} (\text{H}(|A(i) \cap S| + 1) - \text{H}(|A(i) \cap S|)) = \sum_{i \in V} \frac{1}{|A(i) \cap S| + 1} \geq \end{aligned}$$

(z nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną)

$$\begin{aligned} &\geq \frac{|V|^2}{\sum_{i \in V} (|A(i) \cap S| + 1)} = \frac{|V|^2}{\sum_{i \in V} |A(i) \cap S| + |V|} > \frac{|V|^2}{|V|(\ell - 1) + |V|} = \\ &= \frac{|V|}{\ell} \geq \frac{\ell \cdot n/k}{\ell} = n/k. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem, że $\Delta(c_a) > \Delta(c_r)$. Ponadto gdy dodamy c_a do mniejszego komitetu, np. do $S \setminus \{c_r\}$, to wynik punktowy wzrośnie bardziej, niż gdybyśmy dodali c_a do S . Zatem gdy w komitecie S wymienimy c_r na c_a , to otrzymamy komitet o wyższym wyniku punktowym niż S . To daje sprzeczność, ponieważ reguła PAV w takim wypadku powinna wybrać $(S \setminus \{c_r\}) \cup \{c_a\}$ zamiast S . \square

Literatura

- [1] H. Aziz, M. Brill, V. Conitzer, E. Elkind, R. Freeman, and T. Walsh. Justified representation in approval-based committee voting. *Social Choice and Welfare*, 48(2):461–485, 2017.
- [2] H. Aziz, E. Elkind, S. Huang, M. Lackner, L. Sánchez-Fernández, and P. Skowron. On the complexity of extended and proportional justified representation. In *Proceedings of the 32nd Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2018)*, pages 902–909, 2018.