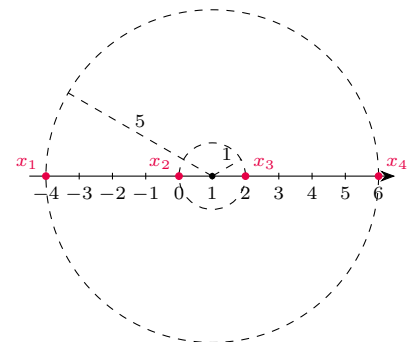
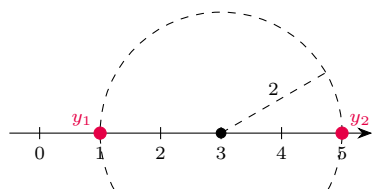


Bezwzględne matrioszki

Paweł Rafał BIELIŃSKI*

* Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Ćwiczenie. Rozwiąż równania:

- $||x - 3| - 2| = 1$
- $||x - 3| - 2| = 2$
- $||x - 2| - 5| = -2$
- $||x - 1| + 6| = 1$

Otrzymaliśmy więc cztery różne rozwiązania. Stało się tak dlatego, że do każdej wartości y prowadziły dwie wartości x . Nie musiało tak być – Czytelnik zechce sam się przekonać, rozwiązując równania zaproponowane na marginesie.

Przekonaliśmy się właśnie, że otrzymane dwa przypadki mogą mieć różną liczbę rozwiązań, co oczywiście wpływa zasadniczo na rozwiązania równania wyjściowego. W szczególności, może ono nie mieć rozwiązań, nawet jeśli otrzymaliśmy dwie różne wartości pomocniczej niewiadomej y .

Zwróćmy też uwagę, że pomiędzy tymi przypadkami nie może zaistnieć „kolizja”, tzn. nie mogą one prowadzić do wspólnego rozwiązania. Istotnie, dla różnych wartości y_1 i y_2 odległość x od a nie może być naraz równa y_1 i y_2 . Wobec tego żadna liczba nie może być jednocześnie rozwiązaniem równań $|x - a| = y_1$ i $|x - a| = y_2$.

Liczba rozwiązań równania $||x - a| - b| = c$ zależy więc jedynie od rozwiązań równania pomocniczego $|y - b| = c$. Każde jego rozwiązanie $y > 0$ generuje dwa dodatkowe rozwiązania x , rozwiązanie $y = 0$ daje jedynie $x = a$, wreszcie $y < 0$ nie daje żadnego nowego x .

Uogólnienie

Popatrzmy na doświadczenie ostatniego przykładu nieco szerzej. Jeśli dane są liczby $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n$, to liczb x , które spełniają którekolwiek z równań $|x - a| = y_1, |x - a| = y_2, \dots, |x - a| = y_n$ jest dokładnie $2n$. Przy tym jeśli $a > y_n$, to wszystkie one są dodatnie; jeśli $a = y_n$, to jednym z tych rozwiązań jest 0.

Najprostsze równania, jakie spotykamy np. w zadaniach tekstowych, mają zwykle jedno i tylko jedno rozwiązanie. Czasem zdarza się, że nie mają ich wcale, albo mają nieskończenie wiele. Natomiast najbardziej podstawowe równanie z wartością bezwzględną

$$|x - a| = r$$

może mieć 0, 1 albo 2 rozwiązania, zależnie od wartości parametru r .

Rozwiązując je, warto podeprzeć się interpretacją geometryczną: wielkość $|s - t|$ jest odległością punktów, które na osi liczbowej odpowiadają liczbom s i t . Mówiąc krócej, jest to odległość liczby s od liczby t .

Okazuje się, że używając wartości bezwzględnej, można stworzyć równanie o dowolnej pożądanej liczbie rozwiązań. Przedstawienie odpowiedniej konstrukcji jest celem niniejszego artykułu.

Inspiracja

Na początek rozprawmy się z równaniami $||x - a| - b| = c$.

Rozwiążemy szczególny przypadek

$$||x - 1| - 3| = 2.$$

Przyjmując na chwilę oznaczenie $|x - 1| = y$, widzimy, że x jest rozwiązaniem podanego równania, jeśli i tylko jeśli y jest rozwiązaniem prostszego równania $|y - 3| = 2$. Zatem y jest liczbą odległą o 2 od 3, czyli $y = 1$ albo $y = 5$.

Teraz zauważmy, że x rozwiązuje równanie wyjściowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem któregoś z równań:

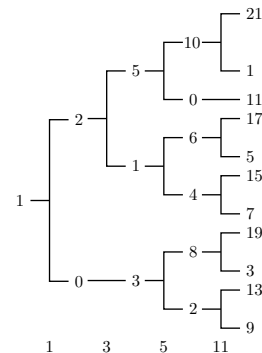
$$\text{a. } |x - 1| = 1 \quad \text{b. } |x - 1| = 5.$$

Przy tym w przypadku a. otrzymujemy $x = 0$ albo $x = 2$, zaś w b. mamy $x = -4$ albo $x = 6$. Rozwiązaniami wyjściowego równania są wszystkie liczby $-4, 0, 2, 6$.

Wykorzystując ten fakt, możemy z równania o pewnej liczbie n dodatnich rozwiązań skonstruować nowe, które ma $2n$ rozwiązań dodatnich lub $2n - 1$ dodatnich i jedno równe 0. Natomiast z równania o $n - 1$ rozwiązaniach dodatnich i jednym zerowym możemy, tą samą metodą, uzyskać nowe, o $2n - 1$ rozwiązaniach.

Na przykład równanie $|y - 5| = 1$ ma dwa dodatnie rozwiązania: 4 i 6. Aby uzyskać z niego równanie o czterech dodatnich rozwiązaniach, wybierzemy liczbę większą niż 6, np. 10, i uzyskamy $||x - 10| - 5| = 1$. Gdybyśmy jednak chcieli, by jednym z rozwiązań było 0, wybralibyśmy liczbę 6 i zapisali $||x - 6| - 5| = 1$.

Dzięki tym obserwacjom łatwo uzasadnić, że równanie z wartością bezwzględną może mieć dowolną z góry zadaną liczbę rozwiązań. Przeprowadzenie szczegółowego dowodu, być może z użyciem wzmocnionej zasady indukcji, pozostawiamy Czytelnikowi. Tutaj zadowolimy się pokazaniem konstrukcji na jeszcze jednym przykładzie.



Stwórzmy mianowicie równanie o dokładnie 11 dodatnich rozwiązaniach. Najpierw ustalmy, jakie równania pomocnicze będą nam potrzebne:

- $11 = 2 \cdot 6 - 1,$
- $6 = 2 \cdot 3,$
- $3 = 2 \cdot 2 - 1,$
- $2 = 2 \cdot 1.$

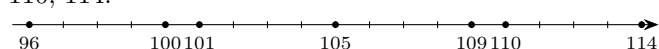
Następnie budujemy te równania, w kolejności odwrotnej niż otrzymana powyżej:

- d. $|x - 1| = 1$ (2 rozwiązania, największe 2),
 c. $||x - 3| - 1| = 1$ (3 rozwiązania, największe 5),
 b. $|||x - 5| - 3| - 1| = 1$ (6 rozwiązań, największe 10),
 a. $||||x - 11| - 5| - 3| - 1| = 1$ (11 rozwiązań).

Czytelnik Wnikliwy zechce przedstawić na osi liczbowej rozwiązania kolejnych równań $a. - d.$ wraz z kolejno dobieieranymi parametrami: 1, 3, 5, 11. Będzie to z pewnością ciekawe i pouczające doświadczenie.

Zadania

- Ułóż równanie z wartością bezwzględną, które ma 6 rozwiązań dodatnich i 8 ujemnych.
- Ułóż równanie z wartością bezwzględną, którego rozwiązaniami są wyłącznie liczby 96, 100, 101, 105, 109, 110, 114.



3. Operacja $*$ działa na liczby całkowite i jest określona następująco: jeśli n jest liczbą parzystą, to $n* = n/2$; w przeciwnym przypadku $n* = n + 5$. Rozwiąż następujące równania:

- a. $n * * * * = 211$,
 b. $((n + 11) * + 11) * + 11 = 11$,
 c. $((n + 38) * + 38) * + 38 = 31$.

4. Wyjaśnij, od czego i w jaki sposób zależy liczba rozwiązań równania $((n + a) * + b) * + c = d$.

5. Operacja $\&$ działa na liczby całkowite i jest określona następująco: jeśli n jest liczbą podzielną przez 3, to $\&n = n/3$; w przeciwnym razie, jeśli n jest podzielna przez 2, to $\&n = n/2$; w pozostałych przypadkach $\&n = n + 1$. Rozwiąż następujące równania:

- a. $\&\&\&n = 101$ b. $\&(\&n + 5) = 12$

6. Rozwiąż równanie $\&|(5x) * + 1| = 13$. Zwróć uwagę, że $5x$ musi być liczbą całkowitą, ale x już niekoniecznie.

Rozwiązania zadań można znaleźć na stronie 16.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1687. Liczby całkowite dodatnie a, b są takie, że $a | b + 1$. Udowodnij, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie x, y, z , że

$$a = \frac{x + y}{z} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{xy}{z}$$

Rozwiązanie na str. 3

M 1688. Na okręgu znajduje się $n > 3$ punktów, każdy z nich pomalowany jest na czerwono lub niebiesko. Dla każdej trójki kolejnych punktów P, Q, R , jeśli P i R są pomalowane na ten sam kolor, to punkt Q można przemalować (z czerwonego na niebieski lub z niebieskiego na czerwony). Dla jakich n z dowolnego układu kolorów punktów można zrobić układ, w którym wszystkie punkty są w tym samym kolorze?

Rozwiązanie na str. 2

M 1689. W czworobocianie $ABCD$ punkty I i J są środkami sfer: wpisanej i dopisanej (stycznej do ściany BCD). Niech prosta IJ przecina sferę opisaną na $ABCD$ w punkcie $K \neq A$. Który z odcinków jest dłuższy: IK czy JK ?

Rozwiązanie na str. 1

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1033. Zadania dotyczące spadku swobodnego i rzutu ukośnego zwykle kończy polecenie: „zaniedbaj opór powietrza”. Dla jakiego zakresu prędkości v ruchu metalowej kulki o średnicy $D = 1$ cm takie przybliżenie jest poprawne? Wiemy, że wartość siły oporu F podczas ruchu ciała w gazie wynosi:

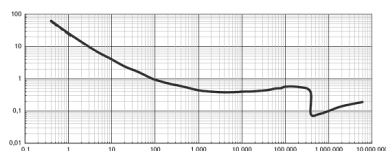
$$F = \frac{1}{2} c \rho_p S v^2,$$

ρ_p jest gęstością gazu, S polem przekroju ciała prostopadle do kierunku prędkości, a c współczynnikiem zależnym od kształtu ciała. Wartość c jest funkcją liczby Reynoldsa $Re = \frac{vD}{\nu}$. Dla powietrza tzw. lepkość kinematyczna $\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, a gęstość $\rho_p = 1,2 \text{ kg}/\text{m}^3$. W zakresie wartości $400 \leq Re \leq 200\,000$ współczynnik $c \approx 0,5$. Przybliżenie uznamy za poprawne, gdy pominięta siła oporu stanowi nie więcej niż $\varepsilon = 0,05$ ciężaru kulki. Porównaj wyniki dla kulki stalowej o gęstości $\rho_S = 8000 \text{ kg}/\text{m}^3$ i aluminiowej o $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg}/\text{m}^3$. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m}/\text{s}^2$.

Rozwiązanie na str. 7

F 1034. Podczas badań powierzchni ciał stałych na świeżo utworzonej powierzchni (np. po rozłupaniu kryształu) osadzają się cząsteczki gazu otaczającego próbkę. Jak szybkość osadzania się cząsteczek gazu zależy od jego ciśnienia p nad powierzchnią próbki?

Rozwiązanie na str. 18



Zależność współczynnika c od liczby Reynoldsa dla kulki. Źródło: Wikipedia