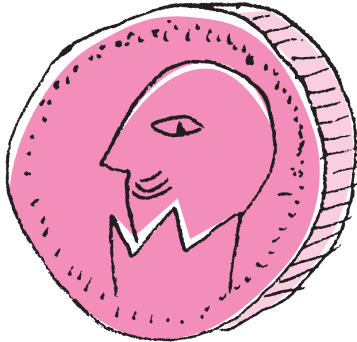


Jak rzucić monetą, której nie ma?

Stanisław CICHOMSKI*

*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rzut monetą jest jedną z najstarszych metod podejmowania decyzji i rozstrzygania sporów. Jeśli stoisz na rozstaju dróg i nie wiesz, dokąd iść, ale musisz wybrać – *w lewo czy w prawo?* – rzut monetą może być całkiem rozsądnym rozwiązaniem. Cóż z tego, skoro moneta, którą trzymasz w kieszeni, zupełnie się do tego nie nadaje... Potrzebujesz przecież monety symetrycznej, takiej, której awers i rewers wypadają z równym prawdopodobieństwem. Twój dukat na symetryczny nie wygląda: z jednej strony wybito krzywego orła, druga przedstawia podobiznę łysego króla.

Załóżmy zatem, że szansa na wyrzucenie orła wynosi p , gdzie $p \in (0, 1)$ jest pewną nieznaną stałą. **Czy istnieje procedura, która w oparciu o serię rzutów naszym dukatem pozwoli nam decydować, czy skrócić w lewo, czy w prawo – z równymi prawdopodobieństwami?** Czy korzystając z monety o nieznanym wyważeniu, da się zasymulować rzut monetą idealnie symetryczną?

Przez D_1, D_2, D_3, \dots oznaczmy kolejne rzuty dukatem. Niech O (orzwał) i R (reszka) będą możliwymi wynikami pojedynczego rzutu. Zakładamy naturalnie, że wszystkie rzuty są niezależne, skąd np.

$$\mathbb{P}(O, O, R, O, R) = \mathbb{P}(D_1 = O)^3 \cdot \mathbb{P}(D_1 = R)^2 = p^3(1-p)^2.$$

Prawdopodobieństwo ustalonego ciągu zależy od liczby występujących w nim orłów, ale nie zależy już od ich kolejności. W poszukiwaniu symetrii przyjrzyjmy się podwójnemu rzutowi (D_1, D_2) :

\mathbb{P}	$D_2 = O$	$D_2 = R$
$D_1 = O$	p^2	$p(1-p)$
$D_1 = R$	$(1-p)p$	$(1-p)^2$

Choć $p \in (0, 1)$ jest nieznanne, to niewątpliwie $\mathbb{P}(O, R) = \mathbb{P}(R, O)$, i mamy:

$$\mathbb{P}(O, R \mid D_1 \neq D_2) = \frac{\mathbb{P}(O, R)}{\mathbb{P}(D_1 \neq D_2)} = \frac{p(1-p)}{p(1-p) + (1-p)p} = \frac{1}{2},$$

tnz. szanse na wyrzucenie (O, R) i (R, O) , pod warunkiem $D_1 \neq D_2$, są takie same! Szukana procedura jest więc bardzo prosta – rzucamy dwoma dukatami (lub jednym dwukrotnie) aż do pierwszego momentu, gdy uzyskamy dwa różne wyniki:

- niech $i = \min \{j \geq 1 : D_{2j-1} \neq D_{2j}\}$,
- (a) jeśli $(D_{2i-1}, D_{2i}) = (O, R)$, skrócić w **lewo**,
(b) jeśli $(D_{2i-1}, D_{2i}) = (R, O)$, skrócić w **prawo**.

Odnotujmy, że $\mathbb{P}(i < \infty)$ wynosi oczywiście 1, czyli na pewno prędzej czy później będziemy w stanie podjąć decyzję. \square

Powyższą zagadkę wymyślił i spopularyzował genialny John von Neumann. Problem spodobał się niesłychanie – dziś rozrósł się w multum egzotycznych odmian, znanych zbiorczo pod hasłem *Fabryka Bernoulliego*. Niech $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ będzie ustaloną funkcją. *Fabryką Bernoulliego* funkcji f nazywamy każdą procedurę, która korzystając z ciągu niezależnych rzutów (*zmiennych Bernoulliego*) D_1, D_2, D_3, \dots , gdzie

$$\mathbb{P}(D_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(D_i = 0) = p, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots,$$

produkuje nową monetę (*zmienną*) M , o rozkładzie

$$\mathbb{P}(M = 1) = 1 - \mathbb{P}(M = 0) = f(p),$$

dla każdego wyboru $p \in (0, 1)$. Zagadce von Neumanna odpowiada po prostu funkcja stała $f \equiv \frac{1}{2}$.



Rozwiązanie zadania M 1711.

Niech $k = \frac{n}{d}$, $k' = \frac{n}{d'}$, gdzie $k > k'$.

Wtedy

$$k^2 > (k+1)(k-1) \geq (k+1)k',$$

więc $\frac{1}{k'} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$. Wobec tego

$$d' = \frac{n}{k'} > \frac{n}{k} + \frac{n}{k^2} = d + \frac{d^2}{n},$$

co było do pokazania.



Rozwiązanie zadania M 1712.

„Wędrujemy” po sektorach w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W pewnym momencie, tuż za niebieskim sektorem N , znajduje się czerwony sektor C . Bez straty ogólności możemy założyć, że n jest liczbą zapisaną w sektorze N . Niech liczba k będzie zapisana w sektorze C .

Rozważmy grupę k sektorów, patrząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zaczynając od C . Niech wśród nich będzie a niebieskich i b czerwonych sektorów. Niebieskie sektory zawierają liczby $1, 2, \dots, a$ zaś czerwone zawierają liczby $k, k-1, \dots, k-(b-1)$. Ponieważ $a+b=k$, to $k-(b-1) = a+1$, a to oznacza, że sektory te zawierają każdą z liczb od 1 do k dokładnie raz.

Rozważmy teraz grupę $n-k$ sektorów, patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zaczynając od sektora N . Niech wśród nich będzie c niebieskich i d czerwonych sektorów. Liczby w niebieskich sektorach to kolejno $n, n-1, \dots, n-(c-1)$, a liczby w czerwonych sektorach to odpowiednio $k+1, k+2, \dots, k+d$. Z równości $c+d = n-k$, podobnie jak wyżej, wnioskujemy, że każda z liczb od $k+1$ do n występuje dokładnie raz. Połączenie tych dwóch grup daje nam szukany półokrąg.

Zadanie 1. Zaprojektuj fabrykę Bernoulliego dla:

- (a) $f(p) = 1 - p$, (c) $f(p) = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$,
 (b) $f(p) = p^2 - 3p^3 + 3p^4 - p^5$, (d) $f(p) = \frac{1}{1+p}$.

Wskazówka do (d):
 $\frac{1}{1+p} = 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - \dots$



Przykład ciągu binarnego spełniającego a) i b) ($n = 5$):

1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0.

Nie należy sądzić, by wszystkie zadania tego typu były równie proste. Znalezienie odpowiedniej procedury wymaga czasem odrobiny szczęścia i niebagatelnej pomysłowości. Jako dobry przykład rozpatrzmy teraz przypadek fabryki Bernoulliego, którą Santosh Vempala zaprojektował dla funkcji $f(p) = \sqrt{p}$.

Na dobry początek zacznijmy od przedstawienia $f(p)$ w formie wyrobu wielomianopodobnego: rozwijając \sqrt{p} w szereg Taylora wokół punktu $p_0 = 1$, dla $p \in (0, 1)$ dostajemy tożsamość

$$(*) \quad \sqrt{p} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n+1}} (1-p)^{n+1},$$

gdzie $C_n := \binom{2n}{n+1} \frac{1}{n+1}$ (dla $n = 0$ mamy $C_0 = 1$). Początkowe wartości ciągu C_n to:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

Szczęśliwy traf polega na tym, że $(C_n)_{n \geq 0}$ to tzw. ciąg liczb Catalana, który pojawia się naturalnie w rozmaitych problemach kombinatorycznych dotyczących zliczania. W naszym przypadku pomocna będzie następująca charakteryzacja, której uzasadnienie można znaleźć w artykule Joanny Jaszuskiej *Drogi w kratach i kino* (Δ_{14}^{01}).

Istnieje dokładnie C_n takich ciągów binarnych długości $2n$, w których:

- a) występuje po równo n zer i n jedynek,
 b) w każdym początkowym podciągu występuje nie mniej jedynek niż zer.

I cóż z tego wynika? Otóż... clou programu polega na tym, by teraz chytrze zinterpretować prawą stronę (*). Rozważmy następujący eksperyment: rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż łączna liczba wyrzuconych orłów po raz pierwszy przekroczy liczbę wyrzuconych reszek – liczba orłów i reszek różni się wtedy o 1, skąd liczba wykonanych rzutów musi być nieparzysta. Szansa, że zdarzenie to zrealizuje się w $(2n + 1)$ -szym rzucie, wynosi zatem dokładnie $C_n \cdot 2^{-(2n+1)}$.

I to jest już prawie koniec – należy jeszcze sprytnie zauważyć, że rzucać symetryczną monetą nauczyliśmy się na samym początku! Niezawodna fabryka wygląda więc następująco:

1. Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż łączna liczba wyrzuconych orłów po raz pierwszy przekroczy liczbę wyrzuconych reszek; oznaczmy liczbę wykonanych rzutów przez τ .
2. Niech $\tau = 2n + 1$ (τ jest nieparzyste); wykonujemy $n + 1$ rzutów krzywym dukatem:

$D_1, D_2, \dots, D_n, D_{n+1}$,

- (a) jeśli $\max_{1 \leq i \leq n+1} D_i = 0$ (wypadły same reszki), **zwróć** $M = 0$,
 (b) jeśli $\max_{1 \leq i \leq n+1} D_i = 1$ (wypadł choć jeden orzeł), **zwróć** $M = 1$.

Dlaczego ten algorytm działa? Cóż, możemy wszakże roz�isać:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = 0 \mid \tau = 2n + 1) \mathbb{P}(\tau = 2n + 1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{n+1} \frac{C_n}{2^{2n+1}}, \end{aligned}$$

skąd $\mathbb{P}(M = 1)$ jest równe prawej stronie (*). \square

Kluczowym elementem poprzedniej konstrukcji było wielokrotne użycie triku von Neumanna. Skoro umiemy symulować rzut monetą symetryczną, to o następnych problemach możemy już myśleć tak, jakbyśmy taką właśnie monetą też już mieli w kieszeni.

Okazuje się, że można dokładnie scharakteryzować wszystkie te funkcje, dla których *Fabryka Bernoulliego* istnieje. Matematycy Michael S. Keane i George L. O'Brien pokazali bowiem, że rozwiązanie dla funkcji $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona następujące dwa warunki:

1. f jest ciągła,
2. f jest stała **lub** istnieje taka liczba całkowita n , że

$$\min \{f(p), 1 - f(p)\} \geq \min \{p^n, (1-p)^n\},$$

dla wszystkich $p \in (0, 1)$.

W szczególności, funkcje $f(p)$ zadane wzorem

$$\frac{1}{\pi}, \sqrt[3]{p}, \cos(p), e^{-p}, \log(1+p)$$

są wszystkie symulowalne (!) Z drugiej wszak strony, funkcji tak prostej jak

$$f(p) = \min\{1, 2p\}$$

nijak wyprodukować się nie da.