



zatem ostatecznie dla pewnej stałej C

$$\sum_n \Pr(B_n) < C \cdot \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty,$$

co na podstawie heurystyki pozwala wnioskować, że **równanie (1) ma tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych** p, q . Być może w tabelce reprodukowanej w artykule *Liczby pierwsze jako niewiadome* są wszystkie rozwiązania (?).

Jednak najważniejsze pytanie, jakie sobie teraz zadaję, jest takie: **Czy teraz bardziej się Panu podoba?**

Na koniec odniosę się do Pana metody rysowania stycznych do krzywej $\mathcal{K} : x^3 + y^2 = 1$. Zaczęę od gratulacji: Ma Pan świetną intuicję! Przedstawiona przez Pana metoda nigdy nie zawodzi, a oto uzasadnienie.

Rozpatrywana krzywa $x^3 + y^2 = 1$ jest *eliptyczna*. Ma to szalone konsekwencje. Przede wszystkim pozwala określić sumę dwóch punktów P oraz Q naszej krzywej. Mianowicie, niech najpierw R oznacza trzeci punkt przecięcia prostej PQ z krzywą \mathcal{K} . Określamy

$$(6) \quad P \oplus Q = R',$$

używając Pana oznaczeń. Oczywiście w przypadku $Q = P$ zamiast prostej PQ trzeba poprowadzić styczną przez P . Ponadto do krzywej \mathcal{K} dokładamy „punkt w nieskończoności” ∞ , przyjmując $P \oplus \infty = P$ oraz $P \oplus P' = \infty$ dla każdego $P \in \mathcal{K}$.

Używając takiego dodawania punktów, operacje z Pana instrukcji można zakodować tak:

- 1 $P \oplus Q = R'$
- 2 $P \oplus R' = S'$
- 3 $S' \oplus Q' = T'$

To, że TP jest szukaną styczną, jest równoważne równości:

$$P \oplus P = T',$$

którą uzasadniamy, sumując równości 1–3, gdyż działanie dodawania punktów na krzywej \mathcal{K} , określone przez (6), jest przemienne, w cudowny sposób łączne i dopuszcza skracanie!

Jeśli powyższa odpowiedź zainteresowała Pana tematem krzywych eliptycznych, polecam Panu artykuł Tomasza Kazany *Krzywe eliptyczne w kryptografii z Delty* 8/2018. Tymczasem dziękuję za Pański list i życzę wiele radości z odkrywania matematyki.

Mariusz SKAŁBA

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niebo we wrześniu

We wrześniu Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe, obniżając przez 30 dni miesiąca wysokość swojego górowania o ponad 11° . Przełoży się to na wydłużenie czasu trwania nocy o prawie 100 minut. Słońce przetnie w drodze na południe równik niebieski 23 września i na naszej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna jesień.

Głównymi wydarzeniami września w tym roku są opozycje **Jowisza** 26. dnia miesiąca oraz **Neptuna** 10 dni wcześniej. Jowisz wędruje na tle gwiazdozbioru Ryb i zbliży się do Neptuna na niecałe 10° . Ostatnia planeta od Słońca wędruje zaś na tle gwiazdozbioru Wodnika 2° na zachód od gwiazdy 20 Psc. Niestety w tym roku Jowisz nie stanie się bardzo dobrą wskazówką do odszukania Neptuna, jak to było w lipcu 2009 r., gdy obie planety na krótko dzielił dystans mniejszy niż 1° .

Obecnie przypada wielka opozycja Jowisza, gdyż 20 stycznia przyszłego roku planeta przejdzie przez perihelium swojej orbity i w opozycji zbliży się do nas na mniej niż $4 AU$. Jak łatwo zauważyć, w tym roku Jowisz ma największe rozmiary kątowe i jasność. Porównując te wielkości w czasie wielkiej i małej opozycji, otrzymamy znaczną różnicę. W tym roku tarcza Jowisza osiągnie średnicę kątową $50''$ i jasność $-2,9^m$. Podczas gdy za 6 lat w momencie opozycji planeta zbliży się do nas tylko na $5,2 AU$ i jej średnica kątowa urośnie do $44''$, jasność natomiast zwiększy się do $-2,5^m$.

Orbita Neptuna znacznie bardziej przypomina okrąg i położenie tej planety na orbicie podczas opozycji nie ma wpływu na wielkość i jasność jego tarczy. Neptun, jak co roku, świeci blaskiem $+7,8^m$ i do jego dostrzeżenia potrzebna jest jedynie lornetka.

Z pozostałych planet dobrze widoczne są **Saturn**, **Mars** i **Uran** oraz planetoida (4) Westa. Saturn przeszedł przez opozycję w połowie sierpnia i można go obserwować przez większość nocy na tle gwiazdozbioru Koziorożca. Planeta we wrześniu zbliży się do gwiazdy 4. wielkości ι Cap na odległość 1° . W tym czasie jej jasność zmniejszy się do $+0,5^m$, przy średnicy tarczy $18''$. Saturn góruje około godziny 22, wznosząc się na wysokość mniej więcej 22° .

Planetoida Westa przebywa około 9° na południowy wschód od Saturna. Westa także w sierpniu przeszła przez opozycję względem Słońca, a we wrześniu pokona na niebie 4° , zaczynając miesiąc 1° na zachód od gwiazdy 5. wielkości 41 Aqr, by na jego koniec zbliżyć się na niecałe 3° do gwiazdy 41 Cap o podobnej jasności. Westa góruje około godziny 23, wznosząc się na niewiele ponad 15° . We wrześniu jej blask stopniowo spadnie od $+6^m$ do $+7^m$, i do jej dostrzeżenia potrzebna jest przynajmniej lornetka.

Planeta Mars przejdzie przez opozycję względem Słońca 8 grudnia, planeta Uran natomiast miesiąc wcześniej. We wrześniu Mars porusza się ruchem prostym na tle gwiazdozbioru Byka, zaczynając miesiąc 2° na północny zachód od gwiazdy ε Tau, stanowiącej północny koniec charakterystycznego kształtu litery V, który tworzą najjaśniejsze gwiazdy Hiad. Ostatniego dnia miesiąca Mars zbliży się na niecały stopień do gwiazdy 5. wielkości 109 Tauri. W tym czasie jego jasność urośnie od $-0,1^m$ do $-0,6^m$, a średnica tarczy zwiększy się od $10''$ do $12''$. Mars 7 września przejdzie nieco ponad 4° na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka.

Uran wciąż przebywa na tle gwiazdozbioru Barana, około 3° na południowy zachód od gwiazdy Botein (δ Ari). Planeta świeci blaskiem $+5,7^m$ i wraz z Marsem najlepiej obserwować ją w drugiej części nocy. Uran góruje około godziny 4, wznosząc się na wysokość 55° . W tym samym momencie Mars znajduje się na podobnej wysokości, a obie planety dzieli dystans około 25° .

Nad samym ranem do połowy miesiąca można obserwować planetę **Venus**, która zbliża się do koniunkcji górnej ze Słońcem 22 października. Planeta wędruje przez gwiazdozbiór Lwa i 5 dnia miesiąca zbliży się do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, na odległość $45'$. Warunki obserwacyjne Wenus są jednak trudne. Na początku miesiąca o świcie planeta zajmie pozycję na wysokości zaledwie 5° i każdego kolejnego poranka znajdzie się coraz niżej, aż pod koniec drugiej dekady września zginie w zorzy porannej. Wygląd tarczy Wenus praktycznie się nie zmienia. Planeta ma jasność $-3,9^m$, średnicę tarczy $10''$ i fazę około 98%.

Księżyc zacznie wrzesień w fazie 29% na tle gwiazdozbioru Wagi. O zmierzchu zajmie on pozycję na wysokości 6° , około 2° od gwiazdy Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy konstelacji. Ekliptyka o tej porze roku i doby jest położona bardzo nisko, a dodatkowo Księżyc kieruje się na południe od niej, a zatem w pierwszej części miesiąca może on być zasłaniany przez przeszkody terenowe.

Księżyc przejdzie przez I kwadrę 3 września, zbliżając się na niecałe 2° do Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Dwa dni później Księżyc zwiększy fazę do 72% i jednocześnie zbliży się do Nuniki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca, by 8 dnia miesiąca, prezentując fazę 96%, przeciąć linię łączącą Saturna z Westą.

W południe 10 września Księżyc znajdzie się po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce, zajmując pozycję 4° w kierunku południowym od Neptuna, który również nie przebiję się przez blask Księżyca. Dobę później tarcza Srebrnego Globu zmniejszy fazę do 97% i wszędzie 3° od Jowisza.

W nocy z 14 na 15 września dojdzie do zakrycia Urana przez Księżyc w fazie 78%. Zjawisko da się obserwować z całej Europy, północnej Afryki i północno-zachodniej części Azji. W Polsce Księżyc przesłoni Urana około godziny 23:30, by odsłonić go godzinę później.

Trzy kolejne noce Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Byka, zmniejszając stopniowo fazę od 68% do 50%. Na początku drugiej połowy miesiąca, 16 września, księżycowa tarcza zajmie pozycję między Plejadami a Hiadami, by dobę później minąć jasnego Marsa w odległości 3° .

Okres od ostatniej kwadry do nowiu to najciekawsza część widoczności Księżyca w tym miesiącu. Rano ekliptyka tworzy bardzo duży kąt z widnokregiem, Srebrny Glob świeci wysoko na niebie i jest widoczny prawie do samego nowiu, który przypada 25 września tuż przed północą naszego czasu. Sześć dni przed nowiem, 19 września, tarcza naturalnego satelity Ziemi zmniejszy fazę do 39% i przejdzie niecałe 2° na północ od Mebsuty w Bliźniętach. Dobę później faza Księżyca spadnie poniżej 30%, a pokaże się on 3° na prawo od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt.

Poranek 21 września Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Raka, przechodząc 5° na północ od słynnej gromady gwiazd M44. Tego dnia jego faza zmniejszy się do 21%. Dwa dni później Srebrny Glob dotrze na odległość $4,5^\circ$ do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Jednocześnie jeszcze bardziej zbliży się do gwiazdy 3. wielkości η Leonis. Tuż na południe od polskich granic przebiegnie północna granica zakrycia jej przez Księżyc, którego brzeg w południowej Polsce minie η Leo w odległości $1'$. W tym momencie tarcza Księżyca zaprezentuje się w fazie 7%.

Księżyc w fazie zaledwie 3% zdąży się wznieść na wysokość 9° 24 września o godzinie 5:30. Bardzo cienki sierp Księżyca można próbować dostrzec także 25 września. Około godziny 6:00, na 18 godzin przed nowiem, jego tarcza w fazie mniejszej od 1% pokaże się 3° nad widnokregiem. Przy dobrym stanie atmosfery powinno dać się ją dostrzec przez lornetkę.

Ariel MAJCHER