



Liczba i suma dzielników

Bartłomiej BZDEGA

Niech $\tau(n)$ i $\sigma(n)$ oznaczają odpowiednio liczbę i sumę dzielników liczby całkowitej dodatniej n . Rozważmy rozkład liczby n na czynniki pierwsze:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Na mocy zasadniczego twierdzenia arytmetyki liczba całkowita dodatnia d jest dzielnikiem liczby n wtedy i tylko wtedy, gdy można ją zapisać w postaci

$$(1) \quad d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad \text{przy czym } \beta_i \in \{0, 1, \dots, \alpha_i\} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, k.$$

Każdą z liczb β_i możemy wybrać niezależnie na $\alpha_i + 1$ sposobów, więc na mocy reguły mnożenia

$$(2) \quad \tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

W celu uzasadnienia wzoru na sumę dzielników

$$(3) \quad \sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}),$$

wymnażamy jego prawą stronę – jest ona równa

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = \sum_{d|n} d$$

na mocy (1).

Na koniec pokażę, jak można oszacować wartość $\sigma(n)$, znając tylko dzielniki pierwsze liczby n . Zauważmy, że dla liczby pierwszej p i liczby całkowitej $\alpha \geq 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{p+1}{p} = \frac{p^\alpha + p^{\alpha-1}}{p^\alpha} \leq \frac{1+p+p^2+\dots+p^\alpha}{p^\alpha} < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots = \frac{p}{p-1}.$$

Po wymnożeniu ich stronami dla liczb p_i, α_i przy $i = 1, 2, \dots, k$, na mocy (3), otrzymamy następujące nierówności:

$$(4) \quad \frac{p_1+1}{p_1} \cdot \frac{p_2+1}{p_2} \cdot \dots \cdot \frac{p_k+1}{p_k} \leq \frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k}{p_k-1}.$$

Zadania.

- Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , których liczba dzielników wynosi \sqrt{n} .
- Liczba całkowita dodatnia n ma dokładnie trzy razy mniej dzielników niż liczba n^2 . Ile dzielników może mieć liczba n ?
- Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które mają nieparzystą
 - liczbę dzielników,
 - sumę dzielników.
- Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią n . Wyrazić za pomocą funkcji τ liczbę rozwiązań równania $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ w liczbach całkowitych x i y .
- Liczby całkowite dodatnie m i n nazywamy *zaprzyjaźnionymi*, jeśli spełniają warunki $\sigma(n) = 2m$ i $\sigma(m) = 2n$. Dowieść, że jeśli m i n są liczbami zaprzyjaźnionymi, to iloczyn sumy odwrotności dzielników liczby n i sumy odwrotności dzielników liczby m jest równy 4.
- Liczbę całkowitą dodatnią n nazywamy *doskonałą*, jeśli $\sigma(n) = 2n$. Dowieść, że
 - nieparzysta liczba doskonała ma przynajmniej trzy różne dzielniki pierwsze;
 - parzysta liczba jest doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $2^{p-1}(2^p - 1)$, w której liczby p i $2^p - 1$ są pierwsze.
- Liczbę całkowitą dodatnią n nazwijmy *hiperdoskonałą*, jeśli $\sigma(n) = 3n$. Udowodnić, że jeśli liczba hiperdoskonała ma dokładnie trzy różne dzielniki pierwsze, to jest ona podzielna przez 6.
- Niech $n > 6$ będzie liczbą doskonałą oraz niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n . Dowieść, że w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze liczba p występuje z wykładnikiem parzystym.

Wskazówki do zadań

- Liczba n musi być kwadratem liczby naturalnej. Zapiszmy $n = 2^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots 2^{\alpha_k}$. Mamy do rozważania równość $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_k + 1) = 2n = 2^{\alpha_1 + 1} 2^{\alpha_2 + 1} \dots 2^{\alpha_k + 1}$. Skorzystaj z nietrudnej do wykazania nierówności $(2a + 1) > 2$ dla $a \geq 1$, więc mamy $\frac{2}{3} \leq \frac{2a+1}{2} < 2$ dla $a \geq 1$, więc jeśli liczba n ma dokładnie k różnych dzielników pierwszych, to $(3/2)^k \leq \frac{\tau(n)}{n} \leq \frac{\tau(n)}{2^k}$.
- Bezpośrednio ze wzoru (2) wynika, że $\tau(n)$ jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie α_i są parzyste. Rozważć osobno n parzyste i nieparzyste. Dla liczb pierwszych $1 + d + d^2 + \dots + d^\alpha$ jest inna niż 2 parzystość sumy $1 + d + d^2 + \dots + d^\alpha$ jest inna niż parzystość liczby α .
- Równanie to jest równażne równaniu $(x - n)(y - n) = n^2$ przy założeniu $x, y \neq 0$.
- Suma odwrotności dzielników liczby całkowitej dodatniej n jest równa $\sigma(n)/n$.
- (a) Prawa strona nierówności (4) maksymalizuje się dla możliwie najmniejszych liczb pierwszych – w tym przypadku 3, 5 i 7. (b) Podstawienie do wzoru (3) daje $\sigma(n) = 2n$.
- (\Rightarrow) Zapiszmy $n = 2^{\alpha-1} m$, przy czym $2 \nmid m$ i $\alpha \geq 2$. Wtedy $2^\alpha m = 2n = (2^\alpha - 1)\sigma(m)$. Liczby $2^\alpha - 1$ są względnie pierwsze, więc $\sigma(m) = t \cdot 2^\alpha$ i $m = t(2^\alpha - 1)$ dla pewnego $t \in \mathbb{Z}^+$. Przez szacowanie z dołu prawej strony równości $t \cdot 2^\alpha = \sigma(t(2^\alpha - 1))$ wykaż, że $t = 1$, a następnie, że liczba $2^\alpha - 1$ musi być pierwsza, z czego wynika, że α też jest liczbą pierwszą.
- Niech $d > r$ będą dzielnikami pierwszymi liczb hiperdoskonałej n . Postępując analogicznie jak w zadaniu 6(a), wykaż, że jeśli $d < 2 < \sigma(d) < 3n$. Powtórz rozumowanie dla $d = 2$ i $d < 3$.
- Niech $u = 2^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots 2^{\alpha_k}$, przy czym $2 \nmid m$. Jeśli $u = 2^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots 2^{\alpha_k} + 1 = (1 + 2^{\alpha_1})(1 + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_k})$, więc $2 \mid u$. Jeśli $2 < d < 2u$, jest $d < 2$ albo $d = 2$. Można teraz skorzystać z zadania 6(q) albo zauważyć, że $3 \mid u$, a jeśli $u \mid 9$ i $u \mid 6$, to $u = 1$.