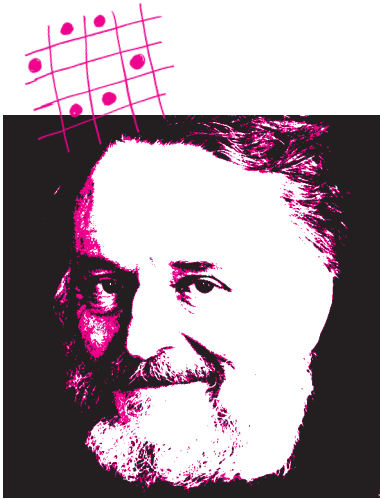


# John Horton Conway (1937–2020)

Józef H. PRZYTYCKI\*, Witold ROSICKI\*\*

\*George Washington University  
i Uniwersytet Gdański

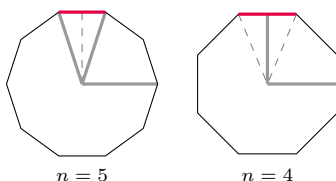
\*\*Wydział Matematyki, Fizyki  
i Informatyki, Uniwersytet Gdański



## Rozwiązania zadań, a w zasadzie szkice rozwiązań z artykułu „ $3 \leq \pi \leq 4$ ”

**Rozwiązanie zadania 1.** Dla  $(x, y) \neq (0, 0)$  zachodzi nierówność  $\|A\|^2 > 0$ , skąd można wywnioskować  $ac > b^2$ . Postać kanoniczna  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$  sugeruje postać przekształcenia liniowego  $(x, y) \mapsto (z, w)$ , dla którego  $(x, y) \in \mathbb{S}$  jest równoważne  $z^2 + w^2 = 1$ . Pozostaje sprawdzić, że długość dowolnej łamanej (liczona zgodnie z normą  $\|\cdot\|$ ) jest równa długości jej obrazu (liczonej zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa).

**Rozwiązanie zadania 2.** W obu przypadkach długość okręgu jednostkowego to po prostu  $2\pi$  razy długość boku, ale obliczona zgodnie z normą. Aby wyznaczyć długość pojedynczego boku (czerwony odcinek), porównujemy go z równoległym odcinkiem długości 1 (szary odcinek). Dla nieparzystego  $n$  ta proporcja wynosi  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$ , więc jako obwód otrzymujemy  $4n \sin(2\pi/4n)$ . Ponieważ  $\sin x < x$ , jest to mniejsze od  $2\pi$ . Dla parzystego  $n$  sytuacja jest jakościowo inna. Niemniej łatwo wyznaczyć obwód równy  $4n \operatorname{tg}(2\pi/4n)$ , a skoro  $\operatorname{tg} x > x$ , to wynik jest większy od  $2\pi$ .



11 kwietnia 2020 roku zmarł w New Brunswick, w stanie New Jersey w USA, znakomity i wszechstronny angielski matematyk John Horton Conway.

Urodził się 26 grudnia 1937 roku w Liverpoolu. Studiował matematykę w Gonville and Caius College na Uniwersytecie Cambridge. W 1959 roku uzyskał z wyróżnieniem licencjat, w 1964 roku obronił pracę doktorską zatytułowaną *Homogeneous ordered sets*. W 1981 roku Conway został wybrany na członka The Royal Society of London, w 1983 roku otrzymał stanowisko profesora matematyki Uniwersytetu Cambridge, a od roku 1986 pracował jako profesor matematyki w Uniwersytecie Princeton, gdzie objął katedrę imienia Johna von Neumana.

John H. Conway miał bardzo rozległe zainteresowania matematyczne: uzyskał wiele wyników w teorii grup skończonych, teorii węzłów, teorii liczb, teorii gier kombinatorycznych i teorii kodowania. Wniósł także znaczący wkład do matematyki rekreacyjnej.

W roku 1970 stworzył „Grę w życie” (*Game of Life*), jeden z najbardziej znanych automatów komórkowych. W tej grze nie ma przeciwników; na nieskończonej planszy podzielonej na kwadraty jak szachownica znajdują się „żywe” i „martwe” komórki. Człowiek ustala tylko stan początkowy, a następujące reguły wyznaczają jej wygląd w przyszłości:

- Martwa komórka, która ma dokładnie trzech żywych sąsiadów, spośród ośmiu, staje się żywa w następnej jednostce czasu (rodzi się).
- Żywa komórka z dwoma albo trzema żywymi sąsiadami pozostaje nadal żywa; przy innej liczbie sąsiadów umiera (z „samotności” albo „zatłoczenia”).

Zarówno ta gra, jak i jej modyfikacje doskonale obrazują pewne procesy biologiczne i fizyczne.

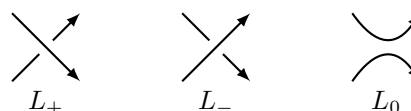
Historia powstania „Game of life” sięga początku lat 60. XX wieku; Conway zainspirowany pracami Stanisława Ulama i Roberta Schrandta eksperymentował z układami sąsiadów i regułami zmian. Zasady obowiązujące w „Grze w życie” wybrał dlatego, że pozwalały utrzymać równowagę pomiędzy rozrastaniem się struktur z jednej strony a znikaniem komórek z drugiej.

Jeszcze jako uczeń szkoły średniej Conway zafascynował się węzłami. Jego jedyna opublikowana praca na ten temat [2] ma swoje źródła już w tym okresie. W swoim artykule Conway wprowadza notację nazwaną dziś jego nazwiskiem. Zacytujmy z [2]: *Opisujemy notację, która pozwala na ręczne wyliczenie wszystkich węzłów, które mają nie więcej niż 11 skrzyżowań, i wszystkich splotów, które mają ich nie więcej niż 10. Rozważamy też pewne własności algebraicznych niezmienników węzłów, których odkrycie było konsekwencją jej wprowadzenia.*

Co istotniejsze, praca zawiera wielomianowy niezmiennik, również nazywany dziś nazwiskiem Conwaya, a także pojęcie supła (*tangle*).

Wprowadzony przez Conwaya wielomian jest niezmiennikiem węzłów i splotów, czyli położenia krzywej (rozważamy tylko krzywe gładkie lub wielościennie) zwykłej zamkniętej lub kilku takich rozłącznych krzywych w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , a wylicza się go z diagramu. (Diagramem nazywamy tu taki rzut splotu na płaszczyznę, że wszystkie przecięcia łuków są transwersalne i nie ma punktów o większej krotności niż dwa; łuk dolny w każdym skrzyżowaniu zaznaczamy przerwą). Wielomian  $\Delta_L(t)$  splotu  $L$  definiuje się mianowicie następująco:

- Jeśli  $L$  jest niezawężloną krzywą zwykłą zamkniętą, to  $\Delta_L(t) = 1$ .
- Jeśli sploty  $L_+$ ,  $L_-$  i  $L_0$  różnią się tylko na jednym skrzyżowaniu, tak jak na rysunku,

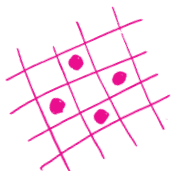
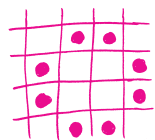


to zachodzi tak zwana relacja motkowa:

$$(*) \quad \Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})\Delta_{L_0}(t).$$

Warunki te jednoznacznie wyznaczają niezmiennik splotu.

Wielomian Conwaya jest wariantem wielomianu Alexandera umiejętnie znormalizowanym poprzez dobór  $\Delta_{L_+}$ ,  $\Delta_{L_-}$  i  $\Delta_{L_0}$ , co sprawia, że można go wyliczyć bezpośrednio z diagramu; Conway podkreśla w [2], że jego metoda jest dobra do obliczeń komputerowych. Zaznaczmy, że James W. Alexander w swej pracy wzmiankuje relację motkową, która jednak z wyłuszczonej wyżej powodów zależy u niego od wyboru wielomianów  $\Delta_{L_+}$ ,  $\Delta_{L_-}$  i  $\Delta_{L_0}$ , a to powoduje, że jej użyteczność nie jest widoczna. Dopiero Conway zauważył, że – dzięki omówionej wyżej normalizacji – rozszerzając pierścień o  $\sqrt{t}$ , zależność motkową można zapisać uniwersalnie, w postaci (\*), z warunkiem początkowym  $\Delta_{L_0} = 1$ .



W roku 1984 Vaughan Jones skonstruował wielomianowy niezmiennik splotów, który spełnia relację motkową podobną do (\*), ale który nie ma widocznych związków z grupą podstawową dopełnienia splotu. Za swój wielomian i jego ramifikację otrzymał w 1990 roku medal Fieldsa. Wkrótce potem ukazało się pięć prac, których autorami byli Hoste, Ocneanu, Lickorish i Millett, Freyd i Yetter oraz Przytycki i Traczyk; wprowadzono w nich ogólniejszą relację w przestrzeni wielomianów dwóch zmiennych, z warunkiem początkowym  $P_{T_1}(v, z) = 1$  dla  $T_1$  będącego trywialnym węzłem. Otrzymano w ten sposób tak zwany wielomian HOMFLYPT (akronim stworzony z pierwszych liter ww. nazwisk) i oznaczany  $P_L(v, z)$ , który także jest niezmiennikiem. Zazwyczaj powiązana z nim relacja motkowa zapisywana jest jako

$$v^{-1}P_{L_+}(v, z) - vP_{L_-}(v, z) = zP_{L_0}(v, z).$$

Innym ważnym odkryciem Conwaya z zakresu teorii węzłów jest algebraiczny obiekt nazywany przez niego wrakiem; wrak to magma, to znaczy zbiór z dwuargumentową operacją  $*$ , która jest odwracalna i spełnia warunek prawej samorozdzielności:

$$(a * b) * c = (a * c) * (b * c).$$

Aksjomaty wraka są algebraicznym odbiciem drugiego i trzeciego ruchu Reidemeistera:



Minęło wiele lat, nim pojęcie to doczekało się rozkwitu badań mu poświęconych. W szczególności wiąże się ono ściśle z równaniem Yanga–Baxtera, znanym w mechanice statystycznej [6].

Ostatnie znane twierdzenie J. H. Conwaya to „Free Will Theorem”, wynik z pogranicza fizyki. Siobhan Roberts [9] wyjaśnia je następująco. *Twierdzenie, które Conway i Simon B. Kochen udowodnili w 2004 roku, obrazuje zasadę (tak podejrzaną dla Einsteina), że nie ma ukrytych parametrów rządzących mechaniką kwantową: jeśli eksperymentator może dowolnie decydować, które wartości mierzyć w danym eksperymencie, to cząstki elementarne mogą „wybierać” swoje spiny tak, aby pomiar był zgodny z zasadami fizyki kwantowej. W skrócie – „Jeśli eksperymentator ma wolną wolę, to mają ją także cząstki elementarne”.*

Wkrótce po publikacji tego twierdzenia J. H. Conway przeszedł udar mózgu, po którym tylko częściowo wrócił do zdrowia.

### Nagrody i wyróżnienia

Dokonania Conwaya zyskały olbrzymie uznanie w świecie nauki. Był on wielokrotnie wyróżniany i nagradzany: otrzymał Berwick Prize (1971), został Fellow of the Royal Society (1981) i członkiem American Academy of Arts and Sciences (1992), otrzymał Pólya Prize (LMS) (1987), Nemmers Prize in Mathematics (1998) i przyznaną przez American Mathematical Society nagrodę Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition (2000). W 2001 przyznano mu doktorat honorowy University of Liverpool, a w roku 2014 doktorat honorowy Alexandru Ioan Cuza University. W 2017 otrzymał też honorowe członkostwo British Mathematical Association.

### Literatura

- [1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), 275–306.
- [2] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links*, Computational Problems in Abstract Algebra (ed. J. Leech), Pergamon Press, 1969, 329–358.
- [3] J. H. Conway, G. Wraith, Korespondencja między Conwayem i Wraithem, 1959, *Wrak spełnia dwa aksjomaty: odwracalność i prawą samo-rozdzielność*.
- [4] L. H. Kauffman, *Recalling John Conway*, ukaże się w Notices of the American Mathematical Society.
- [5] H. R. Morton, *Mutant knots*, In: New ideas in low dimensional topology, 379412, Ser. Knots Everything 56, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.
- [6] J. H. Przytycki, *Knots and distributive homology: from arc colorings to Yang–Baxter homology*, Chapter in: New Ideas in Low Dimensional Topology, World Scientific 56 (2015), 413–488, e-print: arXiv:1409.7044 [math.GT].
- [7] J. H. Przytycki, P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. 4 (1987), 115–139.
- [8] J. H. Przytycki, P. Traczyk, *Conway algebras and skein equivalence of links*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 4, 744–748.
- [9] S. Roberts, *Genius at Play, The Curious Mind of John Horton Conway*, Bloomsbury, 2015.
- [10] A. S. Sikora, *On Conway algebras and the Homflypt polynomial*, J. Knot Theory Ramifications 6 (1997), no. 6, 879–893.
- [11] P. Traczyk, *Conway polynomial and oriented rotant links*, Geom. Dedicata 110 (2005), 49–61.
- [12] Autorzy wykorzystali także materiały z Wikipedii.